МАТЕМАТИКА

УДК 514.76 MSC 2020: 53C25, 53D15
DOI 10.17223/19988621/66/1

Абу Салеем Ахмад, А.Р. Рустанов, С.В. Харитонова

АКСИОМА Ф-ГОЛОМОРФНЫХ (2*r*+1)-ПЛОСКОСТЕЙ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ МНОГООБРАЗИЙ КЕНМОЦУ

Изучаются обобщенные многообразия Кенмоцу, удовлетворяющие аксиоме Ф-голоморфных ($2r$+1)-плоскостей, получена полная классификация таких многообразий. Приведено аналитическое выражение тензора Ф-голоморфной секционной кривизны обобщенных многообразий Кенмоцу точечно постоянной Ф-голоморфной секционной кривизны. Выделены два класса обобщенных многообразий Кенмоцу, дана их локальная характеризация.

Ключевые слова: *почти контактная метрическая структура*, *структура Кенмоцу*, *обобщенное многообразие Кенмоцу*, *специальное обобщенное многообразие Кенмоцу*, *аксиома Ф-голоморфных плоскостей*, *Ф-голоморфное многообразие*, *Ф-параконтактное многообразие.*

Почти контактные метрические многообразия на протяжении длительного периода являются предметом активного исследования во всем мире. Особый интерес представляет изучение почти контактных метрических многообразий, удовлетворяющих аксиоме Ф-голоморфных ($2r + 1$)-плоскостей [1–9], а также исследование почти контактных метрических многообразий точечно постоянной Ф-голоморфной секционной кривизны. Например, доказано, что выполнение аксиомы Ф-голоморфных ($2r + 1$)-плоскостей для сасакиевых и косимплектических многообразий равносильно точечному постоянству их Ф-голоморфной секционной кривизны [1, 2].

Интересным классом почти контактных метрических многообразий, изучению геометрии которого посвящено большое число исследований, является класс многообразий Кенмоцу. Полученные результаты свидетельствуют о ключевой роли этих многообразий в геометрии почти контактных метрических многообразий. Значительно меньше информации имеется о многообразиях, являющихся обобщениями многообразий Кенмоцу.

В данной работе исследуются обобщенные многообразия Кенмоцу, удовлетворяющие аксиоме Ф-голоморфных ($2r$+1)-плоскостей. Также выделены для изучения два класса обобщенных многообразий Кенмоцу, мы называем их Ф-голоморфными и Ф-параконтактными обобщенными многообразиями Кенмоцу.

Основной целью работы является доказательство следующих теорем.

Теорема 1.4. Ф-голоморфные обобщенные многообразия Кенмоцу совпадают с классом почти контактных метрических многообразий, получаемых из точнейше косимплектических многообразий каноническим конциркулярным преобразованием точнейше косимплектической структуры.

Теорема 1.6. Ф-параконтактное обобщенное многообразие Кенмоцу является специальным обобщенным многообразием Кенмоцу II рода.

Теорема 2.5. Односвязное обобщенное многообразие Кенмоцу удовлетворяет аксиоме Ф-голоморфных $(2r+1)$-плоскостей тогда и только тогда, когда оно канонически конциркулярно одному из следующих многообразий: 1) $\mathbf{CP}^n\times\mathbf{R}$; 2) $\mathbf{C}^n\times\mathbf{R}$; 3) $\mathbf{CH}^n\times\mathbf{R}$, снабженных канонической косимплектической структурой.

Работа организована следующим образом. В первом пункте даются необходимые сведения о геометрии почти контактных метрических многообразий, определяются обобщенные многообразия Кенмоцу, для последних приводится полная группа структурных уравнений. Для более подробных сведений мы отсылаем читателя к работам [10–15]. Далее получено аналитическое выражение тензора Ф-голоморфной секционной кривизны обобщенных многообразий Кенмоцу точечно постоянной Ф-голоморфной секционной кривизны. Затем определяются подклассы Ф-голоморфных и Ф-параконтактных обобщенных многообразий Кенмоцу и исследуется их локальное строение. Во втором пункте изучается аксиома Ф-голоморфных $(2r+1)$-плоскостей для обобщенных многообразий Кенмоцу и рассматривается полная классификация односвязных обобщенных многообразий Кенмоцу, удовлетворяющих аксиоме Ф-голоморфных $(2r+1)$-плоскостей.

1. Ф-голоморфные и Ф-параконтактные обобщенные многообразия Кенмоцу

Пусть M – гладкое многообразие, размерности $(2n+1)$, $\mathfrak{X}(M)$ – C^∞-модуль гладких векторных полей на многообразии M. В дальнейшем все многообразия, тензорные поля и т.п. объекты предполагаются гладкими класса C^∞.

Определение 1.1 [6]. ***Почти контактной структурой*** на многообразии M называется тройка (η, ξ, Φ) тензорных полей на этом многообразии, где η – дифференциальная 1-форма, называемая ***контактной формой структуры***, ξ – векторное поле, называемое ***характеристическим***, Φ – эндоморфизм модуля $\mathfrak{X}(M)$, называемый ***структурным эндоморфизмом***. При этом

$$1)\ \eta(\xi) = 1;\quad 2)\ \eta\circ\Phi = 0;\quad 3)\ \Phi(\xi) = 0;\quad 4)\ \Phi^2 = -\mathrm{id}+\eta\otimes\xi. \tag{1.1}$$

Если, кроме того, на M фиксирована риманова структура $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$, такая, что

$$\langle \Phi X, \Phi Y\rangle = \langle X, Y\rangle - \eta(X)\eta(Y),\ X, Y \in \mathfrak{X}(M), \tag{1.2}$$

то четверка $(\eta,\xi,\Phi,g=\langle\cdot,\cdot\rangle)$ называется ***почти контактной метрической*** (короче, AC-) ***структурой*** [6].

Многообразие, на котором фиксирована почти контактная (метрическая) структура, называется ***почти контактным*** (***метрическим*** (короче, AC-)) ***многообразием*** [6].

Кососимметричный тензор $\Omega(X,Y) = \langle X, \Phi Y\rangle$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, называется ***фундаментальной формой AC-структуры*** [6].

Пусть M – AC-многообразие, размерности $(2n+1)$, $\mathfrak{X}(M)$ – C^∞-модуль гладких векторных полей на многообразии M.

В модуле $\mathfrak{X}(M)$ внутренним образом определены два взаимно дополнительных проектора $m = \eta\otimes\xi$ и $l = \mathrm{id} - m = -\Phi^2$ [6]; таким образом, $\mathfrak{X}(M) = \mathcal{L}\oplus\mathcal{M}$, где $\mathcal{L} = \mathrm{Im}(\Phi) = \ker(\eta)$ – контактное распределение или первое фундаментальное распределение, $\dim\mathcal{L} = 2n$; $\mathcal{M} = \mathrm{Im}(m) = \ker(\Phi) = L(\xi)$ – линейная оболочка структурного вектора или второе фундаментальное распределение, l и m – проекторы на подмодули $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ соответственно. Распределения $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ инвариантны относительно Φ и взаимно ортогональны, $\tilde{\Phi}^2 = -id$, $\langle \tilde{\Phi}X, \tilde{\Phi}Y \rangle = \langle X, Y \rangle$, $X, Y \in \mathbf{X}(M)$, где $\tilde{\Phi} = \Phi|_{\mathcal{L}}$, следовательно, $\{\tilde{\Phi}|_p, g_p|_{\mathcal{L}}\}$ – эрмитова структура на пространстве $\mathcal{L}|_p$, здесь $p \in M$.

Комплексификация $\mathbf{X}(M)^C$ модуля $\mathbf{X}(M)$ распадается в прямую сумму собственных подпространств структурного эндоморфизма Φ, данные подпространства отвечают собственным значениям $\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$ и 0 соответственно: $\mathbf{X}(M)^C = D_\Phi^{\sqrt{-1}} \oplus D_\Phi^{-\sqrt{-1}} \oplus D_\Phi^0$. Причем проекторами на слагаемые $D_\Phi^{\sqrt{-1}}$ и $D_\Phi^{-\sqrt{-1}}$ этой прямой суммы будут соответственно эндоморфизмы [6]: $\pi = \sigma \circ l = -\frac{1}{2}\left(\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi\right)$ и $\bar{\pi} = \bar{\sigma} \circ l = \frac{1}{2}\left(-\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi\right)$, где $\sigma = \frac{1}{2}\left(id - \sqrt{-1}\Phi\right)$, $\bar{\sigma} = \frac{1}{2}\left(id + \sqrt{-1}\Phi\right)$.

Отображения $\sigma_p : \mathcal{L}_p \to \left(D_\Phi^{\sqrt{-1}}\right)_p$ и $\bar{\sigma}_p : \mathcal{L}_p \to \left(D_\Phi^{-\sqrt{-1}}\right)_p$ являются изоморфизмом и антиизоморфизмом соответственно эрмитовых пространств. Поэтому к каждой точке $p \in M^{2n+1}$ можно присоединить семейство реперов пространства $T_p(M)^C$ вида $\left(p, \varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, ..., \varepsilon_{\hat{n}}\right)$, где $\varepsilon_a = \sqrt{2}\sigma_p(e_a)$, $\varepsilon_{\hat{a}} = \sqrt{2}\bar{\sigma}_p(e_a)$, $\varepsilon_0 = \xi_p$; $\{e_a\}$ – ортонормированный базис эрмитова пространства $\mathcal{L}_p$. Такой репер называется ***A*-репером** [6]. Используемые здесь и далее индексы $i, j, k\ldots$ принимают значения от 0 до $2n$, индексы $a, b, c, d\ldots$ – значения от 1 до n, и будем считать $\hat{a} = a + n$, $\hat{\hat{a}} = a$, $\hat{0} = 0$.

Матрицы компонент тензоров Φ_p и g_p в A-репере имеют вид

$$\left(\Phi^i_j\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}, \left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

где I_n – единичная матрица порядка n. Совокупность таких реперов определяет G-структуру на M со структурной группой $\{1\} \times U(n)$, представленной матрицами вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}$, где $A \in U(n)$ [6].

