ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2020 Математика и механика № 66

УДК 519.651 MSC 2020: 65R10
DOI 10.17223/19988621/66/2

Ш.У. Ажгалиев, Ш.К. Абикенова

ОБ ОЦЕНКЕ СНИЗУ В ЗАДАЧЕ ПРИБЛИЖЕННОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ ПО ИХ ЗНАЧЕНИЯМ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ РАДОНА[1]

Изучается задача приближенного восстановления функций по значениям их преобразований Радона. В контексте компьютерного (вычислительного) поперечника на данном этапе научного исследования получены оценки снизу для погрешности восстановления функций из пространств Соболева и Коробова по значениям их преобразований Радона.

Ключевые слова: *функция*, *восстановление*, *преобразование Радона*, *класс Соболева*, *класс Коробова*, *оценки снизу.*

Важную роль при проведении экспериментов (физических, химических, технических и т.п.), требуют выяснения вопросы типа: «Где разместить измерительные приборы (в каких точках снимать информацию)?; как по полученным данным приближенно описать весь процесс (построение интерполяционной формулы)?; какими приборами и в каком количестве пользоваться?; где эти приборы расставить и как переработать полученные экспериментальные данные?» и т.д.

Математическую основу подобного рода проблем составляет постановка задачи, впервые предложенная в 1996 году в работе [1] и окончательно сформулированная в течение 1996–2003 гг. в работах [2–8] под названием «Компьютерный (вычислительный) поперечник» (далее, К(В)П), с применением на отдельных конкретизациях. Например, в случае $Tf = f$ общая задача в определении Компьютерного (вычислительного) поперечника есть задача восстановления функций. Конкретизация числовой информации в виде функционалов и алгоритмов их переработки порождает многочисленные постановки задач, исследованию которых посвящен ряд работ (см. например, [1–10] и имеющуюся в них литературу). Наиболее изученной является случай функционалов – значений функций в точках. Здесь основная проблема заключается в построении сеток, оптимальных в том или ином смысле. К таковым относятся сетки, предложенные Коробовым[11], Фроловым[12], Смоляком[13] и Шерниязовым[14]. Разумеется, помимо значений в точках, можно привлекать и другие функционалы. И здесь наиболее изученными являются тригонометрические коэффициенты Фурье (см. также работу авторов [10], где использовались коэффициенты Фурье по системе Хаара). В данной работе, в продолжение уже известных точных порядковых оценок погрешности восстановления функции, исследуются аппроксимативные возможности других конкретных вычислительных агрегатов – значений преобразований Радона. Обзор основных сведений о преобразовании Радона может быть найден в монографиях [15–20]. Одной из первых работ по приближению функций на основе значений их некоторых преобразований Радона является работа Марра [21]. В ней найдено

[1] Данное исследование финансируется Комитетом по науке Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант № AP05132938)

значение наилучшего приближения преобразования Радона алгебраическими многочленами. В работе [22] решается задача нахождения «интерполяционного» многочлена (т.е. имеющего те же преобразования Радона, что и интерполируемая функция) с минимальной L^2-нормой. В работе [23] решается задача о возможности построения интерполяционных многочленов, в том же смысле что и в [22], для гармонических функций и получена оценка сверху их погрешностей на некотором классе гармонических функций. Отметим также серию работ [24–30, и имеющуюся в ней литературу] об аппроксимации функций, которая близка к данной тематике. Здесь представлены результаты в виде оценки снизу для погрешности восстановления функций из пространств Соболева и Коробова по значениям их преобразований Радона, полученные в ходе реализации грантового проекта МОН РК №AP05132938 «Преобразование Радона в задачах дискретизации».

Постановка задачи и необходимые определения

Сформулируем конкретизированную постановку задачи, в рамках которой получены соответствующие результаты. Пусть даны нормированные пространства X и Y числовых функций, определенных на множествах Ω_X и Ω_Y соответственно. Пусть $F \subset X$ и $Tf : F \to Y$. Для каждого целого положительного N выбирается набор функционалов $l^{(N)} = (l_1,...,l_N)$, $l_j(\cdot): F \to \mathbb{C}$ $(j = 1,...,N)$ и функция $\varphi_N(\tau_1,...,\tau_N; y): \mathbb{C}^N \times \Omega_1 \to \mathbb{C}$.

