

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

**УПРАВЛЕНИЕ,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И ИНФОРМАТИКА**

**TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE**

Научный журнал

2020

№ 52

**Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере
массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия
(свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-29497 от 27 сентября 2007 г.)**

Подписной индекс в объединённом каталоге «Пресса России» 44031

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий,
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций
на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук»,
Высшей аттестационной комиссии

Founder – Tomsk State University

EDITORIAL BOARD

Alexander Gortsev – Editor-in-Chief, Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied Mathematics Department Tomsk State University. Tel: +73822529599

Valery Smagin – Deputy Editor-in-Chief, Doctor of Sc., Prof. of the Applied Mathematics Department Tomsk State University. Tel: +73822529599

Lyudmila Nezhelskaya – Executive Editor, Doctor of Sc., Prof. of the Applied Mathematics Department Tomsk State University. E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

Sergey Vorobeychikov – Doctor of Sc., Prof. of the System Analysis and Mathematical Modeling Department Tomsk State University

Vladimir Vishnevsky – Doctor of Sc., Prof. Head of the laboratory Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia).

Gennady Koshkin – Doctor of Sc., Prof. of the System Analysis and Mathematical Modeling Department Tomsk State University

Yury Kostyuk – Doctor of Sc., Prof. of the Theoretical Informatics Department Tomsk State University

Anjela Matrosova – Doctor of Sc., Prof. of the Programming Department Tomsk State University

Anatoly Nazarov – Doctor of Sc., Prof., Head of the Probability Theory and Mathematical Statistics Department Tomsk State University

Konstantin Samouylov – Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied Probability and Informatics Department RUDN University (Moscow, Russia)

Eugene Semenkina – Doctor of Sc., Prof. System Analysis and Operations Research Department Reshetnev Siberian State University of Science and Technology (Krasnoyarsk, Russia)

Sergey Sushchenko – Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied of Information Department Tomsk State University

Mais Farkhadov – Doctor of Sc., Head of the laboratory Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia).

Gurami Tsitsiasvili – Doctor of Sc., Prof., Chief researcher Institute for Applied Mathematics Far Eastern Branch of RAS, Prof. Far Eastern Federal University (Vladivostok, Russia)

Editorial address:

Institute of Applied Mathematics and Computer Science, unit of Applied Mathematics

National Research Tomsk State University

36 Lenina Avenue, Tomsk, 634050

Telephone / fax: +73822529599

E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

EDITORIAL COUNCIL

Ana Rosa Cavalli

PhD, Prof.
University VII
Paris, France

Vladimir Dombrovskii

Doctor of Sc., Prof.
Tomsk State University
Russia

Alexander Dudin

Doctor of Sc., Prof.
Belarusian State University
Minsk, Republic Belorussia

Enco Orsingher

PhD, Prof.
University of Rome
Italy

Paolo Prinetto

Prof.
Politechnic Institute
Torino, Italy

Gilbert Saporta

PhD, Prof.
Pierre and Marie Curie
University, Paris, France

Raimund Ubar

Doctor of Sc., Prof.
University of Technology
Tallinn, Estonia

Reindert Nobel

Doctor of Sc., Associate Prof.
Vrije University of Amsterdam
Netherlands

Nina Yevtushenko

Doctor of Sc., Prof.
Ivannikov V.P. ISP RAS
Moscow, Russia

Yervant Zorian

PhD, Fellow & Chief Architect, Synopsys, Mountain View, CA, USA

JOURNAL INFO

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is an independent peer-reviewed research journal that welcomes submissions from across the world.

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is issued four times per year, and can be subscribed to in the Russian Press Joint Catalogue (Subscription Index 44031)

The publication in the journal is free of charge and may be in Russian or in English.

The topics of the journal are the following:

- control of dynamical systems,
- mathematical modeling,
- data processing,
- informatics and programming,
- discrete function and automation,
- designing and diagnostics of computer systems.

Rules of registration articles are given in a site:

<http://journals.tsu.ru/informatics/>

ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

Учредитель – Томский государственный университет

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Горцев Александр Михайлович – гл. редактор, проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной математики ТГУ. Тел. +73822529599

Смагин Валерий Иванович – зам. гл. редактора, проф., д-р техн. наук, проф. кафедры прикладной математики ТГУ. Тел. +73822529599

Нежелская Людмила Алексеевна – ответственный секретарь, доц., д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры прикладной математики ТГУ
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

Воробейчиков Сергей Эрикович – д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры системного анализа и математического моделирования ТГУ

Вишневский Владимир Миронович – проф., д-р техн. наук, зав. лабораторией Института проблем управления РАН (г. Москва)

Коскин Геннадий Михайлович – проф., д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры системного анализа и математического моделирования ТГУ

Костюк Юрий Леонидович – проф., д-р техн. наук, проф. кафедры теоретической информатики ТГУ

Матросова Анжела Юрьевна – проф., д-р техн. наук, проф. кафедры программирования ТГУ

Назаров Анатолий Андреевич – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой теории вероятностей и математической статистики ТГУ

Самуйлов Константин Евгеньевич – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (г. Москва)

Семенин Евгений Станиславович – проф., д-р техн. наук, проф. каф. системного анализа и исследования операций, СибГУ им. акад. М.Ф. Решетнева (г. Красноярск)

Сущенко Сергей Петрович – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной информатики ТГУ

Фархадов Маис Паша Оглы – д-р техн. наук, зав. лабораторией Института проблем управления РАН (г. Москва)

Цицашвили Гурами Шалвович – проф., д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотр. Института прикладной математики ДВО РАН, проф. ДВФУ (г. Владивосток)

Адрес редакции и издателя: 634050, Томск, пр. Ленина, 36

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Институт прикладной математики и компьютерных наук,

отделение прикладной математики

Телефон / факс: +73822529599

E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Ана Роза Кавалли

д-р философии, проф.
Университет VII,
Париж, Франция
Владимир Домбровский
д-р техн. наук, проф.
ТГУ, Томск, Россия

Александр Дудин

д-р физ.-мат. наук, проф.
БГУ, Минск,
Республика Беларусь

Енцо Орзингер

д-р философии, проф.
Римский университет,
Италия

Паоло Принетто

проф.
Политехнический институт,
Турин, Италия

Жильберт Сапорта

д-р философии, проф.
Университет им. Пьера и Марии,
Кюри, Париж, Франция
Раймонд Убар
д-р проф.
Технологический университет,
Таллин, Эстония

Рейндерт Нобель

д-р, доцент
Свободный университет,
Амстердам, Нидерланды

Нина Евтушенко

д-р техн. наук, проф.
ИСП РАН им. Иваницова В.П.,
Москва, Россия

Ервант Зорян

д-р философии, гл. науч. сотр.
фирмы «Синописис», США

О ЖУРНАЛЕ

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика» выходит ежеквартально и распространяется по подписке

Статьи публикуются на русском и английском языках.

Тематика публикаций журнала:

- управление динамическими системами,
- математическое моделирование,
- обработка информации,
- информатика и программирование,
- дискретные функции и автоматы,
- проектирование и диагностика вычислительных систем.

Журнал входит в систему Российского Индекса Научного Цитирования (РИНЦ).

Правила оформления статей приведены на сайте:

<http://journals.tsu.ru/informatics/>

ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

CONTROL OF DYNAMICAL SYSTEMS

Паршуков А.Н.
Численный метод проверки робастного качества управления для линейных одномерных динамических систем управления 4

Parshukov A.N.
Numerical method for testing robust control quality for linear one-dimensional dynamic control systems 4

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MATHEMATICAL MODELING

Andreichenko D.K., Andreichenko K.P., Melnicuk D.V.
Modeling the effect of centering of a spherical hydrodynamic suspension 13

Лесько С.А., Жуков Д.О., Истратов Л.А.
Модели описания динамики блокировки узлов вычислительных сетей вирусами на основе использования перколяционных, кинетических и стохастических методов 22

Макеева Е.Д., Поляков Н.А. Харин П.А., Гудкова И.А.
Вероятностная модель для анализа характеристик совместной передачи трафика URLLC и eMBB в беспроводных сетях 33

Andreichenko D.K., Andreichenko K.P., Melnicuk D.V.
Modeling the effect of centering of a spherical hydrodynamic suspension 13

Lesko S.A., Zhukov D.O., Istratov L.A.
Models of describing the dynamics of blocking nodes of computer networks by viruses based on the use of percolation, kinetic and stochastic methods 22

Makeeva E.D., Polyakov N.A., Kharin P.A., Gudkova I.A.
Probability model for performance analysis of joint urllc and eMBB transmission in 5G networks 33

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

DATA PROCESSING

Барабанова Л.П.
Оптимизация геометрии разностно-дальномерного метода в навигации и обнаружении 43

Gindullin R.V.
Hybrid optimization approach based on gravitational analogy and particle swarm for solving single vehicle pickup and delivery problem 52

Головастова Э.А.
Время работы системы со взаимозаменяемыми элементами, выходящими из строя, и ненадежным восстанавливающим прибором 59

Копать Д.Я., Матальцкий М.А.
Анализ в нестационарном режиме экспоненциальной G-сети с обходами систем обслуживания положительными заявками 66

Нежелская Л.А., Тумашкина Д.А.
Оценивание методом моментов длительности непродлевающегося мертвого времени в полусинхронном потоке событий второго порядка 73

Никольский И.М.
Исследование влияния продолжительности фазы сна на энергопотребление цепочки сенсоров 83

Тананко И.Е., Фокина Н.П.
Метод анализа сетей массового обслуживания с ненадежными приборами и задержкой информации 90

Цициашвили Г.Ш.
Нестационарная пуассоновская модель непрерывно функционирующей системы обслуживания 98

Barabanova L.P.
Optimization of geometry in TDoA method for navigation and detection 43

Gindullin R.V.
Hybrid optimization approach based on gravitational analogy and particle swarm for solving single vehicle pickup and delivery problem 52

Golovastova E.A.
System operating time with unreliable interchangeable elements and precarious recovery device 59

Kopats D.Ya., Matalytski M.A.
Analysis in non-stationary regime of exponential G-network with bypass of queueing systems positive customers 66

Nezhel'skaya L.A., Tumashkina D.A.
Estimation of the unextendable dead time duration in semi-synchronous events flow of the second order by the method of moments 73

Nikolsky I.M.
Study of the impact of sleep phase duration on energy consumption in sensor chain 83

Tananko I.E., Fokina N.P.
An analysis of queueing networks with unreliable servers and information delay 90

Tsitsiashvili G.Sh.
Non-stationary Poisson model of continuously functioning queueing system 98

ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

INFORMATICS AND PROGRAMMING

Асадчий А.В., Солдатов А.И., Ким О.Х., Солдатов А.А.
Оценка ресурсов ОЗУ при контроле технических объектов 104

Климова О.В.
Декомпозиционный подход к построению параллельных алгоритмов обработки двумерных данных 114

Asadchiy A.V., Soldatov A.I., Kim O.H., Soldatov A.A.
Evaluation of the amount of RAM in the monitoring of technical objects 104

Klimova O.V.
Decomposition approach to the construction of parallel algorithms for processing of two-dimensional data 114

**ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ДИАГНОСТИКА
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ**

**DESIGNING AND DIAGNOSTICS
OF COMPUTER SYSTEMS**

Соловьев В.М., Сперанский Д.В.
Оценка качества диагностических тестов на моделях цифровых устройств ISCAS 123

Сведения об авторах 130

Solovyev V.M., Speranskiy D.V.
Assessment of the quality of diagnostic tests on models of digital devices ISCAS 123

Brief information about the authors 130

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 681.5

DOI: 10.17223/19988605/52/1

А.Н. Паршуков

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ПРОВЕРКИ РОБАСТНОГО КАЧЕСТВА УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Получен критерий робастного качества управления для системы, состоящей из объекта управления со структурными возмущениями и модального регулятора. На основе данного критерия разработан численный метод проверки робастного качества управления. Эффективность метода проиллюстрирована примером.

Ключевые слова: структурные возмущения; модальный регулятор; робастное качество управления.

Технологические процессы, обладающие разнотемповыми составляющими, широко распространены [1, 2]. Характерной особенностью моделей таких процессов является выделение в модели операторов так называемой «основной динамики», описывающей ту часть объекта управления, которая подлежит регулированию, и операторов «структурных возмущений» – к ним относят те части объекта управления, которые уже обладают свойствами устойчивости и заданного качества управления [3. С. 29–30]. При синтезе регулятора структурные возмущения, как правило, не учитывают, в результате в передаточной функции (ПФ) замкнутой системы возникает неопределенность. Поскольку свойства устойчивости и качества управления системы определяются расположением полюсов ее ПФ, возникает вопрос: при каких операторах структурных возмущений в объекте управления замкнутая система еще сохранит свойства устойчивости (робастная устойчивость) и качества управления (робастное качество управления)?

В схеме модального управления [3. С. 8–21; 4. С. 5–20] качество управления задается в виде области S на комплексной плоскости; область S определяет желаемое расположение полюсов ПФ. Следовательно, вопросы исследования (проверки) робастной устойчивости и робастного качества управления могут быть рассмотрены с единых позиций: требуется проверить, принадлежат ли корни заданного семейства полиномов области S .

Проблема исследования робастной устойчивости и робастного качества управления широко представлена в литературе. Можно выделить три главных направления, в рамках которых решается данная задача: 1) принцип исключения нуля [5–9]; 2) теория H^∞ [10–11]; 3) метод LMI [12–14]. Тем не менее общая формулировка критерия робастного качества управления (не зависящая от формы области S) до сих пор не получена [9. С. 227].

В настоящей статье в развитие результатов, полученных в [9], разрабатывается метод проверки робастного качества управления.

Далее приняты следующие обозначения: \doteq – равно по определению; \mathbf{I} – единичная матрица соответствующей размерности; T – транспонирование; $*$ – комплексное сопряжение; j – мнимая единица; R^n , C^n – пространства n -мерных векторов $\mathbf{x} \doteq (x_1, \dots, x_n)$, коэффициенты которых соответственно вещественные или мнимые числа; s – комплексная переменная; S – область на C^1 ; ∂S – граница области S ; $\text{int } S$ – внутренняя часть области S ; t – непрерывное время; $p^i \doteq d^i/dt^i$ – оператор i -й степени дифференцирования по времени ($0 \leq i < \infty$).

Пусть $f(\mathbf{x})$ – комплекснозначная функция векторного аргумента \mathbf{x} , определенная на области $X \subset R^l$; обозначим

$$|f|_+ \doteq \max_{\mathbf{x} \in X} |f(\mathbf{x})|, \quad |f|_- \doteq \min_{\mathbf{x} \in X} |f(\mathbf{x})|. \quad (1)$$

«Полиномиальным оператором» степени l будем называть дифференциальный оператор вида:

$$f(l, p) = \sum_{i=0}^l f_i \cdot p^i, \quad (2)$$

где f_i – постоянные коэффициенты ($0 \leq i \leq l$).

В изображениях по Лапласу полиномиальному оператору (2) соответствует алгебраический полином¹

$$f(l, s) = \sum_{i=0}^l f_i \cdot s^i,$$

определенный на C^1 ; здесь за s обозначена переменная преобразования Лапласа ($s \in C^1$).

«Интервальным дифференциальным оператором» степени l будем называть семейство дифференциальных операторов вида:

$$f(l, F, p) \doteq \left\{ f(l, \mathbf{f}, p) \doteq \sum_{i=0}^l f_i \cdot p^i : \forall \mathbf{f} \doteq (f_0, \dots, f_l)^T \in F \right\}, \quad (3)$$

где

$$F \doteq \left\{ \mathbf{f} \in R^{l+1} : \forall f_i \in [f_i^0 - \Delta f_i, f_i^0 + \Delta f_i] \quad f_i^0 \neq 0, \quad \Delta f_i \geq 0, \quad i = \overline{0, l} \right\} -$$

область (многомерный параллелепипед) заданная в пространстве коэффициентов.

Выполняя в (3) формальную замену p на s , получаем «интервальный полином»

$$f(l, F, s) \doteq \left\{ f(l, \mathbf{f}, s) \doteq \sum_{i=0}^l f_i \cdot s^i : \forall \mathbf{f} \in F \right\}. \quad (4)$$

Интервальный полином (4) можно представить в виде:

$$f(l, F, s) = f^0(l, s) + \Delta f(l, \Delta F, s), \quad (5)$$

где $f^0(l, s) \doteq \sum_{i=0}^l f_i^0 \cdot s^i$ – «точечный» полином, а интервальный полином с симметричными интервалами неопределенности коэффициентов $\Delta f(l, \Delta F, s)$ определится по формуле:

$$\Delta f(l, \Delta F, s) \doteq \left\{ \delta f(l, \delta \mathbf{f}, s) \doteq \sum_{i=0}^l \delta f_i \cdot s^i : \forall \delta \mathbf{f} \doteq (\delta f_0, \dots, \delta f_l)^T \in \Delta F \right\},$$

$$\Delta F \doteq \left\{ \delta \mathbf{f} : \forall \delta f_i \in [-\Delta f_i, \Delta f_i], \quad i = \overline{0, l} \right\}.$$

1. Синтез модального регулятора для линейных объектов управления со структурными возмущениями и постановка задачи проверки робастного качества управления

Пусть линейный одномерный объект управления задан моделью вида:

$$v(l, V, p) \cdot a(n, A, p) y(t) = w(r, W, p) \cdot b(m, B, p) u(t), \quad n > m, \quad l > r, \quad (6)$$

здесь u – входной (управляющий) сигнал, y – выходной (управляемый) сигнал, $a(n, A, p)$, $b(m, B, p)$, $v(l, V, p)$, $w(r, W, p)$ – интервальные дифференциальные операторы вида (5) такие, что

$$a_n^0 = 1, \quad \Delta a_n = 0, \quad v_0^0 = 1, \quad \Delta v_0 = 0, \quad w_0^0 = 1, \quad \Delta w_0 = 0.$$

¹ Полином $f(l, s)$ может быть получен путем формальной замены в (2) оператора p на s .

Модель

$$a^0(n, p)y(t) = b^0(m, p)u(t), \quad (7)$$

принадлежащую семейству моделей (6), назовем «номинальной»; интервальные операторы $a(n, A, p)$, $b(m, B, p)$ – «основной динамикой»; операторы $v(l, V, p)$, $w(r, W, p)$ – «структурными возмущениями».

Качество управления будем назначать в виде области S , определяющей допустимое расположение полюсов ПФ на C^1 . Предполагаем, что область S удовлетворяет условиям: расположена в ограниченной части C^1 слева от мнимой оси; односвязна; для любой точки $s \in S$ также выполняется $s^* \in S$.

Кроме того, исходя из смысла задачи, потребуем, чтобы операторы структурных возмущений $v(l, V, p)$, $w(r, W, p)$ удовлетворяли выражениям¹

$$\Lambda(v) \subset \text{int } S, \quad \Lambda(w) \subset \text{int } S. \quad (8)$$

Поскольку требования к качеству управления выражены в корневых показателях качества, регулятор будем рассчитывать по схеме модального управления. Следуя методу синтеза модального регулятора (изложенному, например, в монографии [4. С. 5–20]), регулятор для номинальной модели (7) ищется в виде дифференциального уравнения $(n - 1)$ -го порядка:

$$\beta(n - 1, p)u(t) = \alpha(n - 1, p)y(t) + \chi(q, p)g(t), \quad q \leq n - 1, \quad \beta_{n-1} = 1, \quad (9)$$

здесь g – заданный программный сигнал. В схеме модального управления коэффициенты операторов $\beta(n - 1, p)$ и $\alpha(n - 1, p)$ регулятора (9) рассчитываются из условия обращения в тождество уравнения

$$a^{\text{et.}}(2n - 1, s) = a^0(n, s)\beta(n - 1, s) - b^0(m, s)\alpha(n - 1, s), \quad a_{2n-1}^{\text{et.}} = 1, \quad (10)$$

где $a^{\text{et.}}(2n - 1, s)$ – заданный характеристический полином эталонной системы управления (далее – «эталон»); выбор эталона ограничен условием

$$\Lambda(a^{\text{et.}}) \subset \text{int } S. \quad (11)$$

Очевидно, что выбор полинома $\chi(q, s)$ не влияет на свойства робастной устойчивости и робастного качества управления, поэтому вопрос расчета полинома $\chi(q, s)$ в данной работе не рассматривается.

Методика вычисления коэффициентов операторов $\beta(n - 1, p)$ и $\alpha(n - 1, p)$ приведена в работе [3. С. 8–21], она сводится к решению системы из $2n - 1$ линейных алгебраических уравнений относительно $2n - 1$ неизвестных коэффициентов полиномов $\beta(n - 1, s)$ и $\alpha(n - 1, s)$. Данная система однозначно разрешима, если корни полинома $a^0(n, s)$ не совпадают с корнями полинома $b^0(m, s)$.

После замыкания исходного объекта (6) регулятором, синтезированным по схеме (9)–(11), несложно получить следующее выражение для характеристического полинома замкнутой системы:

$$a^c(2n + l - 1, A, B, V, W, s) \doteq \{a^c(2n + l - 1, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, s): \\ \forall \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B, \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W\}, \quad (12)$$

здесь

$$a^c(2n + l - 1, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, s) = v(l, \mathbf{v}, s) \cdot a(n, \mathbf{a}, s) \cdot \beta(n - 1, s) - \\ - w(l, \mathbf{w}, s) \cdot b(m, \mathbf{b}, s) \cdot \alpha(n - 1, s).$$

Множество полиномов $a^c(2n + l - 1, A, B, V, W, s)$ назовем «семейством характеристических полиномов» замкнутой системы. Множество

$$\Lambda(a^c) = \{\lambda_i : \exists \mathbf{a} \in A, \exists \mathbf{b} \in B, \exists \mathbf{v} \in V, \\ \exists \mathbf{w} \in W, a^c(2n + l - 1, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \lambda_i) = 0, i = \overline{1, 2n + l - 1}\}$$

назовем «множеством корней» семейства характеристических полиномов (или «множеством полюсов» ПФ) замкнутой системы.

Будем считать, что замкнутая система с характеристическим полиномом (12) обладает робастным качеством управления, если множество $\Lambda(a^c)$ лежит внутри области S , т.е. выполнено условие

¹ Выполнение выражений (8) легко проверить методами, изложенными в работе [15].

$$\Lambda(a^c) \subset \text{int } S \quad (13)$$

(далее – условие робастного качества управления).

При наличии структурных возмущений в объекте управления нельзя заранее гарантировать, что модальный регулятор, рассчитанный по формулам (9)–(11), будет обеспечивать выполнение условия (13). Таким образом, задача синтеза модального регулятора при наличии структурных возмущений в объекте управления состоит из следующих этапов:

- 1) синтез модального регулятора для номинального объекта (7) по формулам (9)–(11);
- 2) последующая проверка выполнения условия (13) для заданного семейства характеристических полиномов (12) (задача проверки робастного качества управления).

В следующем разделе изложен численный метод проверки робастного качества управления для семейства характеристических полиномов вида (12).

2. Численный метод проверки робастного качества управления

2.1. Критерий робастного качества управления

Лемма 1. Пусть семейство полиномов (12) удовлетворяет условиям (8), (11). Тогда для того, чтобы для данного семейства было выполнено условие робастного качества управления (13) необходимо и достаточно выполнения¹

$$0 \notin A^c(s), \quad \forall s \in \partial S, \quad (14)$$

где

$$A^c(s) \doteq \{a^c(2n+l-1, s) : \forall \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B, \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W\} \subset C^1 -$$

«геометрический образ» семейства полиномов (12) для точки $s \in \partial S$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный полином, принадлежащий семейству (12). Изменение количества корней этого полинома, лежащих внутри области S , может происходить только в том случае, когда хотя бы один из них (при вариациях векторов параметров $\mathbf{a} \in A$, $\mathbf{b} \in B$, $\mathbf{v} \in V$ и $\mathbf{w} \in W$) пересечет границу области S и условие (14) будет нарушено. Что и требовалось доказать.

Замечание 1. Полиномы, входящие в семейство (12), содержат произведения варьируемых параметров, следовательно, область $A^c(s)$ на C^1 может быть невыпуклой (и даже неодносвязной). Таким образом, непосредственное построение невыпуклой области $A^c(s)$ и последующая проверка выражения (14) представляют собой трудные задачи. Ниже мы получим достаточные условия робастного качества управления путем оценки расстояния от области $A^c(s)$ до точки $(0, j0)$.

Для точки $s \in \partial S$ такое расстояние равно (с учетом обозначений (1))

$$\left| a^c(2n+l-1, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, s) \right|_-,$$

таким образом, выражение (14) принимает вид:

$$\left| a^c(2n+l-1, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, s) \right|_- > 0, \quad \forall s \in \partial S.$$

Для выражения в левой части последнего неравенства справедлива оценка

$$\begin{aligned} \left| a^c(2n+l-1, s) \right|_- &= \left| \left(v^0(l, s) + \delta v(l, \delta \mathbf{v}, s) \right) \cdot \left(a^{\text{et.}}(2n-1, s) + \delta a(n-1, \delta \mathbf{a}, s) \cdot \right. \right. \\ &\quad \cdot \beta(n-1, s) - \delta b(m, \delta \mathbf{b}, s) \cdot \alpha(n-1, s) \left. \right) + \left(v^0(l, s) + \delta v(l, \delta \mathbf{v}, s) - w^0(r, s) - \right. \\ &\quad \left. \left. - \delta w(r, \delta \mathbf{w}, s) \right) \cdot \left(b^0(m, s) + \delta b(m, \delta \mathbf{b}, s) \right) \cdot \alpha(n-1, s) \right|_- \geq \end{aligned}$$

¹ Здесь и далее (там, где это не будет вызывать недоразумений) несущественные для рассуждений аргументы полиномов будем опускать.

$$\begin{aligned} & \geq \left| v^0(l, s) + \delta v(l, \delta \mathbf{v}, s) \right|_- \cdot \left| a^{\text{et}}(2n-1, s) + \delta a(n-1, \delta \mathbf{a}, s) \cdot \beta(n-1, s) - \right. \\ & \quad \left. - \delta b(m, \delta \mathbf{b}, s) \alpha(n-1, s) \right|_- - \left| v^0(l, s) + \delta v(l, \delta \mathbf{v}, s) - w^0(r, s) - \right. \\ & \quad \left. - \delta w(r, \delta \mathbf{w}, s) \right|_+ \cdot \left| b^0(m, s) + \delta b(m, \delta \mathbf{b}, s) \right|_+ \cdot \left| \alpha(n-1, s) \right|. \end{aligned}$$

Приведенные рассуждения можно рассматривать в качестве нестрогого доказательства следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть семейство полиномов (12) удовлетворяет условиям (8), (11) и

$$\rho(s) \doteq \rho_1(s) - \rho_2(s) > 0, \quad \forall s \in \partial S, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_1(s) & \doteq \left| v^0(l, s) + \delta v(l, \delta \mathbf{v}, s) \right|_- \cdot \left| a^{\text{et}}(2n-1, s) + \right. \\ & \quad \left. + \delta a(n-1, \delta \mathbf{a}, s) \cdot \beta(n-1, s) - \delta b(m, \delta \mathbf{b}, s) \cdot \alpha(n-1, s) \right|_-, \\ \rho_2(s) & \doteq \left| v^0(l, s) + \delta v(l, \delta \mathbf{v}, s) - w^0(r, s) - \delta w(r, \delta \mathbf{w}, s) \right|_+ \cdot \\ & \quad \cdot \left| b^0(m, s) + \delta b(m, \delta \mathbf{b}, s) \right|_+ \cdot \left| \alpha(n-1, s) \right|. \end{aligned} \quad (16)$$

Тогда для (12) выполнено (13).

Технология проверки условия (15) изложена ниже.

2.2. Методика проверки робастного качества управления

Вычисление функций $\rho_1(s)$ и $\rho_2(s)$ в точке s сводится к решению четырех задач квадратичного программирования (далее – задач QP):

$$\begin{aligned} J_k(\mathbf{x}_k) & = 0,5 \mathbf{x}_k^T \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{q}_k^T \mathbf{x}_k + e_k \rightarrow \min, \quad k \in \overline{1,4}, \\ \Xi_k \mathbf{x}_k - \zeta_k & \leq \mathbf{0}, \quad ^1 \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 & \doteq \delta \mathbf{v}, \quad \Delta \mathbf{x}_1 \doteq (\Delta v_1, \dots, \Delta v_l)^T, \quad \mathbf{z}_1 \doteq (s, \dots, s^l)^T, \\ \boldsymbol{\varphi}_1 & \doteq (\text{Re}(s), \dots, \text{Re}(s^l))^T, \quad \boldsymbol{\psi}_1 \doteq (\text{Im}(s), \dots, \text{Im}(s^l))^T, \quad ^2 \\ \theta_1 & \doteq v^0(l, s), \quad \mathbf{x}_2 \doteq (\delta \mathbf{a}, \delta \mathbf{b})^T, \\ \Delta \mathbf{x}_2 & \doteq (\Delta a_0, \dots, \Delta a_{n-1}, \Delta b_0, \dots, \Delta b_m)^T, \\ \mathbf{z}_2 & \doteq (\beta(n-1, s), \dots, s^{n-1} \cdot \beta(n-1, s), \\ & \quad -\alpha(n-1, s), \dots, -s^m \cdot \alpha(n-1, s))^T, \\ \boldsymbol{\varphi}_2 & \doteq \text{Re}(\mathbf{z}_2), \quad \boldsymbol{\psi}_2 \doteq \text{Im}(\mathbf{z}_2), \quad \theta_2 \doteq a^{\text{et}}(2n-1, s), \quad \mathbf{x}_3 \doteq (\delta \mathbf{v}, \delta \mathbf{w})^T, \\ \Delta \mathbf{x}_3 & \doteq (\Delta v_1, \dots, \Delta v_l, \Delta w_1, \dots, \Delta w_r)^T, \\ \mathbf{z}_3 & \doteq (1, s, \dots, s^l, -1, -s, \dots, -s^r)^T, \\ \boldsymbol{\varphi}_3 & \doteq \text{Re}(\mathbf{z}_3), \quad \boldsymbol{\psi}_3 \doteq \text{Im}(\mathbf{z}_3), \quad \theta_3 \doteq v^0(l, s) - w^0(r, s), \quad \mathbf{x}_4 \doteq \delta \mathbf{b}, \\ \Delta \mathbf{x}_4 & \doteq (\Delta b_0, \dots, \Delta b_m)^T, \quad \mathbf{z}_4 \doteq (1, s, \dots, s^m)^T, \end{aligned}$$

¹ За $\mathbf{0}$ обозначен вектор-столбец, целиком состоящий из нулей.

² Далее за $\boldsymbol{\varphi}_k$ и $\boldsymbol{\psi}_k$ обозначены векторы, состоящие соответственно из вещественных и мнимых частей компонент вектора \mathbf{z}_k , $1 \leq k \leq 4$, что условно записывается в виде: $\boldsymbol{\varphi}_k = \text{Re}(\mathbf{z}_k)$, $\boldsymbol{\psi}_k = \text{Im}(\mathbf{z}_k)$.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}_4 &\doteq \operatorname{Re}(\mathbf{z}_4), \quad \boldsymbol{\psi}_4 \doteq \operatorname{Im}(\mathbf{z}_4), \quad \theta_4 \doteq b^0(m, s), \\ \mathbf{C}_k &= \begin{cases} +2(\boldsymbol{\varphi}_k \cdot \boldsymbol{\varphi}_k^T + \boldsymbol{\psi}_k \cdot \boldsymbol{\psi}_k^T), & k \in \overline{1,2}, \\ -2(\boldsymbol{\varphi}_k \cdot \boldsymbol{\varphi}_k^T + \boldsymbol{\psi}_k \cdot \boldsymbol{\psi}_k^T), & k \in \overline{3,4}, \end{cases} \\ \mathbf{q}_k &= \begin{cases} +2(\operatorname{Re}(\theta_k) \cdot \boldsymbol{\varphi}_k + \operatorname{Im}(\theta_k) \cdot \boldsymbol{\psi}_k), & k \in \overline{1,2}, \\ -2(\operatorname{Re}(\theta_k) \cdot \boldsymbol{\varphi}_k + \operatorname{Im}(\theta_k) \cdot \boldsymbol{\psi}_k), & k \in \overline{3,4}, \end{cases} \\ e_k &= \operatorname{Re}^2(\theta_k) + \operatorname{Im}^2(\theta_k), \end{aligned}$$

а Ξ_k и ζ_k – матрицы и вектора блочного вида:

$$\Xi_k = \begin{pmatrix} +\mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{pmatrix}^T, \quad \zeta_k = (\Delta \mathbf{x}_k, \Delta \mathbf{x}_k)^T, \quad k \in \overline{1,4}.$$

Нетрудно убедиться, что выполняются

$$\mathbf{C}_k^T = \mathbf{C}_k, \quad e_k \geq 0, \quad k \in \overline{1,4}.$$

В обозначениях (17) функции $\rho_1(s)$ и $\rho_2(s)$ принимают вид:

$$\rho_1(s) = J_1^{\frac{1}{2}}(\mathbf{x}_1^*) \cdot J_2^{\frac{1}{2}}(\mathbf{x}_2^*), \quad \rho_2(s) = J_3^{\frac{1}{2}}(\mathbf{x}_3^*) \cdot J_4^{\frac{1}{2}}(\mathbf{x}_4^*) \cdot |\alpha(n-1, s)|, \quad (18)$$

$$\mathbf{x}_k^* \doteq \arg \min_{\Xi_k \mathbf{x}_k - \zeta_k \leq 0} f_k(\mathbf{x}_k), \quad f_k(\mathbf{x}_k) \doteq 0,5 \mathbf{x}_k^T \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{q}_k^T \mathbf{x}_k. \quad (19)$$

Задача QP (19) относится к решенным. В случае ограничений в виде линейных неравенств эта задача может быть решена только численными методами.