Эта G-структура называется ***присоединенной*** [6]. Еще раз заметим, что пространство присоединенной G-структуры состоит из комплексных реперов, т.е. реперов комплексификации соответствующих касательных пространств. Поэтому, даже имея дело с вещественными тензорами, мы, говоря об их компонентах на пространстве присоединенной G-структуры, подразумеваем компоненты комплексных расширений этих тензоров. Также комплексный тензор является комплексным расширением вещественного тензора тогда и только тогда, когда он инвариантен относительно оператора комплексного сопряжения. Будем называть такой тензор вещественным.

Поскольку Φ и g – тензоры типов (1,1) и (2,0) соответственно, их компоненты на пространстве расслоения всех реперов над M удовлетворяют уравнениям

$$d\Phi^i_j + \Phi^k_j\theta^i_k - \Phi^i_k\theta^k_j = \Phi^i_{j,k}\omega^k, \quad dg_{ij} - g_{kj}\theta^k_i - g_{ik}\theta^k_j = g_{ij,k}\omega^k, \tag{1.4}$$

где $\{\omega^i\}$, $\{\theta^i_j\}$ – компоненты форм смещения и форм римановой связности без кручения ∇ соответственно; $\{\Phi^i_{j,k}\}$, $\{g_{ij,k}\}$ – компоненты ковариантного дифференциала Φ и g в этой связности соответственно. Более того, в силу определения римановой связности $\nabla g = 0$ и, значит,

$$g_{ij,k} = 0. \tag{1.5}$$

С учетом (1.3) и (1.5) соотношения (1.4) на пространстве присоединенной G-структуры можно записать в форме [6]

$$\Phi^a_{b,k} = 0, \Phi^{\hat{a}}_{\hat{b},k} = 0, \Phi^0_{0,k} = 0, \ \theta^a_{\hat{b}} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a_{\hat{b},k}\omega^k, \theta^{\hat{a}}_b = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,k}\omega^k,$$

$$\theta^a_0 = \sqrt{-1}\Phi^a_{0,k}\omega^k, \theta^{\hat{a}}_0 = -\sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{0,k}\omega^k, \ \ \theta^0_a = -\sqrt{-1}\Phi^0_{a,k}\omega^k, \theta^0_{\hat{a}} = \sqrt{-1}\Phi^0_{\hat{a},k}\omega^k, \tag{1.6}$$

$$\theta^i_j + \theta^{\hat{i}}_{\hat{j}} = 0, \theta^0_0 = 0.$$

Кроме того, заметим, что в силу вещественности соответствующих форм и тензоров $\overline{\omega^i} = \omega^{\hat{i}}$, $\overline{\theta^i_j} = \theta^{\hat{i}}_{\hat{j}}$, $\overline{\Phi^i_{j,k}} = \Phi^{\hat{i}}_{\hat{j},\hat{k}}$, где $t \to \bar{t}$ – оператор комплексного сопряжения.

Рассмотрим первую группу структурных уравнений римановой связности

$$d\omega^i = -\theta^i_j \wedge \omega^j. \tag{1.7}$$

При $i = 0$ (1.7) на пространстве присоединенной G-структуры для почти контактного метрического многообразия с учетом (1.3) (1.6) примет вид

$$d\omega^0 = -\theta^0_j \wedge \omega^j = -\theta^0_0 \wedge \omega^0 - \theta^0_a \wedge \omega^a - \theta^0_{\hat{a}} \wedge \omega^{\hat{a}} =$$

$$= \sqrt{-1}\Phi^0_{a,k}\omega^k \wedge \omega^a - \sqrt{-1}\Phi^0_{\hat{a},k}\omega^k \wedge \omega^{\hat{a}} =$$

$$= \sqrt{-1}\Phi^0_{a,0}\omega^0 \wedge \omega^a + \sqrt{-1}\Phi^0_{a,b}\omega^b \wedge \omega^a + \sqrt{-1}\Phi^0_{a,\hat{b}}\omega^{\hat{b}} \wedge \omega^a -$$

$$-\sqrt{-1}\Phi^0_{\hat{a},0}\omega^0 \wedge \omega^{\hat{a}} - \sqrt{-1}\Phi^0_{\hat{a},b}\omega^b \wedge \omega^{\hat{a}} - \sqrt{-1}\Phi^0_{\hat{a},\hat{b}}\omega^{\hat{b}} \wedge \omega^{\hat{a}} =$$

$$= \sqrt{-1}\Phi^0_{a,0}\omega^0 \wedge \omega^a + \sqrt{-1}\Phi^0_{a,b}\omega^b \wedge \omega^a + \sqrt{-1}\left(\Phi^0_{a,\hat{b}} + \Phi^0_{\hat{b},a}\right)\omega^{\hat{b}} \wedge \omega^a -$$

$$-\sqrt{-1}\Phi^0_{\hat{a},0}\omega^0 \wedge \omega^{\hat{a}} - \sqrt{-1}\Phi^0_{\hat{a},\hat{b}}\omega^{\hat{b}} \wedge \omega^{\hat{a}}.$$

Базис 2-форм образован формами вида

$$\Big\{\theta^a_b \wedge \theta^c_d, \theta^a_b \wedge \omega^c, \theta^a_b \wedge \omega^{\hat{c}}, \theta^a_b \wedge \omega^0, \omega^a \wedge \omega^b \,(a < b),$$

$$\omega^{\hat{a}} \wedge \omega^{\hat{b}} \left(\hat{a} < \hat{b}\right), \omega^a \wedge \omega^{\hat{b}}, \omega^0 \wedge \omega^a, \omega^0 \wedge \omega^{\hat{a}}\Big\},$$

поэтому последнее можно переписать так:

$$d\omega^0=\sqrt{-1}\Phi^0_{a,0}\omega^0\wedge\omega^a-\sqrt{-1}\left(\underset{a<b}{\Phi^0_{a,b}\,\omega^a\wedge\omega^b}+\underset{a>b}{\Phi^0_{a,b}\,\omega^a\wedge\omega^b}\right)-$$

$$-\sqrt{-1}\left(\Phi^0_{a,\hat b}+\Phi^0_{\hat b,a}\right)\omega^a\wedge\omega^{\hat b}-\sqrt{-1}\Phi^0_{\hat a,0}\omega^0\wedge\omega^{\hat a}-$$

$$=\sqrt{-1}\Phi^0_{a,0}\omega^0\wedge\omega^a-\sqrt{-1}\left(\underset{a<b}{\Phi^0_{a,b}\,\omega^a\wedge\omega^b}-\underset{a<b}{\Phi^0_{b,a}\,\omega^a\wedge\omega^b}\right)-$$

$$-\sqrt{-1}\left(\underset{\hat a<\hat b}{\Phi^0_{\hat a,\hat b}\,\omega^a\wedge\omega^b}+\underset{\hat a>\hat b}{\Phi^0_{\hat a,\hat b}\,\omega^a\wedge\omega^b}\right)=\sqrt{-1}\left(\Phi^0_{a,\hat b}+\Phi^0_{\hat b,a}\right)\omega^a\wedge\omega^{\hat b}-$$

$$-\sqrt{-1}\Phi^0_{\hat a,0}\omega^0\wedge\omega^{\hat a}-\sqrt{-1}\left(\underset{\hat a<\hat b}{\Phi^0_{\hat a,\hat b}\,\omega^{\hat a}\wedge\omega^{\hat b}}-\underset{\hat a<\hat b}{\Phi^0_{\hat b,\hat a}\,\omega^{\hat a}\wedge\omega^{\hat b}}\right)=$$

$$\sqrt{-1}\Phi^0_{a,0}\omega^0\wedge\omega^a-\sqrt{-1}\Phi^0_{[a,b]}\omega^a\wedge\omega^b-$$

$$-\sqrt{-1}\Phi^0_{(a,\hat b)}\omega^a\wedge\omega^{\hat b}-\sqrt{-1}\Phi^0_{\hat a,0}\omega^0\wedge\omega^{\hat a}-\sqrt{-1}\Phi^0_{[\hat a,\hat b]}\omega^{\hat a}\wedge\omega^{\hat b},$$

где $\Phi^i_{[j,k]}=\Phi^i_{j,k}-\Phi^i_{k,j}$, $\Phi^i_{(j,k)}=\Phi^i_{j,k}+\Phi^i_{k,j}$.

Расписывая аналогично (1.7) для $i=a$ и $i=\hat a$, получим первую группу структурных уравнений почти контактного метрического многообразия [6]:

1) $d\omega=C_{ab}\omega^a\wedge\omega^b+C^{ab}\omega_a\wedge\omega_b+C^b_a\omega^a\wedge\omega_b+C_a\omega\wedge\omega^a+C^a\omega\wedge\omega_a$;

2) $d\omega^a=-\theta^a_b\wedge\omega^b+B^{ab}{}_c\omega^c\wedge\omega_b+B^{abc}\omega_b\wedge\omega_c+B^{ab}\omega\wedge\omega_b+B^a{}_b\omega\wedge\omega^b$;

3) $d\omega_a=\theta^b_a\wedge\omega_b+B_{ab}{}^c\omega_c\wedge\omega^b+B_{abc}\omega^b\wedge\omega^c+B_{ab}\omega\wedge\omega^b+B_a{}^b\omega\wedge\omega_b$,