Каждую функцию $Tf \in Y$ будем приближать в метрике Y функцией

$$\varphi_N\left(l_1(f),...,l_N(f); y\right),$$

построенной по числовой информации объема N, полученной о функции $f(x)$ посредством функционалов $l_1,...,l_N$ и переработанной по правилу φ_N.

Пусть $\left\{\left(l^{(N)}, \varphi_N\right)\right\}$ есть множество всевозможных пар $\left(l^{(N)}, \varphi_N\right)$, состоящих из набора N функционалов $l^{(N)} = (l_1,...,l_N)$ и функции $\varphi_N(\tau_1,...,\tau_N; y)$, и пусть $D_N \subset \left\{\left(l^{(N)}, \varphi_N\right)\right\}$.

Положим

$$\delta_N(D_N; f, F)_Y = \inf_{\left(l^{(N)}, \varphi_N\right) \in D_N} \sup_{f \in F} \| f(x) - \varphi_N(l_1(f),...,l_N(f); x) \|_Y . \qquad (1)$$

Задача К(В)П-1 заключается в получении оценок сверху и оценок снизу (желательно совпадающих с точностью до констант) для величины (1) (условия предполагаются такими, что имеют смысл все формулируемые определения) – Компьютерного (вычислительного) поперечника по точной информации и в указании вычислительного агрегата, реализующего оценку сверху.

Тем самым, имеем две самостоятельные задачи, одна из которых заключается в получении оценок снизу погрешности восстановления всех вычислительных агрегатов из заданного множества D_N, другая – в нахождении оценок сверху для конкретных вычислительных агрегатов из D_N (построение которых, разумеется, можно продолжить с точки зрения улучшения вычислительных характеристик).

Далее будут использоваться понятия оценки снизу и сверху, поэтому приведем здесь необходимые сведения об используемых знаках.

Через $c(\alpha, \beta,\ldots)$ будем обозначать некоторые положительные величины, разные, вообще говоря, в разных формулах и зависящие лишь от указанных в скобках параметров.

Если $\{a_N\}_{N=1}^{\infty}$ – последовательность положительных чисел и $\{b_N\}_{N=1}^{\infty}$ – произвольная числовая последовательность, то запись $b_N \underset{\alpha,\beta,\ldots}{<<} a_N$ означает, что найдется постоянная $c(\alpha, \beta,\ldots)$, для которой при каждом целом положительном N выполнено неравенство $|b_N| \le c(\alpha,\beta,\ldots)a_N$.

Если же $\{a_N\}_{N=1}^{\infty}$ и $\{b_N\}_{N=1}^{\infty}$ – две последовательности положительных чисел, то запись $b_N \underset{\alpha,\beta,\ldots}{\succ\prec} a_N$ означает, что одновременно выполняются соотношения $b_N \underset{\alpha,\beta,\ldots}{<<} a_N$ и $b_N \underset{\alpha,\beta,\ldots}{>>} a_N$.

В более подробном изложении искомая задача К(В)П-1, заключаемая в доказательстве соотношения

$$\delta_N\left(D_N; Tf, F\right)_Y \succ\prec \theta_N,$$

состоит из двух задач, а именно, требуется найти такую положительную числовую последовательность $\{\theta_N\}$, что выполнена

• Оценка снизу $\delta_N(D_N; f, F)_Y \ge C_1\theta_N$: для некоторого числа $C_1 > 0$, для последовательности целых положительных N и для всякого вычислительного агрегата $\left(l^{(N)}, \varphi_N\right)$ из D_N найдется функция $\overline{f} \in F$, для которой

$$\left\| T\overline{f}(y) - \varphi_N\left(l_1(\overline{f}),\ldots,l_N(\overline{f}); y\right)\right\|_Y \ge C_1\theta_N,$$

и одновременно

• Оценка сверху $\delta_N(D_N; f, F)_Y \le C_2\theta_N$: для некоторого $C_2 > 0$ и для всякого N из достаточно плотной (в связи с необходимостью указания конкретного вычислительного агрегата) возрастающей последовательности целых положительных чисел найдутся вычислительный агрегат $\left(\bar{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N\right) = \overline{\varphi}_N\left(\bar{l}_1(f),\ldots,\bar{l}_N(f);\cdot\right)$ из D_N , такой, что для всякой функции $f \in F$ выполнено неравенство

$$\left\| Tf(y) - \bar{\phi}_N\left(\bar{l}_1(f),\ldots,\bar{l}_N(\overline{f}); y\right)\right\|_Y \le C_1\theta_N.$$

Конкретизация в D_N наборов функционалов $l_1,\ldots,l_N$ и алгоритмов переработки числовой информации φ_N порождает многочисленные постановки задач.