Теорема 1 и приведенные в данном разделе рассуждения являются основой для изложенного далее алгоритма проверки робастного качества управления. Итак, пусть:

1) на ∂S задано множество точек

$$\Omega(n') = \{s_i \in \partial S, \quad i \in \overline{1, n'}\}, \quad (n' < \infty).$$

2) в каждой точке $s_i \in \Omega(n')$ для семейства полиномов (12) составлены задачи QP (17).

Алгоритм проверки робастного качества управления

1. В каждой точке $s_i \in \Omega(n')$ решить четыре задачи QP (17) и по формулам (18)–(19) вычислить значения $\rho_1(s)$ и $\rho_2(s)$.

2. Проверить выполнение условия (15). Если условие (15) выполнено, значит для заданного семейства характеристических полиномов выполняется робастное качество управления, если нет – модальный регулятор следует рассчитывать по полной модели объекта управления (6).

3. Пример проверки робастного качества управления

Пусть объект управления задан моделью

$$\begin{aligned} & (v^0(2, p) + \Delta v(2, p)) \cdot (a^0(2, p) + \Delta a(1, p)) y(t) = \\ & = (w^0(2, p) + \Delta w(2, p)) \cdot (b^0(1, p) + \Delta b(1, p)) u(t), \end{aligned}$$

здесь

$$\begin{aligned} a^0(2, p) &= p^2 + 4p + 13; \quad b^0(1, p) = 10,7p + 138,7; \\ \Delta a(1, p) &= [-0,5; 0,5]p + [-2; 2]; \quad \Delta b(1, p) = [-0,5; 0,5]p + [-0,5; 0,5]; \\ v^0(2, p) &= 4,4 \cdot 10^{-3} p^2 + 1,33 \cdot 10^{-1} p + 1,00; \\ w^0(2, p) &= 4,2 \cdot 10^{-3} p^2 + 1,29 \cdot 10^{-1} p + 1,00; \\ \Delta v(2, p) &= [-5; 5] \cdot 10^{-4} p^2 + [-1; 1] \cdot 10^{-3} p; \\ \Delta w(2, p) &= [-5; 5] \cdot 10^{-4} p^2 + [-1,5; 1,5] \cdot 10^{-3} p. \end{aligned}$$

Нули полиномов $v^0(2, s)$ и $w^0(2, s)$:

$$\Lambda(v^0) = \{-15, -15\} \subset C^1, \quad \Lambda(w^0) = \{-15, -16\} \subset C^1.$$

Требования к качеству управления задаются областью

$$S = \{s : \eta_2 \leq -\operatorname{Re}(s) \leq \eta_1, \quad |\operatorname{Im}(s)/\operatorname{Re}(s)| \leq \mu_1\},$$

где $\eta_1 = 25$, $\eta_2 = 2$, $\mu = 1$. Отметим, что множества $\Lambda(v^0)$ и $\Lambda(w^0)$ лежат внутри области S .

Характеристический полином эталона выберем

$$a^{\text{et}}(3, s) = s^3 + 15s^2 + 75s + 125.$$

Для номинальной модели и эталона $a^{\text{et}}(3, s)$ рассчитан модальный регулятор

$$(p + 9,062)u(t) = (-0,182p - 0,052)y(t) + \chi_0 \cdot g(t).$$

Семейство характеристических полиномов замкнутой системы

$$\begin{aligned} a^c(5, s) = & (v^0(2, s) + v(2, s)) \cdot (a^{\text{et}}(3, s) + \Delta a(1, s) \cdot \beta(1, s)) + \\ & + (v^0(2, s) + \Delta v(2, s) - w^0(2, s) - \Delta w(2, s)) \cdot b^0(1, s) \cdot \alpha(1, s) - \\ & - (w^0(2, s) + \Delta w(2, s)) \cdot \Delta b(1, s) \cdot \alpha(1, s). \end{aligned} \quad (20)$$

Рассчитав численно значения функции $\rho(s)$ в точках ($n' = 42$) на множестве Ω (граница области S), в результате получим, что значения $\rho(s) \in [3,393; 8840,0]$, т.е. для семейства полиномов (20) выполнено условие (15) Теоремы 1. Следовательно, по Теореме 1 для семейства полиномов (20) выполняется робастное качество управления.

Заключение

В настоящей статье получен критерий робастного качества управления для замкнутой системы управления, состоящей из линейного одномерного объекта управления со структурными возмущениями и модального регулятора. Теорема 1 устанавливает критерий принадлежности множества корней для семейства характеристических полиномов заданной области S на комплексной плоскости. На основе данной теоремы разработан численный метод проверки робастного качества управления, состоящий в решении четырех задач квадратичного программирования для каждой точки s на границе области S .

ЛИТЕРАТУРА

1. Крушель Е.Г., Степанченко О.В. Синтез и моделирование цифровых управляющих систем с двойной шкалой времени. М. : Машиностроение-1, 2006. 96 с.
2. Юркевич В.Д. Синтез нелинейных нестационарных систем управления с разнотемповыми процессами. СПб. : Наука, 2000. 288 с.
3. Паршуков А.Н. Методы синтеза модальных регуляторов. Тюмень : ТюмГНГУ, 2009. 84 с.
4. Кузовков Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. М. : Машиностроение, 1976. 184 с.
5. Ackermann J.A., Bartlett D., Kaesbauer W.S., Steinhauser R. Robust control. Systems with uncertain physical parameters. London: Springer-Verlag, 1993. 413 p.
6. Barmish B.R. New tools for robustness of linear systems. New York : MacMillan, 1994. 394 p.
7. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Частотные критерии робастной устойчивости и апериодичности линейных систем // Автоматика и телемеханика. 1990. № 9. С. 45–54.
8. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Устойчивость и робастная устойчивость однотипных систем // Автоматика и телемеханика. 1996. № 11. С. 91–104.
9. Поляк Б.Т., Щербачев П.С. Робастная устойчивость и управление. М. : Наука, 2002. 303 с.
10. Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1989. V. 34, No. 8. P. 831–847.
11. Kogan M. M. Optimal Discrete-time H_∞/γ_0 Filtering and Control under Unknown Covariances // Int. J. Control, 2016. V. 89, No. 4. P. 691–700.
12. Честнов В.Н. H_∞ -подход к синтезу регуляторов при параметрической неопределенности и полигармонических внешних возмущениях // Автоматика и телемеханика. 2015. № 6. С. 112–127.

13. Сельвесюк Н.И. Аналитический синтез робастных регуляторов заданной точности при внешних возмущениях // Известия РАН. Теория и системы управления. 2016. № 4. С. 62–72. DOI: 10.7868/S0002338816040107.
14. Баландин Д.В., Коган М.М., Кривдина Л.Н., Федюков А.А. Синтез обобщенного H_∞ -оптимального управления в дискретном времени на конечном и бесконечном интервалах // Автоматика и телемеханика. 2014. № 1. С. 3–22.
15. Паршуков А.Н. Метод синтеза модального регулятора для объекта управления с интервальной неопределенностью коэффициентов // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2019. № 4 (49). С. 14–22.

Поступила в редакцию 23 марта 2020 г.

Parshukov A.N. (2020) NUMERICAL METHOD FOR TESTING ROBUST CONTROL QUALITY FOR LINEAR ONE-DIMENSIONAL DYNAMIC CONTROL SYSTEMS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 52. pp. 4–12

DOI: 10.17223/19988605/52/1

Technological processes with multi-tempo components are quite widespread. A characteristic feature of the models of such processes is the allocation in the model of operators of the so – called "basic dynamics", describing the part of the control object that is subject to regulation, and operators of "structural disturbances" - these include those parts of the control object that already have the properties of stability and a given quality of control. In the synthesis of the regulator structural perturbations, as a rule, do not take into account, as a result of the transfer function of a closed system there is uncertainty. Since the properties of stability and control quality of the system are determined by the location of the poles of its transfer function, the question arises: at what operators of structural disturbances in the control object the closed system will still retain the properties of stability (robust stability) and control quality (robust control quality)?

In the modal control scheme, the control quality is given as an area S on the complex plane; area S determines the desired location of the poles of the transfer function. Therefore, the questions of research (verification) of robust stability and robust control quality can be considered from a single point of view: is it necessary to check whether the roots of a given family of polynomials in the domain S ?

In the literature devoted to robust theory focuses on the problem of robust stability, and the problem of robust quality control fades into the background and is still not solved. The purpose of the study is to develop a robust control quality criterion for the case of structural disturbances in the control object model. Method: a theorem known as the "zero elimination principle" is generalized. The article provides a robust control quality criterion for a control system consisting of a control object with structural disturbances and a modal controller. Based on this criterion, a numerical method has been developed to check the robust quality of control. The proposed method is illustrated by an example.

Keywords: structural disturbances; modal regulator; robust control quality.

PARSHUKOV Andrej Nikolaevich (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Federal State Budget Educational Institution of Higher Education «Industrial University of Tyumen», Tyumen, Russian Federation).
E-mail: anparshukov@mail.ru

REFERENCES

1. Krushel, E.G. & Stepanchenko, O.V. (2006) *Sintez i modelirovanie tsifrovyykh upravlyayushchikh sistem s dvoynoy shkaloy vremeni* [Synthesis and modeling of digital control systems with a double time scale]. Moscow: Mashinostroenie-1.
2. Yurkevich, V.D. (2000) *Sintez nelineynykh nestatsionarnykh sistem upravleniya s raznotempovymi protsessami* [Synthesis of nonlinear non-stationary control systems with multi-rate processes]. St. Petersburg: Nauka.
3. Parshukov, A.N. (2009) *Metody sinteza modal'nykh regulyatorov* [Methods of synthesis of modal regulators]. Tyumen: Industrial University of Tyumen.
4. Kuzovkov, N.T. (1976) *Modal'noe upravlenie i nablyudayushchie ustroystva* [Modal control and monitoring devices]. Moscow: Mashinostroenie. 184 p.
5. Ackermann, J.A., Bartlett, D., Kaesbauer, W.S. & Steinhauser, R. (1993) *Robust control. Systems with uncertain physical parameters*. London: Springer-Verlag.
6. Barmish, B.R. (1994) *New tools for robustness of linear systems*. New York: MacMillan.
7. Polyak, B.T. & Tsytkin, Ya.Z. (1990) Frequency criteria of robust stability and aperiodicity of linear systems. *Automation and Remote Control*. 51(9). pp. 1192–1201.
8. Polyak, B.T. & Tsytkin, Ya.Z. (1996) Stability and Robust Stability of Uniform Systems. *Automation and Remote Control*. 57(11). pp. 1606–1617.
9. Polyak, B.T. & Shcherbakov, P.S. (2002) *Robastnaya ustoychivost' i upravlenie* [Robust stability and control]. Moscow: Nauka.
10. Doyle, J.C., Glover, K., Khargonekar, P.P. & Francis, B.A. (1989) State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 34(8). pp. 831–847. DOI: 10.1109/9.29425

11. Kogan, M.M. (2016) Optimal Discrete-time H_{∞}/γ_0 Filtering and Control under Unknown Covariances. *International Journal of Control*. 89(4). pp. 691–700. DOI: 10.1080/00207179.2015.1091511
12. Chestnov, V.N. (2015) H_{∞} -approach to controller synthesis under parametric uncertainty and polyharmonic external disturbances. *Automation and Remote Control*. 76(6). pp. 1036–1048. DOI: 10.1134/S0005117915060077
13. Selvesyuk, N.I. (2016) Analytical synthesis of robust controllers of the given accuracy under external perturbations. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya – Journal of Computer and Systems Sciences International*. 55(4). pp. 558–569. DOI: 10.1134/S1064230716040109
14. Balandin, D.V., Kogan, M.M., Krivdina, L.N. & Fedyukov, A.A. (2014) Design of Generalized Discretetime H_{∞} -optimal Control over Finite and Infinite Intervals. *Automation and Remote Control*. 75(1). pp. 1–17. DOI: 10.1134/S0005117914010019
15. Parshukov, A.N. (2019) Synthesis method of modal regulator for control object with interval uncertainty of coefficients. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 49. pp. 14–22. DOI: 10.17223/19988605/49/2

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517.935.4:532.516.5
DOI: 10.17223/19988605/52/2

D.K. Andreichenko, K.P. Andreichenko, D.V. Melnichuk

**MODELING THE EFFECT OF CENTERING
OF A SPHERICAL HYDRODYNAMIC SUSPENSION**

Funding: The reported study was funded by RFBR, project number 19-37-90017.

Based on the methods of asymptotic integration in the case when the decentering force is orthogonal to the sensitivity axis, the fast centering of the spherical hydrodynamic suspension at large values of the oscillatory Reynolds number is shown. It is shown that, up to the constant factor, the asymptotics of the dependence of the relative eccentricity on the oscillatory Reynolds number is similar to the results obtained earlier for cylindrical hydrodynamic suspension.

Keywords: asymptotic integration; spherical hydrodynamic suspension.

High-load float gyroscopes are widely used elements of the control system of moving objects. In turn, spherical hydrodynamic suspension is a sensitive element of a number of float gyroscopes [1]. The stability on the mobile equilibrium curve of a weakly loaded spherical suspension at low oscillatory Reynolds numbers was studied earlier [1]. Cylindrical hydrodynamic suspension is quickly centered with increasing oscillatory Reynolds number [2]. Experimental data [1] confirm this effect for spherical hydrodynamic suspension. The influence of Coriolis forces of inertia on the dynamics of viscous incompressible fluid increases significantly with increasing oscillatory Reynolds numbers [3–9]. Nonlinear effects can destabilize the Couette flow in the layers between rotating spheres [10–14], but this is true when their angular velocities are significantly different. The aim of this work is to simulate the centering effect of a spherical hydrodynamic suspension based on the asymptotic integration of the reduced Navier-Stokes equations for the isothermal flow of a viscous incompressible fluid in a rotating support layer.

1. Mathematical model

We assume that the sensitivity axis coincides with the Oz axis of the $Oxyz$ coordinate system, the origin of which is in the center of mass of the inner sphere, and all the decentering forces lie in the Oxy plane. In disregard of some terms of the order of the square of the small relative thickness of the spherical layer (which is justified in [2]) and the small compressibility of the liquid, the equations of equilibrium of the suspension in dimensionless variables follow from [15] and take the form

$$\begin{aligned} \pi\gamma(\rho_2 / \rho - 1)(\mathbf{g} - \mathbf{a}_0) + \frac{3}{4} \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi (\beta\sigma^{-1}h^{-1} (\partial v_\varphi / \partial x)|_{x=0} \mathbf{e}_\varphi - p|_{x=0} \mathbf{e}_r) = 0, \\ \frac{8}{3} \pi\beta\Omega + \int_0^\pi \sin^2 \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} (\partial v_\varphi / \partial x)|_{x=0} d\varphi / h = 0, \quad h = \beta^{-1}[(1 + \beta)^2 + \beta^2((\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_r)^2 - \mathbf{u}^2)]^{1/2} - 1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_r, \\ \mathbf{v} = \beta v_r \mathbf{e}_r + v_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi, \quad v_r = x(1 + \beta hx)^{-1} \mathbf{v} \cdot \nabla^{(s)} h - (1 + \beta hx)^{-2} \int_0^x \nabla^{(s)} \cdot (h(1 + \beta hx)\mathbf{v}) dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{1+\beta hx} \frac{\partial p|_{x=0}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 v_\vartheta}{\partial x^2} + \frac{2\beta}{h} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial x} \right) - \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \varphi} + 2v_\varphi \cos \vartheta + \mathbf{F}_\vartheta[\mathbf{v}] = 0, \\
& -\frac{1}{1+\beta hx \sin \vartheta} \frac{\partial p|_{x=0}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial x^2} + \frac{2\beta}{h} \frac{\partial v_\varphi}{\partial x} \right) - \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - 2v_\vartheta \cos \vartheta - 2\beta v_r \sin \vartheta + \mathbf{F}_\varphi[\mathbf{v}] = 0, \\
& v_r|_{x=0} = 0, \quad v_\vartheta|_{x=0} = 0, \quad v_\varphi|_{x=0} = -\Omega \sin \vartheta, \quad v_r|_{x=1} = \sin \vartheta (u_x \sin \varphi - u_y \cos \varphi), \\
& v_\vartheta|_{x=1} = \beta \cos \vartheta (u_x \sin \varphi - u_y \cos \varphi), \quad v_\varphi|_{x=1} = \beta (u_y \sin \varphi + u_x \cos \varphi), \quad W_0 = -2v_\varphi \sin \vartheta + v_\vartheta^2 + v_\varphi^2, \quad (1) \\
& \nabla^{(s)} \cdot \Phi^{(0)}[\mathbf{v}] = 0, \quad \Phi^{(0)}[\mathbf{v}] = h \int_0^1 (1 + \beta hx) (v_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi) dx - \frac{1}{2} (1 + \beta hx)^2 \Omega_1^{(0)} \times \mathbf{u}, \\
& \mathbf{F}[\mathbf{v}] = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial \varphi} x - v_r \right) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} - \frac{\beta}{1 + \beta hx} \left[\nabla^{(s)} \left(h \int_0^x W_0 dx \right) - x W_0 \nabla^{(s)} h \right] - \beta v_r \mathbf{v} - (1 - \beta hx) \left[\frac{1}{2} \nabla^{(s\xi)} (v_\vartheta^2 + v_\varphi^2) \right] - \\
& - (\mathbf{e}_r \times \mathbf{v}) \nabla^{(s\xi)} \cdot (\mathbf{e}_r \times \mathbf{v}) + \beta^2 [\nabla^{(s\xi)} (\nabla^{(s\xi)} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{e}_r \times \nabla^{(s\xi)} (\nabla^{(s\xi)} \cdot (\mathbf{e}_r \times \mathbf{v}))] / \sigma.
\end{aligned}$$

Here $\mathbf{u} = (u_x, u_y, 0)^T$ and Ω are dimensionless displacement of the center of the inner sphere relative to the outer one and the difference of their angular velocities (sliding); h is the variable thickness of the support layer, $h(\pi - \vartheta, \varphi) = h(\vartheta, \varphi)$; $x = \xi / h \in [0, 1]$ is a dimensionless deformed radial coordinate; ϑ, φ are the angular coordinates of a point on a spherical surface; $\mathbf{e}_r = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)^T$, $\mathbf{e}_\vartheta = (\cos \vartheta \cos \varphi, \cos \vartheta \sin \varphi, -\sin \vartheta)^T$, $\mathbf{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)^T$ are the unit vectors of a spherical coordinate system; ρ_2, ρ are the reduced density of the inner sphere and the density of the supporting layer, p is the dimensionless pressure, $p(\pi - \vartheta) = p(\vartheta)$; $v_r, v_\vartheta, v_\varphi$ are dimensionless radial and tangential components of fluid velocity, $v_{r,\varphi}(x, \pi - \vartheta, \varphi) = v_{r,\varphi}(x, \vartheta, \varphi)$, $v_\vartheta(x, \pi - \vartheta, \varphi) = -v_\vartheta(x, \vartheta, \varphi)$; $0 \leq \beta \ll 1$ is a small relative thickness of the supporting layer [2]; σ is the oscillatory Reynolds number [2]; γ characterizes the loading of the suspension; $\mathbf{g} = (0, -1, 0)^T$, $\mathbf{a}_0 = (a_{0x}, a_{0y}, 0)^T$ are dimensionless vectors of free fall acceleration and overloads; $\Omega_1^{(0)} = (0, 0, 1)^T$. The spherical components of vector analysis operations, their analogues and the averaging operation act on the scalar field f and the vector field $\mathbf{F} = F_r \mathbf{e}_r + F_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + F_\varphi \mathbf{e}_\varphi$ as follows

$$\begin{aligned}
& \nabla^{(s)} f = \mathbf{e}_\vartheta \partial f / \partial \vartheta + \mathbf{e}_\varphi \sin^{-1} \vartheta \partial f / \partial \varphi, \quad \nabla^{(s)} \cdot \mathbf{F} = \sin^{-1} \vartheta [\partial (F_\vartheta \sin \vartheta) / \partial \vartheta + \partial F_\varphi / \partial \varphi], \\
& \nabla^{(s\xi)} f = \nabla^{(s)} f - x h^{-1} (\nabla^{(s)} h) \partial f / \partial x, \quad \nabla^{(s\xi)} \cdot \mathbf{F} = \nabla^{(s)} \cdot \mathbf{F} - x h^{-1} \nabla^{(s)} h \cdot \partial \mathbf{F} / \partial x, \quad \langle f \rangle = \int_0^1 (1 + \beta x) f dx. \quad (2)
\end{aligned}$$

2. Case of infinitely small thickness of the supporting layer

When $\beta = 0$, the nonlinear boundary value problem (1) is simplified:

$$\begin{aligned}
& \langle f \rangle = \int_0^1 f dx; \quad h = 1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{v} = v_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi, \quad p = p(\vartheta, \varphi), \quad \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^2 \vartheta (\partial v_\varphi / \partial x) \Big|_{x=0} d\vartheta / h = 0, \\
& \pi \gamma (\rho_2 / \rho - 1) (\mathbf{g} - \mathbf{a}_0) - \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta p \mathbf{e}_r = 0, \quad \partial v_r / \partial x = -h \nabla^{(s)} \cdot \mathbf{v} + x \nabla^{(s)} h \cdot \partial \mathbf{v} / \partial x, \\
& -\frac{\partial p}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sigma h^2} \frac{\partial^2 v_\vartheta}{\partial x^2} - \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \varphi} + 2v_\varphi \cos \vartheta + \mathbf{F}_\vartheta[\mathbf{v}] = 0, \quad -\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{1}{\sigma h^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - 2v_\vartheta \cos \vartheta + \mathbf{F}_\varphi[\mathbf{v}] = 0; \quad (3) \\
& + \mathbf{F}_\varphi[\mathbf{v}] = 0; \quad \nabla^{(s)} \cdot (h \langle \mathbf{v} \rangle - \frac{1}{2} \Omega_1^{(0)} \times \mathbf{u}) = 0; \quad v_r|_{x=0} = v_\vartheta|_{x=0} = v_\vartheta|_{x=1} = v_\varphi|_{x=1} = 0, \quad v_\varphi|_{x=0} = -\Omega \sin \vartheta, \\
& \mathbf{F}[\mathbf{v}] = \frac{1}{h} \left(x \frac{\partial h}{\partial \varphi} - v_r \right) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} - \mathbf{e}_r \times \mathbf{v} \left[\nabla^{(s)} \cdot (\mathbf{e}_r \times \mathbf{v}) - \frac{x}{h} \mathbf{e}_r \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \cdot \nabla^{(s)} h \right] - \nabla^{(s)} \frac{v_\vartheta^2 + v_\varphi^2}{2} + \frac{\nabla^{(s)} h}{h} x \frac{\partial}{\partial x} \frac{v_\vartheta^2 + v_\varphi^2}{2}.
\end{aligned}$$

The oscillatory Reynolds number σ is proportional to the first degree of the dimensional angular velocity of the outer sphere, and the parameter γ is inversely proportional to its second degree. Consequently, the solution of the nonlinear problem (3) is sought in the form of an asymptotic series

$$(\mathbf{u}, \Omega, v_r, v_\vartheta, v_\varphi, p) = \gamma \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k (\mathbf{u}_k, \Omega_k, v_{r_k}, v_{\vartheta_k}, v_{\varphi_k}, p_k), \quad \gamma \ll 1, \quad \sigma = \underline{O}(1). \quad (4)$$

Here $\mathbf{u}_0, \Omega_0, v_{r_0}, v_{\vartheta_0}, v_{\varphi_0}, p_0$ are the solution of a linear boundary value problem

$$\pi(\rho_2 / \rho - 1)(\mathbf{g} - \mathbf{a}_0) - \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta p \mathbf{e}_r = 0, \quad \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^2 \vartheta d\vartheta (\partial v_\varphi / \partial x) \Big|_{x=0} = 0, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \partial v_r / \partial x &= -\nabla^{(s)} \cdot \mathbf{v}, \quad p = p(\vartheta, \varphi), \quad \nabla^{(s)} \cdot \langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{2} \sin \vartheta [(u_{0y} + iu_{0x})e^{i\varphi} + (u_{0y} - iu_{0x})e^{-i\varphi}], \\ -\frac{\partial p}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 v_\vartheta}{\partial x^2} - \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \varphi} + 2v_\varphi \cos \vartheta &= 0, \quad -\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - 2v_\vartheta \cos \vartheta = 0, \quad (6) \\ v_r|_{x=0} &= 0, \quad v_\vartheta|_{x=0} = 0, \quad v_\varphi|_{x=0} = -\Omega_0 \sin \vartheta, \quad v_\vartheta|_{x=1} = 0, \quad v_\varphi|_{x=1} = 0. \end{aligned}$$

The solution of the linear boundary value problem (6) has the form

$$p(\vartheta, \varphi) = \Omega_0 p^{(0)}(\vartheta) + (u_{0y} + iu_{0x})e^{i\varphi} p^{(+)}(\vartheta) + (u_{0y} - iu_{0x})e^{-i\varphi} p^{(-)}(\vartheta), \quad ()^{(-)} = \overline{()^{(+)}} \quad (7)$$

$$v_{r,\vartheta,\varphi}(x, \vartheta, \varphi) = \Omega_0 v_{r,\vartheta,\varphi}^{(0)}(x, \vartheta) + (u_{0y} + iu_{0x})e^{i\varphi} v_{r,\vartheta,\varphi}^{(+)}(x, \vartheta) + (u_{0y} - iu_{0x})e^{-i\varphi} v_{r,\vartheta,\varphi}^{(-)}(x, \vartheta).$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r^{(0)}}{\partial x} &= -\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (v_\vartheta^{(0)} \sin \vartheta), \quad \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \langle v_\vartheta^{(0)} \rangle) = 0, \quad -\frac{\partial p^{(0)}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 v_\vartheta^{(0)}}{\partial x^2} + 2v_\varphi^{(0)} \cos \vartheta = 0, \quad (8) \\ \sigma^{-1} \frac{\partial^2 v_\varphi^{(0)}}{\partial x^2} / \partial x^2 - 2v_\vartheta \cos \vartheta &= 0; \quad v_r^{(0)} \Big|_{x=0} = v_\vartheta^{(0)} \Big|_{x=0} = 0, \quad v_\varphi^{(0)} \Big|_{x=0} = -\sin \vartheta, \quad v_\vartheta^{(0)} \Big|_{x=1} = v_\varphi^{(0)} \Big|_{x=1} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r^{(+)}}{\partial x} &= -\frac{1}{\sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (v_\vartheta^{(+)} \sin \vartheta) + i v_\varphi^{(+)} \right], \quad \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \langle v_\vartheta^{(+)} \rangle + i \langle v_\varphi^{(+)} \rangle = \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta, \\ -\frac{\partial p^{(+)}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 v_\vartheta^{(+)}}{\partial x^2} - i v_\vartheta^{(+)} + 2v_\varphi^{(+)} \cos \vartheta &= 0, \quad -\frac{i}{\sin \vartheta} p^{(+)} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 v_\varphi^{(+)}}{\partial x^2} - i v_\varphi^{(+)} - 2v_\vartheta^{(+)} \cos \vartheta = 0, \quad (9) \\ v_r^{(+)} \Big|_{x=0} &= v_\vartheta^{(+)} \Big|_{x=0} = v_\varphi^{(+)} \Big|_{x=0} = 0, \quad v_\vartheta^{(+)} \Big|_{x=1} = v_\varphi^{(+)} \Big|_{x=1} = 0. \end{aligned}$$

Subject to (7), the conditions (5) take the form

$$(u_{0y} + iu_{0x}) \int_0^\pi \sin^2 \vartheta p^{(+)} d\vartheta = \frac{2}{3} (\rho_2 / \rho - 1) (i(1 + a_{0y}) - a_{0x}), \quad 2\pi \Omega_0 \int_0^\pi \sin^2 \vartheta d\vartheta (\partial v_\varphi^{(0)} / \partial x) \Big|_{x=0} = 0. \quad (10)$$

In particular, solving the linear boundary value problem (8) and using (10), we find

$$(\partial v_\varphi^{(0)} / \partial x) \Big|_{x=0} = \sin \vartheta \operatorname{Re} \left[\sqrt{\frac{1}{2} i \sigma \cos \vartheta} \operatorname{cth} \sqrt{\frac{1}{2} i \sigma \cos \vartheta} \right], \quad \Omega_0 = 0. \quad (11)$$

and in this approximation, there is no sliding. The solution of (9) has the form

$$\begin{aligned} \langle v_\varphi^{(+)} \rangle &= -\frac{1}{2} i \sin^2 \vartheta + i \partial \sin \vartheta \langle v_\vartheta^{(+)} \rangle / \partial \vartheta, \quad p^{(+)} = \frac{1}{4} \sin \vartheta [(\Theta_2^{-1} + \Theta_1^{-1}) \langle v_\varphi^{(+)} \rangle + i(\Theta_2^{-1} - \Theta_1^{-1}) \langle v_\vartheta^{(+)} \rangle], \\ v_\varphi^{(+)} &= \frac{1}{2} (\langle v_\varphi^{(+)} \rangle - i \langle v_\vartheta^{(+)} \rangle) \Theta_1^{-1}(\vartheta) V_1(x, \cos \vartheta) + \frac{1}{2} (\langle v_\varphi^{(+)} \rangle + i \langle v_\vartheta^{(+)} \rangle) \Theta_2^{-1}(\vartheta) V_1(x, -\cos \vartheta), \\ v_\vartheta^{(+)} &= \frac{1}{2} i (\langle v_\varphi^{(+)} \rangle - i \langle v_\vartheta^{(+)} \rangle) \Theta_1^{-1}(\vartheta) V_1(x, \cos \vartheta) - \frac{1}{2} i (\langle v_\varphi^{(+)} \rangle + i \langle v_\vartheta^{(+)} \rangle) \Theta_2^{-1}(\vartheta) V_1(x, -\cos \vartheta), \\ V_1(x, z) &= \frac{1}{2} (1 + 2z)^{-1} \{ [\operatorname{sh}((1-x)\sqrt{i\sigma(1+2z)}) + \operatorname{sh}(x\sqrt{i\sigma(1+2z)})] / \operatorname{sh} \sqrt{i\sigma(1+2z)} - 1 \}, \\ v_r^{(+)} &= -\frac{1}{2} i \sin^{-1} \vartheta \{ \partial [\Theta_1^{-1}(\vartheta) V_2(x, \cos \vartheta) (\langle v_\varphi^{(+)} \rangle - i \langle v_\vartheta^{(+)} \rangle) - \Theta_2^{-1}(\vartheta) V_2(x, -\cos \vartheta) (\langle v_\varphi^{(+)} \rangle + i \langle v_\vartheta^{(+)} \rangle)] / \partial \vartheta \\ &+ \Theta_1^{-1}(\vartheta) V_2(x, \cos \vartheta) (\langle v_\varphi^{(+)} \rangle - i \langle v_\vartheta^{(+)} \rangle) + \Theta_2^{-1}(\vartheta) V_2(x, -\cos \vartheta) (\langle v_\varphi^{(+)} \rangle + i \langle v_\vartheta^{(+)} \rangle) \}, \\ \Theta_1(\vartheta) &= V_2(1, \cos \vartheta), \quad \Theta_2(\vartheta) = V_2(1, -\cos \vartheta), \quad V_2(x, z) = \frac{1}{2} (1 + 2z)^{-1} \cdot \\ &\cdot \{ [\operatorname{ch}(x\sqrt{i\sigma(1+2z)}) - \operatorname{ch}((1-x)\sqrt{i\sigma(1+2z)}) - 1 + \operatorname{ch} \sqrt{i\sigma(1+2z)}] / (\sqrt{i\sigma(1+2z)} \operatorname{sh} \sqrt{i\sigma(1+2z)}) - x \}. \end{aligned} \quad (12)$$

The function $\langle v_{\vartheta}^{(+)} \rangle$ is the solution of a linear ordinary differential equation

$$\frac{d}{d\vartheta} \left[\sin^3 \vartheta \Theta_2^{-1}(\vartheta) + \Theta_1^{-1}(\vartheta) \frac{d}{d\vartheta} \langle v_{\vartheta}^{(+)} \rangle \right] = \Theta_3(\vartheta) - \Theta_4(\vartheta) \langle v_{\vartheta}^{(+)} \rangle, \quad (13)$$

where

$$\Theta_3(\vartheta) = \frac{1}{2} d[\sin^4 \vartheta (\Theta_2^{-1} + \Theta_1^{-1})] / d\vartheta - \frac{1}{2} \cos \vartheta \sin^3 \vartheta \Theta_2^{-1} + \Theta_1^{-1} - \frac{1}{2} \sin^3 \vartheta \Theta_2^{-1} - \Theta_1^{-1},$$

$$\Theta_4(\vartheta) = \cos \vartheta \sin^2 \vartheta d(\Theta_2^{-1} + \Theta_1^{-1}) / d\vartheta + \sin^2 \vartheta d(\Theta_2^{-1} - \Theta_1^{-1}) / d\vartheta - 2 \sin^3 \vartheta (\Theta_2^{-1} + \Theta_1^{-1}),$$

$$\Theta_3(\vartheta) = \underline{O}(\sin^3 \vartheta), \quad \Theta_4(\vartheta) = \underline{O}(\sin^3 \vartheta), \quad \vartheta \rightarrow 0, \quad \vartheta \rightarrow \pi,$$

$$\Theta_4(\vartheta) = \underline{O}(1/\sqrt{\sigma}), \quad \sigma \rightarrow \infty, \quad \vartheta \neq \pi/3, 2\pi/3; \quad \Theta_4(\pi/3) = \underline{O}(1), \quad \Theta_4(2\pi/3) = \underline{O}(1), \quad \sigma \rightarrow \infty.$$

Requirements for the absence of singularities of the solution of equation (13) in the poles of the sphere and anti-symmetry with respect to the equator $\vartheta = \pi/2$ lead to boundary conditions

$$\frac{d}{d\vartheta} \langle v_{\vartheta}^{(+)} \rangle \Big|_{\vartheta=0} = 0, \quad \langle v_{\vartheta}^{(+)} \rangle \Big|_{\vartheta=\pi/2} = 0. \quad (14)$$