где $\omega=\omega^0=\pi^*(\eta)$ – естественная проекция пространства присоединенной G-структуры на многообразие M, $\omega_i=g_{ij}\omega^j$ (в частности, $\omega_a=g_{aj}\omega^j=$ $=g_{ab}\omega^b+g_{a\hat b}\omega^{\hat b}+g_{a0}\omega^0=\omega^{\hat a}$, аналогично $\omega_{\hat a}=\omega^a$), $\theta^a_{\hat b}=g_{\hat bi}\theta^{ai}=\theta^{ab}$, $\theta^{\hat a}_b=g^{\hat ai}\theta_{ib}=\theta_{ab}$, где

$$B^{ab}{}_c=B^a{}_{\hat bc}=-\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a_{\hat b,c},\ B^{abc}=B^a{}_{\hat b\hat c}=\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a_{[\hat b,\hat c]},$$

$$B^{ab}=B^a{}_{\hat b}=\sqrt{-1}\left(\Phi^a_{0,\hat b}-\frac{1}{2}\Phi^a_{\hat b,0}\right),\ B^a{}_b=\sqrt{-1}\Phi^a_{0,b},\ B_{ab}{}^c=B^{\hat a}{}_{b\hat c}=\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat a}_{b,\hat c},$$

$$B_{abc}=B^{\hat a}{}_{bc}=-\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat a}_{b,c},\ B_{ab}=B^{\hat a}{}_b=-\sqrt{-1}\left(\Phi^{\hat a}_{0,b}-\frac{1}{2}\Phi^{\hat a}_{b,0}\right),$$

$$B_a{}^b=B^{\hat a}{}_{\hat b}=-\sqrt{-1}\Phi^{\hat a}_{0,\hat b},\ C_{ab}=-\sqrt{-1}\Phi^0_{[a,b]},\ C^{ab}=C_{\hat a\hat b}=\sqrt{-1}\Phi^0_{[\hat a,\hat b]},$$

$$C^b_a=B^b{}_a-B_a{}^b,\ C_a=\sqrt{-1}\Phi^0_{a,0},\ C^a=-\sqrt{-1}\Phi^0_{\hat a,0}.$$

Определение 1.2 [11]. AC-структура, характеризуемая тождеством

$$\nabla_X(\Phi)Y+\nabla_Y(\Phi)X=-\eta(Y)\Phi(X)+\eta(X)\Phi(Y),\quad X,Y\in\mathbf{X}(M),$$

называется ***обобщенной структурой Кенмоцу***. AC-многообразие, снабженное обобщенной структурой Кенмоцу называется ***обобщенным многообразием Кенмоцу*** (коротко, GK-многообразием).

Полная группа структурных уравнений GK-многообразия на пространстве присоединенной G-структуры имеет вид [12, 14]

$$1)\,d\omega=F_{ab}\omega^a\wedge\omega^b+F^{ab}\omega_a\wedge\omega_b;$$

$$2)\,d\omega^a=-\theta^a_b\wedge\omega^b+C^{abc}\omega_b\wedge\omega_c-\frac{3}{2}F^{ab}\omega\wedge\omega_b+\delta^a_b\omega\wedge\omega^b;$$

$$3)\,d\omega_a=\theta^b_a\wedge\omega_b+C_{abc}\omega^b\wedge\omega^c-\frac{3}{2}F_{ab}\omega\wedge\omega^b+\delta^b_a\omega\wedge\omega_b;$$

$$4)\,d\theta^a_b+\theta^a_c\wedge\theta^c_b=\left(A^{ad}_{bc}-2C^{adh}C_{hbc}-\frac{3}{2}F^{ad}F_{bc}\right)\omega^c\wedge\omega_d+$$
$$+\left(-\frac{1}{3}\delta^a_bF_{cd}+\frac{2}{3}\delta^a_cF_{bd}-\frac{2}{3}\delta^a_dF_{bc}\right)\omega^c\wedge\omega^d+$$
$$+\left(\frac{1}{3}\delta^a_bF^{cd}+\frac{2}{3}\delta^c_bF^{da}-\frac{2}{3}\delta^d_bF^{ac}\right)\omega_c\wedge\omega_d, \tag{1.8}$$

где

$$C^{abc}=C^a{}_{\hat b\hat c}=\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a_{\hat b,\hat c},\ C_{abc}=C^{\hat a}{}_{bc}=-\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat a}_{b,c},\ \ F^{ab}=F^a{}_{\hat b}=\sqrt{-1}\Phi^a_{0,\hat b},$$

$$F_{ab}=F^{\hat a}{}_b=-\sqrt{-1}\Phi^0_{a,b},\ C^{abc}=C^{[abc]},\ C_{abc}=C_{[abc]},\ \overline{C^{abc}}=C_{abc},\ F_{ab}+F_{ba}=0,$$

$$F^{ab}+F^{ba}=0,\ \overline{F^{ab}}=F_{ab},\ A^{[ad]}_{bc}=0,\ A^{ad}_{[bc]}=0,\ F_{ad}C^{dbc}=F^{ad}C_{dbc}=0. \tag{1.9}$$

Кроме того, имеют место следующие равенства:

$$1)\,dF_{ab}-F_{cb}\theta^c_a-F_{ac}\theta^c_b=-2F_{ab}\omega;$$

$$2)\,dF^{ab}+F^{cb}\theta^a_c+F^{ac}\theta^b_c=-2F^{ab}\omega;$$

$$3)\,dC_{abc}-C_{dbc}\theta^d_a-C_{adc}\theta^d_b-C_{abd}\theta^d_c=C_{abcd}\omega^d-2\delta^d_{[a}F_{bc]}\omega_d-C_{abc}\omega;$$

$$4)\,dC^{abc}+C^{dbc}\theta^a_d+C^{adc}\theta^b_d+C^{abd}\theta^c_d=C^{abcd}\omega_d-2\delta^{[a}_dF^{bc]}\omega^d-C^{abc}\omega;$$

$$5)\,dA^{ad}_{bc}+A^{hd}_{bc}\theta^a_h+A^{ah}_{bc}\theta^d_h-A^{ad}_{hc}\theta^h_b-A^{ad}_{bh}\theta^h_c=A^{ad}_{bch}\omega^h+A^{adh}_{bc}\omega_h+A^{ad}_{bc0}\omega, \tag{1.10}$$

где

$$C_{a[bcd]}=\frac{3}{2}F_{a[b}F_{cd]};\ C^{a[bcd]}=\frac{3}{2}F^{a[b}F^{cd]};\ A^{a[dh]}_{bc}=0;\ A^{ad}_{b[ch]}=0;$$

$$A^{ad}_{b[c}C_{gf]d}=2C^{adh}C_{hb[c}C_{gf]d};\ A^{a[d}_{bc}C^{gf]c}=2C_{hbc}C^{ah[d}C^{gf]c};$$

$$A^{ad}_{b[c}F_{|d|g]}=\frac{3}{2}F^{ad}F_{b[c}F_{|d|g]};\ A^{a[d}_{bc}F^{|c|g]}=\frac{3}{2}F_{bc}F^{a[d}F^{|c|g]}.$$

Тождество $F^{ad}C_{dbc}=0$ назовем ***первым фундаментальным тождеством GK-многообразий***. Тождество $A^{ad}_{b[c}C_{gf]d}=2C^{adh}C_{hb[c}C_{gf]d}$ назовем ***вторым фундаментальным тождеством GK-многообразий***. Тождество $A^{ad}_{b[c}F_{|d|g]}=\frac{3}{2}F^{ad}F_{b[c}F_{|d|g]}$ назовем ***третьим фундаментальным тождеством GK-многообразий***. Тождество $2F^{ab}F^{cd}=F^{ac}F^{db}+F^{ad}F^{bc}$ назовем ***четвертым фундаментальным тождеством GK-многообразий***. Тождество $C_{abcg}C^{gdh}=0$ назовем ***пятым фундаментальным тождеством GK-многообразий***.

Из (1.10:5) следует, что функции $\left\{A^{cd}_{ab}\right\}$, определенные на пространстве присоединенной G-структуры, симметричные по верхним и нижним индексам, задают тензор на M^{2n+1}, называемый ***тензором Φ-голоморфной секционной кривизны GK-многообразий*** или ***структурным тензором второго рода*** [6]. Этот тензор определяет отображение $A:\mathbf{X}(M)\times\mathbf{X}(M)\times\mathbf{X}(M)\to\mathbf{X}(M)$, которое задается соотношением $A(X,Y,Z)=A^{cd}_{ab}X^aY^bZ_d\varepsilon_c+A^{\hat{c}\hat{d}}_{\hat{a}\hat{b}}X_aY_bZ^d\varepsilon_{\hat{c}}$. Непосредственным подсчетом, таким же образом, как и в [9], можно проверить, что тензор Φ-голоморфной секционной кривизны GK-многообразий обладает следующими свойствами:

$$1)A(\Phi X,Y,Z)=A(X,\Phi Y,Z)=-A(X,Y,\Phi Z)=\Phi\circ A(X,Y,Z);$$

$$2)A(Z,X,\Phi^2Y)=-A(Z,X,Y);$$

$$3)\eta\circ A(X,Y,Z)=0;$$

$$4)A(\xi,Y,Z)=A(X,\xi,Z)=A(X,Y,\xi)=0;$$

$$5)A(X,Y,Z)=A(Y,X,Z);$$

$$6)\langle A(X,Y,Z),W\rangle=\langle A(X,Y,W),Z\rangle;\ \ \forall X,Y,Z,W\in\mathbf{X}(M)\,. \tag{1.11}$$

Теорема 1.1. Тензор Φ-голоморфной секционной кривизны GK-многообразий точечно постоянной Φ-голоморфной секционной кривизны c имеет вид

$$A(X,Y,Z)=\frac{c+1}{2}\{\Phi^2X\langle\Phi Y,\Phi Z\rangle+\Phi^2X\langle\Phi Y,\Phi Z\rangle-$$
$$-\Phi X\Omega(Y,Z)-\Phi Y\Omega(X,Z)\},\forall X,Y,Z\in\mathbf{X}(M)\,. \tag{1.12}$$

Здесь $\Omega(X,Y)=\langle X,\Phi Y\rangle$ – фундаментальная форма GK-структуры.

Доказательство. Напомним [12], что компоненты тензора Φ-голоморфной секционной кривизны GK-многообразия точечно постоянной Φ-голоморфной секционной кривизны c имеют вид $A^{ad}_{bc}=\frac{c+1}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc}$, где $\tilde{\delta}^{ad}_{bc}=\delta^a_b\delta^d_c+\delta^d_b\delta^a_c$.