В данной работе изучается следующая конкретизация задачи (1):

Через $U = \{x = (x_1, x_2) \in R^2 : [x] = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \le 1\}$ обозначим единичный круг с центром в начале координат, множества определены C и Z соответственно следующим образом:

$$C = \left\{(p,\theta) : -1 \le p \le 1,\ \theta = (\theta_1, \theta_2) : \theta_1^2 + \theta_2^2 = 1\right\},$$

$$Z = \left\{(p,\theta) : -1 \le p \le 1,\ \theta = (\theta_1, \theta_2) : \frac{1}{4} \le \theta_1^2 + \theta_2^2 \le 1\right\}.$$

Для функции f, определенной на U, и $(t,\theta)\in C$ преобразованием Радона $R(f;t,\theta)$ называется интеграл от f вдоль отрезка

$$I: I(t,\theta)=\{x=(x_1,x_2): x_1\theta_1+x_2\theta_2=t\}\cap U ,$$

а именно,

$$R(f;t,\theta)=\int\limits_{I(t,\theta)} f(x_1,x_2)ds=\int_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} f(t\theta_1-s\theta_2,t\theta_1+s\theta_2)ds.$$

Заметим, что для случаев, рассматриваемых в данной работе, пределы интегрирования будут конечны, так как функции имеют ограниченный носитель.

Пусть $\Omega_X=\Omega_Y=U, X=Y=L^q(U)(1\le q\le\infty)$, при $q=\infty$ под $L^q(U)$ будем иметь ввиду пространство $C(U)$ всех непрерывных на U функций.

В качестве оператора будем рассматривать единичный оператор $Tf=f$.

D_N есть множество R_N всех пар $\left(l^{(N)},\varphi_N\right)$, состоящих из набора N функционалов $l^{(N)}=(l_1,...,l_N)$ вида $l_j(f)=R\left(f;t_j,\theta_j\right)$ и функции $\varphi_N(\tau_1,...,\tau_N;x)$,

$$R_N=\left(\left(R\left(f;t_1,\theta^{(1)}\right),...,R\left(f;t_N,\theta^{(N)}\right)\right),\varphi_N\left(z_1,...,z_N;x\right)\right).$$

Таким образом, основной целью нашей работы является нахождение оценок снизу для погрешности восстановления, т.е. для данной пары $\left\{\left(\left(t_1,\theta^{(1)}\right),...,\left(t_N,\theta^{(N)}\right)\right),\varphi_N\left(z_1,...,z_N;x\right)\right\}$ – исходного вычислительного агрегата, величины

$$\delta_N(f;F;R_N)_{L^\infty(U)}=$$
$$=\inf_{\substack{\left\{\left(\left(t_1,\theta^{(1)}\right),...,\left(t_N,\theta^{(N)}\right)\right),\\ \varphi_N\left(z_1,...,z_N;x\right)\right\}}}\ \sup_{f\in F}\left\|f-\varphi_N\left(R(f;t_1,\theta^{(1)}),...,R(f;t_N,\theta^{(N)});x\right)\right\|_{L^\infty(U)}. \qquad (2)$$

В качестве функциональных классов рассматриваются классы Соболева $W_2^r(U)$ и Коробова $Q_2^r(U)$.

Класс Соболева $W_2^r(U)(r>0)$ есть множество всех 1-периодических по каждой переменной функций $f(x)=f(x_1,x_2)$, которые вместе со своими частными производными до порядка r включительно принадлежат $L^2(U)$ и для которых выполнено неравенство

$$\|f\|_{W_2^r(U)}\equiv\|f\|_{L^2(U)}+\left\|\frac{\partial^r f}{\partial x_1^r}\right\|_{L^2(U)}+\left\|\frac{\partial^r f}{\partial x_2^r}\right\|_{L^2(U)}\le 1 .$$

Также мы будем использовать пространство $W_2^r[0,1]^2$, состоящее из всех 1-периодических по каждой переменной функций $f(x)=f(x_1,x_2)$, которые вместе со своими частными производными до порядка r включительно принадлежат $L^2[0,1]^2$ и для которых выполнено неравенство

$$\|f\|_{W_2^r[0,1]^2} \equiv \|f\|_{L^2[0,1]^2} + \left\|\frac{\partial^r f}{\partial x_1^r}\right\|_{L^2[0,1]^2} + \left\|\frac{\partial^r f}{\partial x_2^r}\right\|_{L^2[0,1]^2} \le 1 .$$

