# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ НАДЁЖНОСТИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ И УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ

УДК 519.718

## О НАДЁЖНОСТИ СХЕМ ВО ВСЕХ ПОЛНЫХ БАЗИСАХ ИЗ ТРЁХВХОДОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ НЕИСПРАВНОСТЯХ ТИПА 0 НА ВЫХОДАХ ЭЛЕМЕНТОВ

М. А. Алехина

*Пензенский государственный технологический университет, г. Пенза, Россия*

Рассматривается реализация булевых функций схемами из ненадёжных функциональных элементов в полном базисе, содержащем функции трёх переменных. Предполагается, что элементы схемы переходят в неисправные состояния независимо друг от друга, подвержены однотипным константным неисправностям типа 0 на выходах. Для каждого полного базиса найдено либо точное значение коэффициента ненадёжности, либо его верхняя оценка.

**Ключевые слова:** *ненадёжные функциональные элементы, надёжность и ненадёжность схемы, синтез схем из ненадёжных элементов.*

DOI 10.17223/20710410/49/7

## ABOUT THE RELIABILITY OF LOGIC CIRCUITS IN ALL COMPLETE BASES WITH THREE-INPUT ELEMENTS AND FAILURES OF ZERO TYPE ON THEIR OUTPUTS

M. A. Alekhina

*Penza State Technological University, Penza, Russia*

**E-mail:** alekhina@penzgtu.ru

We consider the implementation of Boolean functions by circuits from unreliable functional elements in a complete basis containing functions of three variables. We suppose that the elements of the circuit pass to faulty states independently of each other, and they subject to the single-type constant faults of 0 type at outputs. For each complete basis, either the exact value of the coefficient of unreliability is found, or the upper estimate for this coefficient is calculated.

**Keywords:** *unreliable functional elements, reliability and unreliability of circuit, synthesis of circuits composed of unreliable elements.*

### Введение

Работа относится к одному из важнейших разделов математической кибернетики — теории синтеза, надёжности и сложности управляющих систем. Актуальность исследований в этой области обусловлена важностью многочисленных приложений, возникающих в различных разделах науки и техники.

К числу основных модельных объектов математической теории синтеза, сложности и надёжности управляющих систем относятся схемы из ненадёжных функциональных элементов, реализующие булевы функции. Проблема построения оптимальных по критериям надёжности и сложности схем из ненадёжных элементов является одной из наиболее важных и в то же время трудных в теории синтеза управляющих систем. Разработка специальных методов синтеза схем из ненадёжных функциональных элементов связана, главным образом, с выбранной математической моделью неисправностей. К основным моделям неисправностей относятся, например, инверсные и константные неисправности на выходах элементов. В работе рассматривается задача построения асимптотически оптимальных по надёжности схем в предположении, что функциональные элементы подвержены неисправностям типа 0 на выходах.

Исторически сложилось так, что сначала исследовались инверсные неисправности функциональных элементов, реализующих булевы функции. Первые существенные математические результаты, касающиеся синтеза надёжных схем из ненадёжных элементов, получил Дж. фон Нейман [1]. Он предполагал, что элементы подвержены инверсным неисправностям на выходах, когда функциональный элемент $E$ с приписанной ему булевой функцией $e(\tilde{x})$, переходя в неисправное состояние с вероятностью $\varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1/6$, реализует функцию $\bar{e}(\tilde{x})$. С помощью итерационного метода Дж. фон Неймана произвольную булеву функцию можно реализовать схемой, вероятность ошибки на выходе которой при любом входном наборе значений переменных не превосходит $c \cdot \varepsilon$ ($c$ — некоторая положительная, зависящая лишь от базиса, константа), т. е. ненадёжность схемы сравнима с ненадёжностью одного элемента (такие схемы в теории надёжности управляющих систем принято называть надёжными). С ростом числа итераций сложность схемы при использовании метода Дж. фон Неймана увеличивается экспоненциально.

Любой метод синтеза схем из ненадёжных элементов характеризуется двумя важными параметрами: вероятностью ошибки на выходе схемы (ненадёжностью) и сложностью схемы. Именно минимизации сложности схем, реализующих булевы функции, уделено главное внимание в работах Р. Л. Добрушина, С. И. Ортюкова [2, 3], Д. Улига [4] и некоторых других авторов. Задача построения асимптотически оптимальных по надёжности схем из ненадёжных элементов, подверженных тем или иным неисправностям, ни Дж. фон Нейманом, ни другими исследователями до появления работ М. А. Алехиной не рассматривалась.

Н. Пиппенджер [5] в классическом базисе $\{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1\}$ построил надёжные схемы без существенного увеличения сложности в предположении, что все элементы схемы ненадёжны, подвержены инверсным неисправностям на выходах.

