

УДК 532.5: 532.13

DOI 10.17223/19988621/66/11

М.А. Сумбатян, Я.А. Бердник, А.А. Бондарчук

**ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА
В ЗАДАЧЕ ОБТЕКАНИЯ ТОНКОЙ ПЛАСТИНКИ
ПОТОКОМ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ¹**

Предлагаемый итерационный метод состоит в решении на каждом шаге интегрального уравнения относительно функции вязкого трения на пластинке. Вид интегрального уравнения на каждой итерации определяется с помощью аналитических преобразований. Сравнение с прямым численным методом в среде ANSYS CFX показывает, что итерационный процесс сходится для любых чисел Рейнольдса и несколько первых итераций обеспечивают высокую точность.

Ключевые слова: *уравнения Навье – Стокса, итерационный метод, вязкая жидкость, тонкая пластинка, интегральные уравнения.*

В данной статье рассматривается задача обтекания однородным стационарным потоком вязкой несжимаемой жидкости тонкой прямолинейной пластинки, расположенной вдоль набегающего потока. В 1904 году Людвиг Прандтль предложил теорию пограничного слоя, которая заложила основу для решения задач об обтекании объектов различных форм потоком вязкой жидкости. Ричард Блазиус разработал математическую модель для вычисления силы сопротивления с помощью теории пограничного слоя. Первое решение задачи обтекания плоской пластинки вязкой жидкостью при нулевом угле атаки было получено им в 1908 году в контексте теории пограничного слоя [1, 2]. В первой половине двадцатого века интерес к данной проблеме проявили многие известные ученые в области гидромеханики, в частности Ричард фон Мизес, Уолтер Толлмин, Герман Шлихтинг, Сидни Голдштейн, Теодор фон Карман [3]. Проведённые в 1940-е годы эксперименты показали небольшие расхождения между экспериментальными данными и решением Блазиуса для больших чисел Рейнольдса и значительные расхождения для малых и средних чисел Рейнольдса. За последние несколько десятилетий интерес к задаче возрос вследствие развития компьютерных программ и численных методов [4]. Исследователи используют параллельные вычислительные платформы [5] и современные программы для расчета задач методом конечных элементов, такие, как ANSYS [6], ABAQUS и другие.

Несмотря на то, что исследованием этой задачи занимаются с начала двадцатого века, она всё ещё не решена полностью. Необходимо отметить, что в настоящее время нет общих теорий для всех чисел Рейнольдса. Между тем, эта задача имеет широкое практическое применение при конструировании крыльев самолёта или лопастей ветрогенераторов. По этим причинам продолжается развитие эффективных подходов к данной задаче с использованием как полуаналитических, так и вычислительных методов, на основе решения уравнений Навье – Стокса.

¹ Работа выполнена в рамках базовой части государственного задания Министерства образования и науки РФ № 9.5794.2017/БЧ.

кса [7, 8]. Отличительной особенностью данной работы является новый подход к решению задачи, который позволяет построить эффективное решение в широком диапазоне изменения чисел Рейнольдса. В настоящее время решение Блазиуса считается классическим для больших чисел Рейнольдса, поэтому мы сравниваем с ним как результаты, полученные с помощью предложенного итерационного метода, так и результаты в среде ANSYS CFX. Для малых чисел Рейнольдса полученные на нескольких итерациях решения сравниваются с решением Харрисона – Файлона [9].

1. Постановка задачи и основные гипотезы

Исследуется обтекание тонкой прямолинейной пластинки длиной l безграничным однородным потоком вязкой несжимаемой жидкости. Задача исследуется в двумерном приближении. Скорость U_0 набегающего потока постоянна. Основной искомой величиной является полная сила трения, действующая на пластинку. В данной работе предлагается подход, основанный на последовательных приближениях по возмущениям скорости.