Класс Коробова $Q_2^r(U)$ есть сужение на круг U функций из классов Коробова $E_2^r(0,1)^2$, под которыми понимается множество всех 1-периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, x_2)$, таких, что ее тригонометрические коэффициенты Фурье

$$\hat{f}(m) = \hat{f}(m_1, m_2) = \int\limits_{[0,1]^2} f(x_1, x_2) \cdot e^{-2\pi i(m_1 x_1 + m_2 x_2)} dx_1 dx_2, \left(m = (m_1, m_2) \in Z^2\right)$$

удовлетворяют неравенству

$$\left|\hat{f}(m_1, m_2)\right| \le \frac{1}{\left(\overline{m_1} \cdot \overline{m_2}\right)^r},$$

где используется обозначение $\overline{u} = \max(1, |u|)$.

Основной результат и его доказательство

Нами доказана следующая

Теорема 1. Пусть дано число $r > 1$ и $2 \le q < \infty$. Тогда справедливы соотношения

$$\delta_N(R_N; f; W_2^r(U))_{L^\infty(U)} >> N^{\left(-\frac{r}{2}+\frac{1}{2}\right)}; \quad (3)$$

$$\delta_N(R_N; f; W_2^r(U))_{L^q(U)} >> N^{-\frac{r}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)}; \quad (4)$$

$$\delta_N(R_N; f; Q_2^r(U))_{L^\infty(U)} >> N^{\left(-r+\frac{1}{2}\right)}, \quad (5)$$

где константы в неравенствах (3) и(5) зависит только от r, а в (4) от r и q.

Данная теорема для $W_2^r(U)$ при $q = 2$ была доказана Ф.Натеррером в [20].

Доказательство. Для доказательства оценок снизу (3) и (4), достаточно показать, что для любых N прямых $p_1, ..., p_N$ найдется функция $g \in W_2^r(U)$, у которой преобразования Радона вдоль этих прямых равны 0 и соответственно

$$\frac{\|g\|_{L^\infty(U)}}{\|g\|_{W_2^r(U)}} \gg N^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{2}}; \quad (6)$$

$$\frac{\|g\|_{L^q(U)}}{\|g\|_{W_2^r(U)}} \gg N^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}. \quad (7)$$

Существование такой функции следует из оценки снизу в теореме 1 из [10]. Действительно, там было показано, что для любых линейных функционалов $l_1,...,l_2$ найдется функция $f \in W_2^r[0,1]^2$, такая, что

$$\|f\|_{W_2^r[0,1]^2} \le 1,$$

при некотором $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in [0,1]^2$

$$|f(\zeta)| = \|f\|_{L^\infty[0,1]^2} >> N^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{2}},$$

$$\|f\|_{L^q[0,1]^2} \ge \|f\|_{L^q(I)} \gg N^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$

Здесь, мы в качестве функционалов $l_1,...,l_2$ возьмем значения интегралов вдоль заданных N прямых:

$$l_k(f) = \int\limits_{p_k \cap U} f ds, (k = 1,\dots,N).$$

Пусть функция g есть сужение f на область U. Стало быть, первое условие

$$\int\limits_{p_k \cap D} g ds = 0$$

выполняется тривиальным образом. Также легко проверить и другие условия.

Действительно, $g \in W_2^r(U)$ и для некоторого числа $c = c(r)$ выполнено неравенство

$$\|g\|_{W_2^r(U)} \le c, \tag{8}$$

так как область U можно покрыть конечным числом единичных квадратов.

Далее отметим, что можно считать, что $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in U$, так как если $\zeta \notin U$, то $(\zeta_1 - 1, \zeta_2 - 1) \in U$, это следует из несложных вычислений.

Имеем $0 \le \zeta_1 \le 1, 0 \le \zeta_2 \le 1$ и $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 > 1$, стало быть

$$(\zeta_1 - 1)^2 + (\zeta_2 - 1)^2 = 2 - \left(2\zeta_1 - \zeta_1^2\right) - \left(2\zeta_2 - \zeta_2^2\right) \le 2 - \left(\zeta_1^2 + \zeta_2^2\right) \le 1.$$

Следовательно, при необходимости, учитывая 1- периодичность функции f, получаем неравенство

$$\|g\|_{L^\infty(U)} = \|f\|_{L^\infty[0,1]^2} \gg N^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{2}},$$

что в совокупности с (8) дает нам выполнение неравенства (6).