С. В. Яблонский [6] рассматривал задачу синтеза надёжных схем в базисе $\{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1, g(x_1, x_2, x_3)\}$. Он предполагал, что элемент, реализующий функцию голосования $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$, абсолютно надёжный, а конъюнктор, дизъюнктор и инвертор ненадёжные, подвержены произвольным неисправностям, ненадёжность каждого из них не больше $\varepsilon$. Доказано, что для любого $p$ существует алгоритм, который для каждой булевой функции строит асимптотически оптимальную по сложности схему, ненадёжность которой не больше $p$.

В. В. Тарасов [7] рассматривал задачу построения схем сколь угодно высокой надёжности (когда ненадёжность схемы стремится к 0). Для базисов из ненадёжных функциональных элементов с двумя входами и одним выходом он нашёл необходимые и достаточные условия, при которых любую булеву функцию можно реализовать схемой сколь угодно высокой надёжности.

Позднее в работах В. В. Чугуновой, А. В. Васина, Д. М. Клянчиной и некоторых других авторов решалась задача реализации булевых функций асимптотически оптимальными по надёжности схемами при различных неисправностях элементов.

Эта работа продолжает исследования, начатые в [8] для полного базиса $\{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2\}$, элементы которого независимо друг от друга с вероятностью $\varepsilon$ подвержены неисправностям типа 0 на выходах. Позднее задача синтеза асимптотически оптимальных по надёжности схем при неисправностях типа 0 была решена [9] во всех полных неприводимых базисах из двухвходовых функциональных элементов, кроме одного. В этой работе исследуются полные базисы, содержащие функции трёх переменных. Для каждого из них найдено либо точное значение коэффициента ненадёжности, либо его верхняя оценка.

Аналогичная задача при инверсных неисправностях на выходах элементов решена А. В. Васиным [10] во всех полных базисах, содержащих функции трёх переменных, причём им найдены не только оценки коэффициента ненадёжности базиса, но и их точные значения.

Ранее [11 – 16] при неисправностях типа 0 на выходах элементов найдены функции трёх переменных (обозначим их множество через $G$) или пары функций, наличие которых в базисе гарантирует реализацию в этом базисе почти любой булевой функции схемой с ненадёжностью, асимптотически равной $\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$ (такие базисы имеют коэффициент ненадёжности 1).

Здесь исследованы все остальные полные базисы, содержащие функции трёх переменных, при неисправностях типа 0 на выходах элементов. В каждом из этих базисов найдены верхние оценки ненадёжности схем.

## 1. Необходимые понятия, определения и ранее известные результаты

Рассмотрим реализацию булевых функций схемами из ненадёжных функциональных элементов в полном конечном базисе $B$. Схема реализует функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, если при поступлении на входы схемы набора $\tilde{a}^n = (a_1, \ldots, a_n)$ при отсутствии неисправностей на выходе схемы появляется значение $f(\tilde{a}^n)$. Предполагается, что все функциональные элементы независимо друг от друга с вероятностью $\varepsilon$, $\varepsilon \in (0, 1/2)$, переходят в неисправные состояния типа 0 на выходах элементов. Эти неисправности характеризуются тем, что в исправном состоянии функциональный элемент реализует приписанную ему функцию, а в неисправном — константу 0.

Пусть $P_{\bar{f}(\tilde{a}^n)}(S, \tilde{a}^n)$ — вероятность появления значения $\bar{f}(\tilde{a}^n)$ на выходе схемы $S$, реализующей функцию $f(\tilde{x}^n)$ при входном наборе $\tilde{a}^n$. Ненадёжность схемы $S$ равна $P(S) = \max\{P_{\bar{f}(\tilde{a}^n)}(S, \tilde{a}^n)\}$, где максимум берётся по всем наборам $\tilde{a}^n$. Надёжность схемы $S$ равна $1 - P(S)$.

Пусть $P_\varepsilon(f) = \inf P(S)$, где инфимум берется по всем схемам $S$ из ненадёжных элементов, реализующим функцию $f(\tilde{x}^n)$ в базисе $B$. Схему $A$ из ненадёжных элементов, реализующую $f$, назовём *асимптотически оптимальной* (*асимптотически наилучшей*) *по надёжности*, если $P(A) \sim P_\varepsilon(f)$ при $\varepsilon \to 0$, т. е. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{P_\varepsilon(f)}{P(A)} = 1$.

**Замечание 1.** При неисправностях типа 0 на выходах элементов любая схема, содержащая хотя бы один функциональный элемент и реализующая отличную от константы 0 функцию, имеет ненадёжность не меньше $\varepsilon$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/2)$ [9].

Полный конечный базис $B$ будем называть *базисом с коэффициентом ненадёжности $k$* ($k \in \mathbf{N}$), если в этом базисе любую функцию можно реализовать схемой, функционирующей с ненадёжностью асимптотически не больше $k\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$ и найдется функция, которую нельзя реализовать схемой, функционирующей с ненадёжностью асимптотически меньшей $k\varepsilon$.