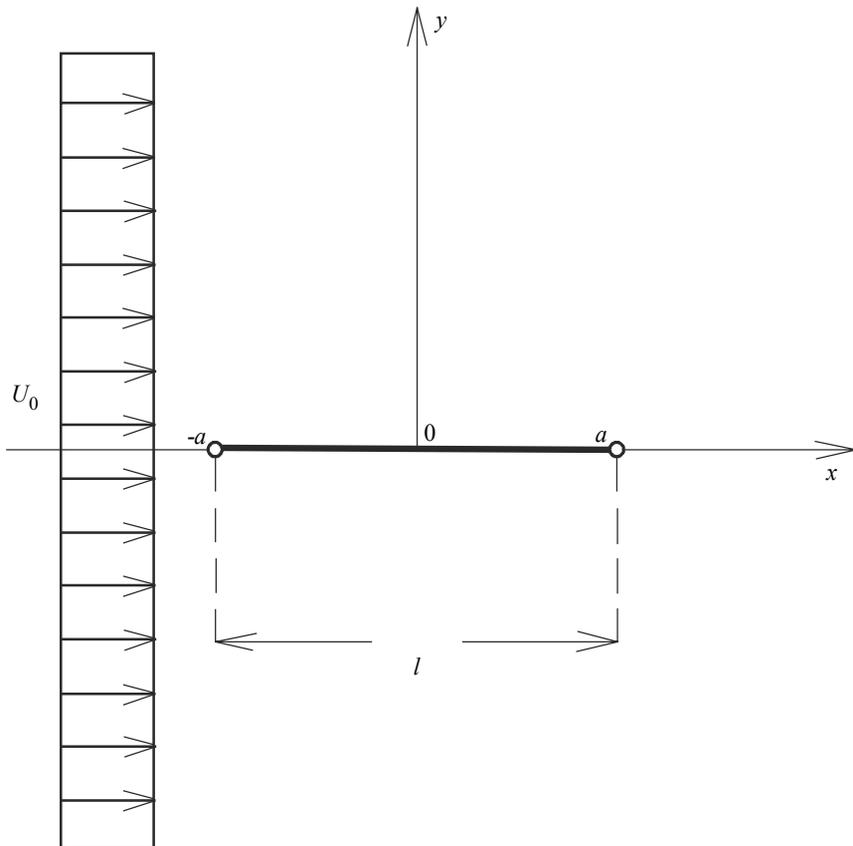


Рис. 1. Обтекание плоской пластинки длиной $l = 2a$ набегающим потоком вязкой жидкости со скоростью U_0
Fig. 1. Oncoming flow of a viscous fluid around a flat plate with a length of $l = 2a$ at velocity U_0

Течение жидкости рассматривается в декартовой системе координат Oxy , где ось Oy направлена по нормали к поверхности пластинки, ось Ox – вдоль набегающего потока (рис. 1). Пластинка занимает интервал $(-a, a)$ на оси Ox , где $a = l/2$. В силу симметрии течения рассматривается только верхняя полуплоскость. Течение жидкости полагается стационарным и описывается уравнением неразрывности и уравнениями Навье – Стокса:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \\ v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - \nu \Delta v_x + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} - \nu \Delta v_y + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где ρ – массовая плотность жидкости; ν – коэффициент кинематической вязкости; p – гидродинамическое давление; v_x и v_y – продольная и поперечная компоненты вектора скорости соответственно.

Граничные условия задачи имеют следующий вид:

1) условия прилипания жидкости на поверхности пластинки:

$$v_x = v_y = 0 \text{ при } y = 0, |x| \leq a; \quad (2)$$

2) условия симметрии и отсутствия трения вне пластинки:

$$v_y = 0, \partial v_x / \partial y \text{ при } y = 0, |x| > a; \quad (3)$$

3) условия на бесконечности:

$$\text{при } y \rightarrow +\infty, x \in (-\infty, +\infty): v_y \rightarrow 0, v_x \rightarrow U_0. \quad (4)$$

2. Построение основного алгоритма. Первая итерация

Продемонстрируем предлагаемый итерационный метод последовательных приближений для первой итерации. Представим продольную и поперечную компоненты скорости в виде суммы скорости основного потока и скорости малых на его фоне искомым возмущений со штрихами:

$$\begin{cases} v_x(x, y) = U(x, y) + v'_x(x, y) \\ v_y(x, y) = V(x, y) + v'_y(x, y) \end{cases} \quad (5)$$

При этом количество штрихов над функцией будет соответствовать номеру итерации.

При введении функции тока $\psi = \psi(x, y)$ следующим образом:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (6)$$

выражение для функции тока представляется аналогично разложению скоростей (5) на первой итерации: $\psi(x, y) = \Psi(y) + \psi'(x, y)$, $\Psi(y) = U_0 y$. После исключения давления из системы (1) и с учётом приведённых выше представлений (5) и (6) получившееся уравнение линеаризуется по малым возмущениям скоростей. Вид полученного линейного дифференциального уравнения в частных производных одинаков для всех итераций:

$$-U \Delta V + U \frac{\partial \Delta \psi'}{\partial x} - \Delta V \frac{\partial \psi'}{\partial y} + V \Delta U + V \frac{\partial \Delta \psi'}{\partial y} - \Delta U \frac{\partial \psi'}{\partial x} - \nu \Delta^2 \Psi - \nu \Delta^2 \psi' = 0. \quad (7)$$

Рассмотрим первое приближение решения задачи. На нулевом шаге предполагается, что вектор скорости совпадает с $\{U_0, 0\}$. Таким образом, на первом шаге: $U(x, y) = U_0$, $V(x, y) = 0$. Заметим, что при построении первой итерации возмущение скорости вблизи пластинки, которое в силу условия прилипания равно $\{-U_0, 0\}$, не является величиной малой по сравнению со скоростью основного потока U_0 . Однако в интегральной метрике по достаточно большой области потока, охватывающей пластинку, возмущение будет малым по сравнению с аналогичной интегральной величиной от скорости U_0 . Ниже будет показано, что уже для первой итерации полная скорость имеет поведение, удовлетворяющее всем требуемым условиям.