When $\sigma \rightarrow \infty$, the asymptotic integration of the linear boundary value problem (13), (14) can be performed on the basis of the successive approximations method

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\vartheta} \left[\sin^3 \vartheta \Theta_2^{-1} + \Theta_1^{-1} \frac{d}{d\vartheta} \langle v_{\vartheta}^{(+)} \rangle_{k+1} \right] = \\ & = \Theta_3 - \Theta_4 \langle v_{\vartheta}^{(+)} \rangle_k, \quad \frac{d}{d\vartheta} \langle v_{\vartheta}^{(+)} \rangle_{k+1} \Big|_{\vartheta=0} = 0, \quad \langle v_{\vartheta}^{(+)} \rangle_{k+1} \Big|_{\vartheta=\pi/2} = 0, \\ & \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \langle v_{\vartheta}^{(+)} \rangle_0 \equiv 0. \end{aligned} \quad (15)$$

On the first iteration we assume $\Theta_2^{-1} + \Theta_1^{-1} \approx -4$, $\Theta_2^{-1} - \Theta_1^{-1} \approx 8 \cos \vartheta$, and we find (see (10))

$$\langle v_{\vartheta}^{(+)} \rangle = -\frac{5}{8} \cos \vartheta, \quad \int_0^{\pi} d\vartheta \sin^2 \vartheta p^{(+)} = -\frac{3}{10} i, \quad \sigma \rightarrow \infty, \quad (16)$$

$$u_{0x} = -\frac{20}{9} (\rho_2 / \rho - 1) a_{0x}, \quad u_{0y} = -\frac{20}{9} (\rho_2 / \rho - 1) (1 + a_{0y}). \quad (17)$$

On the second iteration, we find

$$\int_0^{\pi} d\vartheta \sin^2 \vartheta p^{(+)} = -\frac{3}{10} i + C_p / \sqrt{\sigma}, \quad C_p = \frac{1971\sqrt{3+4061}}{17160\sqrt{2}} + i \frac{1971\sqrt{3-4061}}{17160\sqrt{2}}, \quad \sigma \rightarrow \infty. \quad (18)$$

The coefficients $\mathbf{u}_1, \Omega_1, v_r, v_{\vartheta_1}, v_{\varphi_1}, p_1$ of asymptotic series (4) are the solution of the problem

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta p \mathbf{e}_r = 0, \quad \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^2 \vartheta d\vartheta (\partial v_{\varphi} / \partial x + (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{e}_r) \partial v_{\varphi_0} / \partial x) \Big|_{x=0} = 0, \quad (19)$$

$$\partial v_r / \partial x = -\nabla^{(s)} \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{e}_r) \nabla^{(s)} \cdot \mathbf{v}_0 - x[(\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{e}_{\vartheta}) \partial v_{\vartheta_0} / \partial x + (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{e}_{\varphi}) \partial v_{\varphi_0} / \partial x],$$

$$\mathbf{v} = v_{\vartheta} \mathbf{e}_{\vartheta} + v_{\varphi} \mathbf{e}_{\varphi}, \quad \mathbf{v}_0 = v_{\vartheta_0} \mathbf{e}_{\vartheta} + v_{\varphi_0} \mathbf{e}_{\varphi}, \quad p = p(\vartheta, \varphi), \quad \nabla^{(s)} \cdot \langle \mathbf{v} \rangle - (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{e}_r) \langle \mathbf{v}_0 \rangle - \frac{1}{2} \mathbf{\Omega}_1^{(0)} \times \mathbf{u}_1 = 0,$$

$$-\frac{\partial p}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial^2 v_{\vartheta}}{\partial x^2} + 2(\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{e}_r) \frac{\partial^2 v_{\vartheta_0}}{\partial x^2} \right] - \frac{\partial v_{\vartheta}}{\partial \varphi} + 2v_{\varphi} \cos \vartheta + \mathbf{F}_{\vartheta}^{(1)}[\mathbf{v}_0] = 0, \quad (20)$$

$$-\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial^2 v_{\varphi}}{\partial x^2} + 2(\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{e}_r) \frac{\partial^2 v_{\varphi_0}}{\partial x^2} \right] - \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial \varphi} - 2v_{\vartheta} \cos \vartheta + \mathbf{F}_{\varphi}^{(1)}[\mathbf{v}_0] = 0,$$

$$v_r \Big|_{x=0} = 0, \quad v_{\vartheta} \Big|_{x=0} = 0, \quad v_{\varphi} \Big|_{x=0} = -\Omega_1 \sin \vartheta, \quad v_{\vartheta} \Big|_{x=1} = 0, \quad v_{\varphi} \Big|_{x=1} = 0,$$

$$\mathbf{F}^{(1)}[\mathbf{v}_0] = -(x \sin \vartheta (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{e}_{\varphi}) + v_{\vartheta_0}) \partial \mathbf{v}_0 / \partial x + (\mathbf{e}_r \times \mathbf{v}_0) \nabla^{(s)} \cdot (\mathbf{e}_r \times \mathbf{v}_0) - \frac{1}{2} \nabla^{(s)} (v_{\vartheta_0}^2 + v_{\varphi_0}^2).$$

In equations (19) and (20)

$$v_{r_0, \vartheta_0, \varphi_0}(x, \vartheta, \varphi) = (u_{0y} + iu_{0x}) e^{i\varphi} v_{r, \vartheta, \varphi}^{(+)}(x, \vartheta) + (u_{0y} - iu_{0x}) e^{-i\varphi} v_{r, \vartheta, \varphi}^{(-)}(x, \vartheta), \quad ()^{(-)} = \overline{()^{(+)}}. \quad (21)$$

By virtue of linearity (20) we look for its solution in the form of

$$\begin{aligned} p(\vartheta, \varphi) &= \Omega_1 p^{(0)}(\vartheta) + (u_{0x}^2 + u_{0y}^2) p^{(1,0)}(\vartheta) + (\dots) e^{i\varphi} + (\dots) e^{-i\varphi} + (\dots) e^{2i\varphi} + (\dots) e^{-2i\varphi}, \\ v_{r,\vartheta,\varphi}(x, \vartheta, \varphi) &= \Omega_1 v_{r,\vartheta,\varphi}^{(0)}(x, \vartheta) + (u_{0x}^2 + u_{0y}^2) v_{r,\vartheta,\varphi}^{(1,0)}(x, \vartheta) + (\dots) e^{i\varphi} + (\dots) e^{-i\varphi} + (\dots) e^{2i\varphi} + (\dots) e^{-2i\varphi}, \end{aligned} \quad (22)$$

Moreover, in (22) the values (...) do not depend on Ω_1 , and the functions $p^{(0)}(\vartheta)$ and $v_{r,\vartheta,\varphi}^{(0)}(x, \vartheta)$ are the solution (10). From (22), (21) and (19) follows

$$\Omega_1 \int_0^\pi \sin^2 \vartheta d\vartheta \left(\partial v_\varphi^{(0)} / \partial x \right) \Big|_{x=0} = (u_{0x}^2 + u_{0y}^2) \int_0^\pi \sin^2 \vartheta d\vartheta \left[\sin \vartheta \operatorname{Im} \left(\partial v_\varphi^{(+)} / \partial x \right) \Big|_{x=0} - \left(\partial v_\varphi^{(1,0)} / \partial x \right) \Big|_{x=0} \right]. \quad (23)$$

The functions $p^{(1,0)}(\vartheta)$ and $v_{r,\vartheta,\varphi}^{(1,0)}(x, \vartheta)$ are the solution of a linear boundary value problem

$$\begin{aligned} -dp^{(1,0)}/d\vartheta + \sigma^{-1} \partial^2 v_\varphi^{(1,0)} / \partial x^2 + 2v_\varphi^{(1,0)} \cos \vartheta + f_\vartheta(x, \vartheta) &= 0, \quad \sigma^{-1} \partial^2 v_\varphi^{(1,0)} / \partial x^2 - 2v_\varphi^{(1,0)} \cos \vartheta + \\ + f_\varphi(x, \vartheta) &= 0; \quad v_\vartheta^{(1,0)} \Big|_{x=0} = v_\varphi^{(1,0)} \Big|_{x=0} = v_\vartheta^{(1,0)} \Big|_{x=1} = v_\varphi^{(1,0)} \Big|_{x=1} = 0, \quad \langle v_\vartheta^{(1,0)} \rangle = \sin \vartheta \operatorname{Im} \langle v_\vartheta^{(+)} \rangle, \\ f_\vartheta(x, \vartheta) &= -2\sigma^{-1} \sin \vartheta \operatorname{Im} \partial^2 v_\vartheta^{(+)} / \partial x^2 - 2 \operatorname{Re} \left[(v_r^{(-)} + \frac{1}{2} x \sin \vartheta) \partial v_\vartheta^{(+)} / \partial x \right] - 2 \operatorname{Re} (v_\vartheta^{(-)} \partial v_\vartheta^{(+)} / \partial \vartheta) + \\ &+ 2 \sin^{-1} \vartheta \operatorname{Im} (v_\varphi^{(-)} v_\vartheta^{(+)}) + 2 \left| v_\varphi^{(+)} \right|^2 \operatorname{ctg} \vartheta, \quad f_\varphi(x, \vartheta) = -2 \operatorname{ctg} \vartheta \operatorname{Re} (v_\vartheta^{(-)} v_\varphi^{(+)}) - \\ &- 2\sigma^{-1} \sin \vartheta \operatorname{Im} \partial^2 v_\varphi^{(+)} / \partial x^2 - 2 \operatorname{Re} \left[(v_r^{(-)} + \frac{1}{2} x \sin \vartheta) \partial v_\varphi^{(+)} / \partial x \right] - 2 \operatorname{Re} (v_\vartheta^{(-)} \partial v_\varphi^{(+)} / \partial \vartheta). \end{aligned} \quad (24)$$

As a result of the solution (24) we find

$$\begin{aligned} \left(\partial v_\varphi^{(1,0)} / \partial x \right) \Big|_{x=0} &= \frac{1}{2} \sigma \int_0^1 \left[(1 + V_3(1-x, \vartheta) - V_3(x, \vartheta)) f_\varphi(x, \vartheta) + (V_4(1-x, \vartheta) - \right. \\ &- V_4(x, \vartheta)) f_\vartheta(x, \vartheta) + \sin 2\vartheta \operatorname{Im} v_\vartheta^{(+)} \Big] dx, \quad V_3(x, \vartheta) = \frac{1}{2} (V_5(x, \cos \vartheta) + V_5(x, -\cos \vartheta)), \\ V_4(x, \vartheta) &= -\frac{1}{2} i (V_5(x, \cos \vartheta) - V_5(x, -\cos \vartheta)), \quad V_5(x, z) = \operatorname{sh}(x\sqrt{2i\sigma z}) / \operatorname{sh} \sqrt{2i\sigma z}. \end{aligned}$$

The functions $V_{3,4}(1-x, \vartheta) - V_{3,4}(x, \vartheta)$ are odd in the variable x around the point $x = \frac{1}{2}$. We find

$$\begin{aligned} \left(\partial v_\varphi^{(1,0)} / \partial x \right) \Big|_{x=0} &= -\frac{1}{2} \sigma \operatorname{Re} p^{(+)} + \sin \vartheta \operatorname{Im} \left(\partial v_\varphi^{(+)} / \partial x \right) \Big|_{x=0} - \\ &- \sigma \sin^{-2} \vartheta \operatorname{Re} \partial \left[\sin^2 \vartheta \int_0^1 dx v_\vartheta^{(-)} v_\varphi^{(+)} \right] / \partial \vartheta. \end{aligned} \quad (25)$$

From (11), (23) and (25) follows

$$\frac{8}{21} \sqrt{\sigma} \Omega_1 + \dots = \frac{1}{2} \sigma (u_{0x}^2 + u_{0y}^2) \int_0^\pi \sin^2 \vartheta d\vartheta \operatorname{Re} p^{(+)}, \quad \sigma \rightarrow \infty. \quad (26)$$

From (18) and (26) we find

$$\Omega_1 = C_\Omega (u_{0x}^2 + u_{0y}^2), \quad C_\Omega = \frac{21}{16} \operatorname{Re} C_p = \frac{7(1971\sqrt{3}+4061)}{91520\sqrt{2}} = 0,404269, \quad \sigma \rightarrow \infty. \quad (27)$$

Further, similarly to [2], we assume

$$\gamma = (\rho_2 / \rho - 1)^{-1} \chi \sigma^{-2}, \quad \chi = \operatorname{const} = \underline{\underline{O}}(1), \quad \sigma \rightarrow \infty. \quad (28)$$

From (4), (11), (17), (27) and (28) we find the asymptotic behavior of the relative eccentricity \mathbf{u} and slip Ω as a function of the large oscillatory Reynolds numbers

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 \sigma^{-2} + \bar{\bar{\sigma}}(\sigma^{-2}), \quad \mathbf{u}_0 = (u_{0x}, u_{0y}, 0)^T, \quad \Omega = C_\Omega \sigma^{-4} + \bar{\bar{\sigma}}(\sigma^{-4}), \quad \sigma \rightarrow \infty, \\ u_{0x} &= -\frac{20}{9} \chi a_{0x}, \quad u_{0y} = -\frac{20}{9} \chi (1 + a_{0y}), \quad C_\Omega = \frac{7(1971\sqrt{3}+4061)}{91520\sqrt{2}} = 0,404269. \end{aligned} \quad (29)$$

3. Effect of the finite thickness of the supporting layer

When $\beta \neq 0$ with asymptotic integration (1) at the first stage we assume that assumptions (4) are satisfied. The coefficients $\mathbf{u}_0, \Omega_0, v_{r_0}, v_{\vartheta_0}, v_{\varphi_0}, p_0$ are the solution to the linear boundary value problem

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\rho_2}{\rho} - 1 \right) (\mathbf{g} - \mathbf{a}_0) + \frac{3}{4\pi} \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{\beta}{\sigma h} \frac{\partial v_\varphi}{\partial x} \Big|_{x=0} \mathbf{e}_\varphi - p|_{x=0} \mathbf{e}_r \right) = 0, \quad \mathbf{v} = \beta v_r \mathbf{e}_r + v_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi, \\
& \frac{8}{3} \pi \beta \Omega_0 + \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} (\partial v_\varphi / \partial x) \Big|_{x=0} d\varphi / h = 0, \quad v_r = -(1 + \beta x)^{-2} \int_0^x (1 + \beta x) \nabla^{(s)} \cdot \mathbf{v} dx - \\
& \quad - \frac{1}{1 + \beta x} \frac{\partial p|_{x=0}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial^2 v_\vartheta}{\partial x^2} + 2\beta \frac{\partial v_\vartheta}{\partial x} \right) - \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \varphi} + 2v_\varphi \cos \vartheta + \frac{2\beta}{1 + \beta x} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \int_0^x v_\varphi dx \right) + \\
& \quad + \frac{\beta^2}{\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} \nabla^{(s)} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \nabla^{(s)} \cdot (\mathbf{e}_r \times \mathbf{v}) \right) = 0, \quad - \frac{1}{1 + \beta x} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial p|_{x=0}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial x^2} + 2\beta \frac{\partial v_\varphi}{\partial x} \right) - \\
& \quad - \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - 2v_\vartheta \cos \vartheta - 2\beta v_r \sin \vartheta + \frac{2\beta}{1 + \beta x} \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_0^x v_\varphi dx + \frac{\beta^2}{\sigma} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \nabla^{(s)} \cdot \mathbf{v} - \frac{\partial}{\partial \vartheta} \nabla^{(s)} \cdot (\mathbf{e}_r \times \mathbf{v}) \right) = 0, \\
& \quad v_r|_{x=0} = 0, v_\vartheta|_{x=0} = 0, v_\varphi|_{x=0} = -\Omega_0 \sin \vartheta, v_r|_{x=1} = \sin \vartheta (u_{0x} \sin \varphi - u_{0y} \cos \varphi), \\
& \quad v_\vartheta|_{x=1} = \beta \cos \vartheta (u_{0x} \sin \varphi - u_{0y} \cos \varphi), \quad v_\varphi|_{x=1} = \beta (u_{0y} \sin \varphi + u_{0x} \cos \varphi), \\
& \quad \nabla^{(s)} \cdot \langle v_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi \rangle = -(1 + \beta)^2 \sin \vartheta (u_{0x} \sin \varphi - u_{0y} \cos \varphi).
\end{aligned} \tag{30}$$

Solution of (30) is sought in the form (see also (11))

$$\begin{aligned}
\Omega_0 = 0, \quad p|_{x=0} &= (u_{0y} + iu_{0x}) e^{i\varphi} p^{(+)}(\vartheta) + (u_{0y} - iu_{0x}) e^{-i\varphi} p^{(-)}(\vartheta), \\
v_{r,\vartheta,\varphi}(x, \vartheta, \varphi) &= (u_{0y} + iu_{0x}) e^{i\varphi} v_{r,\vartheta,\varphi}^{(+)}(x, \vartheta) + (u_{0y} - iu_{0x}) e^{-i\varphi} v_{r,\vartheta,\varphi}^{(-)}(x, \vartheta), \quad ()^{(-)} = \overline{()^{(+)}}.
\end{aligned} \tag{31}$$

where do the boundary value problem with respect to $p^{(+)}(\vartheta)$, $v_{r,\vartheta,\varphi}^{(+)}(x, \vartheta)$ come from

$$\begin{aligned}
& (u_{0y} + iu_{0x}) \int_0^\pi d\vartheta \left(\sin^2 \vartheta p^{(+)} + \frac{i\beta}{\sigma} \frac{\partial v_\varphi^{(+)}}{\partial x} \Big|_{x=0} \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{\rho_2}{\rho} - 1 \right) (-a_{0x} + i(1 + a_{0y})), \\
& v_r^{(+)} = -(1 + \beta x)^{-2} \sin^{-1} \vartheta [\partial(\sin \vartheta \int_0^x (1 + \beta x) v_\vartheta^{(+)} dx) / \partial \vartheta + i \int_0^x (1 + \beta x) v_\varphi^{(+)} dx], \quad 2v_\varphi^{(+)} \cos \vartheta - i v_\vartheta^{(+)} - \\
& \quad - \frac{1}{1 + \beta x} \frac{dp^{(+)}}{d\vartheta} + \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial^2 v_\vartheta^{(+)}}{\partial x^2} + 2\beta \frac{\partial v_\vartheta^{(+)}}{\partial x} \right) + \frac{2\beta}{1 + \beta x} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \int_0^x v_\varphi^{(+)} dx \right) + \frac{\beta^2}{\sigma} \left(\frac{\partial^2 v_\vartheta^{(+)}}{\partial \vartheta^2} + \text{ctg} \vartheta \frac{\partial v_\vartheta^{(+)}}{\partial \vartheta} - \right. \\
& \quad \left. - 2 \frac{v_\vartheta^{(+)}}{\sin^2 \vartheta} - 2 \frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} i v_\varphi^{(+)} \right) = 0, \quad - \frac{1}{1 + \beta x} \frac{i}{\sin \vartheta} p^{(+)} + \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial^2 v_\vartheta^{(+)}}{\partial x^2} + 2\beta \frac{\partial v_\vartheta^{(+)}}{\partial x} \right) + \frac{2\beta}{1 + \beta x} \int_0^x v_\varphi^{(+)} dx + \\
& \quad + \frac{\beta^2}{\sigma} \left(\frac{\partial^2 v_\varphi^{(+)}}{\partial \vartheta^2} + \text{ctg} \vartheta \frac{\partial v_\varphi^{(+)}}{\partial \vartheta} - 2 \frac{v_\varphi^{(+)}}{\sin^2 \vartheta} + 2 \frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} i v_\vartheta^{(+)} \right) - i v_\varphi^{(+)} - 2v_\vartheta^{(+)} \cos \vartheta - 2\beta v_r^{(+)} \sin \vartheta = 0, \\
& v_\vartheta^{(+)}|_{x=0} = 0, \quad v_\varphi^{(+)}|_{x=0} = -\sin \vartheta, \quad v_r^{(+)}|_{x=0} = 0, \quad v_\vartheta^{(+)}|_{x=1} = -\frac{1}{2} \beta \cos \vartheta, \quad v_\varphi^{(+)}|_{x=1} = -\frac{1}{2} i\beta, \\
& v_r^{(+)}|_{x=1} = -\frac{1}{2} \sin \vartheta; \quad \sin^{-1} \vartheta [\partial(\sin \vartheta \langle v_\vartheta^{(+)} \rangle) / \partial \vartheta + i \langle v_\varphi^{(+)} \rangle] = \frac{1}{2} (1 + \beta)^2 \sin \vartheta.
\end{aligned} \tag{32}$$

We assume that (28) is true. When $\sigma \gg 1$, we look for a solution of (33) in the form

$$\begin{aligned}
v_{r,\vartheta,\varphi}^{(+)} &= v_{r,\vartheta,\varphi}^{(+,e)}(x, \vartheta) + \bar{o}(1) \text{ in the area away from borders } x = 0 \text{ and } x = 1; \\
v_{\vartheta,\varphi}^{(+)} &= v_{\vartheta,\varphi}^{(+,i_0)}(\eta, \vartheta) + \bar{o}(1), \quad v_r^{(+)} = \bar{o}(1), \quad \eta = x\sqrt{\sigma} \text{ near } x = 0; \\
v_{\vartheta,\varphi}^{(+)} &= v_{\vartheta,\varphi}^{(+,i_1)}(\zeta, \vartheta) + \bar{o}(1), \quad v_r^{(+)} = -\frac{1}{2} \sin \vartheta + \bar{o}(1), \quad \zeta = (1 - x)\sqrt{\sigma} \text{ near } x = 1.
\end{aligned} \tag{34}$$

Boundary conditions are set for functions $v_{\vartheta,\varphi}^{(+,i_0)}$ and $v_{\vartheta,\varphi}^{(+,i_1)}$, boundary conditions for $v_r^{(+,e)}$ are obtained from the conditions of matching asymptotic representations (34). Similarly (12), matching is possible everywhere except for the narrow neighborhoods of the support layer corresponding to $\vartheta = \pi/3$ and $\vartheta = 2\pi/3$. These linear boundary value problems follow from (34) and (33)

$$\begin{aligned}
 v_r^{(+,e)} &= -(1 + \beta x)^{-2} \sin^{-1} \vartheta [\partial(\sin \vartheta \int_0^x (1 + \beta x) v_\vartheta^{(+,e)} dx) / \partial \vartheta + i \int_0^x (1 + \beta x) v_\varphi^{(+,e)} dx], \\
 -(1 + \beta x)^{-1} \sin^{-1} \vartheta i p^{(+)} - i v_\varphi^{(+,e)} - 2 v_\vartheta^{(+,e)} \cos \vartheta - 2 \beta v_r^{(+,e)} \sin \vartheta + 2 \beta (1 + \beta x)^{-1} i \int_0^x v_\varphi^{(+,e)} dx &= 0, \\
 -(1 + \beta x)^{-1} dp^{(+)} / d\vartheta - i v_\vartheta^{(+,e)} + 2 v_\varphi^{(+,e)} \cos \vartheta + 2 \beta (1 + \beta x)^{-1} \partial(\sin \vartheta \int_0^x v_\varphi^{(+,e)} dx) / \partial \vartheta &= 0, \\
 v_r^{(+,e)}|_{x=0} = 0, \quad v_r^{(+,e)}|_{x=1} = -\frac{1}{2} \sin \vartheta; \quad \partial(\sin \vartheta \langle v_\vartheta^{(+,e)} \rangle) / \partial \vartheta + i \langle v_\varphi^{(+,e)} \rangle &= \frac{1}{2} (1 + \beta)^2 \sin^2 \vartheta.
 \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
 v_\vartheta^{(+,i_0)} &= v_\vartheta^{(+,e)}|_{x=0} + w_\vartheta, \quad v_\varphi^{(+,i_0)} = v_\varphi^{(+,e)}|_{x=0} + w_\varphi, \\
 \partial^2 w_\vartheta / \partial \eta^2 - i w_\vartheta + 2 w_\varphi \cos \vartheta &= 0, \quad \partial^2 w_\varphi / \partial \eta^2 - i w_\varphi - 2 w_\vartheta \cos \vartheta = 0, \\
 w_\vartheta|_{\eta=0} = -v_\vartheta^{(+,e)}|_{x=0}, \quad w_\varphi|_{x=0} = -v_\varphi^{(+,e)}|_{x=0}, \quad w_\vartheta|_{\eta=\infty} = w_\varphi|_{\eta=\infty} &= 0.
 \end{aligned} \tag{36}$$

The solution of the (36) has the form

$$\begin{aligned}
 v_\varphi^{(+,i_0)} &= \frac{1}{2} (i v_\vartheta^{(+,e)}|_{x=0} - v_\varphi^{(+,e)}|_{x=0}) e^{-\eta \sqrt{i(1+2\cos\vartheta)}} - \frac{1}{2} (i v_\vartheta^{(+,e)}|_{x=0} + v_\varphi^{(+,e)}|_{x=0}) e^{-\eta \sqrt{i(1-2\cos\vartheta)}} - v_\varphi^{(+,e)}|_{x=0}, \\
 v_\varphi^{(+,i_0)} &= \frac{1}{2} (i v_\vartheta^{(+,e)}|_{x=0} - v_\vartheta^{(+,e)}|_{x=0}) e^{-\eta \sqrt{i(1-2\cos\vartheta)}} - \frac{1}{2} (v_\vartheta^{(+,e)}|_{x=0} + i v_\varphi^{(+,e)}|_{x=0}) e^{-\eta \sqrt{i(1+2\cos\vartheta)}} - v_\vartheta^{(+,e)}|_{x=0}.
 \end{aligned} \tag{37}$$

From (37) and (32) follows

$$(u_{0y} + i u_{0x}) \int_0^\pi d\vartheta \sin^2 \vartheta p^{(+)} = \frac{2}{3} (\rho_2 / \rho - 1) (-a_{0x} + i(1 + a_{0y})) + \underline{\underline{O}}(1 / \sqrt{\sigma}), \quad \sigma \gg 1. \tag{38}$$

Since $\beta \ll 1$, a further solution (35) is sufficient to hold up to $\underline{\underline{O}}(\beta^2)$. Up to small order $\underline{\underline{O}}(\beta)$, $v_\vartheta^{(+,e)}$ and $v_\varphi^{(+,e)}$ are independent of x , and $v_r^{(+,e)}$ is a linear function of x . That is

$$\langle \beta v_r^{(+,e)} \rangle = -\frac{1}{4} \beta \sin \vartheta + \underline{\underline{O}}(\beta^2), \quad \langle \beta (1 + \beta x)^{-1} \int_0^x v_\varphi^{(+,e)} dx \rangle = \frac{1}{2} \beta \langle v_\varphi^{(+,e)} \rangle + \underline{\underline{O}}(\beta^2). \tag{39}$$

From (39) and (35) we find

$$\begin{aligned}
 -\frac{dp^{(+)}}{d\vartheta} - i \langle v_\vartheta^{(+,e)} \rangle + 2 \langle v_\varphi^{(+,e)} \rangle \cos \vartheta + \beta \frac{d}{d\vartheta} \sin \vartheta \langle v_\varphi^{(+,e)} \rangle + \underline{\underline{O}}(\beta^2) &= 0, \\
 -i \sin^{-1} \vartheta p^{(+)} - i(1 - \beta) \langle v_\varphi^{(+,e)} \rangle - 2 \langle v_\vartheta^{(+,e)} \rangle \cos \vartheta + \underline{\underline{O}}(\beta^2) &= -\frac{1}{4} \beta \sin^2 \vartheta, \\
 \frac{d}{d\vartheta} \sin \vartheta \langle v_\vartheta^{(+,e)} \rangle + i \langle v_\varphi^{(+,e)} \rangle &= \frac{1}{2} (1 + \beta)^2 \sin^2 \vartheta,
 \end{aligned}$$

whence it follows that

$$\begin{aligned}
 \langle v_\varphi^{(+,e)} \rangle &= -i \left[\frac{1}{2} (1 + \beta)^2 \sin^2 \vartheta - \frac{d}{d\vartheta} \sin \vartheta \langle v_\vartheta^{(+,e)} \rangle \right], \\
 p^{(+)} &= \frac{i}{2} \left(1 + \frac{\beta}{2} \right) \sin^3 \vartheta + 2i \cos \vartheta \sin \vartheta \langle v_\vartheta^{(+,e)} \rangle - i(1 - \beta) \sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \sin \vartheta \langle v_\vartheta^{(+,e)} \rangle,
 \end{aligned} \tag{40}$$

$$\frac{d}{d\vartheta} \left(\sin^3 \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \langle v_\vartheta^{(+,e)} \rangle \right) = \left(\frac{5}{2} + \frac{17}{4} \beta \right) \sin^3 \vartheta \cos \vartheta. \tag{41}$$

Requirements for the absence of singularities at $\vartheta = 0$ and asymmetry with respect to $\vartheta = \pi / 2$ lead to boundary conditions

$$\frac{d}{d\vartheta} \langle v_\vartheta^{(+,e)} \rangle \Big|_{\vartheta=0} = 0, \quad \langle v_\vartheta^{(+,e)} \rangle \Big|_{\vartheta=\pi/2} = 0. \tag{42}$$

The solution of (41), (42) has the form

$$\langle v_\vartheta^{(+,e)} \rangle = -\left(\frac{5}{8} + \frac{17}{16} \beta \right) \cos \vartheta. \tag{43}$$

From (43), (40), (38), (4) we find

$$\int_0^\pi \sin^2 \vartheta d\vartheta p^{(+)} = -i \left(\frac{3}{10} + \frac{11}{30} \beta \right),$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \sigma^{-2} + \bar{\delta}(\sigma^{-2}), \quad \sigma \rightarrow \infty, \quad \mathbf{u}_0 = (u_{0x}, u_{0y}, 0)^T,$$

$$u_{0x} = -\frac{20}{9} \left(1 - \frac{11}{9} \beta\right) \chi a_{0x}, \quad u_{0y} = -\frac{20}{9} \left(1 - \frac{11}{9} \beta\right) \chi (1 + a_{0y}).$$

Taking into account (4) and (29) we can assume

$$\Omega = \underline{\underline{O}}(\beta \sigma^{-7/2} + \sigma^{-4}), \quad \sigma \rightarrow \infty.$$

Conclusion

Based on the methods of asymptotic integration in the case when the decentering force is orthogonal to the sensitivity axis, the fast centering of the spherical hydrodynamic suspension at large values of the oscillatory Reynolds number is shown. It is shown that, up to the constant factor, the asymptotics of the dependence of the relative eccentricity on the oscillatory Reynolds number is similar to the results obtained earlier for cylindrical hydrodynamic suspension. However, the asymptotics of a similar dependence for the dimensionless sliding of the inner sphere is characterized by an order of magnitude smaller.

REFERENCES

1. Andreichenko, K.P. (1987) *Dinamika poplavykovykh giroskopov i akselerometrov* [Dynamics of float gyroscopes and accelerometers]. Mocsow: Mashinostroenie.
2. Andreichenko, D.K. & Andreichenko, K.P. (2009) On the theory of stability of a cylindrical hydrodynamic suspension. *Fluid Dynamics*. 44(1). pp. 10–21. DOI: <https://doi.org/10.1134/S001546280>
3. Sauret, A. & Le Dizès, S. (2013) Libration-induced mean flow in a spherical shell. *Journal of Fluid Mechanics*. 718. pp. 181–209. DOI: 10.1017/jfm.2012.604
4. Rietord, M. & Valdetaro, L. (2018) Axisymmetric inertial modes in a spherical shell at low Ekman numbers. *Journal of Fluid Mechanics*. 844. pp. 597–634. DOI: 10.1017/jfm.2018.201
5. Barik, A., Triana, S.A., Hoff, M. & Wicht, J. (2018) Triadic resonances in the wide-gap spherical Couette system. *Journal of Fluid Mechanics*. 843. pp. 211–243. DOI: 10.1017/jfm.2018.138
6. Sauret, A., Cébron, D., Morize, C. & Le Bars, M. (2010) Experimental and numerical study of mean zonal flows generated by librations of a rotating spherical cavity. *Journal of Fluid Mechanics*. 662. pp. 260–268. DOI: 10.1017/S0022112010004052
7. Noir, J., Hemmerlin, F., Wicht, J., Baca, S.M. & Arnou, S.M. (2009) An experimental and numerical study of librationaly driven flow in planetary cores and subsurface oceans. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. 173. pp. 141–152. DOI: 10.1016/j.pepi.2008.11.012
8. Le Dizès, S. & Le Bars, M. (2017) Internal shear layer from liberating objects. *Journal of Fluid Mechanics*. 826. pp. 653–675.
9. Wu, K., Welfer, B.D. & Lopez, J.M. (2018) Librational forcing of a rapidly rotating fluid-filled cube. *Journal of Fluid Mechanics*. 842. pp. 469–494. DOI: 10.1017/jfm.2018.157
10. Zhilenko, D.Yu. & Krivonosova, O.E. (2016) Enhancement of waves at rotational oscillations of a liquid. *JETP Letters*. 104(8). pp. 531–538. DOI: 10.1134/S0021364016200133
11. Zhilenko, D.Yu. & Krivonosova, O.E. (2015) Quasi-two-dimensional and three-dimensional turbulence in rotational spherical liquid layers. *JETP Letters*. 101(8). pp. 527–532. DOI: 10.7868/S0370274X15080044
12. Zhilenko, D.Yu. & Krivonosova, O.E. (2013) Transitions to chaos in the spherical Couette flow due to periodic variations in the rotation velocity of one of the boundaries. *Fluid Dynamics*. 48(4). pp. 452–460.
13. Zhilenko, D.Yu. & Krivonosova, O.E. (2011) Direct calculation of transition to one of two possible secondary flows in a wide spherical layer under the action of accelerated rotation of the inner sphere. *Fluid Dynamics*. 46(3). pp. 363–374. DOI: 10.1134/S0015462811030021
14. Zhilenko, D.Yu., Krivonosova, O.E. & Nikitin, N.V. (2008) On chaotic flow regimes in a rotating spherical layer. *Technical Physics Letters*. 34(12). pp. 1047–1049. DOI: 10.1134/S1063785008120171
15. Melnichuk, D.V., Andreichenko, D.K. & Andreichenko, K.P. (2018) [Refined mathematical model of a spherical hydrodynamic suspension]. *Komp'yuternye nauki i informatsionnye tekhnologii* [Computer Science and Informational Technology]. Proceedings of the International Conference]. Saratov. pp. 264–268.