Для неисправностей типа 0 на выходах элементов доказана следующая

**Теорема 1** [17]. В произвольном полном конечном базисе $B$ любую булеву функцию можно реализовать такой схемой $S$, что $P(S) \leqslant 3\varepsilon + 27\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

Из теоремы 1 следует, что при неисправностях типа 0 на выходах элементов любой полный конечный базис $B$ имеет коэффииент ненадёжности $k_B \in \{1, 2, 3\}$.

Пусть $P_2(n)$ — множество всех булевых функций, зависящих от $n$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда $P_2(3)$ — множество всех булевых функций, зависящих от переменных $x_1, x_2, x_3$.

Булевы функции $f_1$ и $f_2$ назовём *конгруэнтными*, если одна из них может быть получена из другой заменой переменных (без отождествления). Пусть $X \subseteq P_2(3)$. Введём обозначение $\mathrm{Congr}\, X$ — множество всех функций, зависящих от переменных $x_1$, $x_2$, $x_3$, каждая из которых конгруэнтна некоторой функции множества $X$. Например, $\mathrm{Congr}\{1, x_1, x_1\&x_2\} = \{1, x_1, x_2, x_3, x_1\&x_2, x_2\&x_3, x_1\&x_3\}$. Обозначим:

$G_1 = \mathrm{Congr}\{x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2} \vee x_1^{\sigma_1}x_3^{\sigma_3} \vee x_2^{\sigma_2}x_3^{\sigma_3} : \sigma_i \in \{0,1\}, i \in \{1,2,3\}\}$, $|G_1| = 8$;
$G_2 = \mathrm{Congr}\{x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2} \oplus x_3^{\sigma_3} : \sigma_i \in \{0,1\}, i \in \{1,2,3\}\}$, $|G_2| = 24$;
$G_3 = \mathrm{Congr}\{x_1^{\sigma_1}x_2^{\bar\sigma_2} \vee x_2^{\sigma_2}x_3^{\sigma_3} : \sigma_i \in \{0,1\}, i \in \{1,2,3\}\}$, $|G_3| = 24$;
$G_4 = \mathrm{Congr}\{\bar x_1\bar x_2, \bar x_1\bar x_2\bar x_3\}$, $|G_4| = 4$;
$G_5 = \mathrm{Congr}\{x_1 \oplus x_2 \oplus a, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus b : a, b \in \{0,1\}\}$, $|G_5| = 8$;
$G_6 = \mathrm{Congr}\{\bar x_1(x_2 \oplus x_3 \oplus a) : a \in \{0,1\}\}$, $|G_6| = 6$;
$G_7 = \bigcup\limits_{i=1}^{6} G_i$, $|G_7| = 74$;
$G_8 = \mathrm{Congr}\{x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2} \vee x_1^{\bar\sigma_1}x_2^{\bar\sigma_2}x_3^{\bar\sigma_3} : \sigma_i \in \{0,1\}, i \in \{1,2,3\}\}$, $|G_8| = 24$;
$G_9 = \mathrm{Congr}\{x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}x_3^{\sigma_3} \vee x_1^{\sigma_1}x_2^{\bar\sigma_2}x_3^{\bar\sigma_3} \vee x_1^{\bar\sigma_1}x_2^{\sigma_2}x_3^{\bar\sigma_3} : \sigma_i \in \{0,1\}, i \in \{1,2,3\}\}$, $|G_9| = 8$;
$G_{10} = \mathrm{Congr}\{\bar x_1(x_2^{\sigma_2} \vee x_3^{\sigma_3}) : \sigma_i \in \{0,1\}, i \in \{2,3\}\}$, $|G_{10}| = 12$;
$G_{11} = \mathrm{Congr}\{x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}x_3^{\sigma_3} \vee x_1^{\bar\sigma_1}x_2^{\bar\sigma_2}x_3^{\bar\sigma_3} : \sigma_i \in \{0,1\}, i \in \{1,2,3\}\}$, $|G_{11}| = 4$;
$G_i^*$ — множество всех функций, двойственных функциям множества $G_i$ соответственно, $i \in \{8, 9, 10, 11\}$; $|G_i^*| = |G_i|$;
$G_{12} = \bigcup\limits_{i=8}^{11} (G_i \cup G_i^*)$, $|G_{12}| = 96$;
$G = G_7 \cup G_{12}$, $|G| = 170$.

Ранее для неисправностей типа 0 на выходах элементов в работах [11 – 15] получены результаты, которые можно сформулировать в виде теоремы 2.

**Теорема 2** [11 – 15]. Пусть полный конечный базис $B$ содержит функцию из множества $G$. Тогда любую булеву функцию в этом базисе можно реализовать такой схемой $S$, что $P(S) \leqslant \varepsilon + 100\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

В теореме 2, учитывая замечание 1, найдены базисы с коэффициентом ненадёжности 1.