К дифференциальному уравнению (7), имеющему упрощённый вид с учётом допущенных предположений, применяется преобразование Фурье по переменной x . Результатом является однородное обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) с постоянными коэффициентами, решаемое аналитически:

$$v \frac{d^4 \tilde{\psi}'(\alpha, y)}{dy^4} + (U_0 i \alpha - 2\nu \alpha^2) \frac{d^2 \tilde{\psi}'(\alpha, y)}{dy^2} + (\nu \alpha^4 - U_0 i \alpha^3) \tilde{\psi}'(\alpha, y) = 0, \quad (8)$$

где $\tilde{\psi}'(\alpha, y)$ – трансформанта Фурье функции $\psi'(x, y)$; α – параметр преобразования Фурье.

Решение ОДУ четвёртого порядка (8), удовлетворяющее граничному условию (4), содержит две произвольные постоянные:

$$\tilde{\psi}'(\alpha, y) = C_1 e^{-|\alpha|y} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{\nu \alpha^2 - U_0 i \alpha}{\nu}} y}. \quad (9)$$

Из условий (2), (3), в частности, следует, что ось Ox можно принять за нулевую линию тока, тогда $C_1 = -C_2$, следовательно

$$\tilde{\psi}'(\alpha, y) = C_2 \left(e^{-|\alpha|y} - e^{-\sqrt{\frac{\nu \alpha^2 - U_0 i \alpha}{\nu}} y} \right). \quad (10)$$

Второе граничное условие свяжем с вязким трением, если последнее временно считать известной функцией:

$$\mu \frac{\partial v'_x}{\partial y} \Big|_{y=0} = \begin{cases} 0, & |x| > a, \\ \tau'(x), & |x| \leq a, \end{cases} \quad (11)$$

где μ – коэффициент динамической вязкости, $\tau'(x)$ – функция вязкого трения на пластинке. Условие (11) определяет коэффициент в (10), именно: $C_2 = \nu \tilde{\tau}'(\alpha) / (i \mu \alpha U_0)$. В итоге первое граничное условие (2) для продольной компоненты возмущённой скорости дает

$$v'_x = -U_0 \sim \frac{\partial \Psi'}{\partial y} = -U_0 \quad (y=0, |x| \leq a),$$

что после применения обращения преобразования Фурье приводит к граничному интегральному уравнению относительно функции $\tau'(\xi)$ вида

$$\frac{\nu}{2\pi i \mu U_0} \int_{-a}^a \tau'(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\alpha| - \sqrt{\alpha^2 - \frac{i \alpha U_0}{\nu}}}{\alpha} \cdot e^{i \alpha (\xi - x)} d\alpha = -U_0, \quad |x| \leq a. \quad (12)$$

Похожее интегральное уравнение выведено в [10].

Следует отметить, что в ходе анализа свойств ядра интегрального уравнения (12) были выявлены следующие его свойства:

1) ядро не является ни чётным, ни нечётным, то есть решение интегрального уравнения (12) не обладает никаким видом симметрии;

2) ядро имеет стандартную логарифмическую особенность при $x \rightarrow \xi$. Таким образом, решение на концах пластинки имеет корневую особенность: при приближении к краям пластинки касательные напряжения неограниченно возрастают.

После того как функция $\tau'(\xi)$ найдена путем численного решения интегрального уравнения (12), на основе формулы (10) с уже найденным коэффициентом C_2 , в явном виде определяются компоненты продольной $v_x'(x, y)$ и поперечной $v_y'(x, y)$ скоростей потока на первом шаге итерации.

Полученное аналитически интегральное уравнение (12) решается методом коллокации, в итоге в дискретном виде оно приводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений функции τ в выбранной системе узлов, решаемой методом Гаусса. Важнейшими результатами численного расчёта являются значения силы трения W_1 , действующей на пластинку, однако легко также определить поле скоростей в произвольной точке потока.