Рассмотрим равенства

$$A^{0d}_{bc}=\frac{c+1}{2}\tilde{\delta}^{0d}_{bc}=\frac{c+1}{2}\left(\delta^0_b\delta^d_c+\delta^d_b\delta^0_c\right)=0\,,$$

$$A^{\hat{a}d}_{bc}=\frac{c+1}{2}\tilde{\delta}^{\hat{a}d}_{bc}=\frac{c+1}{2}\left(\delta^{\hat{a}}_b\delta^d_c+\delta^d_b\delta^{\hat{a}}_c\right)=0\,.$$

Таким образом, справедливо $A_{bc}^{id}=\frac{c+1}{2}\left(\delta_b^i\delta_c^d+\delta_b^d\delta_c^i\right)$. Применим процедуру восстановления тождества, описанную в [6], к последнему равенству, которое можно записать так:

$$A\left(\varepsilon_b,\varepsilon_c,\varepsilon_{\hat{d}}\right)=\frac{c+1}{2}\left(\left\langle\varepsilon_c,\varepsilon_{\hat{d}}\right\rangle\varepsilon_b+\left\langle\varepsilon_b,\varepsilon_{\hat{d}}\right\rangle\varepsilon_c\right). \quad (1.13)$$

Напомним, что векторы $\{\varepsilon_a\}$ образуют базис подпространства $\left(D_\Phi^{\sqrt{-1}}\right)_p$, векторы $\{\varepsilon_{\hat{a}}\}$ образуют базис подпространства $\left(D_\Phi^{-\sqrt{-1}}\right)_p$, а проекторами модуля $\mathrm{X}(M)$ на подмодули $D_\Phi^{\sqrt{-1}}$ и $D_\Phi^{-\sqrt{-1}}$ являются эндоморфизмы $\pi=-\frac{1}{2}\left(\Phi^2+\sqrt{-1}\Phi\right)$ и $\bar{\pi}=\frac{1}{2}\left(-\Phi^2+\sqrt{-1}\Phi\right)$ соответственно, равенство (1.13) перепишется следующим образом:

$$A\left(\Phi^2X+\sqrt{-1}\Phi X,\Phi^2Y+\sqrt{-1}\Phi Y,-\Phi^2Z+\sqrt{-1}\Phi Z\right)=$$

$$=\frac{c+1}{2}\left(\left\langle\Phi^2Y+\sqrt{-1}\Phi Y,-\Phi^2Z+\sqrt{-1}\Phi Z\right\rangle\left(\Phi^2X+\sqrt{-1}\Phi X\right)+\right.$$

$$\left.+\left\langle\Phi^2X+\sqrt{-1}\Phi X,-\Phi^2Z+\sqrt{-1}\Phi Z\right\rangle\left(\Phi^2Y+\sqrt{-1}\Phi Y\right)\right),\ \forall X,Y,Z\in\mathrm{X}(M).$$

Расписывая полученное равенство по линейности и выделяя действительную и мнимую части, получим эквивалентное тождество:

$$A(\Phi^2X,\Phi^2Y,\Phi^2Z)+A(\Phi^2X,\Phi Y,\Phi Z)+A(\Phi X,\Phi^2Y,\Phi Z)-$$

$$-A(\Phi X,\Phi Y,\Phi^2Z)=\frac{c+1}{2}\left(\Phi^2X\left\langle\Phi^2Y,\Phi^2Z\right\rangle+\Phi^2X\left\langle\Phi Y,\Phi Z\right\rangle+\right.$$

$$+\Phi X\left\langle\Phi^2Y,\Phi Z\right\rangle-\Phi X\left\langle\Phi Y,\Phi^2Z\right\rangle+\Phi^2Y\left\langle\Phi^2X,\Phi^2Z\right\rangle+$$

$$\left.+\Phi^2Y\left\langle\Phi X,\Phi Z\right\rangle+\Phi Y\left\langle\Phi^2X,\Phi Z\right\rangle-\Phi Y\left\langle\Phi X,\Phi^2Z\right\rangle\right),\ \forall X,Y,Z\in\mathrm{X}(M). \quad (1.14)$$

С учетом (1.11), равенств (1.1:4) и (1.2), определения фундаментальной формы GK-структуры, тождество (1.14) примет вид (1.12). ■

Рассмотрим семейство функций $C=\left\{C^i{}_{jk}\right\}$; $C^a{}_{\hat{b}\hat{c}}=C^{abc}$; $C^{\hat{a}}{}_{bc}=C_{abc}$; все прочие компоненты семейства C – нулевые. Из (1.10) следует, что эта система функций, определенная на пространстве присоединенной G-структуры, задает глобально определенный тензор типа (2,1) на многообразии M, который называем ***первым структурным тензором*** GK-структуры. Аналогично, система функций $F=\left\{F^i{}_j\right\}$; $F^a{}_{\hat{b}}=F^{ab}$; $F^{\hat{a}}{}_b=F_{ab}$, определенная на пространстве присоединенной G-структуры, задает глобально определенный тензор типа (1,1) на многообразии M, который называем ***вторым структурным тензором*** GK-структуры.

Первый структурный тензор GK-многообразий имеет следующий вид:

$$C(X,Y)=-\frac{1}{4}\left\{\Phi\circ\nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi X+\Phi^2\circ\nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi^2 X\right\};\quad X,Y\in\mathrm{X}(M).$$

Второй структурный тензор GK-многообразий имеет вид

$$F(X)=-\nabla_X\xi;\quad X\in\mathrm{X}(M).$$

Легко проверить, что первый и второй структурные тензоры GK-многообразий обладают следующими свойствами:

1) $C(\xi,X)=C(X,\xi)=0;$

2) $C(X,Y)=-C(Y,X);$

3) $C(\Phi X,Y)=-C(X,\Phi Y)=-\Phi\circ C(X,Y);$

4) $\eta\circ C(X,Y)=0;$

5) $\langle\langle C(X,Y),Z\rangle\rangle+\overline{\langle\langle Y,C(X,Z)\rangle\rangle}=0;$

6) $\Phi\circ F(X)=-F(\Phi X);$

7) $F(\xi)=0;$ 8) $\eta\circ F(X)=0;\ \forall X,Y,Z\in\mathrm{X}(M).$

Определение 1.3 [11]. GK-структура называется ***специальной обобщенной структурой Кенмоцу I рода*** (коротко, ***SGK-структурой I рода***), если $C^{dbc}=0$ и $C_{dbc}=0$; ***специальной обобщенной структурой Кенмоцу II рода*** (коротко, ***SGK-структурой II рода***), если $F^{ad}=0$ и $F_{ad}=0$. Если $C^{dbc}=0$, $C_{dbc}=0$, $F^{ad}=0$ и $F_{ad}=0$, то GK-структура является структурой Кенмоцу.

Напомним, что ненулевые компоненты тензора Римана – Кристоффеля GK-многообразия на пространстве присоединенной G-структуры имеют вид [12, 14]:

$$1) R^a_{00b}=F^{ac}F_{cb}+\delta^a_b;$$

$$2) R^a_{bcd}=\frac{1}{3}\left(-2\delta^a_bF_{cd}+\delta^a_cF_{db}+\delta^a_dF_{bc}\right);$$

$$3) R^a_{bc\hat{d}}=A^{ad}_{bc}-C^{adh}C_{hbc}-\frac{1}{2}F^{ad}F_{bc}-\delta^a_c\delta^d_b;$$

$$4) R^a_{\hat{b}cd}=2C^{abh}C_{hcd}+F^{ab}F_{cd}-2\delta^a_{[c}\delta^b_{d]};$$

$$5) R^{\hat{a}}_{bcd}=C_{acdb}-\frac{1}{2}(F_{ab}F_{cd}+F_{ac}F_{db}+F_{ad}F_{bc}).\qquad(1.15)$$

Плюс соотношения, полученные с учетом классических свойств симметрии тензора R.

Компоненты (1.15) являются основными инвариантами римановой кривизны. В данной работе исследуем геометрический смысл обращения в нуль инвариантов $R^a_{bc\hat{d}}$ и $R^a_{\hat{b}cd}$.

Применим к равенству $R^a_{bc\hat{d}}=0$ процедуру восстановления тождества. В фиксированной точке $p\in M$ соотношение $R^a_{bc\hat{d}}=0$ равносильно равенству $\left\{R\left(\varepsilon_c,\varepsilon_{\hat{d}}\right)\varepsilon_b\right\}^a\varepsilon_a=0$. Рассуждая, как и при доказательстве теоремы 1.1, получим

$$\Phi^2\circ R\left(\Phi^2X,\Phi^2Y\right)\Phi^2Z+\Phi^2\circ R\left(\Phi^2X,\Phi Y\right)\Phi Z-$$
$$-\Phi^2\circ R\left(\Phi X,\Phi^2Y\right)\Phi Z+\Phi^2\circ R(\Phi X,\Phi Y)\Phi^2Z-$$
$$-\Phi\circ R\left(\Phi X,\Phi^2Y\right)\Phi^2Z+\Phi\circ R\left(\Phi^2X,\Phi Y\right)\Phi^2Z-$$
$$-\Phi\circ R\left(\Phi^2X,\Phi^2Y\right)\Phi Z-\Phi\circ R(\Phi X,\Phi Y)\Phi Z=0,\quad X,Y,Z\in\mathbf{X}(M)\,. \tag{1.16}$$

Поскольку компонента $R^a_{bc\hat{d}}$ тензора римановой кривизны используется при исследовании почти контактных метрических многообразий точечно постоянной Φ-голоморфной секционной кривизны (см. предложение 12 [6]), то введем следующее

Определение 1.4. Назовем ***тензор римановой кривизны почти контактного многообразия Φ-голоморфным***, если он удовлетворяет (1.16).

Определение 1.5. Обобщенное многообразие Кенмоцу с Φ-голоморфным тензором римановой кривизны назовем ***Φ-голоморфным***.

Теорема 1.2. Обобщенное многообразие Кенмоцу является Φ-голоморфным тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной *G*-структуры $R^a_{bc\hat{d}}=0$.

Доказательство. Обобщенное многообразие Кенмоцу, для которого справедливы тождества $R^a_{bc\hat{d}}=0$, как показано выше, является Φ-голоморфным. Расписав тождество (1.16) на пространстве присоединенной *G*-структуры, можно показать справедливость тождеств $R^a_{bc\hat{d}}=0$. Поскольку эти выкладки являются громоздкими и не имеют большого практического значения, мы их приводить не будем. ■

Теорема 1.3. Φ-голоморфное *GK*-многообразие является *SGK*-многообразием II рода.