Число функций в множестве $G$ равно 170 и составляет примерно 0,664 от числа всех функций из $P_2(3)$. Введём множества, содержащие остальные 86 функций из $P_2(3)$:

$\Theta = \mathrm{Congr}\{x_1x_2^{\sigma_2},\ x_1x_2^{\sigma_2}x_3^{\sigma_3},\ x_1(x_2 \oplus x_3)^{\sigma_1},\ x_1(x_2^{\sigma_2} \vee x_3^{\sigma_3}) : \sigma_i \in \{0,1\}, i \in \{1,2,3\}\}$, $|\Theta| = 34$;
$\Theta_1^* = \Theta^* \cup \mathrm{Congr}\{\bar x_1 \vee (x_2 \sim x_3)\}$, где $\Theta^*$ — множество функций, каждая из которых двойственна некоторой функции множества $\Theta$, $|\Theta_1^*| = 37$;
$\Omega = \mathrm{Congr}\{\bar x_1 \vee (x_2 \oplus x_3),\ \bar x_1 \vee \bar x_2,\ \bar x_1 \vee \bar x_2 \vee \bar x_3\}$, $|\Omega| = 7$;
$\Lambda = \mathrm{Congr}\{0, 1, x_1, \bar x_1\}$, $|\Lambda| = 8$.

Таким образом, множества $G, \Theta, \Theta_1^*, \Omega, \Lambda$ содержат все 256 булевых функций от переменных $x_1, x_2, x_3$, т. е. $G \cup \Theta \cup \Theta_1^* \cup \Omega \cup \Lambda = P_2(3)$.

**Теорема 3** [16]. Пусть полный базис $B$ таков, что $B \cap \Theta \neq \varnothing$ и $B \cap \Theta_1^* \neq \varnothing$. Тогда любую булеву функцию в этом базисе можно реализовать схемой, ненадёжность которой не больше $\varepsilon + 24\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

В теореме 3, учитывая замечание 1, также найдены базисы с коэффициентом ненадёжности 1, но в отличие от теоремы 2 здесь требуется, чтобы базис содержал сразу две функции определённого вида.

**Замечание 2.** Множество $\Theta$ сохраняет константу 0; множество $\Theta_1^*$ сохраняет константу 1.

Далее будем исследовать полные базисы $B \subseteq P_2(3) \setminus G$, для которых условия теоремы 3 не выполнены. Для доказательства новых результатов приведём следующую лемму:

**Лемма 1** [10]. Пусть $\psi \in \Theta_1^*$. Тогда подстановкой переменных из $\psi$ можно получить функцию вида $x_1 \vee x_2^b$, $b \in \{0, 1\}$.

## 2. Основные результаты

**Теорема 4.** Пусть полный базис $B$ таков, что $B \cap \Omega \neq \varnothing$. Тогда любую булеву функцию в этом базисе можно реализовать схемой, ненадёжность которой не больше $2\varepsilon + 24\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/70]$.

***Доказательство.*** Покажем, что из каждой функции множества $\Omega$ подстановкой переменных можно получить функцию $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$:

1) Пусть $\phi(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \vee (x_2 \oplus x_3)$. Тогда $\phi(x_1, x_2, x_1) = \bar{x}_1 \vee (x_2 \oplus x_1) = \bar{x}_1 \vee \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 = \bar{x}_1 \vee x_1 \bar{x}_2 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$.
2) Пусть $\phi(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3$. Тогда $\phi(x_1, x_2, x_1) = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$.

С учётом результатов [9] теорема доказана. ■

**Теорема 5.** Пусть $B$ — полный базис, $B \subseteq (\Theta_1^* \cup \Lambda)$. Тогда любую булеву функцию в этом базисе можно реализовать схемой, ненадёжность которой не больше $2\varepsilon + 42\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/140]$.

***Доказательство.*** Пусть базис $B$ содержит некоторую функцию $\psi$ из множества $\Theta_1^*$. По лемме 1 из функции $\psi$ подстановкой переменных можно получить функцию вида $x_1 \vee x_2^b$, $b \in \{0, 1\}$.

Поскольку множество $\Theta_1^*$ сохраняет константу 1 (замечание 2), а по условию базис $B$ полный, то $B$ содержит функцию из $\Lambda$, которая не сохраняет константу 1. Таких функций две: $\bar{x}_1$ и константа 0. Возможны два варианта для параметра $b$:

1) $b = 0$, имеем функцию $x_1 \vee \bar{x}_2$, которая сохраняет константу 1. Кроме того, базис $B$ содержит хотя бы одну из функций: константу 0 или $\bar{x}_1$. В каждом из этих случаев теорема верна [9];
2) $b = 1$, имеем функцию $x_1 \vee x_2$. Кроме того, $B$ содержит $\bar{x}_1$ или 0. В первом случае (когда имеем $\bar{x}_1$), ссылаясь на [9], считаем теорему доказанной.
   Рассмотрим второй случай, т. е. из $\psi$ подстановкой переменных получили $x_1 \vee x_2$ и есть константа 0. Обе эти функции сохраняют константу 0, поэтому полный базис $B$ содержит не сохраняющую константу 0 функцию $\varphi \in \Theta_1^*$ (очевидно, что $\varphi$ и $\psi$ различны). Множество таких функций $\varphi$ с точностью до конгруэнтности — это $A = \{x_1 \vee \bar{x}_2,\ x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3,\ x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3,\ x_1 \vee (x_2 \sim x_3),\ x_1 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3,\ \bar{x}_1 \vee (x_2 \sim x_3)\} \subset \Theta_1^*$. Нетрудно проверить, что из каждой функции множества $A$

подстановкой переменных можно получить функцию $x_1 \vee \bar{x}_2$, а этот случай рассмотрен в п. 1 доказательства.

Теорема доказана. ■

Введём два множества $\Theta_2$ и $\Theta_3$, которые являются подмножествами множества $\Theta$:

$\Theta_2 = \mathrm{Congr}\{x_1\bar{x}_2\bar{x}_3,\ x_1(x_2 \oplus x_3)^{\sigma_1} : \sigma_1 \in \{0,1\}\}$;

$\Theta_3 = \mathrm{Congr}\{x_1\bar{x}_2,\ x_1x_2\bar{x}_3,\ x_1(x_2 \vee \bar{x}_3),\ x_1(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)\}$.

**Теорема 6.** Пусть $B$ — полный базис, $B \subseteq (\Theta_2 \cup \Lambda)$. Тогда любую булеву функцию в этом базисе можно реализовать схемой, ненадёжность которой не больше $2\varepsilon + 400\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/1920]$.

***Доказательство.*** Поскольку базис $B$ полный, он содержит некоторую функцию $\psi$ из множества $\Theta_2$. Так как множество $\Theta_2$ сохраняет константу 0 (замечание 2), то базис $B$ содержит хотя бы одну функцию, которая не сохраняет константу 0. Таких функций в множестве $\Lambda$ две: $\bar{x}_1$ и константа 1. Следовательно, имеем четыре случая:

1) Базис $B$ содержит функции $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ и $\bar{x}_1$. Отождествим переменные $x_2$ и $x_3$ и получим функцию $x_1\bar{x}_2$. В базисе $\{x_1\bar{x}_2, \bar{x}_1\}$ при $\varepsilon \in (0, 1/160]$ теорема верна [9].
2) Базис $B$ содержит функции $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ и 1. Подставим константу 1 вместо переменной $x_1$ и получим функцию $\bar{x}_2\bar{x}_3$. Поскольку для ее реализации в рассматриваемом базисе требуется два элемента, в оценке $\varepsilon + 3\varepsilon^2$ ($\varepsilon \leqslant 1/160$), доказанной в [9], следует заменить $\varepsilon$ на $2\varepsilon$. В результате получим оценку $2\varepsilon + 12\varepsilon^2$ при $\varepsilon \leqslant 1/320$, теорема верна.
3) Базис $B$ содержит функции $x_1(x_2 \oplus x_3)^{\sigma_1}$ и $\bar{x}_1$. Подставим $\bar{x}_1$ вместо переменной $x_1$ и получим функцию $\bar{x}_1(x_2 \oplus x_3)^{\sigma_1} \in G_6$. Поскольку для её реализации в рассматриваемом базисе требуется два элемента, в оценке $\varepsilon + 100\varepsilon^2$ ($\varepsilon \leqslant 1/960$) из теоремы 2 следует заменить $\varepsilon$ на $2\varepsilon$. В результате получим оценку $2\varepsilon + 400\varepsilon^2$ при $\varepsilon \leqslant 1/1920$, теорема верна.
4) Базис $B$ содержит функции $x_1(x_2 \oplus x_3)^{\sigma_1}$ и 1. Подставим 1 вместо переменной $x_1$ и получим функцию $(x_2 \oplus x_3)^{\sigma_1} \in G_5$. Поскольку для её реализации в рассматриваемом базисе требуется два элемента, в оценке $\varepsilon + 100\varepsilon^2$ ($\varepsilon \leqslant 1/960$) из теоремы 2 следует заменить $\varepsilon$ на $2\varepsilon$. В результате получим оценку $2\varepsilon + 400\varepsilon^2$ при $\varepsilon \leqslant 1/1920$, теорема верна.

Теорема доказана. ■

**Теорема 7.** Пусть полный базис $B$ содержит функцию $\bar{x}_1$ и $B \cap \Theta_3 \neq \varnothing$. Тогда любую булеву функцию в этом базисе можно реализовать схемой, ненадёжность которой не больше $2\varepsilon + 12\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/360]$.