3. Вторая и последующие итерации

На второй итерации искомые функции малых возмущений (обозначенные двумя штрихами) рассматриваются на фоне функций, найденных на первом шаге:

$$\begin{cases} v_x(x, y) = U_0 + v_x'(x, y) + v_x''(x, y) = U(x, y) + v_x''(x, y), \\ v_y(x, y) = v_y'(x, y) + v_y''(x, y) = V(x, y) + v_y''(x, y). \end{cases} \quad (13)$$

При этом на второй итерации функции $U(x, y)$, $V(x, y)$, как видно выше в соотношениях (13), получены из первой итерации и имеют вид $U(x, y) = U_0 + v_x'(x, y)$, $V(x, y) = v_y'(x, y)$.

По аналогии с первым шагом итерации, на второй итерации выписываем линейное уравнение в частных производных относительно возмущённой функции тока $\psi''(x, y)$. Далее «замораживаем» функции $U(x, y)$ и $V(x, y)$ по переменной x в полученном уравнении в частных производных и применяем к нему преобразование Фурье по переменной x . В результате получаем неоднородное линейное ОДУ четвёртого порядка с переменными коэффициентами, исследование которого производится теми же методами, что и на первой итерации [11].

Однако расчеты показывают, что устойчивого счета практически с той же точностью при построении второй итерации можно добиться в упрощенной трактовке. Она основана на том, что при больших числах Рейнольдса длина интервалов погранслоя решения вблизи концов пластинки асимптотически мала, и в первом приближении концы можно отодвинуть на бесконечность. В этом случае «внешнее» решение вне пограничных слоёв не зависит от переменной x , поэтому в простейшем случае приближение для второй итерации можно построить, считая, что все функции уравнения (7) для данной итерации не зависят от x . В этом случае приходим к следующей краевой задаче для ОДУ четвёртого порядка с переменными коэффициентами

$$\frac{d^4 \psi''}{dy^4} - \frac{V(y)d^3 \psi''}{\nu dy^3} + \frac{1}{\nu} \frac{d^2 V(y)d \psi''}{dy^2} = -\frac{U(y)d^2 V(y)}{\nu dy^2} + \frac{V(y)d^2 U(y)}{\nu dy^2} - \frac{d^3 U(y)}{dy^3} \quad (14)$$

с краевыми условиями вида

$$\psi''(y)|_{y=0} = 0; \quad \frac{d\psi''(y)}{dy}|_{y=0} = 0; \quad (15)$$

$$\psi''(y)|_{y \rightarrow +\infty} \rightarrow 0; \quad \frac{d\psi''(y)}{dy}|_{y \rightarrow +\infty} \rightarrow 0, \quad (16)$$

которая решается методом стрельбы с использованием метода Рунге-Кутты четвертого порядка. После того, как система (14) – (16) решена, вязкое трение на пластинке находится по формуле $\tau''(x)/\mu = d^2\psi''(y)/dy^2|_{y=0}$, где $\tau''(x)$ – возмущенная функция вязкого трения на фоне функции $\tau'(x)$, построенной в первом приближении.

Коэффициенты в виде функций $U(y)$, $V(y)$ и их производных в (14) находятся из первого приближения. При этом интегралы в бесконечных пределах по переменной α берутся аналитически, с применением методов, описанных в [12 – 14]. Это существенно облегчает дальнейшее решение задачи, так как время вычисления функций $U(y)$, $V(y)$ и их производных сокращается с нескольких часов в случае использования квадратурных формул до нескольких секунд. В итоге эти функции представляются следующим образом:

$$U(y) = \frac{1}{2\pi\rho U_0} \int_{-a}^a \tau'(\xi) \left(be^{-\frac{b\xi}{2}} \left(\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + y^2}} K_1\left(\frac{b}{2}\sqrt{\xi^2 + y^2}\right) - K_0\left(\frac{b}{2}\sqrt{\xi^2 + y^2}\right) \right) - \frac{2\xi}{\xi^2 + y^2} \right) d\xi + U_0; \quad (17)$$

$$V(y) = \frac{1}{2\pi\rho U_0} \int_{-a}^a \tau'(\xi) \left(\frac{2y}{\xi^2 + y^2} - \frac{bye^{-\frac{b\xi}{2}}}{\sqrt{\xi^2 + y^2}} K_1\left(\frac{b}{2}\sqrt{\xi^2 + y^2}\right) \right) d\xi, \quad (18)$$

где, $K_0(z)$ и $K_1(z)$ – функции Макдональда нулевого и первого порядка соответственно [13], $b = U_0/\nu$. Участвующие в уравнении (14) функции $d^2U(y)/dy^2$, $d^2V(y)/dy^2$ и $d^3U(y)/dy^3$ легко выписываются в аналогичном виде после взятия производных от функций Макдональда в формулах (17), (18).