Received: August 25, 2019

Andreichenko D.K., Andreichenko K.P., Melnicuk D.V. (2020) MODELING THE EFFECT OF CENTERING OF A SPHERICAL HYDRODYNAMIC SUSPENSION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 52. pp. 13–21

DOI: 10.17223/19988605/52/2

Андрейченко Д.К., Андрейченко К.П., Мельничук Д.В. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТА ЦЕНТРИРОВАНИЯ СФЕРИЧЕСКОГО ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОДВЕСА. *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2020. № 52. С. 13–21

Высокоперегрузочные поплавковые гироскопы являются широко используемыми элементами систем управления подвижными объектами. В свою очередь, сферический гидродинамический подвес является широко используемым чувствительным элементом ряда поплавковых гироскопов. В случае, когда децентрирующая сила ортогональна оси чувствительности прибора, на основе методов асимптотического интегрирования показано быстрое центрирование подвеса при больших значениях колебательного числа Рейнольдса. Математическое моделирование изотермического течения вязкой несжимаемой жидкости во вращающемся поддерживающем слое выполнено на основе укороченных уравнений Навье–Стокса. Показано, что с точностью до постоянного множителя асимптотика зависимости относительного эксцентриситета от колебательного числа Рейнольдса аналогична результатам, полученным ранее для цилиндрического гидродинамического подвеса. Однако асимптотика аналогичной зависимости для безразмерного скольжения внутренней сферы характеризуется на порядок меньшей величиной.

Ключевые слова: асимптотическое интегрирование; сферический гидродинамический подвес.

ANDREICHENKO Dmitry Konstantinovich (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Saratov State University, Saratov, Russian Federation).

E-mail: andreichenkodk@gmail.com

ANDREICHENKO Konstantin Petrovich (Doctor of Technical Sciences, Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russian Federation).

E-mail: kp_andreichenko@renet.ru

MELNICHUK Dmitry Vadimovich (Post-graduate Student, Assistant Professor, Saratov State University, Saratov, Russian Federation).

E-mail: melnichukdv@sgu.ru

УДК 519.872

DOI: 10.17223/19988605/52/3

С.А. Лесько, Д.О. Жуков, Л.А. Истратов

МОДЕЛИ ОПИСАНИЯ ДИНАМИКИ БЛОКИРОВКИ УЗЛОВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СЕТЕЙ ВИРУСАМИ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПЕРКОЛЯЦИОННЫХ, КИНЕТИЧЕСКИХ И СТОХАСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

Представлен комплекс моделей динамики блокирования узлов вычислительных сетей, созданных на основе учета их перколяционных свойств и механизмов изменения состояний (кинетического и стохастического). В кинетической модели процессы распространения эволюционирующих вирусов и достижение порога перколяции рассматриваются на основе систем дифференциальных уравнений, а в модели стохастической динамики – на основе рассмотрения схем вероятностей переходов между состояниями сети и решения краевой задачи.

Ключевые слова: блокирование узлов сети; порог перколяции сети; кинетическая модель блокирования узлов; стохастическая динамика блокирования узлов.

Впервые кинетика развития вирусной эпидемии в адресном пространстве компьютерных сетей и блокировка их узлов были проанализированы с помощью принятых в биологии простых феноменологических SI и SIR моделей [1–3]. Под моделью SI распространения вирусов подразумевают, что любой из компьютеров, входящих в атакуемую сеть, может находиться в одном из двух состояний: уязвимом (S) и инфицированном (I). Согласно этой модели имеется сеть, состоящая из постоянного числа (N) компьютеров, причем $N = S + I$, а на каждом инфицированном узле может существовать только одна копия червя, которая *случайным образом* выбирает в доступном адресном пространстве потенциальную жертву с некоторой *постоянной средней скоростью* атак в единицу времени.

В модели SIR сетевые узлы существуют в трех состояниях: уязвимом (S), зараженном (I) и невосприимчивом (R). Отметим, что узлы оказываются неуязвимыми только после излечения от инфекции, а N – общее число узлов сети – равно $S + I + R$. Вводя *постоянную среднюю скорость иммунизации и атак* в единицу времени, для описания динамики развития эпидемий можно получить системы дифференциальных кинетических уравнений [Ibid.], описывающих процесс распространения эпидемии вирусов. Кроме того, среди ранних публикаций можно упомянуть оригинальную работу [4], в которой для моделирования распространения вирусов применили гидродинамическую модель, и этот процесс рассматривался как протекание жидкости.

Дальнейшее развитие кинетические модели SI и SIR получили в работах [5–7]. В [5] было рассмотрено два типа процессов в компьютерной сети: один определяется серверными инфицированными узлами сети, имеющими высокий темп интенсивности вредоносных атак, а другой – инфицированными узлами клиента, имеющими низкий темп интенсивности вредоносных атак. Инфекционные узлы сервера передают вирусы узлам клиента в компьютерной сети, которые, однако, могут излечиваться с течением времени, но при этом снова становится восприимчивыми к заражению, но с меньшей вероятностью. В работе [6] рассматривается кинетическая модель описания вирусных эпидемий в компьютерных сетях на основе представлений об эпидемиологическом пороге, времени ожидания заражения, факторе репликации (коэффициент размножения), вероятности заражения и иммунизации, времени неприкосновенности узла и т.д. В работе [7] были усовершенствованы математические модели распространения компьютерных вирусов в гетерогенной компьютерной сети, учитывающие ее топологические и архитектурные особенности. Обобщенная структура компьютерной сети рассматривалась на основе модели PSIDR: $N = S(t) + I(t) + D(t) + R(t)$, где N – общее количество объектов

в системе, $S(t)$ – количество уязвимых объектов, $I(t)$ – количество зараженных объектов, $R(t)$ – количество вылеченных объектов, обладающих иммунитетом, $D(t)$ – количество объектов, в которых обнаружен вирус. Учет топологических и архитектурных особенностей сетей осуществлялся за счет умножения некоторых членов кинетических дифференциальных уравнений на эмпирические поправочные коэффициенты. В частности, для топологии сети «звезда» член, учитывающий убыль (заражение) уязвимых объектов, умножался на коэффициент, равный 0,6.

Общие вопросы развития эпидемий вирусов в компьютерных сетях были рассмотрены в работах [8, 9]. В частности, в [8] указывается на необходимость разработки стратегий защиты, неустойчивых к изменениям в топологии сети и не требующих знания механизмов развития эпидемии. Например, создание механизмов регулирования числа соединений между узлами в единицу времени и их ограничение при возникновении атак или разработка методов превентивной вакцинации. В статье [9] обсуждаются вопросы разработки контрмер, препятствующих распространению вирусов. Авторы работы утверждают, что выпуск обновлений для программного обеспечения после обнаружения уязвимостей не дает надежной гарантии по безопасности. Для повышения уровня защиты они предлагают идею, согласно которой в компьютерной сети необходимо выделить подсеть, где будет целенаправленно распространяться антивирус, задачей которого станет борьба с вирусами.

В работе [10] проводится анализ четырех моделей распространения вирусов: классическая модель SI, независимая каскадная модель, динамическая модель распространения и модель, учитывающая топологию сетей. Сравнение результатов моделирования показало, что наиболее перспективными с точки зрения разработки механизмов защиты являются модели, основанные на описании графа сети.

В работе [11] рассматривается модель развития вирусной эпидемии не с произвольным порядком распространения вирусов, а с учетом погрешности результатов атак вследствие воздействия вирусов на уже зараженные узлы сети. Для этого авторы представляют сеть в виде направленного вероятностного графа без петель, узлы которого описываются переменными, задающими вероятности их состояния (зараженный, иммунизированный, восприимчивый), а дуги задают взаимодействие между переменными графической модели. Вирусное распространение определяется характеристиками сети и похоже на действие клеточного автомата.

В публикации [12] рассматривается модель описания развития вирусных эпидемий на основе стохастических моделей интерактивных цепей Маркова, в которых состояние узлов сети на каждом следующем шаге развития эпидемии зависит от его состояния и состояния соседей на предыдущем шаге, а сама сеть представляется в виде ненаправленного графа.

Для анализа и моделирования эпидемий вирусов в компьютерных сетях можно использовать методы сопоставления. В работе [13] описано две модели: одна на основе авторегрессионного анализа, а другая на основе Фурье-анализа. Результаты анализа показывают приемлемую корреляцию между временем распространением вирусов. Авторегрессионный и Фурье-анализ представляют возможность предсказания усиления и ослабления тенденций в распространении определенного типа вируса при помощи накопленного опыта по другим эпидемиям.

При описании топологии блокирования узлов сетей при распространении вирусов в настоящее время преобладает подход, согласно которому развитие эпидемии представляется в виде процесса, напоминающего по своей структуре дерево Кэйли со случайным числом связей [14]. Можно обратить внимание на работу [15], в которой рассматривается задача определения вероятности заражения узлов в зависимости от удаленности узла от источника инфекции в сетях с различным масштабом и числом узлов. Топологическими параметрами здесь являлись масштаб и число узлов, однако разнообразие структур сетей в данных работах не исследовалось.

Очевидно, что если заблокированных узлов будет не очень много, то между двумя произвольно выбранными неблизлежащими узлами будет сохраняться хотя бы один «открытый» путь (путь, состоящий из неблокированных узлов). Доля заблокированных узлов, при которой сеть в целом потеряет работоспособность, будем называть порогом перколяции, ниже его значения сеть является работоспособной, несмотря на то что в ней есть некоторые узлы или их группы (кластеры), заблокированные

вирусами. Выше порога перколяции вся сеть целиком выключается и теряет работоспособность по передаче данных.

Следует отметить, что имеется много работ, в которых описаны исследования перколяционных свойств сетевых структур [16–22]. Однако никто не изучал взаимосвязи структурных свойств сетей и динамики их блокирования.

Исследование процессов образования кластеров блокированных узлов и перколяции данных в сетях, имеющих различную (в том числе и случайную) топологию, представляет большой научный и практический интерес для разработки топологии вычислительных сетей, имеющих высокую отказоустойчивость, и создания новых методов и методологии защиты компьютерных сетей.

1. Перколяционные свойства сетевых структур

В теории перколяции (теория вероятностей на графах) изучают решение задачи узлов и задачи связей для сетей с различной – как регулярной (2D-структуры – треугольная, шестиугольная, деревья Кейли и т.д.; 3D – гексагональная, кубическая и т.д.), так и случайной – структурой. При решении задачи связей определяют долю связей, которую нужно разорвать, чтобы сеть распалась минимум на две несвязанные части. В задаче узлов определяют долю блокированных узлов, при которой сеть распадется на несвязанные между собой кластеры, внутри которых сохраняются связи (или, наоборот, долю проводящих узлов, когда проводимость возникает). Доля блокированных узлов (в задаче узлов) или разорванных связей (в задаче связей), при которой исчезает проводимость между двумя произвольно выбранными узлами сети, называется порогом перколяции (протекания).

Определение долей блокированных узлов или связей эквивалентно нахождению вероятности случайно выбранного узла (или связи) быть в блокированном (разорванном) состоянии. Поэтому величина порога перколяции определяет вероятность передачи информации через всю сеть в целом, если блокирована (исключена) некоторая часть ее узлов (или связей), т.е. задана средняя вероятность блокирования узла (разрыва связи).

В работах [23, 24] было проведено численное моделирование зависимости порогов перколяции случайных сетей от среднего числа связей в расчете на один узел (плотность) сети. Полученные в этих работах результаты для задачи блокирования узлов при небольших плотностях сетей показывают, что для случайных структур зависимость их натурального логарифма $\ln P(x)$ от обратной величины плотности сети ($1/x$) может быть описана уравнением

$$\ln P(x) = \frac{4,02}{x} - 2,26 \quad (1)$$

с величиной коэффициента корреляции числовых данных и уравнения линейной зависимости, равным 0,97.

Данная зависимость может быть использована для вычисления по величинам плотности сетей их порогов перколяции. Далее, используя динамические модели, можно определить время достижения и выхода сети из работоспособного состояния в целом.

Рассмотрим две разработанные нами модели блокировки узлов сетей с течением времени и достижения величины порога блокирования (перколяции).

2. Кинетика распространения в компьютерных сетях эволюционирующих вирусов при условии устаревания и запаздывания действия защиты и достижение порога перколяции

Рассмотрим сеть, в которой происходит процесс распространения вирусов, начинающийся раньше, чем появятся эффективные способы организационного и технического противодействия (антивирусная защита имеет время запаздывания).

Долю узлов сети, находящихся в момент времени t в зараженном состоянии обозначим как $y_1(t)$, в защищенном (иммунизированном) состоянии – $y_2(t)$, в нейтральном состоянии (не инфицирован, не

защищен и может быть заражен) – $y_3(t)$. Общее число узлов сети примем равным L . В начальный момент времени ($t = 0$) имеется некоторое количество ($y_1(t = 0)$) зараженных узлов, которые могут рассылать копии вирусов по узлам сети, случайно выбирая их в адресном пространстве. Кроме того, имеется некоторое число узлов сети ($y_2(t = 0)$), которые занимаются борьбой с вирусами (излечивают зараженные и иммунизируют свободные узлы), рассылая копии антивирусов (полезные вирусы) по узлам сети, случайным образом выбирая их в адресном пространстве, и $y_3(t = 0)$ – в нейтральном состоянии (не инфицирован, не защищен и может быть заражен). Антивирусы могут устаревать, вследствие чего ранее иммунизированные узлы могут быть вновь инфицированы. Введем следующие времена: τ_1 – запаздывания действия антивируса; τ_2 – устаревания антивируса, т.е. узел становится уязвимым для новых видов вирусов спустя некоторое время после иммунизации. Поскольку распространение вирусов и антивирусов является независимым, то для их распространения следует выбрать механизм случайной рассылки.

Описанный процесс стохастической кинетики распространения эволюционирующих вирусов в компьютерной сети можно описать диаграммой, представленной на рис. 1, и системой кинетических уравнений

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = ay_1(t)y_3(t) - by_1(t)y_2(t - \tau_1), \quad (2)$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = cy_2(t - \tau_1)y_3(t) + by_1(t)y_2(t - \tau_1) - ky_2(t - \tau_2), \quad (3)$$

$$\frac{dy_3(t)}{dt} = -ay_1(t)y_3(t) - cy_2(t - \tau_1)y_3(t) + ky_2(t - \tau_2). \quad (4)$$

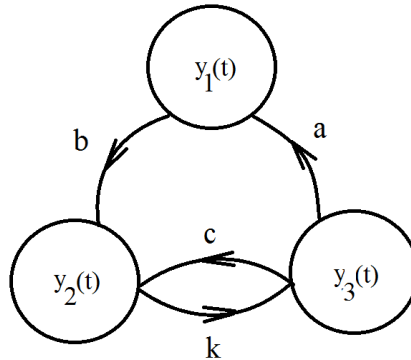


Рис. 1. Диаграмма, описывающая рассматриваемую модель процесса распространения вирусов в компьютерной сети
 Fig. 1. Diagram describing the considered model of the process of spreading viruses in a computer network

Производные по времени определяют скорости изменения долей соответствующих узлов; a , b , c и k – некоторые коэффициенты, характеризующие соответствующие переходы на рис. 1 (эти коэффициенты являются интегральными параметрами, зависящими, например, от числа копий рассылаемых вирусов и антивирусов, вероятности встречи и т.д.). Перемножение различных функций, например $y_1(t)y_3(t)$, характеризует вероятность соответствующих встреч.

Для пояснения модели рассмотрим более подробно одно из кинетических уравнений, например (3).

Член уравнения $\frac{dy_2(t)}{dt}$ описывает скорость изменения доли узлов, находящихся в защищенном (иммунизированном) состоянии, $cy_2(t - \tau_1)y_3(t)$ определяет прирост за счет иммунизации уязвимых узлов, $by_1(t)y_2(t - \tau_1)$ – прирост за счет излечения зараженных узлов, $ky_2(t - \tau_2)$ – убыль за счет устаревания антивируса (иммунизированный узел может сначала переходить в незащищенное состояние, а затем заразиться вирусом). Аналогичным образом определяется смысловое значение членов кинетических уравнений (2) и (4).

Рассмотрим взаимосвязь между долями зараженных, иммунизированных и уязвимых узлов ($y_1(t)$, $y_2(t)$ и $y_3(t)$) при распространении эволюционирующих вирусов в сетях передачи данных и достижением порога перколяции (критической доли зараженных или заблокированных узлов). Для обсуждения выберем в качестве примера компьютерную сеть, имеющую случайную структуру, в которой на один узел в среднем может приходиться от 2,5 до 4,0 связей.

В соответствии с проведенными по уравнению (1) расчетами, общая доля зараженных узлов, при которой сеть потеряет работоспособность, в целом должна составлять от 0,52 (при 2,5 связей на узел порог перколяции равен 0,52) до 0,64 (при 4,0 связей на узел порог перколяции 0,64).

На рис. 2 представлены результаты решения системы уравнений (2)–(4) с взятыми в качестве примера следующими значениями коэффициентов: $a = 0,003$; $b = 0,0015$; $c = 0,0001$ и $k = 0,1$, общим числом узлов сети равным 1 000, временами запаздывания и устаревания $\tau_1 = 38$ и $\tau_2 = 12$ условных единиц, начальными значениями $y_3(t = 0) = 1\ 000$, $y_2(t = 0) = 1$, $y_1(t = 0) = 10$. В данном случае доля зараженных узлов в стационарном состоянии будет достигать 0,64 (см. рис. 2, кривая 1). Для того чтобы сеть в целом оставалась работоспособной, необходимо, чтобы среднее число связей на один ее узел составляло более 4, что технологически является нереализуемым в реальной сети с точки зрения стоимостных затрат. Если реализовывать топологии, в которых среднее число связей на один узел будет составлять около 2,5–3,0, то порог перколяции (или возможная доля заблокированных узлов) будет иметь величину 0,5. Используя данное значение порога перколяции можно решить обратную кинетическую задачу и определить необходимые для обеспечения заданного порога перколяции величины коэффициентов a , b , c , k и времен запаздывания и устаревания τ_1 и τ_2 . В свою очередь, на основании вычисленных параметров модели может быть задана необходимая надежность, определяемая вероятностями переходов.

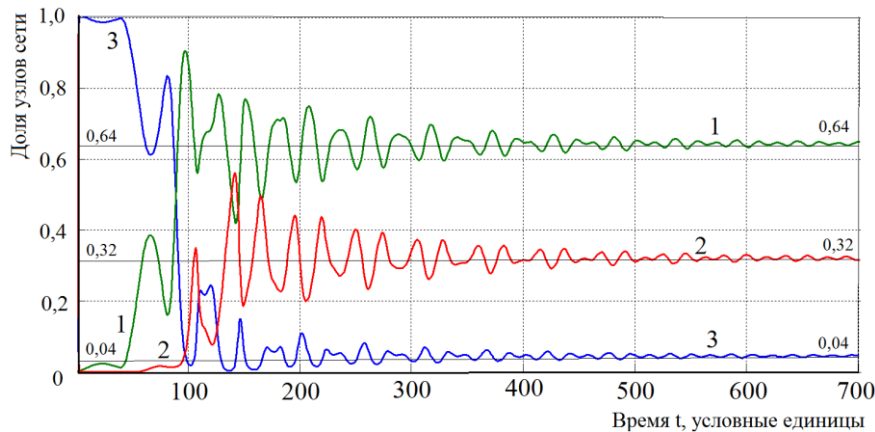


Рис. 2. Кинетика взаимных переходов между узлами компьютерной сети и порог перколяции при распространении эпидемий эволюционирующих вирусов при коэффициентах переходов: $a = 0,003$; $b = 0,0015$; $c = 0,0001$; $k = 0,1$
 Fig. 2. Kinetics of mutual transitions between computer network nodes and the percolation threshold for the spread of epidemics of evolving viruses with transition coefficients: $a = 0,003$; $b = 0,0015$; $c = 0,0001$; $k = 0,1$

Доля узлов, находящихся при стационарном состоянии в защищенном (иммунизированном) состоянии (см. рис. 2, кривая 2) будет равна 0,32, доля узлов, находящихся при стационарном состоянии в нейтральном состоянии (не инфицирован, не защищен и может быть заражен) – 0,04 (см. рис. 2, кривая 3).

3. Стохастическая модель блокировки узлов сети и время достижения порога перколяции

Предположим, что в некоторый момент времени t доля заблокированных (вследствии перегрузок или заражения вирусами) узлов сети передачи данных составляет некоторую величину x_i , которую будем называть состоянием сети.

Состояние, наблюдаемое в момент времени t , можно обозначить, как x_i ($x_i \in X$). Кроме того, введем интервал времени τ_0 , за который возможно изменение состояния x_i . В данном случае любое значение текущего времени $t = h\tau_0$, где h – номер шага перехода между состояниями (процесс перехода между состояниями становится квазинепрерывным с бесконечно малым временным интервалом τ_0), $h = 0, 1, 2, 3, \dots, N$. Текущее состояние x_i на шаге h после перехода на шаг $h + 1$ может увеличиваться на некоторую величину ε или уменьшаться на величину ξ и соответственно оказаться равным $x_i + \varepsilon$ или $x_i - \xi$. Величины ε и ξ принадлежат области определения x_i и являются параметрами моделируемых процессов. Кроме того, на $x_i + \varepsilon$ и $x_i - \xi$ необходимо наложить ограничения: $x_i + \varepsilon \leq K_1$ (K_1 – верхняя граница множества X) и $x_i - \xi \geq K_2$ (K_2 – нижняя граница множества X). В самом простом случае ε и ξ являются некоторыми постоянными величинами для любого шага h .

Введем понятие вероятности нахождения системы в том или ином состоянии. Пусть после некоторого числа шагов h про описываемую систему можно сказать, что:

$P(x - \varepsilon, h)$ – вероятность того, что она находится в состоянии $(x - \varepsilon)$;

$P(x, h)$ – вероятность того, что она находится в состоянии x ;

$P(x + \xi, h)$ – вероятность того, что она находится в состоянии $(x + \xi)$.

После каждого шага состояние x_i (далее индекс i для краткости можно опустить) может изменяться на величину ε или ξ .

Вероятность $P(x, h + 1)$ того, что на следующем, $(h + 1)$ -м, шаге система (или процесс) окажется в состоянии x , будет равна (см. рис. 3)

$$P(x, h + 1) = P(x - \varepsilon, h) + P(x + \xi, h) - P(x, h). \quad (5)$$

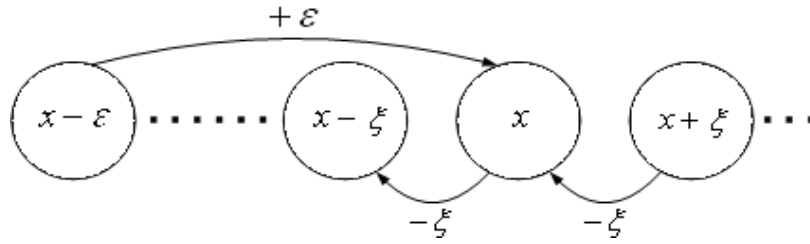


Рис. 3. Схема возможных переходов между состояниями системы (или процесса) на $(h + 1)$ -м шаге
Fig. 3. Diagram of possible transitions between system states (or process) at $h + 1$ step

Поясним уравнение (5) и представленную на рис. 3 схему. Вероятность перехода в состояние x на шаге h $P(x, h + 1)$ определяется суммой вероятностей переходов в это состояние из состояний $(x - \varepsilon) - P(x - \varepsilon, h)$, и $(x + \xi) - P(x + \xi, h)$, в которых находилась система на шаге h , за вычетом вероятности перехода ($P(x, h)$) системы из состояния x (в котором она находилась на шаге h) в любое другое состояние на $(h + 1)$ -м шаге. Будем считать, что сами переходы осуществляются с вероятностью, равной 1.

Учитывая, что $t = h\tau_0$, где t – время процесса, h – номер шага, τ_0 – длительность одного шага, перейдем от h к t . Разложим уравнение (5) в ряд Тейлора вблизи точки x . Далее, перейдя от вероятности к

плотности вероятности ($\rho(x, t) = \frac{dP(x, t)}{dx}$) и учитывая не более чем вторые производные, получим:

$$\frac{d\rho(x, t)}{dt} = a \frac{d^2\rho(x, t)}{dx^2} - b \frac{d\rho(x, t)}{dx}, \quad (6)$$

где $a = \frac{\varepsilon^2 + \xi^2}{2\tau}$, $b = \frac{\varepsilon - \xi}{\tau}$.

Член уравнения вида $\frac{d\rho(x, t)}{dt}$ определяет общее изменение состояния системы или процесса с

течением времени. Член уравнения вида $\frac{d^2\rho(x, t)}{dx^2}$ описывает процесс, при котором состояния сами

становятся источниками других состояний (поэтому он был исключен). Отметим также, что член уравнения $\frac{d\rho(x,t)}{dt}$ описывает упорядоченный переход либо в состояние, когда оно увеличивается

($\varepsilon > \xi$), либо когда оно уменьшается ($\varepsilon < \xi$); член уравнения $\frac{d^2\rho(x,t)}{dt^2}$ описывает случайное изменение состояния.

Сформулируем и решим для описания работы сети краевую задачу, учитывая ее перколяционные свойства. При числе заблокированных узлов в сети $x = l$ она прекращает работу (l – величина порога перколяции сети). Поскольку мы стремимся избежать этого состояния, то необходимо, чтобы выполнялось условие $\rho(x, t)_{x=l} = 0$.

Состояние $x = 0$ означает, что в сети нет заблокированных узлов. Однако учитывая, что число заблокированных узлов не может выходить в область отрицательных значений, мы должны использовать при $x = 0$ условие отражения типа: $\rho(x, t)_{x=0} = 0$.

Поскольку в момент времени $t = 0$ в сети уже может быть некоторое число x_0 заблокированных узлов, то начальное условие зададим в виде:

$$\rho(x, t = 0) = \delta(x - x_0) = \begin{cases} \int \delta(x - x_0) dx = 1, & x = x_0, \\ 0, & x \neq x_0. \end{cases}$$

Используя методы операционного исчисления для плотности вероятности $\rho(x, t)$ обнаружения состояния системы в одном из значений на отрезке от 0 до l , можно решить данную краевую задачу и затем определить вероятность $Q_i(l, t)$ того, что порог перколяции l окажется к моменту времени t достигнутым или превзойденным:

$$Q(l, t) = 2e^{-\frac{2bx_0 + b^2t}{4a}} \sum_{n=1}^M (-1)^{n+1} \frac{e^{\frac{bl}{2a}} \sin\left(\pi n \frac{x_0}{l}\right) + \sin\left(\pi n \frac{l-x_0}{l}\right)}{\pi n + \frac{b^2 l^2}{4\pi n a^2}} e^{-\frac{\pi^2 n^2 a t}{l^2}}, \quad (7)$$

где M – число членов суммы ряда. В общем случае n принимает значения в сумме от 1 до бесконечности. Но поскольку ряд быстро сходится, то при численном вычислении суммы ряда в формуле (7) и моделировании можно принять M конечным (в нашем случае принято $M = 1\,000$).

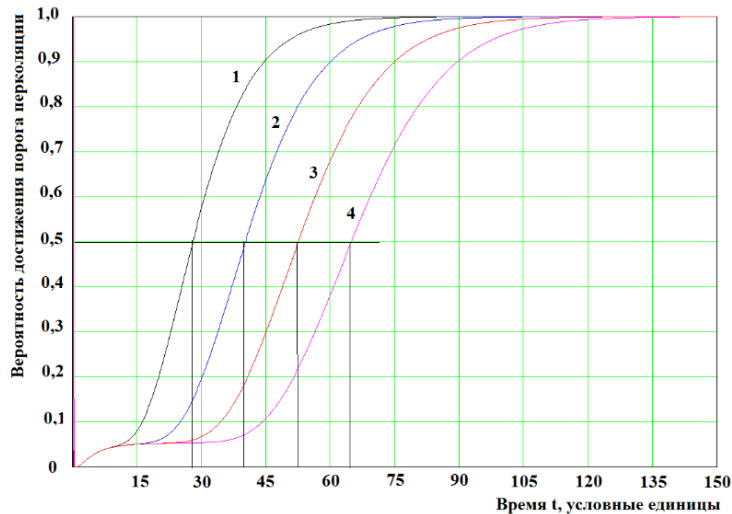


Рис. 4. Зависимость от времени значения вероятности достижения порога перколяции сети
 Fig. 4. Time dependence of the probability of reaching the network percolation threshold

Проанализируем полученный результат. Возьмем произвольные значения x_0 , ε и ξ ($\varepsilon > \xi$), например $x_0 = 0,05$, $\varepsilon = 0,015$ и $\xi = 0,007$. На рис. 4 представлена зависимость от времени вероятности

$Q_i(l, t)$ того, что к моменту времени t окажется достигнутым порог перколяции. Кривая 1 построена для значения порога перколяции сети $l_1 = 0,30$, кривая 2 для $l_2 = 0,40$, кривая 3 для $l_3 = 0,50$, кривая 4 для $l_4 = 0,60$.

Полученные результаты можно связать с результатами рассмотрения перколяционной модели. Пересечение горизонтальной линии на рис. 4, с кривыми линиями, описывающими поведение вероятностей, позволяет определить время достижения порога перколяции при заданных параметрах моделирования, а, следовательно, и потерю работоспособности сети. Для кривой 1 оно составит порядка 28,0 условных единиц; для кривой 2 – 40,5; кривой 3 – 52,5 и для кривой 4 – 65,0 условных единиц.

Заключение

1. В сетях передачи данных могут происходить блокирование узлов, образование их кластеров и достижение количественной доли, при которой вся сеть целиком теряет работоспособность (достижение порога перколяции), несмотря на то что значительная часть узлов все еще находится в рабочем состоянии. При среднем числе связей на один узел сети передачи данных в диапазоне значений от 2,5 до 3,5 доля неблокированных узлов, при которой сеть еще сохраняет общую работоспособность, должна иметь значения от 0,52 до 0,37. Используя данные значения порогов перколяции, можно решить динамическую задачу и определить необходимые для обеспечения заданного порога перколяции (надежность) величины коэффициентов в моделях, описывающих динамику блокирования узлов.

2. Модель распространения эволюционирующих вирусов в компьютерной сети может быть описана в графическом виде с помощью диаграммы возможных переходов между состояниями узлов, это позволяет получить систему кинетических дифференциальных уравнений, описывающих указанные процессы. В рамках модели любой узел сети может находиться в одном из трех состояний: в защищенном (иммунизированном), и узел сам может рассылать антивирусы (излечивает зараженные и иммунизирует свободные узлы); в зараженном (может рассылать копии вирусов по узлам сети); в нейтральном состоянии (может быть заражен). Анализ полученных решений показывает возможность существования в рамках модели различных режимов распространения вирусов; при некоторых наборах величин коэффициентов уравнений наблюдается осциллирующий характер вирусных эпидемий.

3. Разработанная на базе кинетических дифференциальных уравнений модель может быть модифицирована и расширена на основе создания более сложных графических диаграмм изменения состояний и переходов между ними. В частности, это позволяет дополнить систему кинетических уравнений членом, учитывающим общий рост числа пользователей и устройств в компьютерных сетях с течением времени, описываемый функцией любого вида.

4. При описании процесса блокирования узлов в вычислительных сетях можно рассматривать совокупность случайных переходов между состояниями всей сети в целом (изменение числа заблокированных и разблокированных узлов). Такая формализация позволяет вывести дифференциальное уравнение второго порядка (типа уравнения Колмогорова), описывающее стохастическую динамику изменения состояний как отдельных узлов, так сети в целом. Полученное дифференциальное уравнение позволяет сформулировать и решить краевую задачу изменения загруженности и блокировки сети. Взаимосвязь стохастической и перколяционной моделей позволяет оценить время достижения порога перколяции и потери работоспособности сети в целом.

5. Практические рекомендации для защиты любых сетей от угроз вирусных атак заключаются в том, что в случае использования однотипного оборудования и программного обеспечения для создания сетей передачи данных, имеющих среднее число связей в расчете на один узел сети от 2,5 до 3,5, его доля должна находиться в пределе от 0,48 (если блокируется 48% используемого оборудования, то все еще выполняется условие перколяции, так как доля неблокированных узлов равна 0,52) до 0,63 (превышать 48–63%).

