ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
Т. 63, № 7 ФИЗИКА 2020

УДК 539.12 DOI: 10.17223/00213411/63/7/21

В.В. ОБУХОВ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА – ЯКОБИ И МАКСВЕЛЛА В ДИАГОНАЛЬНЫХ МЕТРИКАХ ШТЕККЕЛЕВЫХ ПРОСТРАНСТВ *

Осуществлена классификация метрик и электромагнитных потенциалов для случая, когда уравнение Гамильтона – Якоби допускает полное разделение переменных в пространстве с полным набором, состоящим из одного векторного и двух тензорных полей Киллинга. Классификация дополнена решением вакуумных уравнений Максвелла.

Ключевые слова: *штеккелевы пространства, разделение переменных, тензорные поля Киллинга, уравнение Гамильтона – Якоби.*

I. При исследовании гравитационных и электромагнитных полей важную роль играет изучение движения пробных частиц. В случае нейтральных частиц траектории движения задаются уравнениями геодезических

$$\ddot{x}^k + \Gamma^k_{ij}\dot{x}^i x^j = 0\,. \qquad (1)$$

Здесь Γ^k_{ij} – символы Кристоффеля в n-мерном римановом многообразии V_n; точками обозначены производные по собственному времени; по повторяющимся верхним и нижним индексам ведется суммирование. Интегрирование уравнений геодезических не представляет большой проблемы, однако точные решения возможно получить только методом полного разделения переменных в уравнении Гамильтона – Якоби:

$$g^{ij}S_{,i}S_{,j} = \tilde{m} \overset{\text{def}}{=} \lambda_n \qquad \left(S_{,i} = \frac{\partial s}{\partial x^i}\right). \qquad (2)$$

Согласно известному определению, уравнение (2) допускает полное разделение переменных в координатах $\left\{x^i\right\}$, если его полный интеграл можно представить в виде

$$S = \sum_{i=1}^{n} s_i(x^i)\,. \qquad (3)$$

Координатная система, в которой это имеет место, будет обозначаться $\left\{u^i\right\}$ и называться привилегированной. Первый пример метрики пространства, в котором можно осуществить полное разделение переменных, привел П. Штеккель [1]. Найденная им метрика имела диагональный вид и допускала полный набор интегралов движения, квадратичных по импульсу. В дальнейшем метод Штеккеля был обобщен, но все пространства, в которых уравнения Гамильтона – Якоби (2) интегрируются методом полного разделения переменных, были названы в его честь штеккелевыми. Окончательная теория штеккелевых пространств была построена В.Н. Шаповаловым [2]. Им были определены необходимые и достаточные условия полного разделения переменных помимо прочих для следующих уравнений:

– Гамильтона – Якоби (в том числе для заряженной частицы, движущейся в электромагнитном поле с потенциалом A_i):

$$g^{lk}(S_{,l} + A_l)(S_{,k} + A_k) = \tilde{\lambda}_n\,; \qquad (4)$$

– Клейна – Гордона – Фока:

$$g^{lk}(i\nabla_l + A_l)(i\nabla_k + A_k)\psi = \tilde{\lambda}_n\psi \qquad (5)$$

(∇_i – ковариантная производная);

– Дирака – Фока – Иваненко:

* Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, проект FEWF-2020-0003.