Заметим, что построение решения на следующих итерациях происходит по той же схеме, что и при построении 2-й итерации.

При этом коэффициенты, входящие в уравнение (14) на текущей итерации, напрямую находятся в процессе решения этого уравнения методом Рунге-Кутты на предыдущей итерации, поскольку все они являются производными некоторого порядка от основной неизвестной функции. Более подробное решение данной задачи до второй итерации включительно для больших чисел Рейнольдса с использованием поправочных коэффициентов представлено в [15].

4. Анализ результатов численных расчетов

С целью тестирования точности предложенного в данной работе метода вводится в рассмотрение следующая безразмерная величина:

$$S = 0.664W / W_{Blaz}, \quad W_{Blaz} = 0.664\rho U_0^2 \sqrt{\frac{2av}{U_0}}, \quad (19)$$

где W – сила трения на одной стороне пластинки, полученная с помощью числен-

ных расчётов, W_{Blaz} – аналогичная величина, полученная Г. Блазиусом в аналитическом виде [2, 16]. Таким образом, значение безразмерного коэффициента трения S по Г. Блазиусу равно постоянной величине $S_{Blaz} = 0.664$ при любых значениях параметров α , ρ , ν , U_0 . Решение Г. Блазиуса получено в приближении тонкого пограничного слоя по теории Прандтля и справедливо в случае предельно больших чисел Рейнольдса Re . Полученное в данной работе решение сравнивается с решением Г. Блазиуса при различных числах Рейнольдса $Re = 2a U_0/\nu$ с помощью параметра S .

Далее сравним построенное решение не только с погранслоиным решением Блазиуса [16] для предельно больших чисел Рейнольдса, но и с решением Харрисона – Файлона (см. [9, с. 775]) для предельно малых чисел Рейнольдса, которое имеет вид

$$W = \frac{2\pi\mu U_0}{1 - \gamma - \ln(U_0 a/8\nu)}, \quad \gamma = 0.577216, \quad (20)$$

где γ – число Эйлера.

Таблица представляет расчёты, полученные от первой до десятой итерации. В той части, где таблица заканчивается на 4-й или 5-й итерации, это означает, что все дальнейшие итерации совпадают между собой. В той части, где таблица заканчивается на 10-й итерации, это означает, что результаты 9-й и 10-й итераций совпадают. Решение в рамках предложенного итерационного процесса сравнивается как с двумя предельными асимптотическими случаями, так и с прямым численным расчетом методом конечных объемов в среде ANSYS CFX.

Зависимость параметра S , рассчитанного различными методами, от числа Рейнольдса

Re	0.0001	0.001	0.01	0.1	1				
Лэмб [9]	50.65	19.67	8.055	3.614	1.966				
1-я итерация	50.63	19.66	8.051	3.610	1.932				
2-я итерация	50.72	19.69	8.064	3.616	1.964				
3-я итерация	50.71	19.69	8.063	3.615	1.963				
4-я итерация	50.71	19.69	8.063	3.615	1.963				
Re	1	3	5	10	20	50	70	100	150
Блазиус [2]	0.664	0.664	0.664	0.664	0.664	0.664	0.664	0.664	0.664
ANSYS	2.341	1.614	1.424	1.248	1.104	1.001	0.956	0.917	0.877
1-я итерация	1.932	1.582	1.476	1.371	1.298	1.234	1.217	1.202	1.188
2-я итерация	1.964	1.618	1.512	1.401	1.296	1.156	1.108	1.061	1.015
3-я итерация	1.963	1.617	1.512	1.400	1.296	1.156	1.104	1.049	0.990
4-я итерация	1.963	1.617	1.512	1.400	1.296	1.156	1.104	1.048	0.987
5-я итерация	1.963	1.617	1.512	1.400	1.296	1.156	1.104	1.048	0.986
Re	200	300	400	500	1000	1500	2000	5000	10000
Блазиус [2]	0.664	0.664	0.664	0.664	0.664	0.664	0.664	0.664	0.664
ANSYS	0.856	0.832	0.817	0.806	0.768	0.752	0.742	0.717	0.702
1-я итерация	1.180	1.170	1.164	1.160	1.151	1.147	1.144	1.138	1.135
2-я итерация	0.987	0.954	0.934	0.922	0.894	0.885	0.879	0.865	0.857
3-я итерация	0.951	0.903	0.875	0.856	0.818	0.806	0.797	0.776	0.765
4-я итерация	0.945	0.891	0.858	0.835	0.791	0.778	0.766	0.742	0.728
...
10-я итерация	0.943	0.886	0.851	0.825	0.775	0.761	0.747	0.719	0.704