ЛИТЕРАТУРА

1. Anderson H., Britton T. *Stochastic Epidemic Models and Their Statistical Analysis*. New-York : Springer, 2000. 140 p.
2. Bolker B.M., Earn D.J.D., Rohani P., Grenfell B.T. A simple model for complex dynamical transitions in epidemics // *Science*. 2000. V. 287. P. 667–670.
3. Wang C., Knight J.C., Elder M.C. On Viral Propagation and the Effect of Immunization // *Proc. of 16th ACM Annual Computer Applications Conference*. New Orleans, LA, 2000. P. 246–256.
4. Misra V., Gong W., Towsley D. A fluid based analysis of a network of AQM routers supporting TCP flows with an application to RED // *Proc. of ACM/SIGCOMM*. 2000. P. 151–160.
5. Kumar M., Mishra B.K., Panda T.C. A new model on the spread of malicious objects in computer network // *Int. J. of Hybrid Information Technology*. 2013. V. 6, No. 6. P. 161–176.
6. Mishra B.K., Ansari G.M. Differential epidemic model of virus and worms in computer network // *Int. J. of Network Security*. 2012. V. 14, No. 3. P. 149–155.
7. Семенов С.Г., Давыдов В.В. Математическая модель распространения компьютерных вирусов в гетерогенных компьютерных сетях автоматизированных систем управления технологическим процессом // *Вестник национального технического университета «ХПИ»*. 2012. № 38. С. 163–171.
8. Balthrop J., Forrest S., Newman M.E.J., Williamson M.M. Technological networks and the spread of computer viruses // *Science*. 2004. V. 304. P. 527–529.
9. Chen L.-Ch., Carley K.M. The impact of countermeasure propagation on the prevalence of computer viruses // *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. Part B: Cybernetics*. 2004. V. 34, No. 2. P. 823–833.
10. Ojugo A.A., Aghware F.O., Yoro R.E., Yerokun M.O., Eboka A.O., Anujeonye C.N., Efozia F.N. Evolutionary model for virus propagation on networks. *Automation, Control and Intelligent Systems*. 2015. V. 3 (4). P. 56–62.
11. Vălean H., Pop A., Avram C. Intelligent model for virus spreading // *The Int. Symposium on System Theory. Automation, Robotics, Computers, Informatics, Electronics and Instrumentation*, 2007. 18–20 October. Craiova, Romania. P. 117–122.
12. Далингер Я.М., Бабанин Д.В., Бурков С.М. Математические модели распространения вирусов в компьютерных сетях различной структуры // *Моделирование систем*. 2011. № 4 (30). С. 3–11.
13. Piqueira J.R.C., Cesar F.B. Dynamical Models for Computer Viruses Propagation // *Mathematical Problems in Engineering*. 2008. V. 2008. Article ID 940526. 11 p. DOI: 10.1155/2008/940526.
14. Nazario J. *Defense and detection strategies against internet worms*. artech house. Boston–London : Artech House, 2004. 287 p.
15. Pastor-Satorras R., Vespignani A. Epidemics and Immunization in Scale-Free Networks // *Handbook of Graphs and Networks: From the Genome to the Internet / S. Bornholdt, H.G. Schuster (eds.)*. Wiley-VCH, 2005. P. 111–130. DOI: 10.1002/3527602755.ch5.
16. Mizutaka S., Tanizawa T. Robustness analysis of bimodal networks in the whole range of degree correlation // *Physical Review E*. 2016. V. 94, is. 2. Article 022308.
17. De Brito J.B., Sampaio Filho C.I.N., Moreira A.A., Andrade J.S. Characterizing the intrinsic correlations of scale-free networks // *Int. J. of Modern Physics C*. 2016. V. 27, is. 3. Article. 1650024.
18. Timonin P.N. Statistical mechanics of high-density bond percolation // *Physical Review E*. 2018. V. 97, is. 5. Article number 052119.
19. Zhou A., Maletić S., Zhao Y. Robustness and percolation of holes in complex networks // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2018. V. 502. P. 459–468.
20. Katzav E., Biham O., Hartmann A.K. Distribution of shortest path lengths in subcritical Erdos-Rényi networks // *Physical Review E*. 2018. V. 98, is. 1. Article number 012301.
21. Hunt A.G., Yu F. The fractals of percolation theory in the geosciences (Book Chapter) // *Fractals: Concepts and Applications in Geosciences*. 2017. 1 Jan. P. 114–152.
22. Rubie D.C., Jacobson S.A. Mechanisms and Geochemical Models of Core Formation (Book Chapter) // *Deep Earth: Physics and Chemistry of the Lower Mantle and Core*. 2015. 1 Jan. P. 181–190.
23. Zhukov D., Khvatova T., Lesko S., Zaltsman A. Managing social networks: applying the Percolation theory methodology to understand individuals' attitudes and moods // *Technological Forecasting and Social Change*. 2018. V. 123. P. 234–245.
24. Zhukov D.O., Khvatova T.Yu., Lesko S.A., Zaltsman A.D. The influence of the connections density on clusterisation and percolation threshold during information distribution in social networks // *Informatics and its applications*. 2018, V. 12, is. 2. P. 90–97.

Поступила в редакцию 10 сентября 2019 г.

Lesko S.A., Zhukov D.O., Istratov L.A. (2020) MODELS OF DESCRIBING THE DYNAMICS OF BLOCKING NODES OF COMPUTER NETWORKS BY VIRUSES BASED ON THE USE OF PERCOLATION, KINETIC AND STOCHASTIC METHODS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnik i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 52. pp. 22–32

DOI: 10.17223/19988605/52/3

The paper presents a set of models describing the dynamics of blocking nodes of computer networks created on the basis of taking into account their percolation properties and blocking mechanisms (kinetic and stochastic). On the one hand, this model is based on

the use of percolation theory methods, which make it possible to determine the structural and informational characteristics of networks, such as the dependence of their percolation threshold on the average number of bonds per node (network density). On the other hand, dynamic processes of blocking the nodes and reaching the percolation threshold are considered. The percolation threshold is the minimum proportion of blocked nodes at which the entire network loses the properties of information transmission (there is no free path between any randomly selected nodes).

In the kinetic model, the processes of propagation in computer networks of evolving viruses in the course of obsolescence and delay of the action of antiviruses are considered. Further, on the basis of the graphical description of the possible transitions between the states of the nodes, systems of kinetic differential equations for the spread of viruses were obtained. Then using these equations and the percolation threshold value calculated by the network density, one can estimate the time of loss of its overall performance. Any network node can be in one of three states: in a protected (immunized) state, and it can itself send randomly (stochasticity) antiviruses (cures infected and immunizes free nodes) by selecting them in the address space; in the infected state (can send copies of viruses to network nodes); in a neutral state (may be infected). Analysis of the solutions obtained shows the possibility of the existence of various modes of spread of viruses. With some sets of values of the coefficients of differential equations, an oscillating pattern of the spread of viral epidemics is observed, which largely coincides with real observations. One of the advantages of the developed model is the possibility of its modification and expansion based on the creation of more complex graphical diagrams of state changes and transitions between them. In particular, it is possible to supplement the system of kinetic equations with a term that takes into account the general increase in the number of users and devices in computer networks over time.

A second-order differential equation was obtained in the model of stochastic dynamics of blocking nodes, based on a consideration of probability schemes for transitions between network states, and a boundary value problem was formulated, whose solution describes the dependence of the probability and time to reach the percolation threshold on the blocking probability of an individual network node. The percolation threshold itself is determined based on the density of the network.

Keywords: blocking network nodes; network percolation threshold; kinetic model of blocking nodes; stochastic dynamics of blocking nodes.

LESKO Sergey Aleksandrovich (Candidate of Physics and Mathematics, Russian Technological University (MIREA), Moscow, Russian Federation).

E-mail: sergey@testor.ru

ZHUKOV Dmitry Olegovich (Doctor of Technical Sciences, Russian Technological University (MIREA), Moscow, Russian Federation).

E-mail: zhukovdm@ya.ru

ISTRATOV Leonid Andreevich (Russian Technological University (MIREA), Moscow, Russian Federation).

E-mail: kuyahstibov@gmail.com

REFERENCES

1. Anderson, H. & Britton, T. (2000) *Stochastic Epidemic Models and Their Statistical Analysis*. New-York: Springer, Verlag.
2. Bolker, B.M., Earn, D.J.D., Rohani, P. & Grenfell, B.T. (2000) A simple model for complex dynamical transitions in epidemics. *Science*. 287. pp. 667–670. DOI: 10.1126/science.287.5453.667
3. Wang, C., Knight, J.C. & Elder, M.C. (2000) On viral propagation and the effect of immunization. *Proc. of 16th ACM Annual Computer Applications Conference*. New Orleans, LA. pp. 246–256
4. Misra, V., Gong, W. & Towsley, D. (2000) A fluid based analysis of a network of AQM routers supporting TCP flows with an application to RED. *Proc. of ACM/SIGCOMM*. pp. 151–160. DOI: 10.1145/347059.347421
5. Kumar, M., Mishra, B.K. & Panda, T.C. (2013) A new model on the spread of malicious objects in computer network. *International Journal of Hybrid Information Technology*. 6(6). pp. 161–176. DOI: 10.14257/ijhit.2013.6.6.14
6. Mishra, B.K. & Ansari, G.M. (2012) Differential epidemic model of virus and worms in computer network. *International Journal of Network Security*. 14(3). pp. 149–155. DOI: 10.1155/2008/940526
7. Semenov, S.G. & Davidov, V.V. (2012) Mathematical model of the spread of computer viruses in heterogeneous computer networks of automated process control systems. *Vestnik NTU "HPI"*. 38. pp. 163–171.
8. Balthrop, J., Forrest, S., Newman, M.E.J. & Williamson, M.M. (2004) Technological networks and the spread of computer viruses. *Science*. 304. pp. 527–529. DOI: 10.1126/science.1095845
9. Chen, L.-Ch. & Carley, K.M. (2004) The impact of countermeasure propagation on the prevalence of computer viruses. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. Part B: Cybernetics*. 34(2). pp. 823–833. DOI: 10.1109/tsmcb.2003.817098
10. Ojugo, A.A., Aghware, F.O., Yoro, R.E., Yerokun, M.O., Eboka, A.O., Anujeonye, C.N. & Efozia, F.N. (2015) Evolutionary model for virus propagation on networks. *Automation, Control and Intelligent Systems*. 3(4). pp. 56–62. DOI: 10.11648/j.acis.20150304.12
11. Vălean, H., Pop, A. & Avram, C. (2007) Intelligent model for virus spreading. *The International Symposium on System Theory. Automation, Robotics, Computers, Informatics, Electronics and Instrumentation*. 18–20. October. Craiova, Romania.
12. Delinger, Yu.M., Babanin, D.V. & Burkov, S.M. (2011) Mathematical models of the spread of viruses in computer networks of various structures. *Modelirovanie sistem – System Modeling*. 4(30). pp. 3–11.

13. Piqueira, J.R.C. & Cesar, F.B. (2008) Dynamical Models for Computer Viruses Propagation. *Mathematical Problems in Engineering*. 2008. Article ID 940526. DOI:10.1155/2008/940526
14. Nazario, J. (2004) *Defense and detection strategies against internet worms*. Artech House.
15. Pastor-Satorras, R. & Vespignani, A. (2005) *Epidemics and Immunization in Scale-Free Networks*. In: Bornholdt, S. & Schuster, H.G. (eds) *Handbook of Graphs and Networks: From the Genome to the Internet*. Wiley-VCH. DOI:10.1002/3527602755.ch5
16. Mizutaka, S. & Tanizawa, T. (2016) Robustness analysis of bimodal networks in the whole range of degree correlation. *Physical Review E*. 94(2). Article number 022308. DOI: 10.1103/PhysRevE.94.022308
17. De Brito, J.B., Sampaio Filho, C.I.N., Moreira, A.A. & Andrade, J.S. (2016) Characterizing the intrinsic correlations of scale-free networks. *International Journal of Modern Physics C*. 27(3). Article number 1650024. DOI: 10.1142/S0129183116500248
18. Timonin, P.N. (2018) Statistical mechanics of high-density bond percolation. *Physical Review E*. 97(5). Article number 052119. DOI: 10.1103/PhysRevE.97.052119
19. Zhou, A., Maletić, S. & Zhao, Y. (2018) Robustness and percolation of holes in complex networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 502. pp. 459–468. DOI: 10.1016/j.physa.2018.02.149
20. Katzav, E., Biham, O. & Hartmann, A.K. (2018) Distribution of shortest path lengths in subcritical Erdos-Rényi networks. *Physical Review E*. 98(1). Article number 012301. DOI: 10.1103/PhysRevE.98.012301
21. Hunt, A.G. & Yu, F. (2017) The fractals of percolation theory in the geosciences. In: Ghanbarian, B. & Hunt, A.G. (eds) *Fractals: Concepts and Applications in Geosciences*. CRC Press. pp. 114–152.
22. Rubie, D.C. & Jacobson, S.A. (2015) Mechanisms and Geochemical Models of Core Formation. In: Terasaki, H. & Fischer, R. (eds) *Deep Earth: Physics and Chemistry of the Lower Mantle and Core*. pp. 181–190. DOI: 10.1002/9781118992487
23. Zhukov, D., Khvatova, T., Lesko, S. & Zaltsman, A. (2018) Managing social networks: applying the Percolation theory methodology to understand individuals' attitudes and moods. *Technological Forecasting and Social Change*. 123. pp. 234–245. DOI: 10.1016/j.techfore.2017.09.039
24. Zhukov, D.O., Khvatova, T.Yu., Lesko, S.A. & Zaltsman A.D. (2018) The influence of the connections density on clusterisation and percolation threshold during information distribution in social networks. *Informatika i ee primeneniya – Informatics and Applications*. 12(2). pp. 90–97. DOI: 10.14357/19922264180213

УДК 621.3

DOI: 10.17223/19988605/52/4

Е.Д. Макеева, Н.А. Поляков, П.А. Харин, И.А. Гудкова

ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ АНАЛИЗА ХАРАКТЕРИСТИК СОВМЕСТНОЙ ПЕРЕДАЧИ ТРАФИКА URLLC И eMBB В БЕСПРОВОДНЫХ СЕТЯХ*Исследование выполнено при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 2.882.2017/4.6).*

Рассмотрены два варианта построения модели совместного использования расширенной мобильной широкополосной связи eMBB и сверхнадежной связи с низкой задержкой URLLC. В случае отсутствия свободных ресурсов блока PRB для первого варианта является возможным прерывание уже обслуживающихся сессий eMBB-устройств, тем самым приняв новую сессию URLLC-устройства к обслуживанию, а для второго случая вместо блокировки является возможным снижение скорости передачи данных сессии eMBB-устройства. Рассматривается СМО в виде мультисервисной модели Эрланга с разными политиками распределения пропускной способности, выведены показатели эффективности данной модели, проведен численный анализ, на основе которого определяется наиболее эффективная политика распределения ресурсов при совместном планировании передачи данных сессий eMBB и URLLC-устройств.

Ключевые слова: eMBB; URLLC; совместное использование; множественный доступ; системы массового обслуживания (СМО).

Технология 5G предназначена для решения таких проблем, как рост мобильного трафика, увеличение количества устройств, подключенных к сети, сокращение задержек при внедрении новых услуг. Основными услугами в будущих сетях 5G являются расширенная мобильная широкополосная связь (eMBB), массивные коммуникации машинного типа (mMTC) и сверхнадежная связь с низкой задержкой (URLLC). В статьях [1–4] отмечается, что в современных системах 5G предполагается поддержка как мобильного широкополосного трафика (eMBB), так и сверхнадежного трафика с низкой задержкой (URLLC). Таким образом, совместное обслуживание URLLC и eMBB привлекает все большее внимание исследователей. Первая группа исследований связана с нарезкой сети (network slicing). Авторы статьи [5] предлагают распределять ресурсы для URLLC-трафика, ставя в приоритет надежность URLLC. В [6, 7] предложена возможная архитектура совместной передачи URLLC и eMBB-трафика. В [8, 9] рассмотрены основные сценарии реализации обслуживания трафика URLLC и eMBB, технические требования, а также особенности неортогонального совместного использования ресурсов при условии нахождения в сети устройств eMBB, mMTC и URLLC. В [10, 11] приведено исследование эффективности различных вариантов модуляции для мультиплексирования с ортогональным частотным разделением (OFDM) с точки зрения их спектральной эффективности, надежности и т.д. В работах [12, 13] рассмотрены варианты неортогонального использования ресурсов для передачи URLLC и eMBB.

В статье построена математическая модель в виде мультисервисной модели Эрланга для совместной передачи URLLC и eMBB-трафика. Задачами исследования являлись разработка различных политик распределения ресурсов физического канала для рассматриваемой модели, вывод вероятностно-временных характеристик и проведение на их основе численного анализа для определения наиболее эффективной политики распределения ресурсов физического канала.

1. Математическая модель

В этом разделе мы формулируем модель совместной передачи трафика eMBB и URLLC, которая позволяет рассмотреть два возможных варианта планирования распределения ресурсов, суть ко-

торых заключается в следующем: для одной базовой станции, с которой устройства с двумя типами трафика пытаются установить соединение для передачи данных.

Рассмотрим две системы (табл. 1), каждая из которых состоит из ресурсных блоков N , состоящих из b единичных ресурсов. Кроме того, в каждом блоке выделяется d ($d < b$) ресурсных единиц для одновременной передачи сеансов d URLLC с одним текущим сеансом eMBB. Сессии двух типов прибывают в соответствии с пуассоновским потоком интенсивности λ_m и λ_u соответственно. Предположим, что каждый сеанс трафика URLLC занимает 1 единичный ресурс, каждый сеанс eMBB – b ресурсных единиц, т.е. 1 ресурсный блок. Следовательно, максимальное количество сеансов eMBB в системе равно N , сеансов URLLC – $C = N \cdot b$, а максимальное количество активных сеансов URLLC в одном слоте с текущим активным сеансом eMBB – d .

Таблица 1

Системные параметры

Параметры	Описание
λ_m	Интенсивность поступления заявок eMBB
λ_u	Интенсивность поступления заявок URLLC
μ_u^{-1} / μ_m^{-1}	Средняя длительность сессии URLLC / eMBB
n	Количество установленных (активных) сессий
N	Общее количество слотов
b	Количество мини-слотов в одном слоте
$C = N \cdot b$	Общее количество мини-слотов
d	Максимальное количество активных сессий URLLC в одном слоте с текущей активной сессией eMBB

Предполагается, что средняя продолжительность сеансов URLLC / eMBB распределена экспоненциально: μ_u^{-1} и μ_m^{-1} соответственно, $\mu_u^{-1} \ll \mu_m^{-1}$. Обозначим нагрузки: $\rho_m = \frac{\lambda_m}{\mu_m}$ и $\rho_u = \frac{\lambda_u}{\mu_u}$.

2. Модель с прерыванием обслуживания сессий eMBB

Опишем процесс обслуживания приложений для трафика eMBB и URLLC следующим образом: C – максимальная скорость передачи, пространство состояний имеет вид:

$$\mathbf{N} = \{(n_m, n_u) : n_m \geq 0, n_u \geq 0, bn_m + n_u \leq C\}, \quad (1)$$

где n_m - количество сеансов eMBB в системе, n_u - количество сеансов URLLC в системе. Схема модели показана на рис. 1.

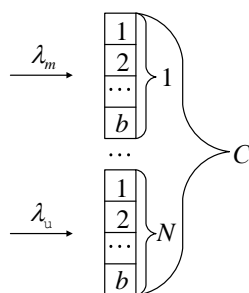


Рис. 1. Схема модели
Fig. 1. Scheme of the model

При поступлении eMBB-сессии на обслуживание возможно следующее развитие событий:

- Если в системе имеется хотя бы один свободный ресурсный блок (b ресурсных единиц в ресурсном блоке), то новая сессия eMBB принимается к обслуживанию.
- Если в системе нет свободного ресурсного блока, то новая сессия eMBB блокируется.

При поступлении URLLC-сессии на обслуживание возможны следующие ситуации:

– Если в системе имеется хотя бы одна свободная ресурсная единица, то новая сессия URLLC принимается к обслуживанию.

– Если в системе нет свободной ресурсной единицы и в системе обслуживается как минимум одна eMBB-сессия, то eMBB сессия прерывается (блокируется) и URLLC сессия поступает на обслуживание.

– Если в системе нет свободной ресурсной единицы и в системе не обслуживаются eMBB-сессии, то новая URLLC сессия блокируется.

Таким образом, возможные переходы для произвольного состояния $(n_m, n_u) \in \mathbb{N}$ выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} a(n_m, n_u)(n_m + 1, n_u) = \lambda_m, \\ a(n_m, n_u)(n_m, n_u + 1) = \lambda_u, \\ a(n_m, n_u)(n_m - 1, n_u + 1) = \lambda_u, \\ a(n_m, n_u)(n_m - 1, n_u) = n_m \mu_m, \\ a(n_m, n_u)(n_m + 1, n_u) = n_u \mu_u. \end{cases} \quad (2)$$

Общая структура диаграммы перехода между состояниями показана на рис. 2, а также для примера $C = 12, b = 3, N = 4$ – на рис. 3.

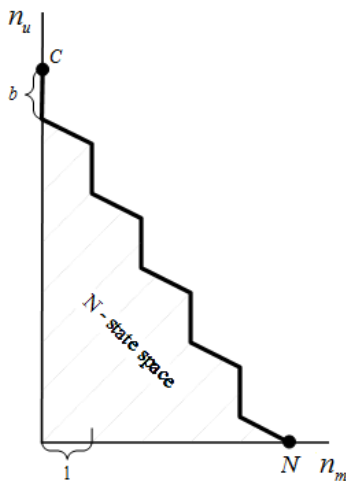


Рис. 2. Диаграмма переходов между состояниями в целом
Fig. 2. State transition diagram in general

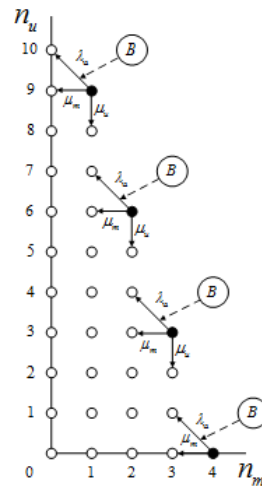


Рис. 3. Диаграмма переходов между состояниями в общем виде для примера $C = 12, b = 3, N = 4$
Fig. 3. State transition diagram in general for example $C = 12, b = 3, N = 4$

Система уравнений глобального баланса для данной системы имеет вид:

$$\begin{aligned} & p(n_m, n_u)[\lambda_m I(bn_m + n_u + b \leq C) + \lambda_u [I(bn_m + n_u + 1 \leq C) + \\ & \quad + I(bn_m + n_u + 1 > C, n_m > 0)] + n_u \mu_u I(n_u > 0) + \\ & + n_m \mu_m I(n_m > 0) = p(n_m + 1, n_u)(n_m + 1) \mu_m I(bn_m + n_u + b \leq C) + \\ & + p(n_m, n_u + 1)(n_u + 1) \mu_u I(bn_m + n_u + 1 \leq C) + p(n_m, n_u - 1) \times \\ & \times \lambda_u I(n_u > 0) + p(n_m - 1, n_u) \lambda_m I(n_m > 0) + p(n_m + 1, n_u - 1) \times \\ & \times \lambda_u I(b(n_m + 1) + n_u > C, n_u > 0), \end{aligned} \quad (3)$$

где $(p(n_m, n_u))_{(n_m, n_u) \in \mathbb{N}}$ – распределение вероятностей, $I(A)$ – индикатор случайного события:

$$I(A) = \begin{cases} 1, & \text{если событие } A \text{ произошло;} \\ 0, & \text{если событие } A \text{ не произошло.} \end{cases}$$

Элементы матрицы интенсивности переходов данной системы имеют следующий вид:

$$a((n_m, n_u), (n'_m, n'_u)) = \begin{cases} \lambda_m, & n'_m = n_m + 1, n'_u = n_u; \\ \lambda_u, & n'_m = n_m, n'_u = n_u + 1, \\ & \text{или} \\ & n'_m = n_m - 1, n_m > 0, \\ & n'_u = C - (bn_m - 1); \\ n_m \mu_m, & n'_m = n_m - 1, n'_u = n_u - 1; \\ n_u \mu_u, & n'_m = n_m, n'_u = n_u - 1; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4)$$

Вычислив стационарное распределение вероятностей $(p(n_m, n_u))_{(n_m, n_u) \in \mathbb{N}}$, можно рассчитать следующие показатели эффективности системы:

– Среднее количество сессий eMBB / URLLC, \bar{n}_m , \bar{n}_u соответственно:

$$\bar{n}_m = \sum_{n_m=1}^N n_m \cdot \sum_{n_u=0}^{C-bn_m} p(n_m, n_u); \quad (5)$$

$$\bar{n}_u = \sum_{n_u=1}^C n_u \cdot \sum_{n_m=0}^{\lfloor \frac{C-n_u}{b} \rfloor} p(n_m, n_u). \quad (6)$$

– Вероятность блокировки запросов сеансов eMBB (B_M) и сеансов URLLC (B_U):

$$B_M = \sum_{n_u=0}^C p\left(\left\lfloor \frac{C-n_u}{b} \right\rfloor, n_u\right); \quad (7)$$

$$B_U = p(0, C). \quad (8)$$

– Вероятность прерывания обслуживания запроса eMBB:

$$I = \sum_{n_m=1}^{N-1} p(n_m, C - bn_m) \frac{\lambda_u}{\lambda_u + n_m \mu_m + n_u \mu_u} \frac{1}{n_m} + p(N, C - bN) \frac{\lambda_u}{\lambda_u + n_m \mu_m} \frac{1}{n_m}. \quad (9)$$

– Коэффициент использования системы:

$$UTIL = \frac{1}{C} \sum_{n_m=0}^N \sum_{n_u=0}^{C-bn_m} (bn_m + n_u) p(n_m, n_u). \quad (10)$$

3. Модель со снижением скорости обслуживания сессий eMBB

Рассмотрим вторую модель. В данном случае возможно наложение URLLC-трафика на уже находящуюся на обслуживании сессию eMBB при следующих условиях: в системе обслуживается по меньшей мере одна eMBB-сессия и в системе отсутствуют свободные ресурсные единицы. При наложении двух сессий находящаяся на обслуживании eMBB-сессия не прерывается, а происходит снижение выделения ресурсов на необходимое количество для URLLC-сессии. Максимальное количество сессий URLLC в одном блоке с eMBB-сессией может быть равно d , $d < b$.

Поэтому по сравнению с первой моделью пространство состояний имеет следующий вид:

$$\mathbb{N} = \{(n_m, n_u) : n_m \geq 0, n_u \geq 0, (b-d)n_m + n_u \leq C, n_m \leq N\}. \quad (11)$$

При поступлении eMBB-сессии на обслуживание возможно следующее развитие событий:

– Если в системе имеется хотя бы один свободный ресурсный блок (b ресурсных единиц в ресурсном блоке), то новая сессия eMBB принимается к обслуживанию.

– Если в системе нет свободного ресурсного блока, то новая сессия eMBB блокируется.

При поступлении URLLC-сессии:

– Если в системе имеется хотя бы одна свободная ресурсная единица, то новая сессия URLLC принимается к обслуживанию.

– Если в системе нет свободной ресурсной единицы, в системе обслуживается как минимум одна eMBB-сессия и выполняется условие максимального количество сессий URLLC в одном блоке с eMBB-сессией, то происходит наложение URLLC сессии на eMBB сессию.

– Если в системе нет свободной ресурсной единицы, в системе обслуживается как минимум одна eMBB-сессия и не выполняется условие максимального количество сессий URLLC в одном блоке с eMBB-сессией, то eMBB-сессия блокируется и новая URLLC сессия поступает на обслуживание.

– Если в системе нет свободной ресурсной единицы и в системе не обслуживаются eMBB-сессии, то URLLC сессия блокируется.

Таким образом, возможные переходы для произвольного состояния $(n_m, n_u) \in \mathbf{N}$ выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} a(n_m, n_u)(n_m + 1, n_u) = \lambda_m, \\ a(n_m, n_u)(n_m, n_u + 1) = \lambda_u, \\ a(n_m, n_u)(n_m - 1, n_u + 1) = \lambda_u, \\ a(n_m, n_u)(n_m - 1, n_u) = n_m \mu_m, \\ a(n_m, n_u)(n_m, n_u - 1) = n_u \mu_u. \end{cases} \quad (12)$$

Общая структура диаграммы перехода между состояниями показана на рис. 4, а также для примера $C = 12, b = 3, N = 2, d = 2$ – на рис. 5.

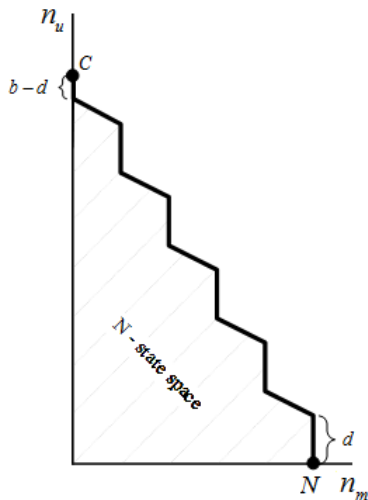


Рис.4. Диаграмма переходов между состояниями в целом

Fig.4. State transition diagram in general

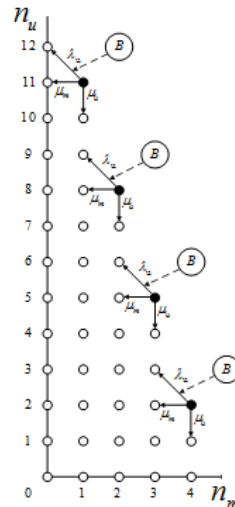


Рис. 5 Диаграмма переходов между состояниями в общем виде для примера $C = 12, b = 3, N = 2, d = 2$

Fig. 5. State transition diagram in general for example $C = 12, b = 3, N = 2, d = 2$

Система уравнений глобального баланса имеет вид:

$$\begin{aligned} p(n_m, n_u)[\lambda_m I(bn_m + n_u + b \leq C) + \lambda_u [I((b-d)n_m + n_u + 1 \leq C) + \\ + I((b-d)n_m + n_u + 1 > C, n_m > 0)] + n_u \mu_u I(n_u > 0) + \\ + n_m \mu_m I(n_m > 0)] = p(n_m + 1, n_u)(n_m + 1) \mu_m I(bn_m + n_u + b \leq C) + \\ + p(n_m, n_u + 1)(n_u + 1) \mu_u \cdot I((b-d)n_m + n_u + 1 \leq C) + p(n_m, n_u - 1) \times \\ \times \lambda_u I(n_u > 0) + p(n_m - 1, n_u) \lambda_m I(n_m > 0) + p(n_m + 1, n_u - 1) \times \\ \times \lambda_u I((b-d)(n_m + 1) + n_u > C, n_u > 0), \end{aligned} \quad (13)$$

а элементы матрицы интенсивностей $a((n_m, n_u), (n'_m, n'_u))$ равны следующему:

$$a((n_m, n_u), (n'_m, n'_u)) = \begin{cases} \lambda_m, & n'_m = n_m + 1, n'_u = n_u; \\ \lambda_u, & n'_m = n_m, n'_u = n_u + 1, \\ \text{или} \\ n'_m = n_m - 1, n_m > 0, \\ n'_u = C - ((b-d)n_m - 1); \\ n_m \mu_m, & n'_m = n_m - 1, n'_u = n_u; \\ n_u \mu_u, & n'_m = n_m, n'_u = n_u - 1; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (14)$$

Вычислим стационарное распределение $(p(n_m, n_u))_{(n_m, n_u) \in \mathbb{N}}$, решив систему уравнений равновесия (13) для данной системы, и рассчитаем следующие показатели эффективности системы:

– Среднее количество сессий eMBB / URLLC, \bar{n}_m и \bar{n}_u соответственно:

$$\bar{n}_m = \sum_{n_m=1}^N n_m \cdot \sum_{n_u=0}^{C-(b-d)n_m} p(n_m, n_u); \quad (15)$$

$$\bar{n}_u = \sum_{n_u=1}^C n_u \cdot \sum_{n_m=0}^{\lfloor \frac{C-n_u}{b-d} \rfloor} p(n_m, n_u). \quad (16)$$

– Вероятность блокировки сеансов eMBB (B_M) и сеансов URLLC (B_U):

$$B_M = \sum_{n_u=0}^C p\left(\left\lceil \frac{C-n_u}{b-d} \right\rceil, n_u\right); \quad (17)$$

$$B_U = p(0, C). \quad (18)$$

– Вероятность прерывания обслуживания запроса eMBB:

$$I = \sum_{n_m=1}^N p(n_m, C - (b-d)n_m) \frac{\lambda_u}{\lambda_u + n_m \mu_m + n_u \mu_u} \frac{1}{n_m} \quad (19)$$

– Средняя скорость передачи сеансов eMBB:

$$\bar{b} = \frac{1}{\sum_{(n_m, n_u) \in \mathbb{N}_+ \cup \mathbb{N}_-} p(n_m, n_u)} \times \left[\sum_{(n_m, n_u) \in \mathbb{N}_+} b p(n_m, n_u) + \sum_{(n_m, n_u) \in \mathbb{N}_-} \frac{C-n_u}{n_m} p(n_m, n_u) \right], \quad (20)$$

где $\mathbb{N}_+ = (n_m, n_u) \in \mathbb{N} : n_m > 0, bn_m + n_u \leq C$ и $\mathbb{N}_- = (n_m, n_u) \in \mathbb{N} : n_m > 0, bn_m + n_u > C$.

– Коэффициент использования ресурсов системы:

$$UTIL = \frac{1}{C} \left(\left(\sum_{n_m=1}^N \sum_{n_u=0}^{C-n_m} (bn_m + n_u) p(n_m, n_u) \right) + 1 \right). \quad (21)$$

4. Примеры численного анализа

В этом разделе представлены результаты численного анализа двух систем. Рассмотрим среднее количество сессий eMBB и URLLC в системе. Пусть канал будет с разнесением поднесущих 120 кГц с 10 слотами, продолжительность каждого слота равна 1 мс. Поскольку разнесение поднесущих равно 120 кГц, количество мини-слотов равно 14, длительность каждого составляет 0,066 мс. Рассматриваемый радиоканал состоит из 15 ресурсных блоков (N), в каждом из которых 12 ресурсных единиц (b). Для численного анализа мы будем использовать два сценария с исходными данными (табл. 2).

Рассмотрим влияние интенсивностей поступления сеансов URLLC и eMBB на среднее число сеансов eMBB в системе для двух моделей (рис. 6–9), а также на среднее число сеансов URLLC в системе (рис. 10–13).