Доказательство. Согласно теореме 1.2, для Φ-голоморфного *GK*-многообразия имеем $R^a_{bc\hat{d}}=0$. Последнее равенство с учетом (1.15:3) равносильно следующему: $A^{ad}_{bc}-C^{adh}C_{hbc}-\frac{1}{2}F^{ad}F_{bc}-\delta^a_c\delta^d_b=0$. Симметрируя данное тождество сначала по индексам *a* и *d*, а затем по индексам *b* и *c*, получим с учетом (1.9), $A^{(ad)}_{(bc)}=\delta^{(a}_{(b}\delta^{d)}_{c)}$, т.е. $A^{ad}_{bc}=\frac{1}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc}$, где $\tilde{\delta}^{ad}_{bc}=\delta^a_c\delta^d_b+\delta^d_c\delta^a_b$. Тогда третье фундаментальное тождество запишется в виде $\left(\frac{1}{2}\tilde{\delta}^{ah}_{b[c}-\frac{3}{2}F^{ah}F_{b[c}\right)F_{|h|d]}=0$, т.е. $\delta^a_bF_{cd}+\delta^a_cF_{bd}-\delta^a_bF_{dc}-\delta^a_dF_{bc}=3F^{ah}\left(F_{bc}F_{hd}-F_{bd}F_{hc}\right)$. Свернем полученное равенство по индексам *a* и *b*, тогда получим $2(n+1)F_{cd}=3F^{hg}(F_{hc}F_{gd}-F_{hd}F_{gc})$, т.е., с учетом (1.9), $F_{cd}=\frac{3}{2(n+1)}F^{hg}\left(F_{hc}F_{gd}+F_{dh}F_{gc}\right)$. В силу четвертого фундаментального тождества последнее тождество примет вид $F_{cd}=-\frac{3}{(n+1)}F^{hg}F_{cd}F_{hg}$, т.е. $F_{cd}\left(1+\frac{3}{(n+1)}F^{hg}F_{hg}\right)=0$. Из полученного равенства имеем, что $F_{cd}=0$. И по определению 1.3 Ф-голоморфное GK-многообразие является SGK-многообразием II рода. ■

Определение 1.6 [16]. AC-структура называется ***точнейше (closely) косимплектической***, если ее контактная форма замкнута и $\nabla_X(\Phi)X=0$, $X\in\mathrm{X}(M)$.

Используя результаты о SGK-многообразий II рода, полученные в [11, 12], теорему 1.3 можно сформулировать в следующем виде:

Теорема 1.4. Ф-голоморфные GK-многообразия совпадают с классом почти контактных метрических многообразий, получаемых из точнейше косимплектических многообразий каноническим конциркулярным преобразованием точнейше косимплектической структуры.

Рассмотрим на пространстве присоединенной G-структуры равенство $R^a_{\hat{b}cd}=0$. Как и выше, применив процедуру восстановления тождества к этому равенству, получим

$$\begin{aligned}&\Phi^2\circ R\left(\Phi^2X,\Phi^2Y\right)\Phi^2Z+\Phi^2\circ R\left(\Phi^2X,\Phi Y\right)\Phi Z+\\&-\Phi^2\circ R\left(\Phi X,\Phi^2Y\right)\Phi Z-\Phi^2\circ R(\Phi X,\Phi Y)\Phi^2Z+\\&-\Phi\circ R\left(\Phi^2X,\Phi^2Y\right)\Phi Z-\Phi\circ R\left(\Phi^2X,\Phi Y\right)\Phi^2Z-\\&-\Phi\circ R\left(\Phi X,\Phi^2Y\right)\Phi^2Z-\Phi\circ R\left(\Phi X,\Phi^2Y\right)\Phi^2Z-\\&-\Phi\circ R(\Phi X,\Phi Y)\Phi Z=0;\ \ \forall X,Y,Z\in\mathrm{X}(M)\,.\end{aligned}\tag{1.17}$$

Поскольку равенство нулю $R^a_{\hat{b}cd}$ является одним из определяющих условий паракелеровых многообразий [17], то тензор римановой кривизны AC-многообразия, удовлетворяющий условию (1.17), назовем ***Ф-параконтактным***.

Определение 1.7. Обобщенное многообразие Кенмоцу назовем ***Ф-параконтактным***, если его тензор римановой кривизны является Ф-параконтактным.

Теорема 1.5. Обобщенное многообразие Кенмоцу является Ф-параконтактным тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры $R^a_{\hat{b}cd}=0$.

Доказательство. Пусть M – Ф-параконтактное обобщенное многообразие Кенмоцу. Расписывая тождество (1.17) на пространстве присоединенной G-структуры, получим, что $R^a_{\hat{b}cd}=0$. В силу громоздкости вычислений мы приводить их не будем.

Обратно, если для обобщенного многообразия Кенмоцу выполнено $R^a_{\hat{b}cd}=0$, то как показано выше, применение процедуры восстановления тождества к этому равенству приводит нас к тождеству (1.17). ■

Замечание. В силу свойств тензора римановой кривизны, т.е. в силу $R^a_{bc\hat{d}}+R^a_{cd\hat{b}}+R^a_{db\hat{c}}=0$, из теорем 1.2 и 1.5 следует, что Ф-голоморфное обобщенное многообразие Кенмоцу является Ф-параконтактным обобщенным многообразием Кенмоцу.

Теорема 1.6. Ф-параконтактное *GK*-многообразие является *SGK*-многообразием II рода.

Доказательство. Пусть *M* – Ф-параконтактное *GK*-многообразие. Тогда $R^a_{\hat{b}cd}=0$ и с учетом (1.15:4) $2C^{abh}C_{hcd}+F^{ab}F_{cd}=2\delta^a_{[c}\delta^b_{d]}$. Проальтернируем последнее тождество по индексам *a* и *b*, тогда с учетом (1.10) имеем $2C^{abh}C_{hcd}+F^{ab}F_{cd}=2\delta^{[a}_{[c}\delta^{b]}_{d]}$. Полученное тождество свернем с объектом F^{df}, тогда с учетом первого фундаментального тождества $F^{ab}F_{cd}F^{df}=\delta^a_cF^{bf}-\delta^b_cF^{af}$. Полученное равенство свернем по индексам *c* и *f*, тогда $F^{ab}\Sigma_{cd}\left|F_{cd}\right|^2=2F^{ab}$. Из последнего равенства следует:

1) $F^{ab}=0$, т.е. многообразие *M* является *SGK*-многообразием II рода;

2) $\Sigma_{cd}\left|F_{cd}\right|^2=2$.

Во втором случае рассмотрим третье фундаментальное тождество, т.е. $A^{ah}_{b[c}F_{|h|d]}=\frac{3}{2}F^{ah}F_{b[c}F_{|h|d]}$. Свернем это равенство по индексам *a* и *d*, тогда $A^{ad}_{bc}F_{da}-A^{ad}_{ba}F_{dc}=\frac{3}{2}F^{ad}\left(F_{bc}F_{da}-F_{ba}F_{dc}\right)$. Альтернация последнего тождества по индексам *b* и *c*, в силу (1.9), дает

$$A^{ad}_{a[b}F_{|d|c]}=-\frac{3}{2}F^{ad}F_{a[b}F_{|d|c]}. \tag{1.18}$$

Свернем третье фундаментальное тождество по индексам *a* и *b*, тогда имеем $A^{ad}_{ac}F_{dg}-A^{ad}_{ag}F_{dc}=\frac{3}{2}F^{ad}\left(F_{ac}F_{dg}-F_{ag}F_{dc}\right)$. Переобозначая индексы в полученном равенстве,

$$A^{ad}_{a[b}F_{|d|c]}=\frac{3}{2}F^{ad}F_{a[b}F_{|d|c]}. \tag{1.19}$$

Из (1.18) и (1.19) следует, что $F^{ad}F_{a[b}F_{|d|c]}=0$. Полученное равенство, в силу четвертого фундаментального тождества, можно записать в виде $F^{ad}F_{ad}F_{bc}=0$, которое, в силу условия $\sum_{cd}\left|F_{cd}\right|^2=2$, запишется в виде $2F_{bc}=0$. Таким образом, $F_{bc}=0$, т.е. многообразие является специальным обобщенным многообразием Кенмоцу II рода. ■

Учитывая, что *SGK*-структура II рода получается каноническим конциркулярным преобразованием точнейше косимплектической структуры, и используя локальное строение точнейше косимплектического многообразия [18], теорему 1.6 можно сформулировать в следующем виде:

Теорема 1.7. Односвязное Ф-параконтактное *GK*-многообразие канонически конциркулярно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую.

2. Аксиома Φ-голоморфных (2*r*+1)-плоскостей

Определение 2.1 [4, 5]. $(2n+1)$-мерное почти контактное метрическое многообразие удовлетворяет ***аксиоме Φ-голоморфных*** **(2*r*+1)*-плоскостей***, $1\le r\le n$, если через каждую точку $p\in M$ для всякого $(2r+1)$-мерного подпространства $L\subset T_p(M)$ инвариантного относительно действия структурного оператора Φ_p, проходит $(2r+1)$-мерное вполне геодезическое Φ-инвариантное подмногообразие $N\subset M$, такое, что $T_p(N)=L$.

Теорема 2.1. *GK*-многообразие, удовлетворяющее аксиоме Φ-голоморфных $(2r+1)$-плоскостей, является многообразием Кенмоцу.

Доказательство. Будем рассуждать так же, как и в [4–9].

Пусть M – $(2r+1)$-мерное обобщенное многообразие Кенмоцу, удовлетворяющее аксиоме Φ-голоморфных $(2r+1)$-плоскостей, для любой точки $p\in M$, $L\subset T_p(M)$ – $(2r+1)$-мерное Φ-инвариантное подпространство, $N\subset M$ – соответствующее вполне геодезическое Φ-инвариантное подмногообразие. В силу нечетномерности N модуль $\mathrm{X}(M)$ содержит ненулевой элемент ядра эндоморфизма $\Phi|_N$, а значит, и векторное поле $\xi|_N$, которое мы по-прежнему будем обозначать через ξ.