Для расчетов в пакете ANSYS CFX использовалась структурированная сетка с гексаэдрическими элементами. Длина пластинки бралась 1 м. При этом размеры расчетной области составляли 6 м в продольном (по отношению к потоку и пластине) направлении и 2.5 м в поперечном, при толщине в 1 элемент (стандартный способ моделирования плоских задач). При этом, в силу симметрии, расчет выполнялся только для половины области (т.е. пластина была расположена в середине одной из продольных границ области). Количество элементов в сетке ~1 млн, характерный размер элементов вдали от пластины – 0.01 м, вблизи от пластины – 0.0001 м. На рис. 2 представлен график продольных скоростей, построенный предложенным методом и в программе ANSYS CFX, для трех средних значений числа Рейнольдса.

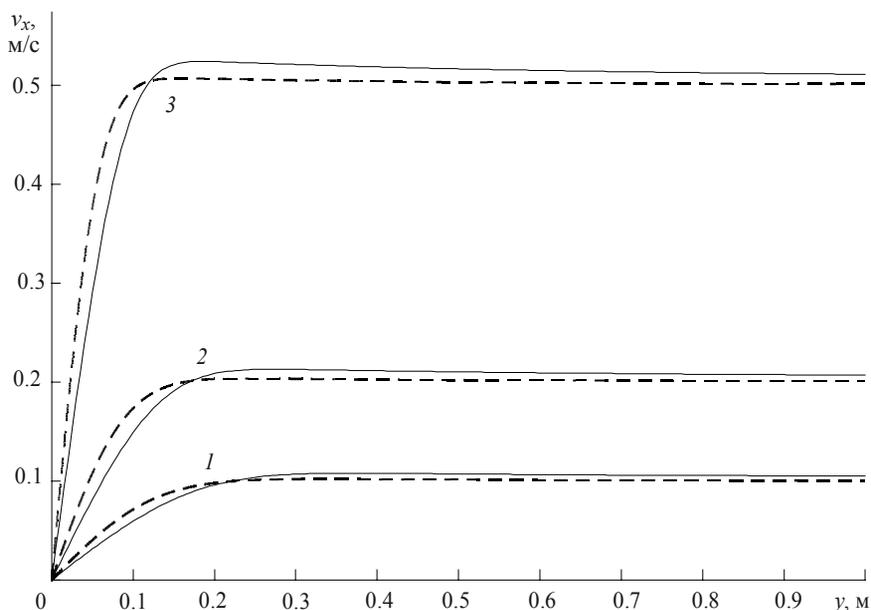


Рис. 2. Распределение продольной скорости v_x в зависимости от координаты y при $l = 2a = 1$ м, $\rho = 1$ кг/м³, $\nu = 0.001$ м²/с при различных значениях U_0 (м/с). Сплошные линии соответствуют расчету в среде ANSYS CFX, пунктирные линии – методу, предложенному авторами: линии 1 – $U_0 = 0.1$ м/с ($Re = 100$), линии 2 – $U_0 = 0.2$ м/с ($Re = 200$), линии 3 – $U_0 = 0.5$ м/с ($Re = 500$)

Fig. 2. Distribution of the longitudinal velocity v_x versus y -coordinate at $l = 2a = 1$ m, $\rho = 1$ kg/m³, $\nu = 0.001$ м²/s, and various U_0 (m/s). Solid lines correspond to the calculations obtained using the ANSYS CFX software; dotted lines, to the calculations obtained using the method proposed by the authors: $U_0 = (1)$ 0.1, (2) 0.2, and (3) 0.5 m/s at $Re = 100$, 200, and 500, respectively

Заключение

Таким образом, анализируя таблицу можно сделать следующие качественные выводы:

1) Для всех чисел Рейнольдса итерационный метод сходится довольно быстро. Решение с четырьмя значащими цифрами всегда достигается не более чем за 10 шагов итераций.

2) Если принять, что точность численной реализации предложенного алгоритма составляет три значащих цифры, то в случае очень малых чисел Рейнольдса (до значения $Re = 1$ включительно) данная точность достигается за три шага итерации, если сравнивать численный результат с асимптотическим решением [9]. При этом, как показывает сравнение с ANSYS CFX для случая $Re = 1$, сама асимптотика малых чисел Рейнольдса становится слишком грубой в области умеренно малых значений.

3) При выходе числа Рейнольдса в область средних значений построенное в данной работе решение становится больше точного (если решение методом конечных объемов считать точным). С дальнейшим ростом Re отклонение построенного решения от точного уменьшается.