Системные параметры для численного анализа

Параметры	Сценарий 1	Сценарий 2
λ_m	0–1 000	100, 200, 300
λ_u	400, 500, 600	0–1 000
μ_m^{-1}	1^{-1}	1^{-1}
μ_u^{-1}	3^{-1}	3^{-1}
N	15	15
b	12	12
d	6	6

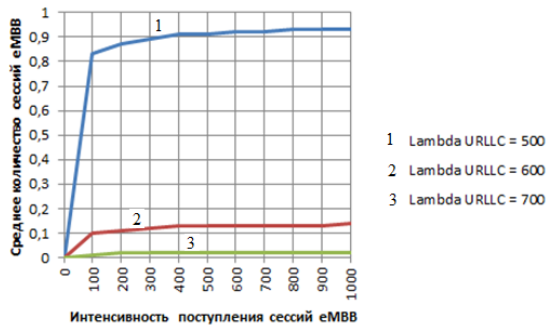


Рис. 6. Сценарий 1: Среднее количество сессий eMBB для 1-й модели
 Fig. 6. Scenario 1: Average number of eMBB sessions for 1st model

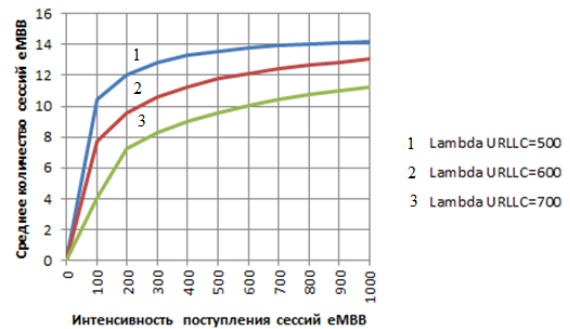


Рис. 7. Сценарий 1: Среднее количество сессий eMBB для 2-й модели
 Fig. 7. Scenario 1: Average number of eMBB sessions for 2nd model

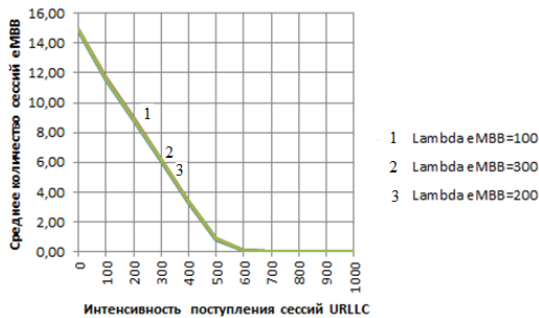


Рис. 8. Сценарий 2: Среднее количество сессий eMBB для 1-й модели
 Fig. 8. Scenario 2: Average number of eMBB sessions for 1st model

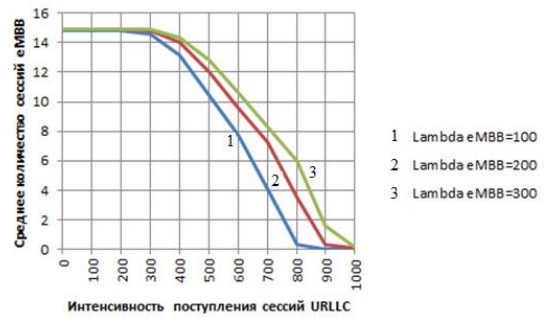


Рис. 9. Сценарий 2: Среднее количество сессий eMBB для 2-й модели
 Fig. 9. Scenario 2: Average number of eMBB sessions for 2nd model

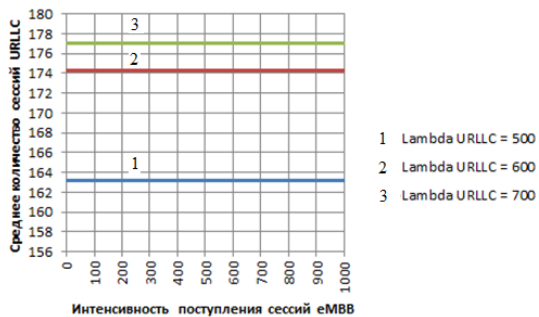


Рис. 10. Сценарий 1: Среднее количество сессий URLLC для 1-й модели
 Fig. 10. Scenario 1: Average number of URLLC sessions for 1st model

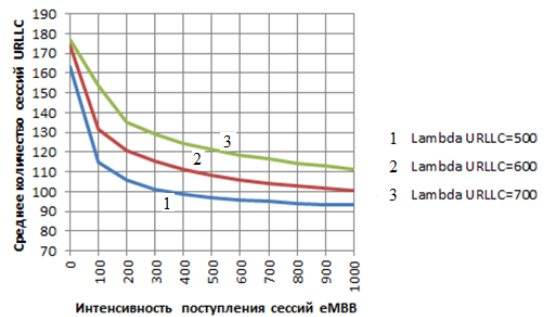


Рис. 11. Сценарий 1: Среднее количество сессий URLLC для 2-й модели
 Fig. 11. Scenario 1: Average number of URLLC sessions for 2nd model

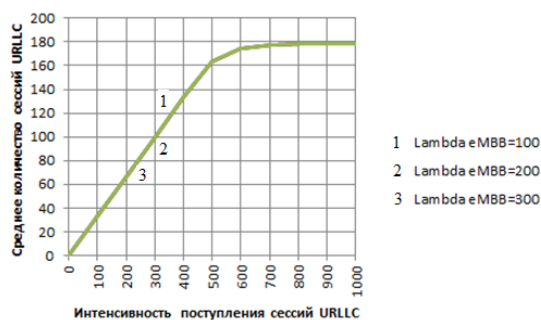


Рис. 12. Сценарий 2: Среднее количество сессий URLLC для 1-й модели

Fig. 12. Scenario 2: Average number of URLLC sessions for 1st model

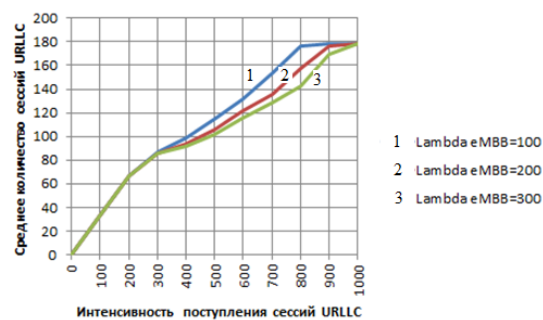


Рис. 13. Сценарий 2: Среднее количество сессий URLLC для 2-й модели

Fig. 13. Scenario 2: Average number of URLLC sessions for 2nd model

Как мы можем видеть на графиках на рис. 6, 8, в первой модели гораздо большее влияние на среднее количество сессий eMBB в системе оказывает интенсивность сеанса URLLC. Стоит отметить, что из графиков, приведенных на рис. 10, 12, можно сделать вывод о том, что в первой модели среднее количество сеансов URLLC в системе не зависит от интенсивности поступления сеансов eMBB. Это связано с тем, что сессии URLLC имеют приоритет по отношению к eMBB-сессиям из-за своих строгих требований к задержке передачи данных. Во второй же модели на исследуемые характеристики оказывают влияние две интенсивности поступления: и eMBB, и URLLC-сессий, это можно заметить на рис. 7, 9, 11, 13. Однако интенсивность поступления URLLC-сессий оказывает большее влияние на количество сессий двух типов в системах.

Таким образом, основываясь на результатах численного анализа, можно сделать вывод, что вторая модель с возможностью снижения скорости передачи сессий eMBB является наиболее эффективной, т.е. при таком принципе распределения ресурсов физического канала удастся обслужить больше сессий eMBB совместно с URLLC-сессиями, чем в первой модели.

Заключение

В этой работе нам удалось представить в виде мультисервисной модели Эрланга две системные модели, которые обеспечивают совместную передачу сеансов разных типов трафика – eMBB и URLLC – с разными правилами планирования передачи данных, и численно определить стационарные вероятности данных систем, с помощью которых вычислили вероятностно-временные характеристики. Также удалось провести численный анализ двух моделей, результаты которого показали, что в первой модели интенсивность поступления сессий eMBB не оказывает никакого влияния на среднее число и на вероятность блокировки сессий URLLC, данный факт объясняется абсолютным приоритетом сессий URLLC. На основе результатов численного анализа удалось сделать вывод, что второй вариант построения модели совместного использования расширенной мобильной широкополосной связи eMBB и сверхнадежной связи с низкой задержкой URLLC с возможностью снижения скорости передачи данных eMBB сессий является более эффективным, чем первый вариант.

Благодарность. Авторы благодарят аспиранта кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН Т.Р. Велиеву за вклад в проведение численного эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gerasimenko M., Moltchanov D., Andreev S., Koucheryavy Ye., Himayat N., Shu-Ping Yeh, Talwar S. Adaptive resource management strategy in practical multi-radio heterogeneous networks // IEEE Access. 2017. V. 5. P. 219–235.
2. Anand A., de Veciana G., Shakkottai S. Joint Scheduling of URLLC and eMBB Traffic in 5G Wireless Networks // IEEE INFOCOM2018 – IEEE Conf. on Computer Communications. 2018. October. DOI: 10.1109/INFOCOM.2018.8486430.
3. Begishev V., Petrov V., Samuylov A., Moltchanov D., Andreev S., Koucheryavy Ye., Samouylov K. Resource Allocation and sharing for heterogeneous data collection over conventional 3GPP LTE and emerging NB-IoT technologies // Computer Communications. 2018. V. 120. P. 93–101.

4. Markova E., Moltchanov D., Gudkova I., Samouylov K. Koucharyavy performance assessment of QoS-Aware LTE sessions offloading onto LAA/WiFi systems // *IEEE Access*. 2019. V. 7. March. P. 36300–36311. DOI: 10.1109/ACCESS.2019.2905035.
5. Tang J., Shim B., Quek T.Q.S. Service multiplexing and revenue maximization in sliced C-RAN incorporated with URLLC and multicast eMBB // *IEEE J. on Selected Areas in Communications*. 2019. V. 37 (4). Article No. 8638932. P. 881–895.
6. Semiar O., Saad W., Bennis M., Debbah M. Integrated millimeter wave and sub-6 GHz wireless networks: a roadmap for joint mobile broadband and ultra-reliable low-latency communications // *IEEE Wireless Communications*. 2019. V. 26 (2). Article No. 8642794. P. 109–115.
7. Guan W., Wen X., Wang L., Lu Z., Shen Y. A service-oriented deployment policy of end-to-end network slicing based on complex network theory // *IEEE Access*. 2018. V. 6. P. 19691–19701.
8. Soldani D. 5G beyond radio access: a flatter sliced network // *Mondo Digitale*. 2018. V. 17 (74).
9. Popovski P., Trillingsgaard K.F., Simeone O., Durisi G. 5G wireless network slicing for eMBB, URLLC, and mMTC: a communication-theoretic view // *IEEE Access*. 2018. V. 6. Article No. 8476595. P. 55765–55779.
10. Jaradat A.M., Hamamreh J.M., Arslan H. Modulation options for OFDM-Based waveforms: Classification, Comparison, and Future Directions // *IEEE Access*. 2019. V. 7. Article No. 8631007. P. 17263–17278.
11. Hamamreh J.M., Ankarali Z.E., Arslan H. CP-Less OFDM with Alignment Signals for Enhancing Spectral Efficiency, Reducing Latency, and Improving PHY Security of 5G Services // *IEEE Access*. 2018. V. 6, Article No. 8501913. P. 63649–63663.
12. Kassab R., Simeone O., Popovski P., Islam T. Non-Orthogonal multiplexing of ultra-reliable and broadband services in fog-radio architectures // *IEEE Access*. 2019. V. 7. Article No. 8612914. P. 13035–13049.
13. Matera A., Kassab R., Simeone O., Spagnolini U. Non-Orthogonal eMBB-URLLC radio access for cloud radio access networks with analog fronthauling // *Entropy*. 2018. V. 20 (9). Article No. 661.

Поступила в редакцию 30 октября 2019 г.

Makeeva E.D., Polyakov N.A., Kharin P.A., Gudkova I.A. (2020) PROBABILITY MODEL FOR PERFORMANCE ANALYSIS OF JOINT URLLC AND eMBB TRANSMISSION IN 5G NETWORKS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 52. pp. 33–42

DOI: 10.17223/19988605/52/4

The eMBB and URLLC collaboration system with two models of resource allocation planning is considered. Poisson streams of two types of traffic arrive at the system input. The system is determined by the following parameters: the number of resource blocks, the number of resource units, the maximum number of URLLC sessions in one block with an eMBB session.

The discipline of servicing the first model is defined as follows: the system receives applications eMBB and URLLC, with free resources all types of traffic are accepted. In the absence of free resource blocks, new eMBB sessions are blocked. In the absence of free single resources and at least one eMBB session, the new URLLC session blocks the active eMBB session. In the absence of free single resources and the absence of active eMBB sessions in the system, the new URLLC session is blocked. The service discipline of the second model is determined in a similar way with the following exception: in the absence of free unit resources and the presence of at least one eMBB session and the condition is met for the maximum number of URLLC sessions in one block with an eMBB session, then the URLLC session is superimposed on the eMBB session. In the absence of free single resources and the presence of at least one eMBB session, the condition for the maximum number of URLLC sessions in one block with the eMBB session is not fulfilled, then the eMBB session is blocked to serve the URLLC session.

The paper presents the results of a numerical analysis of the probability-time characteristics of two models.

Keywords: eMBB-URLLC; joint using; multiple access; NOMA; OMA; slots; mini-slots; queuing systems.

MAKEEVA Elena Dmitrievna (RUDN University, Moscow, Russian Federation).

E-mail: len16730637@yandex.ru

POLYAKOV Nikita Alexseevich (RUDN University, Moscow, Russian Federation).

E-mail: goto97@mail.ru

KHARIN Petr Aleksandrovich (Post-graduate Student, RUDN University, Moscow, Russian Federation).

E-mail: gruzavjeg@mail.ru

GUDKOVA Irina Andreevna (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, RUDN University, Moscow, Russian Federation).

E-mail: gudkova-ia@rudn.ru

REFERENCES

1. Gerasimenko, M., Moltchanov, D., Andreev, S., Koucheryavy, Ye., Himayat, N., Shu-Ping Yeh, & Talwar, S. (2017) Adaptive Resource Management Strategy in Practical Multi-Radio Heterogeneous Networks. *IEEE Access*. 5. pp. 219–235. DOI: 10.1109/ACCESS.2016.2638022

2. Anand, A., de Veciana, G. & Shakkottai, S. (2018) Joint scheduling of URLLC and eMBB traffic in 5G wireless networks. *IEEE INFOCOM2018 – IEEE Conf. on Computer Communications*, October. DOI: 10.1109/INFOCOM.2018.8486430
3. Begishev, V., Petrov, V., Samuylov, A., Moltchanov, D., Andreev, S., Koucheryavy, Ye. & Samouylov, K. (2018) Resource Allocation and sharing for heterogeneous data collection over conventional 3GPP LTE and emerging NB-IoT technologies. *Computer Communications*. 120. pp. 93–101. DOI: 10.1016/j.comcom.2018.01.009
4. Markova, E., Moltchanov, D., Gudkova, I. & Samouylov, K. (2019) Koucheryavy performance assessment of QoS-Aware LTE sessions offloading Onto LAA/WiFi systems. *IEEE Access*. 7. pp. 36300–36311. DOI: 10.1109/ACCESS.2019.2905035
5. Tang, J., Shim, B. & Quek, T.Q.S. (2019) Service multiplexing and revenue maximization in sliced C-RAN incorporated with URLLC and multicast eMBB. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*. 37(4). Art. no. 8638932. pp. 881–895. DOI: 10.1109/JSAC.2019.2898745
6. Semiari, O., Saad, W., Bennis, M. & Debbah, M. (2019) Integrated millimeter wave and sub-6 GHz wireless networks: A roadmap for joint mobile broadband and ultra-reliable low-latency communications. *IEEE Wireless Communications*. 26(2). Art. no. 8642794. pp. 109–115. DOI: 10.1109/MWC.2019.1800039
7. Guan, W., Wen, X., Wang, L., Lu, Z. & Shen, Y. (2018) A service-oriented deployment policy of end-to-end network slicing based on complex network theory. *IEEE Access*. 6. pp. 19691–19701. DOI: 10.1109/ACCESS.2018.2822398
8. Soldani, D. (2018) 5G beyond radio access: A flatter sliced network. *Mondo Digitale*. 17(74).
9. Popovski, P., Trillingsgaard, K.F., Simeone, O. & Durisi, G. (2018) 5G wireless network slicing for eMBB, URLLC, and mMTC: A communication-theoretic view. *IEEE Access*. 6. Art. no. 8476595. pp. 55765–55779. DOI: 10.1109/ACCESS.2018.2872781
10. Jaradat, A.M., Hamamreh, J.M. & Arslan, H. (2019) Modulation options for OFDM-based waveforms: Classification, Comparison, and Future Directions. *IEEE Access*. 7. Art. no. 8631007. pp. 17263–17278. DOI: 10.1109/ACCESS.2019.2895958
11. Hamamreh, J.M., Ankarali, Z.E. & Arslan, H. (2018) CP-Less OFDM with alignment signals for enhancing spectral efficiency, reducing latency, and improving PHY security of 5G services. *IEEE Access*. 6. Art. no. 8501913. pp. 63649–63663. DOI: 10.1109/ACCESS.2018.2877321
12. Kassab, R., Simeone, O., Popovski, P. & Islam, T. (2019) Non-Orthogonal Multiplexing of Ultra-Reliable and Broadband Services in Fog-Radio Architectures. *IEEE Access*. 7. Art. no. 8612914. pp. 13035–13049. DOI: 10.1109/ACCESS.2019.2893128
13. Matera, A., Kassab, R., Simeone, O. & Spagnolini, U. (2018) Non-Orthogonal eMBB-URLLC radio access for cloud radio access networks with analog fronthauling. *Entropy*. 20(9). Art. no. 661. DOI: 10.3390/e20090661

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 629.05

DOI: 10.17223/19988605/52/5

Л.П. Барабанова

ОПТИМИЗАЦИЯ ГЕОМЕТРИИ РАЗНОСТНО-ДАЛЬНОМЕРНОГО МЕТОДА В НАВИГАЦИИ И ОБНАРУЖЕНИИ

Рассматривается задача оптимизации геометрии разностно-дальномерного метода в навигации / обнаружении. Получены абсолютные нижние границы для геометрических факторов при любом числе маяков / приемников. Построены образцы оптимальных геометрических конфигураций маяков / приемников в неосвоенных до настоящего времени случаях при 5, 7, 9 маяках / приемниках. Задача оптимизации геометрии разностно-дальномерного метода решена полностью. Результат получен операциями с B -матрицами (building matrix).

Ключевые слова: разностно-дальномерная задача; геометрические факторы; минимизация; B -матрицы.

Разностно-дальномерный метод, или TDoA (Time Difference of Arrival), порождает две задачи.

Разностно-дальномерная задача (РДЗ): по моментам времени приема сигнала, синхронно излучаемого известными источниками (маяками), найти место приемника (потребителя).

Эта задача местоопределения приемника сигнала является базовой для многих современных систем навигации, в том числе для спутниковых систем GPS, ГЛОНАСС, Galileo и др.

Разностно-дальномерной задаче математически эквивалентна следующая –

Обратная разностно-дальномерная задача (ОРДЗ): по моментам времени приема сигнала известными синхронными приемниками найти место источника сигнала.

Эта задача местонахождения источника сигнала является базовой для многих систем обнаружения, в том числе для сейсмических систем, систем обнаружения терпящих бедствие, систем координатной идентификации пользователя мобильной сотовой связи, систем слежения за подвижным периодическим источником сигнала и т.п.

Из самих формулировок прямой и обратной разностно-дальномерных задач ясно, что центральным аспектом основанных на них технических систем являются измерение и синхронизация времени. В качестве носителя сигнала в зависимости от физических свойств среды и источников, как правило, используется или электромагнитная, или акустическая, или тепловая, или еще какая-нибудь волна, например бактериологическая.

Поскольку прямая и обратная разностно-дальномерные задачи математически эквивалентны, далее для краткости речь пойдет только о разностно-дальномерной задаче (РДЗ).

Вопрос об оптимизации геометрии разностно-дальномерного метода в навигации впервые был поставлен в работе [1] применительно к GPS. Под оптимизацией в [1] понималась минимизация геометрического фактора PDOP. Там же было доказано, что $3/\sqrt{N} \leq \text{PDOP}(N)$ и что это неравенство превращается в равенство при $N = 4, 6, 8, 12$. Затем в работе [2] другим способом была доказана серия аналогичных неравенств.

Вопрос о представлении абсолютных минимумов геометрических факторов (PDOP, GDOP) навигационных систем типа GPS в виде простых радикалов был впервые поставлен в работе [3]. Там же было доказано, что при всех $N \geq 4$

$$\sqrt{9/N} \leq \min \text{PDOP}(N), \quad \sqrt{10/N} \leq \min \text{GDOP}(N), \quad (1)$$

причем при всех четных $N \geq 4$ эти неравенства становятся равенствами. Также в [3] было доказано, что при $N = 5$

$$\sqrt{9/5} < \min \text{PDOP}(5), \quad \sqrt{10/5} < \min \text{GDOP}(5).$$

Случай *нечетного* числа маяков $N > 5$ остался неразрешенным.

Работа [3] завершалась следующими вопросами:

1. Каково выражение для абсолютного минимума PDOP и GDOP для нечетного числа N маяков?
2. Как выглядят конфигурации маяков, минимизирующие PDOP и GDOP при $N = 5, 7, \dots$?

Независимо от [3] вопрос о нижних границах для PDOP и GDOP был позже рассмотрен в [4, 5], где также были доказаны неравенства (1). В работе [4] всем неравенствам в (1) бездоказательно был присвоен знак равенства. В работе [5] было сделано исключение для случая $N = 5$, остальные равенства, включая случай четных N , не получили доказательств. Дело в том, что для того, чтобы иметь в отдельном взятом неравенстве (1) равенство, необходимо построить соответствующую конфигурацию маяков, а это непросто. Как видим, поставленные выше вопросы взаимосвязаны. В настоящей статье проблема решена полностью, т.е. и для всех нечетных $N > 5$ построены примеры конфигураций маяков, обеспечивающие равенства в (1). Ничего подобного нет в [4, 5]. Между тем в работе [6] есть ссылки на [4, 5] как на уже доказанный результат.

Отметим, что область применения полученных результатов не ограничивается GPS, где, конечно, препятствие тела Земли делает их абстрактными. Однако существует множество применений разностно-дальномерного метода, которому посвящена данная статья, когда найденные оценки PDOP и GDOP приобретают безусловный смысл при отсутствии ограничения в распространении сигнала. Приведем только некоторые примеры.

Пример 1. В рое беспилотных летательных аппаратов есть несколько командных, другие определяют свои координаты с помощью разностно-дальномерного метода по синхронным сигналам от командных аппаратов, располагающих абсолютными координатами.

Пример 2. То же самое в Космосе, см. по этому поводу [7].

Пример 3. То же самое под водой на основе акустического сигнала.

Пример 4. Микро-робот, погруженный в тело живого существа, определяет свои координаты по синхронным сигналам маяков, размещенных на поверхности тела (РДЗ). Или, напротив, по сигналу, поступающему от микро-робота, находится его местоположение наблюдателем (ОРДЗ).

Коэффициенты PDOP и GDOP в настоящее время являются официальными стандартами (NMEA 0183, ГОСТ Р 52928–2010 и др.). Других стандартов относительно геометрических факторов в разностно-дальномерных системах навигации нами не обнаружено.

Вопросам вычисления и минимизации PDOP и GDOP в различных разностно-дальномерных системах навигации посвящены десятки работ, ссылки на которые можно найти в упоминаемых здесь статьях. Одно из направлений – это мультисистемность (см., напр.: [6]). Другое – учет ограничений, что характерно для стандартной глобальной спутниковой навигационной системы типа GPS или ГЛОНАСС. Третье – композиция первого и второго (см., напр.: [8]). Очевидно, что, переходя к этим более сложным случаям, нужно досконально и окончательно разобраться с одной системой без ограничений. Таким образом, абсолютные нижние оценки PDOP и GDOP имеют фундаментальный характер и поэтому заслуживают строгого теоретического обоснования.

1. Постановка задачи

Разностно-дальномерная навигационная задача в трехмерном пространстве состоит в решении системы $N \geq 4$ уравнений относительно столбца $X = (\tau, x_1, x_2, x_3)^T$:

$$\tau + |x - a_j| = t_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad (2)$$

где $a_j = (a_{j1}, a_{j2}, a_{j3})^T$ – известные столбцы декартовых координат маяков, t_j – измеренные псевдодальности, τ – неизвестная псевдодальность, $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ – неизвестный столбец декартовых ко-

ординат потребителя. При этом $|x - a_j| = \sqrt{(x_1 - a_{j1})^2 + (x_2 - a_{j2})^2 + (x_3 - a_{j3})^2}$ – расстояние между потребителем и маяком с номером j и $X_0 = \tau$, $X_1 = x_1$, $X_2 = x_2$, $X_3 = x_3$.

Более обще, система (2) является одним функциональным уравнением $F(X) = t$, где X – неизвестная точка в n -мерном пространстве, t – известная точка в N -мерном пространстве, $N \geq n$.

Фиксировать $n = 3$ нежелательно, так как в рассуждениях используются размерности $n = 2$ и $n = 1$.

Объектом математического исследования ниже становится матрица Якоби $J = \partial F / \partial X$ для F :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & e_1^T \\ \vdots & \vdots \\ 1 & e_N^T \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $e_j = (x - a_j) / |x - a_j|$ – n -мерный орт (столбец с единичным модулем), противоположный направлению от потребителя на маяк с номером j . Для краткости будем употреблять операции присоединения матриц: `augment` – справа, `stack` – снизу. Например, в (3) $J = \text{augment}(\bar{1}, A)$, где $\bar{1} = (1, \dots, 1)^T$, $A = \text{stack}(e_1^T, \dots, e_N^T)$.

Отображение F является непрерывно дифференцируемым всюду, кроме точек, соответствующих a_j . Поэтому в точке X , найденной из (2) методом наименьших квадратов, имеем $J \cdot dX = dt$, где дифференциалы $dt = (dt_1, \dots, dt_N)^T$, $dX = (d\tau, dx_1, \dots, dx_n)^T$ в классической теории измерений, восходящей к Гауссу, принято трактовать как ошибки измеряемых и искомых величин соответственно. При стандартном предположении о несмещенности, равноточности и попарной некоррелированности измерений dt_j метод наименьших квадратов [1–8; 9. С. 241] приводит к системе n зависимостей $\sigma_i = K_i \cdot \sigma_t$, где σ_t – среднеквадратическая ошибка (СКО) каждого отдельного измерения t_j , $j = 1, \dots, N$, σ_i – СКО для искомой величины с номером $i = 0, \dots, n$, K_i – безразмерный коэффициент чувствительности измерительной системы (2) для искомой величины с номером i . Квадраты коэффициентов $\sigma_i = K_i \sigma_t$ размещаются на главной диагонали матрицы

$$(J^T J)^{-1} = \begin{pmatrix} K_0^2 & * & \dots & * \\ * & K_1^2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & K_n^2 \end{pmatrix}.$$

С акцентом на GNSS (Global Navigation Satellite System)

$$K_\tau = K_0, \quad K_x = \sqrt{K_1^2 + \dots + K_n^2}, \quad K = \sqrt{K_\tau^2 + K_x^2}.$$

В стандартной терминологии для коэффициентов чувствительности измерительной системы GNSS [2–9], которые называются здесь геометрическими факторами, используются аббревиатуры

$$K_\tau = \text{TDOP (Time Dilution of Precision)},$$

$$K_x = \sqrt{K_1^2 + K_2^2 + K_3^2} = \text{PDOP (Position Dilution of Precision)},$$

$$K = \sqrt{K_\tau^2 + K_x^2} = \sqrt{\text{TDOP}^2 + \text{PDOP}^2} = \text{GDOP (Geometric Dilution of Precision)}.$$

Абсолютная минимизация TDOP выполнена в работе [3]. Целью настоящей работы является абсолютная минимизация PDOP, GDOP в неосвоенном случае нечетных N , а также разрешение особого случая $N = 5$. Поиску подлежат оптимальные конфигурации направлений e_j .

2. Предварительные результаты

Действительные матрицы размера $N \times n$, $N > n$ будем для простоты называть *вертикальными*. В работе [10] А.Н. Колмогоров поставил вопрос о существовании вертикальных матриц, которые в каноническом евклидовом смысле удовлетворяют трем требованиям:

1. Квадраты строк равны единице.
2. Квадраты столбцов равны.
3. Столбцы попарно ортогональны.

Положительный ответ на вопрос Колмогорова для всех натуральных пар $N > n$ дал А.И. Мальцев [11]. Более простое разрешение вопроса Колмогорова было затем получено в [9. С. 237–238]. Идея [9] позволила доказать теоремы 3, 4 в [3], которые можно свести в одну следующую формулировку.

Теорема 1 [3]. Коэффициенты PDOP, GDOP достигают своих наименьших значений

$$\min \text{PDOP}(N) = \sqrt{9/N}, \quad \min \text{GDOP}(N) = \sqrt{10/N}$$

одновременно и тогда и только тогда, когда матрица $A = \text{stack}(e_1^T, \dots, e_N^T)$ удовлетворяет трем приведенным требованиям и дополнительно требованию *уравновешенности*:

4. Сумма компонент каждого столбца матрицы равна нулю.

Как видим, в РДЗ первое требование выполняется автоматически. Совмещение всех четырех требований нетривиально.

Определение 1. Вертикальную матрицу, удовлетворяющую требованиям 1–4, назовем согласно [12] строящей матрицей, или *building matrix* (B -матрицей).

Теоремой 1 устанавливается взаимно-однозначное соответствие между B -матрицами и оптимальными (по критерию конъюнкции PDOP и GDOP) конфигурациями на единичной сфере потребителя-наблюдателя TDoA. В работе [3] было введено понятие *дуальных* B -матриц.

Определение 2. B -матрицы $P(N \times m)$, $Q(N \times k)$ дуальны, если $m + k = N - 1$ и столбцы матрицы P ортогональны всем столбцам матрицы Q .

Очевидно, что отношение дуальности в классе B -матриц симметрично.

Построение новых B -матриц опирается на две следующие леммы.

Лемма 1 [3]. Если $P(N \times n)$, $R(M \times n)$ – B -матрицы, то матрица

$$S((N + M) \times n) = \text{stack}(P, R)$$

также является B -матрицей.

Лемма 2 [3]. Для всякой B -матрицы размера $N \times m$, $m < N - 1$ может быть построена дуальная B -матрица.

3. Построение нетривиальных B -матриц $A(N \times 3)$ при $N > 5$

Пусть натуральные числа n , m , k подчиняются неравенству

$$n^2 + n - mk > 0. \quad (4)$$

Для таких натуральных троек предлагается следующий алгоритм.

Вход: Пара дуальных B -матриц $P((n + m + 1) \times n)$, $Q((n + m + 1) \times m)$ и B -матрица $C((n + k) \times n)$.

Выход: B -матрица $D(2n + m + 1 + k) \times (n + m)$.

Собираем искомую B -матрицу D согласно следующей блочной схеме:

$$D = \begin{pmatrix} \alpha P & \beta Q \\ C & \bar{0} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где α и β – неопределенные коэффициенты, а матрица $\bar{0}$ размерности $(n + k) \times m$ состоит из одних нулей. При любых α и β требования 3, 4 для D очевидно выполняются. Требование 1 означает

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

Для обеспечения требования 2 для B -матриц должно быть

$$\alpha^2 \frac{n + m + 1}{n} + \frac{n + k}{n} = \beta^2 \frac{n + m + 1}{m}.$$

Система двух последних линейных алгебраических уравнений относительно α^2 и β^2 даст

$$\alpha^2 = \frac{n^2 + n - mk}{(n+m+1)(n+m)}, \quad \beta^2 = \frac{m(m+2n+k+1)}{(n+m+1)(n+m)} > 0. \quad (6)$$

Таким образом, если (4) выполнено, то искомые α и β существуют, и матрица D – B -матрица.

Построение B -матрицы 7×3 . Положим на входе вышеприведенного алгоритма $n = 2, m = 1, k = 1$. Условие (4) выполняется. По размеру возьмем дуальные B -матрицы $P(4 \times 2), Q(4 \times 1)$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Возьмем также B -матрицу $C(3 \times 2)$ в виде правильного треугольника ортов (по строкам),

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

и предписанные вышеприведенным алгоритмом коэффициенты согласно (6):

$$\alpha = \frac{\sqrt{15}}{6}, \quad \beta = \frac{\sqrt{21}}{6}.$$

Тогда соответствующая согласно (5) матрица D размера (7×3) примет вид:

$$D = \begin{pmatrix} \alpha P & \beta Q \\ C & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{15}/6 & 0 & \sqrt{21}/6 \\ 0 & \sqrt{15}/6 & -\sqrt{21}/6 \\ -\sqrt{15}/6 & 0 & \sqrt{21}/6 \\ 0 & -\sqrt{15}/6 & -\sqrt{21}/6 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица D , изображенная в строках на рис. 1, а, даст образ оптимальной конфигурации 7 маяков (точки излома на рис. 1) на единичной сфере потребителя-наблюдателя.