Аналогично, в силу того, что $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2 \subset U$,

$$\|g\|_{L^q(U)} \ge \|f\|_{L^q\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2} = \|f\|_{L^q[0,1]^2} \gg N^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{q}},$$

что в совокупности с (8) дает нам выполнение неравенства (7).

Таким образом, оценка снизу для классов Соболева доказана.

Для доказательства оценки снизу погрешности восстановления функций из класса Коробова $Q_2^r(U)$ покажем, что имеет место вложение $W_2^{2r}[0,1]^2 \subset E_2^r$. Действительно, пусть $f \in W_2^{2r}[0,1]^2$. Тогда, используя соотношения между коэффициентами Фурье функций и ее производных, получаем

$$\sum_{(m_1,m_2)\in Z^2} |f(m_1,m_2)|^2 \cdot (\overline{m_1} + \overline{m_2})^{4r} \le c,$$

отсюда следует, что

$$\left|\hat{f}(m_1,m_2)\right| \le \frac{c}{(\overline{m_1} + \overline{m_2})^{2r}}.$$

Далее, используя неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом $a+b \ge 2\sqrt{ab}$, имеем

$$(\overline{m_1} + \overline{m_2})^{2r} \ge 2^r \cdot (\overline{m_1} + \overline{m_2})^r.$$

Таким образом,

$$\left|\hat{f}(m_1,m_2)\right| \le \frac{c_2(r)}{(\overline{m_1} \cdot \overline{m_2})^r},$$

что означает справедливость вложения $W_2^{2r}[0,1]^2 \subset E_2^r$.

Теперь воспользуемся оценкой снизу, полученной нами для случая восстановления из пространств Соболева. А именно, нами была построена функция $g \in W_2^{2r}(U)$, которая есть сужение некоторой $f \in W_2^{2r}[0,1]^2$ на область U, что в силу определения означает $g \in Q_2^r(U)$, и такая, что преобразования Радона вдоль этих прямых равны 0 и

$$\|g\|_{L^\infty} \gg N^{-r+\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, получены оценки снизу для погрешности восстановления функций из классов Соболева $W_2^r(U)$ и Коробова $Q_2^r(U)$ и теорема доказана.