4) Из предыдущих выводов следует, что предложенный в данной работе итерационный метод обеспечивает достаточно высокую точность в области малых и больших значений Re . Для средних значений Re точность метода ухудшается, однако при $Re \geq 400$ относительная погрешность не превышает 4 %, а при $Re \geq 1000$ погрешность предложенного метода менее 1 %.

5) Приближенная формула Блазиуса (19) является слишком грубой даже при предельно больших Re . Параметр S на её основе сильно отличается как от точного, так и от построенного в данной работе. В этой области два последних значения монотонно убывают с ростом Re , стремясь к значению Блазиуса 0.664. Однако даже для $Re = 2000$ погрешность теории Блазиуса составляет более 10 %.

6) Отметим также, что данный подход работает в реальном масштабе времени на персональном компьютере. В этом смысле он имеет несомненное преимущество перед решением ANSYS CFX, реализация которого требует нескольких часов, а для больших значений Re – до суток.

7) В связи с пунктом 4), подчеркнем еще раз, что предлагаемый итерационный метод всегда обеспечивает сходимость к некоторому решению. Не для всех значений Re это решение совпадает с точным. Однако можно показать, что первая итерация, сводящаяся к интегральному уравнению (12), при малых значениях Re дает явную асимптотику предельно-вязкого обтекания, если в уравнении (12) перейти к пределу при $U_0 \rightarrow 0$. Это соответствует физике процесса, при котором в предельно медленном течении, равномерно во всем потоке, возмущения скоростей малы на фоне основной продольной скорости потока U_0 . Итерационный метод строится так, как если бы эта же гипотеза выполнялась для всех чисел Рейнольдса. На деле она оказалась весьма точной и для предельно больших Re , что также можно было предсказать *a priori* с физической точки зрения. В самом деле, в условиях сверхмалой вязкости, если сохранять стационарность потока и ламинарность, то физически очевидно, что скорости во всей области потока, кроме тонкого погранслоя, будут близки к основной продольной скорости U_0 . Это дает надежду на сходимость итераций по малым возмущениям на фоне основного потока, что и подтвердилось в процессе численных расчетов. В области средних значений Re сходимость итерационного метода приводит лишь к некоторому приближенному решению. Однако максимальная погрешность в 15 % показывает, что основная физическая гипотеза, лежащая в основе итерационного процесса, и здесь выполняется с приемлемой точностью. К сожалению, для средних значений Re точность предлагаемого метода не может быть улучшена. Это подтверждается также и кривыми на рис. 2, соответствующими средним значениям $Re = 100, 200, 500$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Blasius H.* Boundary layers in fluids with little friction. Washington D.C.: National Advisory Committee for Aeronautics. 1950. 57 p.
2. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 848 с.
3. *Goldstein S.* Concerning some solutions of the boundary layer equations in hydrodynamics // *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.* 1930. V. 26. P. 1–30.
4. *McLachlan R.I.* The boundary layer on a finite flat plate // *Physics of Fluids A.* 1991. V. 3(2). P. 341–348.
5. *Kaiyuan L., Zhao Hua Y., Qiaohong L.* Some experiences of improving the speed of numerical Navier-Stokes solver using CUDA // *J. Algorithms and Computational Technology.* 2014. V. 8. P. 287–300.
6. *Brunschwig A., Rondi C.* Laminar flow across a flat plate // *J. Numerical Analysis for Engineering.* 2001. P. 1–18.
7. *Feng X.F., Tian Z.F., Dai S.Q.* Numerical solution of the incompressible Navier–Stokes equations with exponential type schemes // *Int. J. Computer Mathematics.* 2006. V. 82(9). P. 1167–1176.
8. *Quartapelle L.* Numerical solution of the incompressible Navier-Stokes equations. Basel: Birkhäuser-Verlag, 2012. 292 p.
9. *Lamb H.* Hydrodynamics. C.U.P., 1932. 738 p.
10. *Александров В.М., Коваленко Е.В.* Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 335 с.
11. *Бердник Я.А.* Итерационный метод для стационарных уравнений Навье – Стокса в задаче обтекания тонкой пластинки // *Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки.* 2014. № 1(179). С. 30–34.
12. *Sumbatyan, M.A., Scalia, A.* Equations of mathematical diffraction theory. CRC Press, 2005. 291 p.
13. *Abramowitz M., Stegun I.* Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. N.Y.: Dover, 1972. 1046 p.
14. *Bateman H., Erdélyi A.* Tables of integral transforms. N.Y.: McGraw-Hill, 1954. 451 p.
15. *Berdnik Y., Beskopylny A.* The approximation method in the problem on a flow of viscous fluid around a thin plate // *Aircraft Engineering and Aerospace Technology.* 2019. V. 91(6). pp. 807–813.
16. *Schlichting H.* Boundary-layer theory. N.Y.: Mc Graw-Hill, 1955. 535 p.