***Доказательство.*** Поскольку $B \cap \Theta_3 \neq \varnothing$, имеем четыре случая:

1) Базис $B$ содержит функции $x_1\bar{x}_2$ и $\bar{x}_1$. В базисе $\{x_1\bar{x}_2, \bar{x}_1\}$ при $\varepsilon \in (0, 1/360]$ теорема верна [9].
2) Базис $B$ содержит функции $x_1x_2\bar{x}_3$ и $\bar{x}_1$. Отождествим переменные $x_1$ и $x_2$ и получим функцию $x_1\bar{x}_3$. В базисе $\{x_1\bar{x}_2, \bar{x}_1\}$ при $\varepsilon \in (0, 1/360]$ теорема верна [9].
3) Базис $B$ содержит функции $x_1(x_2 \vee \bar{x}_3)$ и $\bar{x}_1$. Подставим $\bar{x}_1$ вместо переменной $x_1$, затем отождествим переменные $x_1$ и $x_2$ и получим функцию $\bar{x}_1\bar{x}_3$. Поскольку для её реализации в рассматриваемом базисе требуется два элемента, в оценке $\varepsilon + 3\varepsilon^2$ ($\varepsilon \leqslant 1/160$), доказанной в [9], следует заменить $\varepsilon$ на $2\varepsilon$. В результате получим оценку $2\varepsilon + 12\varepsilon^2$ при $\varepsilon \leqslant 1/320$, теорема верна.
4) Базис $B$ содержит функции $x_1(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$ и $\bar{x}_1$. Подставим $\bar{x}_1$ вместо переменной $x_1$, затем отождествим переменные $x_2$ и $x_3$ и получим функцию $\bar{x}_1\bar{x}_3$. Поскольку

для её реализации в рассматриваемом базисе требуется два элемента, в оценке $\varepsilon + 3\varepsilon^2$ ($\varepsilon \leqslant 1/160$), доказанной в [9], следует заменить $\varepsilon$ на $2\varepsilon$. В результате получим оценку $2\varepsilon + 12\varepsilon^2$ при $\varepsilon \leqslant 1/320$, теорема верна.

Теорема доказана. ■

**Замечание 3.** Перечислим (с точностью до конгруэнтных функций) полные неприводимые базисы $B \subseteq ((\Theta \backslash \Theta_2) \cup \Lambda)$, не упомянутые в теореме 7: 1) $\{x_1x_2, \bar{x}_1\}$; 2) $\{x_1\bar{x}_2, 1\}$; 3) $\{x_1x_2x_3, \bar{x}_1\}$; 4) $\{x_1x_2\bar{x}_3, 1\}$; 5) $\{x_1(x_2 \vee x_3), \bar{x}_1\}$; 6) $\{x_1(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3), 1\}$.

**Замечание 4.** Для полных базисов $B \subseteq ((\Theta \backslash \Theta_2) \cup \Lambda)$, не упомянутых в теореме 7 (в том числе и неприводимых из замечания 3), выполняется теорема 1, а значит, коэффициент ненадёжности каждого из них не больше 3.

## 3. Выводы и рекомендации

В теоремах 4–7 исследованы полные базисы $B \subseteq P_2(3) \backslash G$, для которых условия теоремы 3 не выполняются. Доказано, что если базис $B$ удовлетворяет хотя бы одному из условий:

1) $B \cap \Omega \neq \varnothing$;
2) $B \subseteq (\Theta_1^* \cup \Lambda)$;
3) $B \subseteq (\Theta_2 \cup \Lambda)$;
4) полный базис $B$ содержит функцию $\bar{x}_1$ и $B \cap \Theta_3 \neq \varnothing$,

то любую булеву функцию можно реализовать схемой, функционирующей с ненадёжностью, асимптотически не больше $2\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$. Следовательно, коэффициент ненадёжности каждого из этих базисов не больше 2.

Учитывая результаты всех теорем 1–7, можно предложить следующий алгоритм получения оценки коэффициента ненадёжности $k_B$ полного базиса $B \subseteq P_2(3)$:

1. Найти $B \cap G$; если $B \cap G \neq \varnothing$, то $k_B = 1$, в противном случае перейти к шагу 2.
2. Найти $B \cap \Theta$ и $B \cap \Theta_1^*$. Если оба множества непустые, то $k_B = 1$, в противном случае перейти к шагу 3.
3. Проверить, верно ли хотя бы одно из условий:
   а) $B \cap \Omega \neq \varnothing$;
   б) $B \subseteq (\Theta_1^* \cup \Lambda)$;
   в) $B \subseteq (\Theta_2 \cup \Lambda)$;
   г) $B$ содержит функцию $\bar{x}_1$ и $B \cap \Theta_3 \neq \varnothing$.

   Если «да», то $k_B \leqslant 2$. Если «нет», то $k_B \leqslant 3$.

Таким образом, для произвольного полного базиса, содержащего функции трёх переменных, найдена верхняя оценка коэффициента ненадёжности.

Полученные в работе результаты справедливы в двойственных базисах при неисправностях типа 1 на выходах базисных элементов [18].