Фиксируем точку $p\in N$. Пусть $\beta=(p,\ \beta_0=\xi_p,\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_r,\ \beta^1,\ \ldots,\ \beta^r)$ – A-репер комплексификации пространства $T_p(N)$. Если $j{:}N\to M$, $N\subset M$ – естественное вложение, то, отождествляя векторы с их образами при отображении $(j_*)_p$ – дифференциале отображения j в точке p, получаем в произвольном A-репере пространства $T_p(M)$ с учетом вещественности j $\beta^\alpha=C^\alpha_a\varepsilon^a, \beta_\alpha=C^a_\alpha\varepsilon_a, \overline{C^a_\alpha}=C^\alpha_a$.

Здесь и далее греческие индексы пробегают значения от 1 до r, латинские – от 1 до n.

Двойственные отношения задаются уравнениями

$$1)\omega^a=C^a_\alpha\theta^\alpha,\quad 2)\omega_a=C^\alpha_a\theta_\alpha,\quad 3)\ \omega=\theta\,, \tag{2.1}$$

где $\rho=(p,\theta,\theta^1,\ldots,\theta^r,\theta_1,\ldots,\theta_r)$ – корепер, дуальный реперу β.

Продифференцируем внешним образом (2.1:1) $d\omega^a=dC^a_\alpha\theta^\alpha+C^a_\alpha d\theta^\alpha$, с учетом (1.8:2) последнее равенство запишется в виде

$$-\theta^a_b\wedge\omega^b+C^{abc}\omega_b\wedge\omega_c-\frac{3}{2}F^{ab}\omega\wedge\omega_b+\delta^a_b\omega\wedge\omega^b=dC^a_\alpha\theta^\alpha+C^a_\alpha d\theta^\alpha\,.$$

С учетом (2.1) полученное равенство примет вид

$$-\theta^a_b\wedge\left(C^b_\alpha\theta^\alpha\right)+C^{abc}\left(C^\alpha_b\theta_\alpha\right)\wedge\left(C^\beta_c\theta_\beta\right)-\frac{3}{2}F^{ab}\theta\wedge\left(C^\alpha_b\theta_\alpha\right)+\delta^a_b\theta\wedge\left(C^b_\alpha\theta^\alpha\right)=$$

$$=dC^a_\alpha\theta^\alpha+C^a_\alpha d\theta^\alpha$$

или

$$C^a_\alpha d\theta^\alpha=-\left(dC^a_\alpha+C^b_\alpha\theta^a_b-C^a_\alpha\theta\right)\wedge\theta^\alpha+C^{abc}C^\beta_bC^\gamma_c\theta_\beta\wedge\theta_\gamma-\frac{3}{2}F^{ab}C^\beta_b\theta\wedge\theta_\beta. \tag{2.2}$$

Поскольку $C^a_\alpha C^\gamma_a=\left\langle C^a_\alpha\varepsilon_a, C^\gamma_b\varepsilon^b\right\rangle=\left\langle j(\beta_\alpha), j\left(\beta^\gamma\right)\right\rangle=\left\langle\beta_\alpha,\beta^\gamma\right\rangle=\delta^\gamma_\alpha$. Поэтому свертывая (2.2) с C^γ_a, получим

$$d\theta^\gamma=-\left(C^\gamma_a dC^a_\alpha+C^\gamma_aC^b_\alpha\theta^a_b-C^\gamma_aC^a_\alpha\theta\right)\wedge\theta^\alpha+C^{abc}C^\gamma_aC^\alpha_bC^\beta_c\theta_\alpha\wedge\theta_\beta-\frac{3}{2}F^{ab}C^\gamma_aC^\beta_b\theta\wedge\theta_\beta$$

или

$$d\theta^{\alpha}=-\theta^{\alpha}_{\beta}\wedge\theta^{\beta}+C^{abc}C^{\alpha}_{a}C^{\beta}_{b}C^{\gamma}_{c}\theta_{\beta}\wedge\theta_{\gamma}-\frac{3}{2}F^{ab}C^{\alpha}_{a}C^{\beta}_{b}\theta\wedge\theta_{\beta}, \qquad (2.3)$$

где $\theta^{\alpha}_{\beta}=C^{\alpha}_{a}dC^{a}_{\beta}+C^{\alpha}_{a}C^{b}_{\beta}\theta^{a}_{b}-\delta^{\alpha}_{\beta}\theta.$

Продифференцируем внешним образом (2.1:2): $d\omega_a=dC^{\alpha}_{a}\theta_{\alpha}+C^{\alpha}_{a}d\theta_{\alpha}$. В полученное равенство подставим (1.3:3):

$$dC^{\alpha}_{a}\theta_{\alpha}+C^{\alpha}_{a}d\theta_{\alpha}=\theta^{b}_{a}\wedge\omega_{b}+C_{abc}\omega^{b}\wedge\omega^{c}-\frac{3}{2}F_{ab}\omega\wedge\omega^{b}+\delta^{b}_{a}\omega\wedge\omega_{b}.$$

Последнее равенство с учетом (2.1) перепишем в виде

$$dC^{\alpha}_{a}\theta_{\alpha}+C^{\alpha}_{a}d\theta_{\alpha}=C^{\gamma}_{b}\theta^{b}_{a}\wedge\theta_{\gamma}+C_{abc}C^{b}_{\beta}C^{c}_{\gamma}\theta^{\beta}\wedge\theta^{\gamma}-\frac{3}{2}F_{ab}C^{b}_{\beta}\theta\wedge\theta^{\beta}+C^{\alpha}_{a}\theta\wedge\theta_{\alpha}$$

или

$$C^{\alpha}_{a}d\theta_{\alpha}=-\left(dC^{\alpha}_{a}-C^{\alpha}_{b}\theta^{b}_{a}-C^{\alpha}_{a}\theta\right)\wedge\theta_{\alpha}+C_{abc}C^{b}_{\beta}C^{c}_{\gamma}\theta^{\beta}\wedge\theta^{\gamma}-\frac{3}{2}F_{ab}C^{b}_{\beta}\theta\wedge\theta^{\beta}.$$

Свертывая последнее равенство с C^{a}_{γ} получим

$$d\theta_{\gamma}=\left(-C^{a}_{\gamma}dC^{\alpha}_{a}-C^{a}_{\gamma}C^{\alpha}_{b}\theta^{b}_{a}-\delta^{\alpha}_{\gamma}\theta\right)\wedge\theta_{\alpha}+$$

$$+C_{abc}C^{a}_{\gamma}C^{b}_{\beta}C^{c}_{\alpha}\theta^{\beta}\wedge\theta^{\alpha}-\frac{3}{2}F_{ab}C^{a}_{\gamma}C^{b}_{\beta}\theta\wedge\theta^{\beta}. \qquad (2.4)$$

Дифференцируя внешним образом соотношение $C^{a}_{\gamma}C^{\alpha}_{a}=\delta^{\alpha}_{\gamma}$, получим $C^{a}_{\gamma}dC^{\alpha}_{a}+C^{\alpha}_{a}dC^{a}_{\gamma}=0$, поэтому (2.4) можно переписать как

$$d\theta_{\alpha}=-\left(C^{a}_{\alpha}dC^{\gamma}_{a}+C^{a}_{\alpha}C^{\gamma}_{b}\theta^{b}_{a}+\delta^{\gamma}_{\alpha}\theta\right)\wedge\theta_{\gamma}+C_{abc}C^{a}_{\alpha}C^{b}_{\beta}C^{c}_{\gamma}\theta^{\beta}\wedge\theta^{\gamma}-\frac{3}{2}F_{ab}C^{a}_{\alpha}C^{b}_{\beta}\theta^{\beta}\wedge\theta$$

или
$$d\theta_{\alpha}=-\theta^{\gamma}_{\alpha}\wedge\theta_{\gamma}+C_{abc}C^{a}_{\alpha}C^{b}_{\beta}C^{c}_{\gamma}\theta^{\beta}\wedge\theta^{\gamma}-\frac{3}{2}F_{ab}C^{a}_{\alpha}C^{b}_{\beta}\theta^{\beta}\wedge\theta, \qquad (2.5)$$

где $\theta^{\gamma}_{\alpha}=C^{a}_{\alpha}dC^{\gamma}_{a}+C^{a}_{\alpha}C^{\gamma}_{b}\theta^{b}_{a}+\delta^{\gamma}_{\alpha}\theta$.

Далее, с учетом (2.3) соотношение (2.2) можно записать в виде

$$C^{a}_{\alpha}\left(-\theta^{\alpha}_{\beta}\wedge\theta^{\beta}+C^{dbc}C^{\alpha}_{d}C^{\beta}_{b}C^{\gamma}_{c}\theta_{\beta}\wedge\theta_{\gamma}-\frac{3}{2}F^{cb}C^{\alpha}_{c}C^{\beta}_{b}\theta\wedge\theta_{\beta}\right)=$$

$$=-\left(dC^{a}_{\alpha}+C^{b}_{\alpha}\theta^{a}_{b}-C^{a}_{\alpha}\theta\right)\wedge\theta^{\alpha}+C^{abc}C^{\beta}_{b}C^{\gamma}_{c}\theta_{\beta}\wedge\theta_{\gamma}-\frac{3}{2}F^{ab}C^{\beta}_{b}\theta_{\beta}\wedge\theta$$

или
$$\left(dC^{a}_{\alpha}+C^{b}_{\alpha}\theta^{a}_{b}-C^{a}_{\beta}\theta^{\beta}_{\alpha}-C^{a}_{\alpha}\theta\right)\wedge\theta^{\alpha}+\left(C^{dbc}C^{a}_{\alpha}C^{\alpha}_{d}C^{\beta}_{b}C^{\gamma}_{c}-\right.$$

$$\left.-C^{abc}C^{\beta}_{b}C^{\gamma}_{c}\right)\theta_{\beta}\wedge\theta_{\gamma}-\frac{3}{2}\left(F^{cb}C^{a}_{\alpha}C^{\alpha}_{c}C^{\beta}_{b}-F^{ab}C^{\beta}_{b}\right)\theta\wedge\theta_{\beta}=0.$$