Статья поступила 12.06.2019 г.

Sumbatyan M.A., Berdник Ya.A., Bondarchuk A.A. (2020) AN ITERATIVE METHOD FOR THE NAVIER-STOKES EQUATIONS IN THE PROBLEM OF A VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID FLOW AROUND A THIN PLATE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 66. pp. 132–142

DOI 10.17223/19988621/66/11

Keywords: Navier–Stokes equations, iterative method, viscous fluid, thin plate, integral equations.

In this paper, the problem on a viscous fluid flow around a thin plate is considered using the exact Navier–Stokes equations. An iterative method is proposed for small velocity perturbations with respect to main flow velocities. At each iterative step, an integral equation is solved for a function of the viscous friction over the plate. The collocation method is used at each iteration step to reduce an integral equation to a system of linear algebraic equations, and the shooting method based on the classical fourth-order Runge-Kutta technique is applied. The solution obtained at each iteration step is compared with the Harrison–Filon solution at low Reynolds numbers, with the classical Blasius solution, and with the results computed using the direct numerical finite-volume method in the ANSYS CFX software for moderate and high Reynolds

numbers. The proposed iterative method converges in a few steps. Its accuracy is rather high for small and large Reynolds number, while the error can reach 15% for moderate values.

Financial support. The presented study was funded by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation in the framework of the basic part of the State task № 9.5794.2017/ БЧ.

Mezhlum A. SUMBATYAN (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation). E-mail: sumbat@math.rsu.ru

Yanina A. BERDNIK (Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation). E-mail: yaninaberdnik@mail.ru

Aleksey A. BONDARCHUK (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation). E-mail: melchior@list.ru

REFERENCES

- Blasius H. (1950) *Boundary Layers in Fluids with Little Friction*. Washington D.C.: National Advisory Committee for Aeronautics.
- Loytsyanskiy L.G. (1973) *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid and gas mechanics]. Moscow: Nauka.
- Goldstein S. (1930) Concerning some solutions of the boundary layer equations in hydrodynamics. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 26. pp. 1–30. DOI: 10.1017/S03050004100014997.
- McLachlan R.I. (1991) The boundary layer on a finite flat plate. *Physics of Fluids A*. 3(2). pp. 341–348. DOI: 10.1063/1.858143.
- Kaiyuan L., Zhaohua Y., Qiaohong L. (2014) Some experiences of improving the speed of numerical Navier-Stokes solver using CUDA. *Journal of Algorithms and Computational Technology*. 8. pp. 287–300. DOI: 10.1260/1748-3018.8.3.287.
- Brunschwig A., Rondi C. (2001) Laminar flow across a flat plate. *Journal of Numerical Analysis for Engineering*. pp. 1–18.
- Feng X.F., Tian Z.F., Dai S.Q. (2006) Numerical solution of the incompressible Navier–Stokes equations with exponential type schemes. *International Journal of Computer Mathematics*. 82(9). pp. 1167–1176. DOI: 10.1080/00207160500113249.
- Quartapelle L. (2012) *Numerical Solution of the Incompressible Navier-Stokes Equations*. Basel: Birkhäuser-Verlag.
- Lamb H. (1934) *Hydrodynamics*. Cambridge University Press.
- Aleksandrov V.M., Kovalenko E.V. (1986) *Zadachi mekhaniki sploshnykh sred so smeshannymi granichnymi usloviyami* [Problems of continuum mechanics with mixed boundary conditions]. Moscow: Nauka.
- Berdnik Ya.A. (2014) Iteratsionnyy metod dlya statsionarnykh uravneniy Nav'e-Stoksa v zadache obtekaniya tonkoy plastinki [An iterative method for the stationary Navier-Stokes equations in the problem on a flow around a linear plate]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki – Bulletin of Higher Education Institutes. North Caucasian Region. Natural Sciences*. 179(1). pp. 30–34.
- Sumbatyan M.A., Scalia A. (2005) *Equations of Mathematical Diffraction Theory*. CRC Press.
- Abramowitz M., Stegun I. (1972) *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York: Dover.
- Bateman H., Erdélyi A. (1954) *Tables of Integral Transforms*. New York: McGraw-Hill.
- Berdnik Ya., Beskopylny A. (2019) The approximation method in the problem on a flow of viscous fluid around a thin plate. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*. 91(6). pp. 807–813. DOI: 10.1108/AEAT-07-2018-0196.
- Schlichting H. (1955) *Boundary-layer Theory*. New York: Mc Graw-Hill.

Received: June 12, 2019