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Фон Нейман Дж.* Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонент // Автоматы. М.: ИЛ, 1956. С. 68–139.
2. *Добрушин Р. Л., Ортюков С. И.* Верхняя оценка для избыточности самокорректирующихся схем из ненадежных функциональных элементов // Проблемы передачи информации. 1977. Т. 13. № 3. С. 56–76.
3. *Ортюков С. И.* Об избыточности реализации булевых функций схемами из ненадежных элементов // Труды семинара по дискретной математике и её приложениям (Москва, 27–29 января 1987 г.). М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. С. 166–168.

4. *Uhlig D.* Reliable networks from unreliable gates with almost minimal complexity // LNCS. 1987. V. 278. P. 462–469.
5. *Pippenger N.* On networks of noisy gates // 26th Ann. Symp. Foundations of Computer Science. Portland, 21–23 Oct. 1985. P. 30–38.
6. *Яблонский С. В.* Асимптотически наилучший метод синтеза надежных схем из ненадежных элементов // Banach Center Publ. 1982. V. 7. No. 1. P. 11–19.
7. *Тарасов В. В.* К синтезу надежных схем из ненадежных элементов // Матем. заметки. 1976. Т. 20. № 3. С. 391–400.
8. *Алехина М. А.* О синтезе надежных схем из функциональных элементов $x/y$ при однотипных константных неисправностях на выходах элементов // Вест. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1991. № 5. С. 80–83.
9. *Алехина М. А.* Синтез, надежность и сложность схем из ненадежных функциональных элементов: дис. ... докт. физ.-мат. наук. М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 2004.
10. *Васин А. В.* Асимптотически оптимальные по надежности схемы в полных базисах из трехвходовых элементов: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2010.
11. *Алехина М. А., Гусынина Ю. С., Шорникова Т. А.* О надежности схем при неисправностях типа 0 на выходах элементов в полном конечном базисе, содержащем особенную функцию // Изв. вузов. Математика. 2019. № 6. С. 85–88.
12. *Алехина М. А., Клянчина Д. М.* Об асимптотически оптимальных по надежности схемах в базисах, содержащих существенную линейную функцию и функцию вида $x_1^a \& x_2^b$ // Материалы XVI Междунар. конф. «Проблемы теоретической кибернетики» (Нижний Новгород, 20–25 июня 2011 г.). Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 2011. С. 33–37.
13. *Алехина М. А.* О надежности схем в полном конечном базисе, содержащем линейную функцию двух переменных и обобщенную дизъюнкцию // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2019. № 1. С. 56–62.
14. *Alekhina M. A., Barsukova O. Yu., and Shornikova T. A.* On the reliability of circuits with type 0 faults at the outputs of the elements in the complete finite basis containing an essential linear function // Lobachevskii J. Mathematics. 2019. V. 40. No. 12. P. 2027–2033.
15. *Алехина М. А., Грабовская С. М., Гусынина Ю. С.* Достаточные условия реализации булевых функций асимптотически оптимальными по надежности схемами с тривиальной оценкой ненадежности при неисправностях типа 0 на выходах элементов // Прикладная дискретная математика. 2019. № 45. С. 44–54.
16. *Алехина М. А., Шорникова Т. А.* О надежности схем при неисправностях типа 0 на выходах элементов в полном конечном базисе, содержащем некоторые пары функций // Изв. вузов. Математика (в печати).
17. *Алехина М. А.* О надежности схем в произвольном полном конечном базисе при однотипных константных неисправностях на выходах элементов // Дискретная математика. 2012. Т. 24. Вып. 3. С. 17–24.
18. *Алехина М. А., Пичугина П. Г.* О надежности двойственных схем в полном конечном базисе // Материалы XVIII Междунар. школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем», Пенза, 28 сентября–3 октября 2009 г. М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 2009. С. 10–13.


## REFERENCES


1. *Von Neuman J.* Probabilistic logics and the synthesis of reliable organisms from unreliable components. Automata Studies / eds. C. Shannon and J. McCarthy. Princeton University Press, 1956, pp. 43–98.