Заключение

В Казахстане была поставлена задача К(В)П о нахождении оптимальных порядков восстановления функций. Для многих конкретных случаев поставленная задача была решена на основе оригинальных методов построения агрегатов приближения вкупе с методами доказательств их неулучшаемости. Планируется нахождение оптимальных порядков задач восстановления функций по значениям преобразования Радона функций из различных классов. Последующая вычислительная реализация имеет весьма широкую сферу применения в науке и технике, в частности в компьютерной томографии. Основные результаты Проекта (промежуточные) периодически обсуждались на научных семинарах Института теоретической математики и научных вычислений ЕНУ им. Л.Н. Гумилева.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Темиргалиев Н.* Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам анализа. Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразования рядов Фурье // Вестник Евразийского ун-та им. Л.Н. Гумилева. 1997. № 3. С. 90–144.
2. *Темиргалиев Н.* О задаче восстановления по неточной информации // Вестн. Евразийск. нац. ун-та им. Л.Н. Гумилева. 2004. № 1. С. 202–209.
3. *Темиргалиев Н.* Математика: Избранное. Наука. Астана: Изд-во ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, 2009.
4. *Темиргалиев Н.* Компьютерный (вычислительный) поперечник. Алгебраическая теория чисел и гармонический анализ в задачах восстановления (метод квази-Монте-Карло). Теория вложений и приближений. Ряды Фурье // Вестник Евразийского нац. ун-та им. Л.Н. Гумилева. 2010. Спец. выпуск, посвященный научным достижениям математиков ЕНУ им. Л.Н. Гумилева. С. 1–194.
5. *Темиргалиев Н.* Непрерывная и дискретная математика в органическом единстве в контексте направлений исследований. Астана: ИТМиНВ, 2012.
6. *Темиргалиев Н.*, *Жубанышева А.Ж.* Теория приближений, Вычислительная математика и численный анализ в новой концепции в свете Компьютерного (вычислительного) поперечника // Вестник Евразийского нац. ун-та им. Л.Н. Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика. 2018. Т. 124. № 3. С. 8–88.
7. *Темиргалиев Н.*, *Жубанышева А.Ж.* Компьютерный (вычислительный) поперечник в контексте общей теории восстановления // Изв. вузов. Математика. 2019. № 1. С. 89–97.
8. *Темиргалиев Н.*, *Жубанышева А.Ж.* Порядковые оценки норм производных функций с нулевыми значениями на линейных функционалах и их применения // Изв. вузов. Матем. 2017. № 3. С. 89–95.
9. *Ажгалиев Ш.У.*, *Темиргалиев Н.* Информативная мощность всех линейных функционалов при восстановлении функций из классов H_p^ω // Матем. сб. 2007. Т. 198. № 1. С. 3–20.
10. *Ажгалиев Ш.У.*, *Темиргалиев Н.* Об информативной мощности линейных функционалов // Матем. заметки. 2003. Т. 73. № 6. С. 803–812.
11. *Коробов Н.М.* Тригонометрические суммы и их приложения. М.: Наука, 1989.
12. *Фролов К.К.* Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231. № 4. С. 818–821.
13. *Смоляк С.А.* Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // ДАН СССР. 1963. Т. 148. № 5. С. 1042–1045.
14. *Шерниязов К.* Приближенное восстановление функций и решений уравнения теплопроводности с функциями распределения начальных температур из классов E, SW и B: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Алматы: КазГУ им. аль-Фараби, 1998.
15. *Deans S.R.* The Radon Transform and some of its Applications. Wiley, 1983. DOI: 10.5281/ZENODO.1060231.
16. *Naterrer F.* The Mathematics of Computerized Tomography. Classics in Applied Mathematics 32. SIAM, 2001.
17. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии: пер с англ. М.: Мир, 1990. 288 с.
18. *Хелгасон С.* Преобразование Радона: пер. с англ. М.: Мир, 1983. 152 с.
19. *Herman G.T.* Fundamentals of Computerized Tomography: Image Reconstruction from Projection. 2nd ed. Springer, 2009. 85 c.
20. *Naterrer F.* A Sobolev Space Analysis of Picture Reconstruction // SIAM J. Applied Mathematics. 1980. V. 39. No. 3. P. 402–411.
21. *Marr R.* On the reconstruction of a function on a circular domain from a sampling of its line integrals // J. Math. Anal. Appl. 1974. V. 45. No. 2. P. 357–374.
22. *Logan B. and Shepp L.* Optimal reconstruction of a function from its projections // Duke Math. J. 1975. V. 42. No. 4. P. 645–659.
23. *Georgieva I.*, *Hofreither C.*, *Koutschan C.*, *Pillwein V.*, *Thanatipanonda T.* Harmonic interpolation based on Radon projections along the sides of regular polygons // Cent. Eur. J. Math. 2013. V. 11(4). P. 609–620. DOI: 10.2478/s11533-012-0160-1.

24. *Осколков К.И.* Рельефная аппроксимация, анализ Фурье – Чебышева и оптимальные квадратурные формулы // Труды МИАН. 1997. Т. 219. P. 269–285. URL: mi.mathnet.ru/rus/tm/v219/p269.
25. *Maiorov V.E.* On best approximation by ridge functions // J. Approximation Theory. 1999. V. 99. No. 1. P. 68–94. DOI: 10.1006/jath.1998.3304.
26. *Maiorov V.E.*, *Oskolkov K.I.*, *Temlyakov V.N.* Gridge approximation and Radon compass // Approximation Theory: A volume dedicated to B. Sendov. B. Bojanov (Ed.). Sofia: DARBA. 2002. P. 284–309. DOI: 10.21236/ADA638384
27. *Konovalov V.N.*, *Leviatan D.*, *Maiorov V.E.* Approximation of Sobolev classes by polynomials and ridge functions // J. Approximation Theory. 2009. V. 159. P. 97–108. DOI: 10.1016/j.jat.2008.10.009
28. *Temlyakov V.N.* On approximate recovery of functions with bounded mixed derivative // J. Complexity. 1993. No. 9. P. 41–59.
29. *Смоляк С.А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: дис. ... канд. физ.- мат. наук. М.: Орг. п/я 2325, 1965. С. 118–119.
30. *Кудрявцев С.Н.* Наилучшая точность восстановления функций конечной гладкости по их значениям в конечном числе точек // Изв. РАН. Сер. Матем. 1998. Т. 62. № 1. С. 21–58.

Статья поступила 03.04.2019 г.