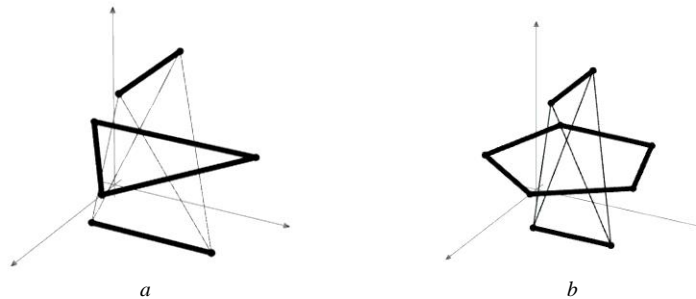


Рис. 1. Образцы оптимальных конфигураций $N = 7$ маяков (а), $N = 9$ маяков (б)
Fig. 1. Samples of optimal configurations for $N = 7$ beacons (а), $N = 9$ beacons (б)

Построение B -матрицы 9×3 . Положим на входе вышеприведенного алгоритма $n = 2, m = 1, k = 3$. Легко видеть, что условие (4) выполняется. Возьмем те же самые, что и при построении

B -матрицы 7×3 , дуальные B -матрицы $P(4 \times 2)$, $Q(4 \times 1)$, а в качестве матрицы C возьмем B -матрицу $C(5 \times 2)$ в виде правильного пятиугольника. Кроме того, возьмем согласно (6)

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда построенная согласно (5) матрица D размера (9×3) будет искомой (рис. 1, b).

$$D = \begin{pmatrix} \alpha P & \beta Q \\ C & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ \cos(2\pi/5) & \sin(2\pi/5) & 0 \\ \cos(4\pi/5) & \sin(4\pi/5) & 0 \\ \cos(6\pi/5) & \sin(6\pi/5) & 0 \\ \cos(8\pi/5) & \sin(8\pi/5) & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Основной результат

В дополнение к [3] получаем рис. 2, на котором по оси ординат откладывается размерность пространства. На этом рисунке темные клетки обозначают наличие B -матриц, т.е. достижение нижних границ (1) в радикалах. Левая граница – это правильные симплексы (в трехмерном случае правильный тетраэдр маяков). Кресты обозначают отсутствие соответствующих B -матриц [3], кружки – достижимость нижних границ (1) в плоском случае [1, 6] (это, например, B -матрицы в виде правильных многоугольников). Значок «**D**» обозначает дуальность к B -матрице (6×2) , что геометрически может быть представлено октаэдром [1, 3]. Квадратик – куб [1, 3]. Звездочки – последний результат, полученный в настоящей статье. Значки «**S**» – стеки уже обеспеченных B -матриц слева направо согласно лемме 1, ибо $10 = 4 + 6$, $11 = 4 + 7$, $12 = 4 + 8$ и т.д.

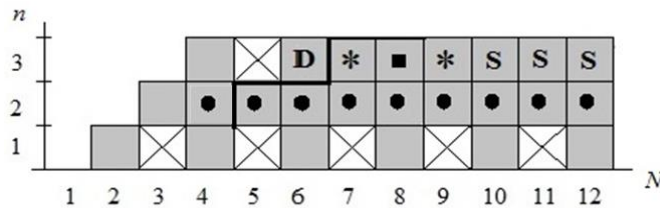


Рис. 2. Схема заполнения списка оптимальных конфигураций
Fig. 2. Scheme of filling out the list of optimal configurations

В итоге мы получаем искомое усиление теоремы 1 (см. верхний уровень при $n = 3$ на рис. 2):

Теорема 2. Коэффициенты PDOP, GDOP достигают своих наименьших значений

$$\min \text{PDOP}(N) = \sqrt{9/N}, \quad \min \text{GDOP}(N) = \sqrt{10/N}$$

при всех $N \neq 5$, $N \geq 4$ на общих для них конфигурациях, которые в строках являются B -матрицами.

При $N = 5$ будет

$$\min \text{PDOP}(N) > \sqrt{9/N}, \quad \min \text{GDOP}(N) > \sqrt{10/N}.$$

Осталось рассмотреть случай $N = 5$. В работе [5. Appendix C] весьма сложным путем доказыва-
ется, что

$$\sqrt{10/5} < \min \text{GDOP}(5). \tag{7}$$

В связи с этим уместно напомнить, что это неравенство было ранее доказано в работе [3] на основании дуальной леммы [3] методом от противного: если B -матрица (5×3) существует, то по дуальной лемме существует и B -матрица (5×1) , но последняя матрица не существует, так как сложением и вычитанием нечетного числа единиц нельзя получить ноль. Но раз не существует B -матрицы (5×3) , то согласно [3], т.е. на основании теоремы 1, имеет место строгое неравенство (7).

Итак, как показано в [3],

$$\sqrt{9/5} < \min \text{PDOP}(5), \quad \sqrt{10/5} < \min \text{GDOP}(5).$$

Возникает естественный вопрос: каковы же настоящие минимальные значения $\text{PDOP}(5)$, $\text{GDOP}(5)$ и каковы соответствующие конфигурации. В работе [5] утверждается, что $\min \text{GDOP}(5) = 1,428$ реализуется на конфигурации, которая на единичной сфере потребителя-наблюдателя образует правильную четырехугольную пирамиду. Наш компьютерный расчет также привел к правильной четырехугольной пирамиде для оптимальной конфигурации маяков на единичной сфере потребителя-наблюдателя. После этого производилась высокоточная одномерная минимизация функции

$$K(z) = \sqrt{\text{tr}((J(z)^T \cdot J(z))^{-1})},$$

где z – широта основания, $r(z) = \sqrt{1 - z^2}$ – радиус основания пирамиды и

$$J(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & r(z) & 0 & z \\ 1 & 0 & r(z) & z \\ 1 & -r(z) & 0 & z \\ 1 & 0 & -r(z) & z \end{pmatrix}.$$

В результате получилось $z = -0,3537$, и соответствующий минимум $\text{GDOP}(5) = 1,4247$, что заметно меньше оценки [5], которая также базировалась на правильной четырехугольной пирамиде. При $z = -0,3537$ получилось $\text{GDOP}(5) = 1,3509697$.

Аналогичный расчет для $\text{PDOP}(5)$ привел нас также к правильной четырехугольной пирамиде (близкой, но другой), доставляющей минимум $\text{PDOP}(5) = 1,350767$ при $z = -0,36675$.

Заключение

В статье рассмотрена задача оптимизации геометрии разностно-дальномерного метода в навигации и обнаружении: получены абсолютные нижние границы для геометрических факторов GDOP и PDOP при любом числе маяков / приемников в трехмерном пространстве. Кроме того, построены образцы оптимальных геометрических конфигураций маяков / приемников в неосвоенных до настоящего времени случаях при нечетном числе маяков / приемников. Таким образом, цель, означенная в постановке задачи, – абсолютная минимизация PDOP , GDOP во всех неосвоенных случаях в трехмерном пространстве – достигнута. Результат получен операциями с B -матрицами (building matrix). Представленная в статье методика позволяет сделать вывод о полезности B -матриц в математическом обеспечении специальных измерительных комплексов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lee H.B. Accuracy Limitations of Hyperbolic Multilateration Systems // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 1975. V. AES-114, No. 1. P. 16–29.
2. Yarlağadda R., Ali I., Al-Dhahir N., Hershey J. GPS GDOP metric // IEEE Proceedings Radar Sonar and Navigation. 2000. V. 147, No. 5. P. 259–264.
3. Барабанова Л.П. К минимизации геометрических факторов GNSS // Известия РАН. Теория и системы управления. 2010. № 2. С. 145–132.
4. Xue S., Yang Y. Positioning configurations with the lowest GDOP and their classification // J. Geodesy. 2015. V. 89, No. 1. P. 49–71.

5. Xue S., Yang Y. Understanding GDOP minimization in GNSS positioning: Infinite solutions, finite solutions and no solution // *Advances in Space Research*. 2017. V. 59, No. 3. P. 775–785.
6. Liu B., Teng Y., Huang Q. GDOP minimum in multi-GNSS positioning // *Advances in Space Research*. 2017. V. 60, No. 7. P. 1400–1403.
7. Han S., Gui Q., Li G., Du Y. Minimum of PDOP and its applications in inter-satellite links (ISL) establishment of Walker- δ constellation // *Advances in Space Research*. 2014. V. 54, No. 4. P. 726–733.
8. Swaszek P.F., Hartnett R.J., Seals K.C. Lower Bounds on DOP // *J. of Navigation*. 2017. V. 70, No. 5. P. 1041–1061.
9. Барабанов О.О., Барабанова Л.П. Математические задачи дальномерной навигации. М. : Физматлит, 2007. 272 с.
10. Колмогоров А.Н., Петров А.А., Смирнов Ю.М. Одна формула Гаусса из теории наименьших квадратов // *Известия АН СССР. Сер. математическая*. 1947. № 11. С. 561–566.
11. Мальцев А.И. Замечание к работе А.Н. Колмогорова, А.А. Петрова, Ю.М. Смирнова «Одна формула Гаусса из теории наименьших квадратов» // *Известия АН СССР. Сер. математическая*. 1947. № 11. С. 567–568.
12. Барабанов О.О., Барабанова Л.П. О строящих матрицах в теории метода наименьших квадратов // *Известия вузов. Математика*. 2019. № 4. С. 27–35.

Поступила в редакцию 9 января 2020 г.

Barabanova L.P. (2020) OPTIMIZATION OF GEOMETRY IN TDOA METHOD FOR NAVIGATION AND DETECTION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 52. pp. 43–51

DOI: 10.17223/19988605/52/5

Navigation problem. By the time of reception of the signal synchronously emitted by known sources (beacons), find the location of the receiver (consumer). This problem is basic for many modern navigation systems, including satellite systems GPS, GLONASS, Galileo, etc.

Detection problem. Find the location of the signal source by the time points of signal reception by the well-known synchronous receivers. This problem is basic for many detection systems, including seismic systems, distress detection systems, coordinate systems for identifying a mobile cellular user, tracking systems for a moving signal source, etc.

Since both of these problems are mathematically equivalent, for brevity, we will only deal with the navigation TDoA problem in three-dimensional space.

The lower bounds for the coefficients GDOP and PDOP, which are exact for number $3 < N \neq 5$ of beacons of TDoA system are presented.

Definition. A real matrix satisfying conditions:

- 1) the squares of rows equal 1,
- 2) the squares of columns equal each other,
- 3) the columns are pairwise orthogonal,
- 4) the sum of components of each column of matrix equals zero

is called building matrix or B -matrix.

The following statements are equivalent:

1. $\min \text{PDOP}(N) = \sqrt{9/N}$.
2. $\min \text{GDOP}(N) = \sqrt{10/N}$;
3. B -matrix $(N \times 3)$ exists.
4. Rows of the B -matrix $(N \times 3)$ define the optimal configuration, i.e minimum for $\text{PDOP}(N)$ and $\text{GDOP}(N)$.

Theorem. Geometric factors PDOP, GDOP reach their lowest values

$$\min \text{PDOP}(N) = \sqrt{9/N}, \quad \min \text{GDOP}(N) = \sqrt{10/N}$$

for all $3 < N \neq 5$, on configurations common to them, which in rows are B -matrices. We construct samples of real matrices $(N \times 3)$ with number $3 < N \neq 5$. It is proved that in case $(N \times 3)$ there are no B -matrices.

When $N = 5$ there are strict inequalities

$$\sqrt{9/5} < \min \text{PDOP}(5), \quad \sqrt{10/5} < \min \text{GDOP}(5).$$

The main tool is the duality of B -matrices.

Keywords: TDoA problem; geometric factors; minimization; B -matrices.

BARABANOVA *Lubov Petrovna* (Candidate of Physics and Mathematics, Professor, Kovrov State Technological Academy, Kovrov, Russian Federation).

E-mail: lpbarabanova@yandex.ru

REFERENCES

1. Lee, H.B. (1975) Accuracy Limitations of Hyperbolic Multilateration Systems. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*. AES-114(1). pp. 16–29. DOI: 10.1109/TAES.1975.308024
2. Yarlagadda, R., Ali, I., Al-Dhahir, N. & Hershey, J. (2000) GPS GDOP metric. *IEEE Proceedings Radar Sonar and Navigation*. 147(5). pp. 259–264.
3. Barabanova, L.P. (2010) On minimisation of GNSS geometric factors. *Journal of Comput. Syst. Sci. Int.* 49(2). pp. 310–317. DOI: 10.1134/S1064230710020164
4. Xue, S. & Yang, Y. (2015) Positioning configurations with the lowest GDOP and their classification. *Journal of Geodesy*. 89(1). pp. 49–71. DOI: 10.1007/s00190-014-0760-6
5. Xue, S. & Yang, Y. (2017) Understanding GDOP minimization in GNSS positioning: Infinite solutions, finite solutions and no solution. *Advances in Space Research*. 59(3). pp. 775–785. DOI: 10.1016/j.asr.2016.10.019
6. Liu, B., Teng, Y. & Huang, Q. (2017) GDOP minimum in multi-GNSS positioning. *Advances in Space Research*. 60(7). pp. 1400–1403. DOI: 10.1016/j.asr.2017.06.049
7. Han, S., Gui, Q., Li, G. & Du, Y. (2014) Minimum of PDOP and its applications in inter-satellite links (ISL) establishment of Walker- δ constellation. *Advances in Space Research*. 54(4). pp. 726–733. DOI: 10.1016/j.asr.2014.04.020
8. Swaszek, P.F., Hartnett, R.J. & Seals, K.C. (2017) Lower Bounds on DOP. *Journal of Navigation*. 70(5). pp. 1041–1061. DOI: 10.1017/S0373463317000248
9. Barabanov, O.O. & Barabanova, L.P. (2007) *Matematicheskie zadachi dal'nomernoy navigatsii* [Mathematical problems of long-distance navigation]. Moscow: Fizmatlit.
10. Kolmogorov, A.N., Petrov, A.A. & Smirnov, Yu. M. (1947) A formula of Gauss in the theory of the method of least squares. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 11(6). pp. 561–566.
11. Maltsev, A.I. (1947) A remark on the work of A. N. Kolmogorov, A. A. Petrov, and Yu. M. Smirnov, “A formula of Gauss in the theory of least squares”. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 11(6). pp. 567–568.
12. Barabanov, O.O. & Barabanova, L.P. (2019) On building matrices in the theory of least squares method. *Izvestiya vuzov. Matematika – Russian Mathematics*. 63(4). pp. 23–30. DOI: 10.3103/S1066369X19040030

УДК 519.854.2

DOI: 10.17223/19988605/52/6

R.V. Gindullin

HYBRID OPTIMIZATION APPROACH BASED ON GRAVITATIONAL ANALOGY AND PARTICLE SWARM FOR SOLVING SINGLE VEHICLE PICKUP AND DELIVERY PROBLEM

The Pickup and delivery problem (PDP) with single vehicle (SPDP) with capacity constraints is considered. The problem requires constructing the shortest cyclic route for delivery of homogeneous cargo (e.g. passengers) from all the producers to specific customers with one capacitated vehicle. A heuristic procedure, based on the gravitational analogy, for finding approximate solution is developed. A particle swarm optimization procedure is combined with the developed heuristics. Efficiency of developed procedures is empirically analyzed and compared with each other.

Keywords: vehicle routing; optimization; metaheuristics.

The truck dispatching problem is the first example of vehicle routing problems (VRP) [1]. Many modifications of the VRP were examined since then. Information about VRP research is accumulating in [2].

In this article, we consider one of the variants of VRP is called the pickup and delivery problem with single vehicle (SPDP). The problem requires constructing the shortest cyclic route for delivery of homogeneous cargo (e.g. passengers) from all the producers to specific customers with one capacitated vehicle. This problem is classified as NP-hard. The alternative names of SPDP are Pickup-Delivery Traveling Salesman Problem and Traveling Salesman Problem with Pickups and Deliveries [3].

SPDP without vehicle capacity constraint and cargo weights was solved with exact approach in [4]. Example with 15 nodes was solved with the combination of branch-and-cuts and greedy search algorithms.

Authors of [5] and [6] applied different approaches with perturbations in cycles to solve SPDP without vehicle capacity constraint and cargo weights. Approaches were used on a group of 108 examples from TSPLIB, including the example with 441 nodes.

Algorithms, based on real world analogies, were applied to various variants VRP. In particular, lightning inspired search algorithm (LISA) was proposed in [7]. In [8] it was adapted for the traveling salesman problem. Authors in [9] demonstrated the applicability of another method, called gravity-based algorithm for the multiple traveling salesmen problem.

1. Problem definition

Assume, that $P = \{1, \dots, n\}$ is a set of nodes of cargo pickups and $D = \{1 + n, \dots, 2n\}$ is a set of nodes of cargo deliveries. For the node i from P , the amount of cargo that needs to be picked up is equal q_i , while for the node $i + n$ from D the amount of cargo that needs to be delivered is equal to the negative amount $(-q_i)$. Set of all the nodes is denoted as $V = P \cup D \cup \{0\}$, where $\{0\}$ represents the depot. Distances between all pairs of nodes (c_{ij}) are known. A vehicle with the capacity S must visit all the nodes once and deliver cargo from the nodes i to the nodes $i + n$. A route must start and end in the depot. The goal of the problem is to find the shortest possible route. The problem is NP-hard, because if we assume $S = q_1 = \dots = q_n = 1$, then the problem is the equivalent of the asymmetric traveling salesman problem with $n + 1$ nodes.

Minimal allowed vehicle capacity is equal to $\max\{q_i\}$. Clearly, no route could be made if $S < \max\{q_i\}$. If $S = \max\{q_i\}$, there are at least $n!$ allowed routes, for example: $0 - 1 - (1 + n) - 2 - (2 + n) - \dots - n - 2n - 0$.

If vehicle capacity is unlimited, then the number of the allowed routes is equal $(2n)!/2n = (2n - 1)!$. Number of all permutations is equal $(2n)!$, and each allowed permutation leads to $2n$ permutations by switching places of nodes i and $i + n$ for all $i = 1, 2, \dots, n$.

With $S \geq \max\{q_i\}$ any allowed section of a route could be continued. For example, if the vehicle is empty and there are unvisited clients, then the vehicle can move to some node i to pick up its cargo. Availability of some cargo in the vehicle, means, that some node i is visited, but the cargo is not yet delivered to the node $i + n$ and, as a result, the vehicle can deliver this cargo to the node $i + n$.

Problem formalizations are listed in [10].

2. Heuristic, based on the gravitational analogy

The proposed heuristic procedure is based on the greed algorithm in which the choice of the next destination depends on both a distance between nodes and the cargo size of the corresponding node.

Values of p_i , $i = \overline{1, 2n}$, denoting weights, are assigned to the vehicle and every node. These values change during the procedure. Initially, all producer weights are positive, and all consumer weights are equal to zero. Weights are normalized to $[0, 1]$ range. Weight of the vehicle, p_0 , is equal to the average weight of the producers multiplied on previously defined coefficient R .

$$p_0 = \frac{R}{n} \sum_{i=1}^n p_i, \quad p_i = \frac{q_i}{q_{\max}}, \quad p_{i+n} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad q_{\max} = \max_{1 \leq i \leq n} q_i, \quad (1)$$

On every step of the procedure, the vehicle is experiencing the gravitational pull from nodes. F_{ji} denotes the force of the gravitational pull from the node i to the vehicle stationed in the node j . Vehicle moves to the node with the highest F_{ji} . After being visited by the vehicle, the weight of producer i , will become equal to 0 ($p_i = 0$), while the corresponding consumer will be assigned with the previous weight p_i ($p_{i+n} = p_i$). After being visited by the vehicle, the weight of consumer $i + n$ will become equal to 0 ($p_{i+n} = 0$).

Gravitational pull of a producer i , if the vehicle is placed in node j , is calculated as follows:

$$F_{ji} = \frac{p_0 p_i^s}{(c_{ji}^*)^t}, \quad i = \overline{1, n}, \quad c_{ji}^* = \frac{c_{ji}}{c_{\max}}, \quad c_{\max} = \max_{i,j} c_{ij}, \quad (2)$$

Gravitational pull of a consumer $i + n$, if the vehicle is placed in node j , is calculated as follows:

$$F_{j,i+n} = \frac{p_{i+n}^{s+1}}{(c_{j,i+n}^*)^t}, \quad i = \overline{1, n}, \quad c_{j,i+n}^* = \frac{c_{j,i+n}}{c_{\max}}, \quad c_{\max} = \max_{i,j} c_{ij}, \quad (3)$$

After visiting all the nodes, the vehicle returns to depot.

Values of s and t are selected before the start of the procedure.

Results of the heuristic will depend on the selected values of parameters R , s and t , that are assigned before the start of the procedure. Preliminary experiments demonstrated, that $[-2, 2]$ is an efficient range of values for the parameter s .

The procedure has the same weakness as all greed algorithms: the distance between the depot and the last visited consumer could be large and this will significantly decrease the quality of the solution. To mitigate this potential problem, it is proposed to construct paths both from the start and from the end (forward and reverse searches, accordingly) for the selected values of R , s and t .

The search procedure with the set values of R , s , t and search direction will take time $O(n^2)$.

The procedure allows to construct an initial path for such procedures as *2-opt*, *3-opt*, *4-opt*, etc. [5, 6].

The adjustment of values R , s , t and search direction could be performed by a simple enumeration procedure with set discretization within the selected ranges. The adoption of metaheuristics (genetic algorithm, particle swarm optimization is proposed, etc.) is also possible.

3. Hybrid approach

To show the efficiency of metaheuristics, compared to the enumeration approach, a variant of particle swarm optimization was adapted.

Function $f(R, s, t, d)$ denotes the result of the heuristic, based on the gravitational analogy. Parameter d denotes the search direction. If $d = -1$ then the forward search is used. If $d = 1$ then the reverse search is used.

N particles with different parameters R, s, t and d are generated. Each particle i will have its own value $f_i = f(R_i, s_i, t_i, d_i)$.

Between particles i and j the distance r_{ij} is calculated:

$$r_{ij} = r_{ji} = (R_i - R_j)^2 + (s_i - s_j)^2 + (t_i - t_j)^2 + (d_i - d_j)^2, \quad (4)$$

On every step k , particle i will change its position (R_i, s_i, t_i, d_i) . The particle with the lowest f_i will move slightly in a random direction. Other particles will move to the particle j which has $\max_{j \neq i, f_j^k > f_i^k} \left((f_i^k - f_j^k) e^{-\gamma r_{ij}^k} \right)$. Parameter γ is an input parameter which value is set before the procedure.

Coordinates of the particle i in step $k + 1$ after the move to the selected particle j will be calculated as follows:

$$R_i^{k+1} = R_i^k + (R_i^k - R_j^k) \cdot e^{-\gamma r_{ij}^k} + 1 \cdot \left(\text{rand} - \frac{1}{2} \right), \quad R_i^{k+1} \geq 0.01, \quad (5)$$

$$s_i^{k+1} = \left\lfloor s_i^k + (s_i^k - s_j^k) \cdot e^{-\gamma r_{ij}^k} + 2 \cdot \left(\text{rand} - \frac{1}{2} \right) \right\rfloor, \quad (6)$$

$$t_i^{k+1} = \left\lfloor t_i^k + (t_i^k - R_j^k) \cdot e^{-\gamma r_{ij}^k} + 2 \cdot \left(\text{rand} - \frac{1}{2} \right) \right\rfloor, \quad t_i^{k+1} \geq 1, \quad (7)$$

$$d_i^{k+1} = \begin{cases} -1, & \text{if } d_i^k + (d_i^k - d_j^k) \cdot e^{-\gamma r_{ij}^k} + 1 \cdot \left(\text{rand} - \frac{1}{2} \right) < 0 \\ +1, & \text{if } d_i^k + (d_i^k - d_j^k) \cdot e^{-\gamma r_{ij}^k} + 1 \cdot \left(\text{rand} - \frac{1}{2} \right) \geq 0 \end{cases}, \quad (8)$$

where rand is a randomly generated number from 0 to 1.

On each step k , the particle with the best solution is registered. The procedure is running until the chosen stopping rule is applied.

4. Computational experiments

To conduct numerical experiments, PC with Intel Core i5-4670 3.4GHz, 16Gb RAM and Windows 10 64bit was used. The hybrid procedure was realized in NetBeans IDE 8.1 (Java(TM) SE Runtime Environment 1.8.0_45-b14).

For comparative analysis of the models, standard library of symmetrical examples, TSPLIB [11], was used.

Nodes coordinates are taken accordingly to data from an example library. Hereafter:

- for the examples with even number of nodes, the last node is removed;
- for the examples with odd number of nodes, all nodes are used;
- first node is depot;
- the first half of remaining nodes are producers (i), and the other half are consumers ($i + n$).

For each of the selected examples three types of problems were considered:

Type 1: cargo weights of the first half of the producers were equal 1, cargo weights of the second half of the producers were equal 2, i.e. $q_i = 1, q_{i+n} = -1$ ($i < n/2$), $q_i = 2, q_{i+n} = -2$ ($i \geq n/2$). Vehicle capacity S was equal to 2, 6 and 10.

Type 2: cargo weights were equal 1, 2, 3, 4 and 5 cyclically. Vehicle capacity S was equal to 5, 10, 15 and 20.

Type 3: cargo weights were equal i , i.e. $q_i = i, q_{i+n} = -i$. Vehicle capacity S was equal $3n$.

For each of the problem two methods were used: enumeration of the values R, s, t and search direction for the heuristic based on the gravitational analogy (HBGA) and hybrid approach.

HBGA was performed two times with different discretization. First run of the enumeration (HBGA-1) was performed looking at R from 0.01 to 20 with step 0.01, s from -2 to 2 with step 1, t from 1 to 20 with step 1, both forward and reverse searches. Second run of the enumeration (HBGA-2) was performed looking

at R from 0.1 to 20 with step 0.1, s from -2 to 2 with step 1, t from 1 to 20 with step 1, both forward and reverse searches.

In all experiments with the hybrid approach (HA), 20 steps were performed ($k_{max} = 20$). Number of particles N was equal 10, 20, 50, 100 and 200. Parameter γ was equal 1, 2 and 3. Hybrid procedure was performed once for each set of values N and γ .

Particles were generated as follows. Parameter R was taken equal to 0.01, 0.03, 0.09, 0.27, 0.81, 2.43, 7.29 and 21.87 cyclically. Parameter s was taken equal to -2 , -1 , 0 , 1 and 2 cyclically. Parameter t was taken equal to 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22 and 25 cyclically. Parameter d was taken equal to -1 and 1 cyclically.

The difference between path lengths in different approaches is shown in table 1. The length of the path that was found by HBGA-1 for a problem was taken for 100% and other approaches were compared to it.

Table 1

Comparison of path lengths between algorithms

Example	Type	S	HBGA-2	HA,	HA,	HA,	HA,	HA,	HA,	HA,	HA,	HA,	HA,	HA,	HA,	HA,	HA,	HA,	HA,	
				$N=10,$ $\gamma=1$	$N=10,$ $\gamma=2$	$N=10,$ $\gamma=3$	$N=20,$ $\gamma=1$	$N=20,$ $\gamma=2$	$N=20,$ $\gamma=3$	$N=50,$ $\gamma=1$	$N=50,$ $\gamma=2$	$N=50,$ $\gamma=3$	$N=100,$ $\gamma=1$	$N=100,$ $\gamma=2$	$N=100,$ $\gamma=3$	$N=200,$ $\gamma=1$	$N=200,$ $\gamma=2$	$N=200,$ $\gamma=3$		
rat99	1	4	0,0%	0,0%	-0,1%	1,6%	0,5%	-0,1%	0,0%	0,0%	0,0%	-0,1%	0,7%	0,6%	-0,1%	-0,1%	0,0%			
		6	1,2%	1,8%	0,3%	3,2%	1,8%	1,2%	0,0%	1,3%	1,3%	1,1%	0,3%	1,3%	0,1%	1,1%	1,2%	1,2%		
		10	0,2%	0,2%	1,3%	0,2%	0,2%	0,0%	0,2%	-0,6%	0,2%	0,2%	0,2%	0,2%	0,2%	-0,5%	-0,5%	-0,5%		
	2	5	0,0%	0,8%	1,0%	1,0%	0,8%	0,8%	0,8%	0,8%	0,3%	0,8%	0,0%	0,8%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
		10	0,0%	0,0%	1,5%	0,1%	0,4%	0,0%	1,2%	0,6%	0,4%	0,4%	0,1%	0,0%	0,4%	0,1%	0,3%	0,3%		
		15	0,0%	0,1%	1,6%	1,6%	0,0%	0,1%	0,0%	0,7%	0,0%	0,1%	0,0%	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
	3	3*n	0,6%	0,9%	5,8%	0,6%	3,3%	0,6%	2,5%	0,6%	0,6%	1,3%	0,0%	0,6%	0,0%	0,6%	0,6%	1,0%		
		4	0,0%	0,1%	0,4%	0,1%	0,0%	0,0%	0,1%	0,0%	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
		6	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
gr137	1	4	0,0%	0,1%	0,4%	0,1%	0,0%	0,0%	0,1%	0,0%	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
		6	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
		10	0,0%	3,0%	1,4%	2,5%	2,5%	3,0%	0,7%	0,7%	0,4%	1,4%	0,5%	0,6%	0,0%	0,6%	0,6%	0,0%	0,0%	
	2	5	0,0%	0,2%	0,3%	0,2%	0,0%	-0,1%	0,0%	-0,3%	0,0%	-0,3%	-0,1%	0,0%	0,0%	-0,3%	-0,3%	-0,3%		
		10	0,0%	1,2%	0,4%	0,0%	0,0%	0,4%	0,2%	0,0%	1,2%	0,2%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
		15	0,2%	0,2%	0,3%	0,7%	-0,7%	-0,7%	0,2%	-0,7%	0,2%	-0,7%	0,2%	-0,7%	-0,7%	-0,7%	-0,7%	-0,7%	-0,7%	-0,7%
	3	3*n	0,3%	2,9%	2,1%	0,7%	0,3%	0,3%	0,3%	1,1%	1,1%	0,3%	0,3%	0,3%	0,3%	0,3%	0,3%	0,3%	0,3%	0,3%
		4	0,0%	0,1%	0,7%	0,6%	0,2%	0,3%	0,4%	0,1%	0,1%	-0,1%	0,4%	0,2%	0,2%	0,2%	0,1%	0,1%	0,1%	0,1%
		6	0,0%	1,0%	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
gr229	1	4	0,0%	1,8%	1,8%	2,0%	2,5%	0,8%	0,8%	0,0%	2,0%	1,0%	0,9%	0,0%	0,0%	0,1%	0,1%	0,0%	0,0%	
		6	0,0%	1,0%	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
		10	0,0%	1,8%	1,8%	2,0%	2,5%	0,8%	0,8%	0,0%	2,0%	1,0%	0,9%	0,0%	0,0%	0,1%	0,1%	0,0%	0,0%	
	2	5	0,0%	0,8%	0,4%	4,5%	0,7%	0,0%	0,4%	0,7%	0,6%	0,0%	0,0%	0,4%	0,0%	0,4%	0,0%	0,4%	0,0%	0,4%
		10	0,0%	1,9%	2,1%	2,2%	1,5%	1,5%	1,9%	0,3%	1,4%	1,5%	1,0%	0,8%	1,4%	0,8%	1,1%	0,6%	0,6%	
		15	0,0%	0,2%	0,2%	0,2%	0,0%	0,0%	0,0%	0,1%	0,0%	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	
	3	3*n	0,0%	4,2%	4,1%	4,2%	4,1%	4,1%	4,2%	2,7%	0,0%	3,7%	3,7%	2,6%	3,7%	3,7%	0,1%	2,7%	2,7%	
		4	0,0%	0,2%	1,0%	0,2%	0,1%	0,9%	0,0%	0,2%	0,2%	0,0%	0,2%	0,2%	0,0%	0,2%	0,0%	0,0%	0,0%	
		6	0,7%	3,2%	1,3%	1,0%	2,9%	3,4%	2,9%	-0,8%	-0,8%	2,1%	1,3%	-0,8%	-0,6%	-0,8%	-0,8%	-0,8%	-0,8%	
rd400	1	4	0,0%	3,4%	2,2%	0,9%	2,2%	2,6%	0,7%	1,5%	-0,2%	0,9%	1,5%	0,7%	0,7%	-0,2%	0,7%	-0,2%	0,0%	
		6	0,7%	3,2%	1,3%	1,0%	2,9%	3,4%	2,9%	-0,8%	-0,8%	2,1%	1,3%	-0,8%	-0,6%	-0,8%	-0,8%	-0,8%	-0,8%	
		10	0,0%	3,4%	2,2%	0,9%	2,2%	2,6%	0,7%	1,5%	-0,2%	0,9%	1,5%	0,7%	0,7%	-0,2%	0,7%	-0,2%	0,0%	
	2	5	0,0%	3,2%	3,2%	3,2%	3,2%	4,6%	4,8%	3,1%	3,1%	3,2%	3,2%	3,1%	3,1%	2,4%	2,4%	3,1%	3,1%	
		10	2,9%	7,4%	7,4%	7,0%	6,4%	6,4%	6,4%	6,3%	6,4%	3,1%	5,6%	4,9%	5,1%	3,9%	3,1%	6,2%	6,2%	
		15	0,7%	3,9%	5,1%	5,0%	2,8%	3,6%	2,8%	2,7%	2,5%	2,3%	1,6%	1,9%	2,0%	2,1%	0,9%	2,1%	2,1%	
	3	3*n	0,0%	4,4%	5,0%	4,5%	4,4%	4,8%	4,1%	4,9%	5,3%	4,1%	4,1%	3,1%	4,1%	2,7%	3,4%	1,6%	1,6%	
		4	0,0%	3,1%	3,1%	4,8%	4,0%	3,6%	4,2%	0,3%	1,9%	2,8%	2,5%	2,8%	0,9%	0,0%	0,6%	0,1%	0,1%	
		10	0,0%	2,1%	4,2%	2,5%	1,3%	3,8%	0,0%	1,6%	-1,1%	0,8%	0,2%	-0,7%	0,8%	-0,7%	-0,8%	-2,0%	-2,0%	
pa561	1	4	0,9%	1,5%	2,1%	2,1%	1,6%	2,5%	1,7%	1,0%	1,2%	1,2%	1,7%	0,6%	1,2%	0,0%	0,7%	0,7%	0,7%	
		6	0,0%	3,1%	3,1%	4,8%	4,0%	3,6%	4,2%	0,3%	1,9%	2,8%	2,5%	2,8%	0,9%	0,0%	0,6%	0,1%	0,1%	
		10	0,0%	2,1%	4,2%	2,5%	1,3%	3,8%	0,0%	1,6%	-1,1%	0,8%	0,2%	-0,7%	0,8%	-0,7%	-0,8%	-2,0%	-2,0%	
	2	5	0,0%	1,8%	0,7%	3,0%	2,4%	3,3%	1,4%	1,1%	0,8%	0,4%	0,3%	0,5%	0,3%	0,3%	0,5%	0,5%	0,5%	
		10	0,0%	5,3%	6,2%	6,6%	1,3%	3,2%	0,9%	2,1%	0,9%	1,3%	3,3%	0,4%	1,4%	0,7%	0,4%	0,1%	0,1%	
		15	0,0%	-0,4%	1,4%	2,8%	2,0%	1,2%	1,2%	1,2%	1,2%	0,0%	0,5%	0,1%	1,0%	0,0%	0,1%	0,4%	0,4%	
	3	3*n	0,0%	3,0%	3,0%	2,8%	3,1%	3,6%	3,8%	2,5%	0,2%	2,7%	3,0%	2,5%	0,2%	0,2%	2,5%	1,8%	1,8%	
		4	0,0%	3,1%	3,1%	4,8%	4,0%	3,6%	4,2%	0,3%	1,9%	2,8%	2,5%	2,8%	0,9%	0,0%	0,6%	0,1%	0,1%	
		10	0,0%	2,1%	4,2%	2,5%	1,3%	3,8%	0,0%	1,6%	-1,1%	0,8%	0,2%	-0,7%	0,8%	-0,7%	-0,8%	-2,0%	-2,0%	

In most examples, HBGA-2 showed same result as HBGA-1. In 30% of examples HBGA-2 showed result worse, than HBGA-1, up to +5% compared to the initial length.