Отсюда, с учетом линейной независимости базисных форм $\{\theta, \theta^{\beta}, \theta_{\beta}\}$ и леммы Картана существует набор функций $\left\{C^{a}_{\alpha\beta}\right\}$, таких, что

$$1)\ C^{dbc}C^a_\alpha C^\alpha_d C^\beta_b C^\gamma_c - C^{abc}C^\beta_b C^\gamma_c = 0\,;$$

$$2)\ F^{cb}C^a_\alpha C^\alpha_c C^\beta_b - F^{ab}C^\beta_b = 0\,; \qquad (2.6)$$

$$3)\ dC^a_\alpha + C^b_\alpha\theta^a_b - C^a_\beta\theta^\beta_\alpha - C^a_\alpha\theta = C^a_{\alpha\beta}\theta^\beta\,,$$

где $C^a_{\alpha\beta} = C^a_{\beta\alpha}$ – компоненты второй квадратичной формы вложения $N\subset M$. Так как N вполне геодезично, $C^a_{\alpha\beta} = 0$ и, значит,

$$dC^a_\alpha + C^b_\alpha\theta^a_b - C^a_\beta\theta^\beta_\alpha - C^a_\alpha\theta = 0\,. \qquad (2.7)$$

Рассмотрим уравнение (2.6:1). Перепишем его в виде

$$\left(C^{dbc}C^a_\alpha C^\alpha_d - C^{abc}\right)C^\beta_b C^\gamma_c = 0\,.$$

Поскольку это равенство должно выполняться тождественно относительно $\left\{C^\alpha_a\right\}$, то получаем, что $C^{dbc}C^a_\alpha C^\alpha_d - C^{abc} = 0$. Продифференцируем полученное равенство по переменным C^α_a: $C^{dbc}C^\alpha_d = 0$. Откуда следует, что $C^{abc} = 0$. Из уравнения (2.6:2) следует, что $F^{ab} = 0$. И, с учетом определения 1.3, многообразие является многообразием Кенмоцу. ■

В частности, имеем следующие следствия этой теоремы.

Следствие 1. *SGK*-многообразие I рода, удовлетворяющее аксиоме Ф-голоморфных $(2r+1)$-плоскостей, является многообразием Кенмоцу.

Следствие 2. *SGK*-многообразие II рода, удовлетворяющее аксиоме Ф-голоморфных $(2r+1)$-плоскостей, является многообразием Кенмоцу.

Теорема 2.2. *GK*-многообразие удовлетворяет аксиоме Ф-голоморфных $(2r+1)$-плоскостей тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной *G*-структуры компоненты тензора Ф-голоморфной кривизны удовлетворяют соотношениям $A^{ad}_{bc} = \dfrac{1}{(n+1)n}A\tilde{\delta}^{ad}_{bc}$, где $A = A^{bc}_{bc}$.

Доказательство. Пусть M^{2n+1} – *GK*-многообразие, удовлетворяющее аксиоме Ф-голоморфных $(2r+1)$-плоскостей. Продифференцируем соотношение (2.7) внешним образом: $dC^b_\alpha\wedge\theta^a_b + C^b_\alpha\wedge d\theta^a_b - dC^a_\gamma\wedge\theta^\gamma_\alpha - C^a_\gamma d\theta^\gamma_\alpha - dC^a_\alpha\wedge\theta - C^a_\alpha d\theta = 0$. Подставим сюда значения из (2.1), (2.7), (1.8:1) и (1.8:4), тогда, принимая во внимание теорему 2.1, получим

$$C^a_\beta d\theta^\beta_\alpha + C^a_\beta\theta^\beta_\gamma\wedge\theta^\gamma_\alpha = A^{ad}_{bc}C^b_\alpha C^c_\gamma C^\delta_d\theta^\gamma\wedge\theta_\delta\,. \qquad (2.8)$$

С учетом теоремы 2.1. уравнения (2.3) и (2.5) примут вид

$$d\theta^\alpha = -\theta^\alpha_\beta\wedge\theta^\beta;\quad d\theta_\alpha = \theta^\gamma_\alpha\wedge\theta_\gamma\,. \qquad (2.9)$$

Дифференцируя внешним образом (2.9) получим

$$d\theta^\alpha_\beta + \theta^\alpha_\gamma\wedge\theta^\gamma_\beta = \lambda^{\alpha\varphi}_{\beta\gamma}\theta^\gamma\wedge\theta_\varphi\,. \qquad (2.10)$$

Подставим (2.10) в (2.8), тогда $C^a_\beta\lambda^{\beta\varphi}_{\alpha\gamma}\theta^\gamma\wedge\theta_\varphi = A^{ad}_{bc}C^b_\alpha C^c_\gamma C^\delta_d\theta^\gamma\wedge\theta_\delta$, т.е.

$$C^a_\beta\lambda^{\beta\varphi}_{\alpha\gamma} = A^{ad}_{bc}C^b_\alpha C^c_\gamma C^\varphi_d\,. \qquad (2.11)$$

Из единственности определения вполне геодезического подмногообразия по его начальным данным в какой-либо точке следует, что из выполнимости аксиомы Ф-голоморфных ($2r$+1)-плоскостей (r≥1) на данном многообразии вытекает выполнимость на нем аксиомы 3-плоскостей. Но тогда (2.11) примет вид

$$C^a\lambda = A^{ad}_{bc}C^bC^cC_d\,. \tag{2.12}$$

Из последнего равенства следует, что λ является однородной функцией первой степени по переменным C^h. Продифференцируем (2.12) по этим переменным: $\lambda\delta^a_h + C^a\dfrac{\partial\lambda}{\partial C^h} = A^{ad}_{bc}\delta^b_h C^cC_d + A^{ad}_{bc}\delta^c_h C^bC_d$. Свернем полученное соотношение по индексам a и h. С учетом теоремы Эйлера об однородных функциях и соотношений $A^{ad}_{[bc]} = A^{[ad]}_{bc} = 0$, получим: $\lambda = \dfrac{2}{n+1}A^d_c C^cC_d$, где $A^d_c = A^{hd}_{hc}$. Подставим это соотношение в (2.12): $\left(A^{ad}_{bc} - \dfrac{2}{n+1}A^d_c\delta^a_b\right)C^bC^cC_d = 0$. В силу произвола в выборе C^b, C_d, находим отсюда, что $A^{ad}_{bc} = \dfrac{1}{n+1}\left(A^a_b\delta^d_c + A^a_c\delta^d_b\right)$. Свернем полученное соотношение по индексам a и b: $A^d_c = \dfrac{1}{n}A\delta^d_c$, где $A = A^a_a$, а значит,

$$A^{ad}_{bc} = \frac{A}{n(n+1)}\tilde{\delta}^{ad}_{bc}\,, \tag{2.13}$$

где $\tilde{\delta}^{ad}_{bc} = \delta^a_b\delta^d_c + \delta^d_b\delta^a_c$.

Обратное очевидно: система Пфаффа, задающая Ф-голоморфную ($2r$+1)-плоскость, при выполнении (2.13), вполне интегрируема, а ее интегральные многообразия являются вполне геодезическими подмногообразиями. ■

Согласно теореме 3.5 [12], GK-многообразие M является многообразием точечно постоянной Ф-голоморфной секционной кривизны $\boldsymbol{c}$ тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры тензор A^{ad}_{bc} имеет вид $A^{ad}_{bc} = \dfrac{c+1}{2}\tilde{\delta}^{ad}_{bc}$.

Следовательно, справедлива

Теорема 2.3. GK-многообразие удовлетворяет аксиоме Ф-голоморфных ($2r$+1)-плоскостей тогда и только тогда, когда оно является многообразием точечно постоянной Ф-голоморфной секционной кривизны $c = \dfrac{2}{(n+1)n}A - 1$.

Из теорем 2.1, 2.2 и 2.3 следует

Теорема 2.4. GK-многообразие точечно постоянной Ф-голоморфной секционной кривизны, удовлетворяющее аксиоме Ф-голоморфных ($2r$+1)-плоскостей, является многообразием Кенмоцу.

Используя классификацию полных односвязных многообразий Кенмоцу постоянной Ф-голоморфной секционной кривизны [13] приходим к основному результату.

Теорема 2.5. Односвязное GK-многообразие удовлетворяет аксиоме Ф-голоморфных $(2r+1)$-плоскостей тогда и только тогда, когда оно канонически конциркулярно одному из следующих многообразий 1) $\mathbf{CP}^n\times\mathbf{R}$; 2) $\mathbf{C}^n\times\mathbf{R}$; 3) $\mathbf{CH}^n\times\mathbf{R}$, снабженных канонической косимплектической структурой.