Azhgaliyev Sh., Abikenova Sh. (2020) ON THE LOWER BOUND IN THE PROBLEM OF APPROXIMATE RECONSTRUCTION OF FUNCTIONS BY VALUES OF THE RADON TRANSFORM. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 66. pp. 24–34

DOI 10.17223/19988621/66/2

Keywords: function, reconstruction, Radon transforms, Sobolev class, Korobov class, lower bounds.

In this paper, we study the problem of function reconstruction by values of Radon transforms within the framework of the Computational (Numerical) Diameter (C(N)D) approach. The meaning of C(N)D is to solve two independent problems: obtaining lower bounds of the reconstruction error by exact information and specifying the computing tool that implements the upper bounds (preferably coinciding with the lower bound up to constants).

The C(N)D approach is a mathematical model of experiments for describing various processes (physical, chemical, technical, etc.). An important role in setting up such experiments is played by types of measuring instruments, which is reflected in C(N)D as types of functionals. The next important point is the choice of location and balancing of instruments, i.e. selection of functionals' parameters. The final step is to build an optimal computing tool using the obtained data.

The most studied types of functionals are function values at points and Fourier coefficients. An important difference of this work from previously obtained results is the study of the approximation capabilities of another type of functionals – Radon transforms, i.e. mathematical model of the use of tomography and similar technologies.

This paper is devoted to obtaining lower bounds for the error in reconstructing functions from Sobolev and Korobov spaces.

Financial support. This research is suppoted by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP05132938).

AMS 2020 Mathematical Subject Classification: 65R10

Sholpan K. ABIKENOVA (Candidate of Physics and Mathematics, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Republic of Kazakhstan). E-mail: abikesh29@gmail.com

Shapen U. AZHGALIYEV (Candidate of Physics and Mathematics, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Republic of Kazakhstan). E-mail: nepash@mail.ru

REFERENCES

1. Temirgaliyev N. (1997) Teoretiko-chislovyye metody i teoretiko-veroyatnostnyy podkhod k zadacham analiza. Teoriya vlozheniy i priblizheniy, absolyutnaya skhodimost' i preobrazovaniya ryadov Fur'ye [Number-theoretical methods and probability-theoretical approach to problems of analysis. Theory of immersions and approximations, absolute convergence, and transformations of Fourier series]. *Vestnik Evraziyskogo universiteta im. L.N. Gumileva – Eurasian Mathematical Journal*. 3. pp. 90–144.
2. Temirgaliyev N. (2004) O zadache vosstanovleniya po netochnoy informatsii [On the problem of recovery by inexact information]. *Vestnik Evraziyskogo universiteta im. L.N. Gumileva – Eurasian Mathematical Journal*. 1. pp. 202–209.
3. Temirgaliyev N. (2009) *Matematika*: *Izbrannoye. Nauka*. Astana: Gumilev Eurasian National University.
4. Temirgaliyev N. (2010) Komp'yuternyy (vychislitel'nyy) poperechnik. Algebraicheskaya teoriya chisel i garmonicheskiy analiz v zadachakh vosstanovleniya (metod kvazi-Monte-Karlo). Teoriya vlozheniy i priblizheniy. Ryady Fur'ye [Computer (numerical) diameter. Algebraic theory of numbers and harmonic analysis in problems of recovery (quasi-Monte Carlo method). Theory of immersions and approximations. Fourier series] *Vestnik Evraziyskogo universiteta im. L.N. Gumileva – Eurasian Mathematical Journal*. Special issue. pp. 1–194.
5. Temirgaliyev N. (2012) Nepreryvnaya i diskretnaya matematika v organicheskom edinstve v kontekste napravleniy issledovaniy [Continuous and discrete mathematics in the harmonious integrity in the context of investigation directions]. Astana: Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations.
6. Temirgaliyev N. Zhubanysheva A. Zh. (2018) Teoriya priblizheniy, vychislitel'naya matematika i chislennyy analiz v novoy kontseptsii v svete komp'yuternogo (vychislitel'nogo) poperechnika [Theory of approximations, computational mathematics, and numerical analysis in a new conception in the light of computer (computational) diameter]. *Vestnik Evraziyskogo universiteta im. L.N. Gumileva – Eurasian Mathematical Journal*. 124(3). pp. 8–88.
7. Temirgaliyev N., Zhubanysheva A.Zh. (2019) Computational (Numerical) diameter in a context of general theory of a recovery. *Russian Mathematics*. 63(1). pp. 79–86.
8. Temirgaliyev N., Zhubanysheva A. Zh. (2017) Order estimates of the norms of derivatives of functions with zero values on linear functionals and their applications. *Russian Mathematics*. 61(3). pp. 77–82.
9. Azhgaliyev Sh.U., Temirgaliyev N. (2007) Informativeness of all the linear functionals in the recovery of functions in the classes H_p^ω . *Sbornik*: *Mathematics*. 198(11). pp. 1535–1551.
10. Azhgaliyev Sh.U., Temirgaliyev N. (2003) Informativeness of linear functionals. *Mathematical Notes*. 73(6). pp. 759–768.
11. Korobov N.M. (1989) Trigonometricheskiye summy i ikh prilozheniya [Trigonometric sums and their applications]. Moscow: Nauka.
12. Frolov K.K. (1976) Upper error bounds for quadrature formulas on function classes. *Soviet Mathematics Doklady*. 17. pp. 1665–1669.
13. Smolyak S.A. (1963) Quadrature and Interpolation Formulas for Tensor Products of Certain Classes of Functions. *Soviet Mathematics Doklady*. 4. Pp.240–243.
14. Sherniyazov K. (1998) *Priblizhennoye vosstanovleniye funktsiy i resheniy uravneniya teploprovodnosti s funktsiyami raspredeleniya nachal'nykh temperatur iz klassov E, SW i B* [Approximate reconstruction of functions and solutions of the thermal conductivity equation with initial temperature distribution functions from classes *E*, *SW*, and *B*]. Dissertation. Al-Farabi Kazakh National University.
15. Deans S.R. (1983) *The Radon Transform and Some of Its Applications*. Wiley. DOI: 10.5281/ZENODO.1060231.
16. Natterer F. (2001) *The Mathematics of Computerized Tomography. Classics in Applied Mathematics 32*. SIAM.