2. *Dobrushin R. L. and Ortyukov S. I.* Upper bound on the redundancy of self-correcting arrangements of unreliable functional elements. Problems Inform. Transmission, 1977, vol. 13, iss. 3, pp. 203–218.
3. *Ortyukov S. I.* Ob izbytochnosti realizatsii bulevykh funktsiy skhemami iz nenadezhnykh elementov [On the redundancy of the Boolean functions implementation by circuits from unreliable elements]. Proc. Seminar Discr. Math. and its Appl. (Moscow, 27–29 Jan. 1987). Moscow, MSU Publ., 1989, pp. 166–168. (in Russian)
4. *Uhlig D.* Reliable networks from unreliable gates with almost minimal complexity. LNCS, 1987, vol. 278, pp. 462–469.
5. *Pippenger N.* On networks of noisy gates. 26th Ann. Symp. Foundations of Computer Science, Portland, 21–23 Oct. 1985, pp. 30–38.
6. *Yablonskiy C. V.* Asimptoticheski nailuchshiy metod sinteza nadezhnykh skhem iz nenadezhnykh elementov [Asymptotically best method for synthesizing reliable circuits from unreliable elements]. Banach Center Publ., 1982, vol. 7, no. 1, pp. 11–19. (in Russian)
7. *Tarasov V. V.* The synthesis of reliable circuits from unreliable elements. Math. Notes, 1976, vol. 20, iss. 3, pp. 775–780.
8. *Alekhina M. A.* O sinteze nadezhnykh skhem iz funktsional'nykh elementov $x/y$ pri odnotipnykh konstantnykh neispravnostyakh na vykhodakh elementov [On the synthesis of reliable circuits of $x/y$ functional elements at the same type constant faults at the element outputs]. Vestnic Moskovskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika, 1991, no. 5, pp. 80–83. (in Russian)
9. *Alekhina M. A.* Sintez, nadegnost' i slognost' skhem iz nenadegnykh funktsional'nikh elementov [Synthesis, Reliability and Complexity of Circuits With Unreliable Functional Gates]. Doctoral dissertation in Mathematics and Physics, Penza, Penz. State Univ., 2004. 169 p. (in Russian)
10. *Vasin A. V.* Asimptoticheski optimal'nyye po nadezhnosti skhemy v polnykh bazisakh iz trekhvkhodovykh elementov [Asymptotically optimal on reliability circuits in complete bases of three-input elements]. PhD Thesis, Penza, Penz. State Univ., 2010. 100 p. (in Russian)
11. *Alekhina M. A., Gusynina Yu. S., and Shornikova T. A.* About reliability of circuits with faults of type 0 at the outputs of elements in a full finite basis containing a special function. Russian Mathematics, 2019, vol. 63, no. 6, pp. 79–81. (in Russian)
12. *Alekhina M. A. and Klyanchina D. M.* Ob asimptoticheski optimal'nykh po nadezhnosti skhemakh v bazisakh, soderzhashchikh sushchestvennuyu lineynuyu funktsiyu i funktsiyu vida $x_1^a \& x_2^b$ [On asymptotically optimal on reliability circuits in bases containing an essential linear function and a function of the form $x_1^a \& x_2^b$]. XVI Int. Conf. “Problems of theoretical cybernetics” (Nizhny Novgorod, 20–25 June 2011), Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod State Univ., 2011, pp. 33–37. (in Russian)
13. *Alekhina M. A.* O nadezhnosti skhem v polnom konechnom bazise, soderzhashchem lineynuyu funktsiyu dvukh peremennykh i obobshchennuyu diz”yunktsiyu [On the reliability of circuits in a complete finite basis containing a linear function of two variables and a generalized disjunction]. Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Povolzhskiy Region. Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2019, no. 1 (49), pp. 56–62. (in Russian)
14. *Alekhina M. A., Barsukova O. Yu., and Shornikova T. A.* On the reliability of circuits with type 0 faults at the outputs of the elements in the complete finite basis containing an essential linear function. Lobachevskii J. Mathematics, 2019, vol. 40, no. 12, pp. 2027–2033.
15. *Alekhina M. A., Grabovskaya S. M., and Gusynina Yu. S.* Dostatochnye usloviya realizatsii bulevykh funktsiy asimptoticheski optimalnymi po nadegnosti skhemami s trivial'noy otsenkoy nenadegnosti pri neispravnostyakh tipa 0 na vykhodakh elementov [Sufficient conditions for implementation of Boolean functions by asymptotically optimal on reliability

circuits with the trivial estimate of unreliability in the case of faults of type 0 at the element outputs]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2019, no. 45, pp. 44–54. (in Russian)
16. *Alekhina M. A. and Shornikova T. A.* O nadezhnosti skhem pri neispravnostyakh tipa 0 na vykhodakh elementov v polnom konechnom bazise, sodergashchem nekotoreye pary funktsiy [On the reliability of circuits with type 0 faults at the outputs of elements in a complete finite basis containing some pairs of functions]. Russian Mathematics. To be published. (in Russian)
17. *Alekhina M. A.* On reliability of circuits over an arbitrary complete finite basis under single-type constant faults at outputs of elements. Discr. Math. Appl., 2012, no. 22(4), pp. 383–391.
18. *Alekhina M. A. and Pichugina P. G.* O nadezhnosti dvoystvennykh skhem v polnom konechnom bazise [On the reliability of dual circuts in the complete finite basis]. XVIII Int. School-Seminar “Synthesis and complexity of control systems” (Penza, 28 Sept.–3 Oct. 2009), Moscow, Faculty of Mechanics and Mathematics of Moscow State University, 2009, pp. 10–13. (in Russian)