Авторы выражают искреннюю благодарность рецензенту, чьи замечания качественно улучшили данную статью.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ishihara I.* Anti-invariant submanifolds of a Sasakian space form // Kodai Math. J. 1979. V. 2. No. 2. P. 171–186. DOI:10.2996/kmj/1138036014.
2. *Tanno S.* Sasakian manifolds with constant Ф-holomorfic sectional curvature // Tohoku Math. J. 1969. V. 21. No. 3. P. 501–507. DOI:10.2748/tmj/1178242960.
3. *Ogiue K.* On almost contact manifolds admitting axiom of planes or axiom of free mobility // Kodai Math. Semin. Repts. 1964. V. 16. No. 4. P. 223–232. DOI: 10.2996/kmj/1138844949.
4. *Кириченко В.Ф.* Аксиома Ф-голоморфных плоскостей в контактной геометрии // Известия АН СССР. Сер. Матем. 1984. Т. 48. № 4. С. 711–734.
5. *Кириченко В.Ф.* Почти косимплектические многообразия, удовлетворяющие аксиоме Ф-голоморфных плоскостей. // Доклады АН СССР. 1983. Т. 273. № 2. С. 280–284.
6. *Кириченко В.Ф.*, *Рустанов А.Р.* Дифференциальная геометрия квазисасакиевых многообразий. // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 8. С. 71–100. DOI: 10.4213/sm675.
7. *Волкова Е.С.* Аксиома Ф-голоморфных плоскостей для нормальных многообразий киллингова типа // Матем. заметки. 2002. Т. 71. Вып. 3. С. 364–372. DOI: 10.4213/mzm352.
8. *Рустанов А.Р.*, *Салахов А.З.*, *Хаиров Р.А.* Аксиома Ф-голоморфных $(2r+1)$-плоскостей для почти контактных метрических многообразий класса NC_{10} // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия «Естественно-математические и технические науки». 2017. № 1. С. 19–24.
9. *Рустанов А.Р.*, *Харитонова С.В.*, *Казакова О.Н.* Аксиома Ф-голоморфных $(2r+1)$-плоскостей для нормальных *LcACs*-многообразий // Вестник ОГУ. 2015. № 4 (179). С. 224–238.
10. *Abu-Saleem A.*, *Rustanov A.R.* Curvature Identities Special Generalized Manifolds Kenmotsu Second Kind // Malaysian J. Mathematical Sciences. 2015. V. 9. No. 2. P. 187–207.
11. *Umnova S. V.* On conformal invariant of Kenmotsu manifolds // Webs and Quasigroups, Tver State Univ. 2002. P. 155–156.
12. *Abu-Saleem Ahmad*, *Rustanov A.R.* Some aspects of the geometry of generalized manifolds Kenmotsu // Far East J. Mathematical Sciences (FJMS). 2018. V. 103. No. 9. P. 1407–1432. DOI: 10.17654/MS103091407.
13. *Кириченко В.Ф.* О геометрии многообразий Кенмоцу // Доклады Академии наук. 2001. Т. 380(5). С. 585–587.
14. *Abu-Saleem Ahmad*, *Rustanov A.R.* Analogs of Gray identities for the Riemannian curvature tensor of generalized Kenmotsu manifolds // International Mathematical Forum. 2017. V. 12. No. 2. P.87–95. DOI: 10.12988/imf.2017.611149.
15. *Абу-Салеем Ахмад*, *Рустанов А.Р.*, *Харитонова С.В.* Свойства интегрируемости обобщенных многообразий Кенмоцу // Владикавказский математический журнал. 2018. Т. 20(3). С. 4–20. DOI: 10.23671/VNC.2018.3.17829.
16. *Blair D.E.*, *Showers D.K.* Almost contact manifolds with Killing structure tensors II // J. Diff. Geom. 1974. V. 9. No. 4. P. 577–582. DOI: 10.4310/jdg/1214432556.
17. *Rizza G.B.* Varieta parakahleriane // Ann. Mat. Pure et Appl. 1974. V. 98. No.4. P. 47–61.
18. *Kirichenko V.F.* Sur le geometrie des varieties approximativement cosymplectiques // C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. Math. 1982. V. 295. No. 1. P. 673–676.

Статья поступила 04.10.2019 г.

Abu-Saleem Ahmad, Rustanov A.R., Kharitonova S.V. (2020) AXIOM OF Φ-HOLOMORPHIC (2*r*+1)-PLANES FOR GENERALIZED KENMOTSU MANIFOLDS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 66. pp. 5–23

DOI 10.17223/19988621/66/1

Keywords: almost contact metric structure, Kentmotsu structure, generalized Kentmotsu manifold, special generalized Kentmotsu manifold, axiom of Φ-holomorphic planes, Φ-quasi-invariant manifold, Φ-paracontact manifold.

In this paper we study generalized Kenmotsu manifolds (shortly, a GK-manifold) that satisfy the axiom of Φ-holomorphic (2*r*+1)-planes. After the preliminaries we give the definition of generalized Kenmotsu manifolds and the full structural equation group. Next, we define Φ-holomorphic generalized Kenmotsu manifolds and Φ-paracontact generalized Kenmotsu manifold give a local characteristic of this subclasses. The Φ-holomorphic generalized Kenmotsu manifold coincides with the class of almost contact metric manifolds obtained from closely cosymplectic manifolds by a canonical concircular transformation of nearly cosymplectic structure. A Φ-paracontact generalized Kenmotsu manifold is a special generalized Kenmotsu manifold of the second kind. An analytical expression is obtained for the tensor of Φ-holomorphic sectional curvature of generalized Kenmotsu manifolds of the pointwise constant Φ-holomorphic sectional curvature.

Then we study the axiom of Φ-holomorphic (2*r*+1)-planes for generalized Kenmotsu manifolds and propose a complete classification of simply connected generalized Kenmotsu manifolds satisfying the axiom of Φ-holomorphic (2*r*+1)-planes. The main results are as follows. A simply connected GK-manifold of pointwise constant Φ-holomorphic sectional curvature satisfying the axiom of Φ-holomorphic (2*r*+1)-planes is a Kenmotsu manifold. A GK-manifold satisfies the axiom of Φ-holomorphic (2*r*+1)-planes if and only if it is canonically concircular to one of the following manifolds: (1) $\mathbf{CP}^n\times\mathbf{R}$; (2) $\mathbf{C}^n\times\mathbf{R}$; and (3) $\mathbf{CH}^n\times\mathbf{R}$ having the canonical cosymplectic structure.

AMS 2020 Mathematical Subject Classification: 53C25, 53D15

Ahmad ABU-SALEEM (PhD, Ass. Prof., Al al-Bayt University, Mafraq, Jordan). E-mail: abusaleem2@yahoo.com

Aligadzhi R. RUSTANOV (Candidate of Physics and Mathematics, National Research Moscow State University of civil engineering, Institute of fundamental education, Russia). E-mail: aligadzhi@yandex.ru

Svetlana V. KHARITONOVA (Candidate of Physics and Mathematics, Orenburg State University, Russia) E-mail: hcb@yandex.ru

REFERENCE

1. Ishihara I. (1979) Anti-invariant submanifolds of a Sasakian space form. *Kodai Mathematical Journal*. 2(2). pp. 171–186. DOI: 10.2996/kmj/1138036014.
2. Tanno S. (1969) Sasakian manifolds with constant Φ-holomorfic sectional curvature. *Tohoku Mathematical Journal.* 21(3). pp. 501–507. DOI: 10.2748/tmj/1178242960.
3. Ogiue K. (1964) On almost contact manifolds admitting axiom of planes or axiom of free mobility. *Kodai Mathematical Seminar Reports*.16(4). pp. 223–232. DOI: 10.2996/kmj/1138844949.
4. Kirichenko V.F. (1985) The axiom of Φ-holomorphic planes in contact geometry. *Mathematics of the USSR – Izvestiya.* 25(1). pp. 51–73. DOI: 10.1070/IM1985v025n01ABEH001265.
5. Kirichenko V.F. (1983) Almost cosymplectic manifolds satisfying the axiom of Φ-holomorphic planes. *Doklady Akademii Nauk SSSR.* 273(2). pp. 280–284.

6. Kirichenko V.F., Rustanov A.R. (2002) Differential geometry of quasi-Sasakian manifolds. *Sbornik*: *Mathematics*. 193(8). pp. 1173–1201. DOI: 10.1070/SM2002v193n08ABEH000675.
7. Volkova E.S. (2002) The Axiom of ФФ-holomorphic planes for normal killing type manifolds. *Mathematical Notes*. 71. pp. 330–338. DOI: 10.1023/A:1014842707103.
8. Rustanov A.R., Salakhov A.Z., Khairov R.A. (2017) Aksioma Ф-golomorfnykh (2*r*+1)-ploskostey dlya pochti kontaktnykh metricheskikh mnogoobraziy klassa NC_{10} [The Axiom of Ф-holomorphic (2*r*+1)-planes for almost contact metric manifolds of class NC_{10}]. *Vestnik Adygeyskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya «Estestvenno-matematicheskiye i tekhnicheskiye nauki» – The Bulletin of the Adyghe State University*, *Series "Natural-Mathematical and Technical Sciences"*. 1. pp. 19–24.
9. Rustanov A.R., Kazakova O.N., Kharitonova S.V. (2015) Aksioma Ф-golomorfnykh (2*r*+1)-ploskostey dlya normal'nykh *LcACs*-mnogoobraziy [The axiom of Ф-holomorphic (2*r*+1)-planes for normal *LcACs*-manifolds] *Vestnik OGU – Vestnik of the Orenburg State University*. 179(4). pp. 224–238.
10. Abu-Saleem A., Rustanov A.R. (2015) Curvature identities special generalized manifolds Kenmotsu second kind. *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*. 9(2). pp. 187–207.
11. Umnova S.V. (2002) On conformal invariant of Kenmotsu manifolds. *Webs and Quasigroups*, *Tver State University*. pp. 155–156.
12. Abu-Saleem Ahmad, Rustanov A.R. (2018) Some aspects of the geometry of generalized manifolds Kenmotsu. *Far East Journal of Mathematical Sciences*. 103(9). pp. 1407–1432. DOI: 10.17654/MS103091407.
13. Kirichenko V.F. (2001) On the geometry of Kenmotsu manifolds. *Doklady Mathematics*. 64(2). pp. 230–232.
14. Abu-Saleem Ahmad, Rustanov A.R. (2017) Analogs of Gray identities for the Riemannian curvature tensor of generalized Kenmotsu manifolds. *International Mathematical Forum*. 12(2). pp. 87–95. DOI: 10.12988/imf.2017.611149.
15. Abu-Saleem A., Rustanov A.R., Kharitonova S.V. (2018) Svoystva integriruyemosti obobshchennykh mnogoobraziy Kenmotsu [Integrability properties of generalized Kenmotsu manifolds]. *Vladikavkazskiy matematicheskiy zhurnal – Vladikavkazian Mathematical Journal*. 20(3). pp. 4–20. DOI: 10.23671/VNC.2018.3.17829.
16. Blair D.E., Showers D.K. (1974) Almost contact manifolds with Killing structure tensors II. *Journal of. Differential Geometry*. 9(4). pp. 577–582. DOI: 10.4310/jdg/1214432556.
17. Rizza G.B. (1974) Varieta parakahleriane. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*. 98(4). pp. 47–61.
18. Kirichenko V.F. (1982) Sur le geometrie des varieties approximativement cosymplectiques. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences – Series I – Mathematics*. 295(1). pp. 673–676.

Received: October 04, 2019