17. Natterer F. (1980) The Identification Problem in Emission Computed Tomography. *Mathematical Aspects of Computerized Tomography*. *Proceedings*, *Oberwolfach*, *February 10–16*, *1980*. pp. 45–56. Springer.
18. Helgason S. (1980) *The Radon Transform*. Birkhäuser.
19. Herman G.T. (2009) *Fundamentals of Computerized Tomography*: *Image Reconstruction from Projection*. 2nd edition. Springer.
20. Naterrer F. (1980) A Sobolev Space Analysis of Picture Reconstruction. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 39(3). pp. 402–411.
21. Marr R. (1974) On the reconstruction of a function on a circular domain from a sampling of its line integrals. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 45(2). pp. 357–374.
22. Logan B., Shepp L. (1975) Optimal reconstruction of a function from its projections. *Duke Mathematical Journal*. 42(4). pp. 645–659.
23. Georgieva I., Hofreither C., Koutschan C., Pillwein V., Thanatipanonda T. (2013) Harmonic interpolation based on Radon projections along the sides of regular polygons. *Central European Journal of Mathematics*. 11(4). pp. 609–620. DOI: 10.2478/s11533-012-0160-1.
24. Oskolkov K.I. (1997) Ridge approximation, Chebyshev–Fourier analysis and optimal quadrature formulas. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 219. pp. 265–280.
25. Maiorov V.E. (1999) On best approximation by ridge functions, *Journal of Approximation Theory*. 99. pp. 68–94. DOI: 10.1006/jath.1998.3304.
26. Maiorov V.E., Oskolkov K.I., Temlyakov V.N. (2002) Gridge approximation and Radon compass. *Approximation Theory*: *A volume dedicated to B. Sendov*. B. Bojanov (Ed.). Sofia: DARBA. pp. 284–309. DOI: 10.21236/ADA638384.
27. Konovalov V.N., Leviatan D., Maiorov V.E. (2009) Approximation of Sobolev classes by polynomials and ridge functions. *Journal of Approximation Theory*. 159. pp. 97–108. DOI: 10.1016/j.jat.2008.10.009.
28. Temlyakov V.N. (1993) On approximate recovery of functions with bounded mixed derivative. *Journal of Complexity*. 9(1). pp. 41–59.
29. Smolyak S.A. (1965) *Ob optimal'nom vosstanovlenii funktsiy i funktsionalov ot nikh* [On the optimal recovery of functions and functionals of them]. Dissertation. Moscow: Post office box 2325.
30. Kudryavtsev S.N. (1998) The best accuracy of reconstruction of finitely smooth functions from their values at a given number of points. *Izvestiya*: *Mathematics*. 62(1). pp. 19–53.

Received: April 3, 2019