The quality of the solutions in hybrid approaches heavily depends on the number of particles N and almost unaffected by γ . Parameter $\gamma = 3$, on average, gave slightly better results than $\gamma = 1$ and $\gamma = 2$, but the difference is too small to make a conclusive statement.

For $N = 10$, an average solution was +2% longer than HBGA-1. For $N = 50$, an average solution was +1% longer than HBGA-1. For $N = 200$, an average solution was +0.5% longer than HBGA-1. It is worth noting, that, for $N = 200$, in 12–15% examples hybrid approach resulted with the path length shorter than the path length of HBGA-1.

Comparison of the calculation time is shown in table 2. Since there was no significant difference between results for various values of γ for HA, only $\gamma = 1$ is presented in the table 2.

Table 2

Comparison of computational time between algorithms

Example	Type	S	HBGA-1	HBGA-2	HA, N = 10, $\gamma = 1$	HA, N = 20, $\gamma = 1$	HA, N = 50, $\gamma = 1$	HA, N = 100, $\gamma = 1$	HA, N = 200, $\gamma = 1$
rat99	1	4	21,92	2,76	0,03	0,06	0,15	0,30	0,65
		6	22,29	3,07	0,03	0,07	0,16	0,33	1,20
		10	23,58	3,12	0,04	0,09	0,21	0,53	0,90
	2	5	21,95	2,66	0,05	0,08	0,27	0,43	0,82
		10	23,44	2,96	0,03	0,06	0,17	0,45	0,78
		15	23,95	2,96	0,03	0,07	0,17	0,59	0,88
		20	24,27	2,93	0,04	0,12	0,29	0,58	0,81
3	$3*n$	23,09	2,96	0,03	0,06	0,17	0,34	0,95	
gr137	1	4	41,78	5,41	0,13	0,19	0,29	0,75	1,58
		6	43,11	6,43	0,06	0,16	0,39	0,76	1,42
		10	44,65	6,86	0,06	0,12	0,37	0,62	1,30
	2	5	40,64	5,44	0,06	0,11	0,29	0,62	1,17
		10	43,33	6,14	0,06	0,12	0,30	0,64	1,24
		15	44,54	6,48	0,06	0,13	0,30	0,60	1,26
		20	44,19	6,24	0,06	0,14	0,30	0,61	1,25
3	$3*n$	43,20	6,33	0,06	0,12	0,29	0,61	1,26	
gr229	1	4	117,66	17,23	0,17	0,34	0,93	1,85	3,53
		6	116,77	16,93	0,16	0,32	0,81	1,73	3,34
		10	116,90	15,92	0,16	0,32	0,96	1,82	3,76
	2	5	108,85	15,28	0,17	0,32	0,79	1,60	3,47
		10	111,82	16,35	0,17	0,31	0,85	1,69	3,81
		15	117,01	15,66	0,19	0,36	0,93	1,82	3,67
		20	125,66	17,39	0,18	0,34	0,85	1,78	3,77
3	$3*n$	125,86	16,82	0,19	0,45	0,93	1,89	3,65	
rd400	1	4	367,59	51,98	0,61	1,05	2,67	6,23	13,93
		6	342,25	50,72	0,70	1,16	2,95	7,12	15,43
		10	380,01	51,32	0,50	1,04	2,87	5,77	10,47
	2	5	395,55	51,90	0,45	0,96	2,73	5,35	10,54
		10	343,70	45,34	0,47	1,08	2,56	5,08	14,50
		15	351,94	44,01	0,56	1,29	2,80	7,79	12,97
		20	352,15	67,50	0,43	0,84	2,12	4,37	12,49
3	$3*n$	348,30	63,12	0,54	1,28	3,02	6,23	11,41	
pa561	1	4	735,16	87,14	1,17	2,24	7,26	12,99	27,03
		6	742,46	96,85	1,19	2,25	6,08	12,79	25,13
		10	753,99	97,82	1,19	2,70	7,13	13,47	27,73
	2	5	790,23	97,92	1,09	2,54	6,18	14,63	32,16
		10	766,68	96,35	1,20	2,39	7,04	14,77	30,12
		15	719,73	115,84	1,21	2,88	8,38	13,55	30,92
		20	810,83	103,39	1,23	2,58	6,67	14,92	26,39
3	$3*n$	729,35	112,16	1,34	2,51	6,21	12,57	25,13	

Computational time of the hybrid approach changes linearly, depending on the number of particles N , and quadratically, depending on the number of nodes n . With the highest number of particles, $N = 200$, computational time of HA was 3–4 times lower than the computational time of HBGA-2 and 20–30 times lower than the computational time of HBGA-1.

Conclusion

The hybrid heuristic approach combining particle swarm optimization and the heuristic, based on the gravitational analogy, for the single vehicle pickup and delivery problem is proposed. The particle swarm optimization is used to estimate optimal parameters for the greed search, based on gravitational analogy. The proposed variant of greed search uses both distances and cargo weights to choose the next destination node.

A series of computational experiments was conducted to evaluate properties of the proposed procedure. Computational experiments showed that the hybrid approach is significantly faster than enumeration approach. Both the quality of the solution obtained by the hybrid approach and the computational time required for the approach depend solely on the number of particles used. The proposed approach gives shorter route lengths, than the approach of enumeration of parameters with low discretization, and is faster to perform. The enumeration of parameters with high discretization gives shorter paths in most cases, but the overall difference is not high enough to justify the performance costs, compared to the proposed hybrid approach.

The proposed hybrid approach could be used to find an initial solution for other algorithms (e.g., various variants of k -opt).

Source code for the proposed approach is available in [12].

REFERENCES

1. Danzig, G. & Ramser, J. (1959) The Truck Dispatching Problem. *Management Science*. 6(6). pp. 80–91. DOI: 10.1287/mnsc.6.1.80
2. NEO Research Group. (n.d.) *Vehicle Routing Problem*. [Online] Available from: <http://neo.lcc.uma.es/vrp/> (Accessed: 13th February 2018).
3. Parragh, S., Doerner, K. & Hartl, R. (2008) A survey on pickup and delivery problems. Part II: Transportations between customers and depot. *Journal fur Betriebswirtschaft*. 58. pp. 21–51.
4. Ruland, K.S. & Rodin, E.Y. (1997) The pickup and delivery problem: Faces and branch-and-cut algorithm. *Computers and Mathematics with Applications*. 33(12). pp. 1–13. DOI: 10.1016/S0898-1221(97)00090-4
5. Renaud, J., Boctor, F.F. & Ouenniche, J. (2000) A heuristic for the pickup and delivery traveling salesman problem. *Computers and Operations Research*. 27(9). pp. 905–916. DOI: 10.1016/S0305-0548(99)00066-0
6. Renaud, J., Boctor, F.F. & Laporte, G. (2002) Perturbation heuristics for the pickup and delivery traveling salesman problem. *Computers and Operations Research*. 29(9). pp. 1129–1141. DOI: 10.1016/S0305-0548(00)00109-X
7. Shareef, H., Ibrahim, A.A. & Mutlag, A. H. (2015) Lightning search algorithm. *Applied Soft Computing*. 36. pp. 315–333. DOI: 10.1016/j.asoc.2015.07.028
8. El Majdoui, M.A. & El Imrani, A.A. (2015) Lightning inspired search algorithm: Introduction & application to the traveling salesman problem. *10th Int. Conf. on Intelligent Systems: Theories and Applications (SITA)*, Rabat. pp. 165–171. DOI: 10.1109/SITA.2015.7358401
9. Rostami, A.S., Mohanna, F., Keshavarz, H. & Hosseinabadi, A.A.R. (2015) Solving Multiple Traveling Salesman Problem using the Gravitational Emulation Local Search Algorithm. *Applied Mathematics & Information Sciences*. 2. pp. 699–709. DOI: 10.12785/amis/090218
10. Bronshtein, E.M., Gindullina, E.V. & Gindullin, R.V. (2017) Formalization of pickup and delivery problem. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Fizika*. 9(1). pp. 13–21. DOI: 10.14529/mmph170102
11. *MP-TESTDATA-The TSPLIB Symmetric Traveling Salesman Problem Instances*. [Online] Available from: <http://elib.zib.de/pub/mp-testdata/tsp/tsplib/tsp/> (Accessed: 10th February 2019)
12. *PDP-Algorithms*. [Online] Available from: <https://github.com/RamizGindullin/PDP-Algorithms> (Accessed: 26th May 2020).

Received: September 10, 2019

Gindullin R.V. (2020) HYBRID OPTIMIZATION APPROACH BASED ON GRAVITATIONAL ANALOGY AND PARTICLE SWARM FOR SOLVING SINGLE VEHICLE PICKUP AND DELIVERY PROBLEM. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 52. pp. 52–58

DOI: 10.17223/19988605/52/6

Гиндуллин Р.В. ГИБРИДНЫЙ АЛГОРИТМ ОПТИМИЗАЦИИ, ОСНОВАННЫЙ НА ГРАВИТАЦИОННОЙ АНАЛОГИИ И АЛГОРИТМЕ РОЯ ЧАСТИЦ, ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ЗАБОРЕ И ДОСТАВКЕ ГРУЗА ОДНИМ ТРАНСПОРТНЫМ СРЕДСТВОМ. *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2019. № 52. С. 52–58

Рассмотрена задача о заборе и доставке груза одним транспортным средством (The Pickup and delivery problem with single vehicle, SPDP) ограниченной вместимости. Предложена эвристика, основанная на гравитационной аналогии. Данная эвристика является расширением жадного поиска, в ней выбор следующего пункта зависит от расстояния и веса грузов. Длина найденного пути зависит от заранее выбранных параметров R , s и t . Предварительные эксперименты показали, что для параметра s достаточно рассматривать целые значения между -2 и 2 . Процедура обладает недостатком, присущим всем жадным алгоритмам: расстояние между депо и последним посещенным пунктом может оказаться значительным, что приведет к ухудшению качества решения. Для сглаживания данной проблемы предложен вариант процедуры, в которой путь строится с конца при заданных R , s и t (прямой и обратный поиски). Процедура поиска при заданных параметрах занимает время $O(n^2)$.

Разработан гибридный подход, который объединяет метод роя частиц с предложенной эвристикой. На первом шаге генерируется N частиц с различными значениями параметров R , s , t and d (обозначает направление поиска). На каждом последующем шаге они изменяют значения параметров в зависимости от длин путей, которые получаются при применении значений параметров частицы и ее соседей к эвристике, основанной на гравитационной аналогии. Процедура продолжается, пока не будет выполнено правило останова.

Результаты вычислительных экспериментов показали, что качество решений, получаемых гибридным подходом, зависит от количества частиц N . При $N = 200$ средняя длина пути оказалась на $+0,5\%$ длиннее пути, получаемого перебором значений параметров эвристики, основанной на гравитационной аналогии. В $12-15\%$ примеров гибридный подход дал меньшую длину пути, чем длина пути, получаемая перебором значений параметров эвристики, основанной на гравитационной аналогии.

При наибольшем количестве частиц, $N = 200$, затраты времени гибридного подхода ниже до 30 раз в сравнении с перебором значений параметров эвристики, основанной на гравитационной аналогии.

Ключевые слова: транспортная маршрутизация; оптимизация; метаэвристики.

GINDULLIN Ramiz Vilevich (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Bashkir State University, Ufa, Russian Federation).

E-mail: ramizgindullin@gmail.com

УДК 519.873

DOI: 10.17223/19988605/52/7

Э.А. Головастова

ВРЕМЯ РАБОТЫ СИСТЕМЫ СО ВЗАИМОЗАМЕНЯЕМЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ, ВЫХОДЯЩИМИ ИЗ СТРОЯ, И НЕНАДЕЖНЫМ ВОССТАНАВЛИВАЮЩИМ ПРИБОРОМ

Рассматривается модель с ненадежными компонентами: одним восстанавливающим прибором и несколькими взаимозаменяемыми элементами. Функции распределения времени работы прибора, времени восстановления прибора и элемента полагаются экспоненциальными с параметром, зависящим от состояния системы. Время работы элемента имеет произвольное распределение. В работе получены соотношения, определяющие распределение времени работы всей системы.

Ключевые слова: задача надежности; состояние системы; преобразование Лапласа; время безотказной работы системы.

По мере развития технических комплексов естественным образом возникла необходимость учитывать влияние разного рода отказов и сбоев их составляющих на эффективность работы всей системы. Данная проблема служит предметом изучения теории надежности. Определение нестационарных характеристик системы является одной из немаловажных задач в рамках этой теории. Разнообразие реальных функциональных систем обеспечивает довольно широкое распространение моделей, имеющих как рабочие компоненты, так и компоненты, отвечающие за восстановление последних. Известны публикации, где рассматривается система с несколькими одинаковыми элементами, когда в каждый момент времени работает только один элемент, а другие находятся в холодном резерве или восстанавливаются [1–8]. Зачастую в подобных моделях предполагается, что время восстановления отдельного элемента имеет экспоненциальное распределение, а время его работы – произвольное. Параметры системы не зависят от ее состояния. При таких условиях находится преобразование Лапласа–Стилтьеса времени безотказной работы системы [9–11]. Также многие исследования посвящены статистическим вопросам, связанным с оценкой надежности практически значимых моделей [7, 10, 11].

Мы рассмотрим случай, когда состояние системы влияет на работу и восстановление ее компонент, и получим результаты для системы с постоянными параметрами. В работе будет предложен метод решения подобной задачи, значительно упрощающий нахождение искомой характеристики: вместо введения многомерного марковского процесса, задающего состояние системы в произвольный момент времени, и попыток решения получающихся в результате уравнений в частных производных, мы рассмотрим двумерный марковский процесс, который в дальнейшем позволит получить систему линейных алгебраических уравнений для искомого неизвестных.

1. Постановка задачи и математическая модель

Ставится задача надежности следующего вида. В системе есть n рабочих элементов и один восстанавливающий прибор. В каждый момент времени работает только один элемент, который после поломки немедленно отправляется ремонтироваться в очередь на прибор, который тоже может выходить из строя. Вероятность восстановления элемента на приборе в интервале $(t, t + \Delta t)$ равна $\mu_i \Delta t + o(\Delta t)$, где i – число неисправных элементов на момент t . Элемент работает случайное время с функцией распределения $G_{i0}(x)$, если на момент начала его работы сломано i элементов и прибор исправен; $G_{i1}(x)$, если прибор неисправен и сломано i элементов. Прибор на интервале $(t, t + \Delta t)$

выходит из строя с вероятностью $\alpha_i \Delta t + o(\Delta t)$, восстанавливается с вероятностью $\beta_i \Delta t + o(\Delta t)$, где i – число неисправных элементов на момент t . Система прекращает свое функционирование, если сломаны все n элементов. Все описанные случайные величины полагаем взаимно независимыми. Цель работы – получение распределения времени работы системы в данной модели.

Рассмотрим время между двумя последовательными поломками элементов. Отметим, что в течение этого времени происходит либо восстановление, либо сохранение исходного числа неисправных элементов.

Введем на этом промежутке времени процесс $\{v(t), e(t)\}$, где $v(t)$ – число неработоспособных элементов в момент t ; $e(t) = 0$, если прибор работает, $e(t) = 1$, если прибор сломан. Обозначим переходные вероятности такого процесса следующим образом:

$$P_{j_0}^{i_0}(t) = P(v(t) = j, e(t) = 0 | v(0) = i, e(0) = 0), \quad P_{j_1}^{i_0}(t) = P(v(t) = j, e(t) = 1 | v(0) = i, e(0) = 0),$$

$$P_{j_0}^{i_1}(t) = P(v(t) = j, e(t) = 0 | v(0) = i, e(0) = 1), \quad P_{j_1}^{i_1}(t) = P(v(t) = j, e(t) = 1 | v(0) = i, e(0) = 1).$$

Данный процесс является цепью Маркова на промежутке времени работы элемента, и он полностью описывает состояние системы в любой момент из этого промежутка. Отметим, что $j \leq i + 1$.

Уравнения для переходных вероятностей введенного процесса на промежутке времени между двумя последовательными поломками элементов имеют следующий вид для $j = i, 0 < i \leq n-1, e \in \overline{0,1}$:

$$\begin{aligned} P_{i_e}^{i_e}(0) &= 1, & P_{i_{1-e}}^{i_e}(0) &= 0, \\ P_{j_e}^{i_e}(0) &= 0, & P_{j_{1-e}}^{i_e}(0) &= 0 \quad 0 \leq j < n-1; \\ \frac{d P_{i_0}^{i_e}(t)}{dt} &= -(\alpha_i + \mu_i) P_{i_0}^{i_e}(t) + \beta_i P_{i_1}^{i_e}(t), \\ \frac{d P_{i_1}^{i_0}(t)}{dt} &= -\beta_i P_{i_1}^{i_e}(t) + \alpha_i P_{i_0}^{i_e}(t); \end{aligned} \quad (1)$$

для $0 < j < i$:

$$\begin{aligned} \frac{d P_{j_0}^{i_e}(t)}{dt} &= -(\alpha_j + \mu_j) P_{j_0}^{i_e}(t) + \beta_j P_{j_1}^{i_e}(t) + \mu_{j+1} P_{j+1_0}^{i_e}(t), \\ \frac{d P_{j_1}^{i_e}(t)}{dt} &= -\beta_j P_{j_1}^{i_e}(t) + \alpha_j P_{j_0}^{i_e}(t); \end{aligned} \quad (2)$$

для $j = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d P_{0_1}^{i_e}(t)}{dt} &= -\beta_0 P_{0_1}^{i_e}(t) + \alpha_0 P_{0_0}^{i_e}(t), \\ \frac{d P_{0_0}^{i_e}(t)}{dt} &= -\alpha_0 P_{0_0}^{i_e}(t) + \beta_0 P_{0_1}^{i_e}(t) + \mu_1 P_{1_0}^{i_e}(t); \end{aligned} \quad (3)$$

для $i = 0$:

$$\begin{aligned} P_{0_e}^{0_e}(0) &= 1, & P_{0_{1-e}}^{0_e}(0) &= 0, \\ \frac{d P_{0_0}^{0_e}(t)}{dt} &= -\alpha_0 P_{0_0}^{0_e}(t) + \beta_0 P_{0_1}^{0_e}(t), \\ \frac{d P_{0_1}^{0_e}(t)}{dt} &= -\beta_0 P_{0_1}^{0_e}(t) + \alpha_0 P_{0_0}^{0_e}(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Введем следующие обозначения: τ_i^0 – время до выхода из строя всей системы, если на момент начала работы элемента имеется i неработоспособных элементов и прибор исправен; τ_i^1 – время до выхода из строя всей системы, если на момент начала работы элемента имеется i неработоспособных элементов и прибор неисправен; η_i^0 – время работы элемента, заступающего первым, если на начало его работы имеется i неработоспособных элементов и прибор исправен; η_i^1 – время работы элемента, заступающего первым, если на начало его работы имеется i неработоспособных элементов и прибор неисправен.

Также введем обозначения для события, задающего состояние системы на конец рабочего периода элемента:

$$A_{j_0}^{i_0} = \{v(\eta_i^0) = j, e(\eta_i^0) = 0\}, \quad A_{j_0}^{i_1} = \{v(\eta_i^1) = j, e(\eta_i^1) = 0\},$$

$$A_{j_1}^{i_0} = \{v(\eta_i^0) = j, e(\eta_i^0) = 1\}, \quad A_{j_1}^{i_1} = \{v(\eta_i^1) = j, e(\eta_i^1) = 1\}.$$

Тогда имеем следующие соотношения времени безотказной работы системы для $i = n-1$:

$$\tau_{n-1}^0 = \eta_{n-1}^0 I(A_{n-10}^{n-10} + A_{n-11}^{n-10}) + \sum_{j=0}^{n-2} (\eta_{n-1}^0 + \tau_{j+1}^0) I(A_{j_0}^{n-10}) + \sum_{j=0}^{n-2} (\eta_{n-1}^0 + \tau_{j+1}^1) I(A_{j_1}^{n-10}),$$

$$\tau_{n-1}^1 = \eta_{n-1}^1 I(A_{n-10}^{n-11} + A_{n-11}^{n-11}) + \sum_{j=0}^{n-2} (\eta_{n-1}^1 + \tau_{j+1}^0) I(A_{j_0}^{n-11}) + \sum_{j=0}^{n-2} (\eta_{n-1}^1 + \tau_{j+1}^1) I(A_{j_1}^{n-11});$$

для $0 \leq i < n-1$:

$$\tau_i^0 = \sum_{j=0}^i (\eta_i^0 + \tau_{j+1}^0) I(A_{j_0}^{i_0}) + \sum_{j=0}^i (\eta_i^0 + \tau_{j+1}^1) I(A_{j_1}^{i_0}),$$

$$\tau_i^1 = \sum_{j=0}^i (\eta_i^1 + \tau_{j+1}^0) I(A_{j_0}^{i_1}) + \sum_{j=0}^i (\eta_i^1 + \tau_{j+1}^1) I(A_{j_1}^{i_1}),$$

где $I(A) = 1$, $I(\bar{A}) = 0$ – индикатор события A .

Найдем уравнения для преобразований Лапласа–Стилтьеса искомого. Пусть:

$$\phi_j^0(s) = E e^{-s\tau_j^0},$$

$$g_{n-1, n-1}^0(s) = \int_0^\infty e^{-st} (P_{n-10}^{n-10}(t) + P_{n-11}^{n-10}(t)) dG_{n-1,0}(t),$$

$$g_{j\tilde{e}}^{i\tilde{e}}(s) = \int_0^\infty e^{-st} P_{j\tilde{e}}^{i\tilde{e}}(t) dG_{i,e}(t), \quad j, i \in \overline{0, n-1}, \quad e, \tilde{e} \in \overline{0, 1}.$$

Тогда имеем следующие уравнения для $i = n-1$:

$$\phi_{n-1}^0(s) = g_{n-1, n-1}^0(s) + \sum_{j=0}^{n-2} \phi_{j+1}^0(s) g_{j_0}^{n-10}(s) + \sum_{j=0}^{n-2} \phi_{j+1}^1(s) g_{j_1}^{n-10}(s),$$

$$\phi_{n-1}^1(s) = g_{n-1, n-1}^1(s) + \sum_{j=0}^{n-2} \phi_{j+1}^0(s) g_{j_0}^{n-11}(s) + \sum_{j=0}^{n-2} \phi_{j+1}^1(s) g_{j_1}^{n-11}(s); \quad (5)$$

для $0 \leq i < n-1$:

$$\phi_i^0(s) = \sum_{j=0}^i \phi_{j+1}^0(s) g_{j_0}^{i_0}(s) + \phi_{j+1}^1(s) g_{j_0}^{i_1}(s), \quad \phi_i^1(s) = \sum_{j=0}^i \phi_{j+1}^0(s) g_{j_0}^{i_1}(s) + \phi_{j+1}^1(s) g_{j_1}^{i_1}(s). \quad (6)$$

Заметим, что события, задающие состояние системы на конец рабочего периода элемента, образуют полную систему несовместных событий. Поэтому можно преобразовать систему стохастических уравнений для случайных величин, определяющих время работы системы, и, взяв математическое ожидание от обеих частей этих преобразованных уравнений, получить для $i = n-1$:

$$T_{n-1}^0 = H_{n-1}^0 + \sum_{j=0}^{n-2} (T_{j+1}^0 P_{j_0}^{n-10} + T_{j+1}^1 P_{j_1}^{n-10}),$$

$$T_{n-1}^1 = H_{n-1}^1 + \sum_{j=0}^{n-2} (T_{j+1}^0 P_{j_0}^{n-11} + T_{j+1}^1 P_{j_1}^{n-11});$$

для $0 \leq i < n-1$:

$$T_i^0 = H_i^0 + \sum_{j=0}^i (T_{j+1}^0 P_{j_0}^{i_0} + T_{j+1}^1 P_{j_1}^{i_0}),$$

$$T_i^1 = H_i^1 + \sum_{j=0}^i (T_{j+1}^0 P_{j0}^{i1} + T_{j+1}^1 P_{j1}^{i1}),$$

где

$$T_j^e = E \tau_j^e, \quad H_j^e = E \eta_j^e, \quad P_{j\bar{e}}^{ie} = \int_0^\infty P_{j\bar{e}}^{ie}(t) dG_{ie}(t).$$

2. Применение метода к более простой модели

Рассмотрим постановку задачи, в которой параметры системы не зависят от числа сломанных элементов и состояния прибора, т.е. распределение времени восстановления элемента – экспоненциальное с параметром μ , распределение времени работы прибора – экспоненциальное с параметром α , распределение времени восстановления прибора – экспоненциальное с параметром β , функция распределения времени работы элемента – $G(x)$. Все описанные случайные величины полагаем взаимно независимыми. Число элементов – n , прибор один. Также предполагаем, что прибор не выходит из строя, когда он не работает.

Такая формулировка задачи является более простой по сравнению с представленной ранее, поэтому тут тоже рассмотрим время между двумя последовательными поломками элементов и введем процесс $\{v(t), e(t)\}$ на этом промежутке. В силу предположения

$$\begin{aligned} P_{01}^{ie}(t) &= 0, \quad i \in \overline{0, \dots, n-1}; \quad e \in \overline{0, 1}, \\ i &= 0, \quad P_{00}^{00}(t) = 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнения для переходных вероятностей введенного процесса имеют вид для $j=i, 0 < i \leq n-1, e \in \overline{0, 1}$:

$$\begin{aligned} P_{ie}^{i0}(0) &= 1, \quad P_{i1-e}^{i0}(0) = 0, \\ P_{je}^{ie}(0) &= 0, \quad P_{j1-e}^{ie}(0) = 0 \quad 0 \leq j < i, \\ \frac{d P_{i0}^{ie}(t)}{dt} &= -(\alpha + \mu)P_{i0}^{ie}(t) + \beta P_{i1}^{ie}(t), \\ \frac{d P_{i1}^{ie}(t)}{dt} &= -\beta P_{i1}^{ie}(t) + \alpha P_{i0}^{ie}(t); \end{aligned} \quad (8)$$

для $0 < j < i$:

$$\begin{aligned} \frac{d P_{j0}^{ie}(t)}{dt} &= -(\alpha + \mu)P_{j0}^{ie}(t) + \beta P_{j1}^{ie}(t) + \mu P_{j+10}^{ie}(t), \\ \frac{d P_{j1}^{ie}(t)}{dt} &= -\beta P_{j1}^{ie}(t) + \alpha P_{j0}^{ie}(t); \end{aligned} \quad (9)$$

для $j=0$:

$$\frac{d P_{00}^{ie}(t)}{dt} = \mu P_{10}^{ie}(t). \quad (10)$$

Взяв преобразования Лапласа от обеих частей уравнений (8)–(10), получаем для $1 \leq i \leq n-1$:

$$\begin{aligned} P_{i0}^{i0*}(s) &= \frac{s + \beta}{s(s + \mu + \alpha + \beta) + \mu\beta} = P(s), \quad P_{i1}^{i0*}(s) = \frac{\alpha}{s(s + \mu + \alpha + \beta) + \mu\beta} = A(s), \\ P_{i0}^{i1*}(s) &= \frac{\beta}{s(s + \mu + \alpha + \beta) + \mu\beta} = Q(s), \quad P_{i0}^{i1*}(s) = \frac{s + \mu + \alpha}{s(s + \mu + \alpha + \beta) + \mu\beta} = B(s); \end{aligned}$$

для $2 \leq k \leq i, i \geq 2$:

$$\begin{aligned} P_{i+1-k,0}^{i,0*}(s) &= (P(s))^k \mu^{k-1}, & P_{i+1-k,1}^{i,0*}(s) &= (P(s))^k \mu^{k-1} \frac{\alpha}{s+\beta}, \\ P_{i+1-k,0}^{i,1*}(s) &= (P(s)\mu)^{k-1} Q(s), & P_{i+1-k,1}^{i,1*}(s) &= \frac{\alpha}{s+\beta} (P(s)\mu)^{k-1} Q(s), \\ P_{00}^{i,0*}(s) &= \frac{\mu^i}{s} (P(s))^i, & P_{00}^{i,1*}(s) &= \frac{\mu}{s} (\mu P(s))^{i-1} Q(s). \end{aligned}$$

В данной постановке задачи уравнения для преобразований Лапласа–Стилтьеса искомого будут иметь вид для $i = n-1$:

$$\begin{aligned} \Phi_{n-1}^0(s) &= g_{n-1,n-1}^0(s) + \sum_{j=0}^{n-2} \Phi_{j+1}^0(s) g_{j0}^{n-10}(s) + \sum_{j=1}^{n-2} \Phi_{j+1}^1(s) g_{j1}^{n-10}(s), \\ \Phi_{n-1}^1(s) &= g_{n-1,n-1}^1(s) + \sum_{j=0}^{n-2} \Phi_{j+1}^0(s) g_{j0}^{n-11}(s) + \sum_{j=1}^{n-2} \Phi_{j+1}^1(s) g_{j1}^{n-11}(s); \end{aligned} \quad (11)$$

для $0 < i < n-1$:

$$\begin{aligned} \Phi_i^0(s) &= \sum_{j=0}^i \Phi_{j+1}^0(s) g_{j0}^{i0}(s) + \sum_{j=1}^i \Phi_{j+1}^1(s) g_{j0}^{i1}(s), \\ \Phi_i^1(s) &= \sum_{j=0}^i \Phi_{j+1}^0(s) g_{j0}^{i1}(s) + \sum_{j=1}^i \Phi_{j+1}^1(s) g_{j1}^{i1}(s); \end{aligned} \quad (12)$$

для $i = 0$:

$$\Phi_0^0(s) = \Phi_1^0(s) \int_0^\infty e^{-st} P_{00}^{00}(t) dG(t). \quad (13)$$

Рассмотрим случай $n = 2$ для последней системы. Решая дифференциальные уравнения для переходных вероятностей (7)–(10), получаем:

$$\begin{aligned} P_{00}^{00}(t) &= 1, & P_{00}^{10}(t) &= 1 - P_{10}^{10}(t) - P_{11}^{10}(t), & P_{00}^{11}(t) &= 1 - P_{10}^{11}(t) - P_{11}^{11}(t), \\ P_{10}^{10}(t) &= (r_1 - r_2)^{-1} ((\beta + r_1)e^{r_1 t} - (\beta + r_2)e^{r_2 t}), & P_{11}^{10}(t) &= \alpha(r_1 - r_2)^{-1} (e^{r_1 t} - e^{r_2 t}), \\ P_{10}^{11}(t) &= (r_1 - r_2)^{-1} ((\mu + \alpha + r_1)e^{r_1 t} - (\mu + \alpha + r_2)e^{r_2 t}), & P_{11}^{11}(t) &= \beta(r_1 - r_2)^{-1} (e^{r_1 t} - e^{r_2 t}), \end{aligned}$$

где

$$r_i = -\frac{\alpha + \beta + \mu}{2} (1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\beta\mu}{(\alpha + \beta + \mu)^2}}), \quad i = \overline{1, 2}.$$

Заметим, что $r_1 < 0, r_2 < 0$. Тогда из уравнений (11)–(13) для преобразований Лапласа–Стилтьеса времени работы системы имеем следующие выражения:

$$\begin{aligned} \Phi_1^0(s) &= \frac{(\alpha + \beta + r_1)g(s - r_1) - (\alpha + \beta + r_2)g(s - r_2)}{(r_1 - r_2)(1 - g(s)) + (\alpha + \beta + r_1)g(s - r_1) - (\alpha + \beta + r_2)g(s - r_2)}, \\ \Phi_1^1(s) &= \frac{1}{r_1 - r_2} ((\mu + \alpha + \beta + r_1)g(s - r_1) - (\mu + \alpha + \beta + r_2)g(s - r_2) + \\ &+ ((r_1 - r_2)g(s) + (\mu + \alpha + \beta + r_1)g(s - r_1) - (\mu + \alpha + \beta + r_2)g(s - r_2))\Phi_1^0(s)), \\ \Phi_0^0(s) &= g(s)\Phi_1^0(s), \end{aligned}$$

где $g(s) = \int_0^\infty e^{-st} dG(t)$.

Заключение

В работе получены соотношения для преобразований Лапласа–Стилтьеса от функции распределения времени работы системы. Они имеют вид системы линейных алгебраических уравнений (5)–(6),

в которой искомые неизвестные, множители и свободные переменные являются функциями. Причем как коэффициенты, так и свободные члены в этой системе вычисляются с помощью вероятностей событий, задающих состояние системы в конце рабочего периода элемента, потому являются известными. Эти вероятности находятся из системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1)–(4). Для систем линейных алгебраических уравнений известны алгоритмы, по которым можно найти их точное решение, а также имеется программное обеспечение, реализующее эти алгоритмы. Для небольшого числа рабочих элементов можно выписать явные выражения для ответа в поставленной задаче, что было представлено в качестве примера в данной работе.

Благодарность. Автор выражает благодарность доктору физико-математических наук Л.Г. Афанасьевой, профессору кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, за помощь в подготовке материала и ценные замечания в процессе оформления данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьёв А.Д. Математические методы в теории надежности. М. : Наука, 1965. 524 с.
2. Гнеденко Б.В., Наср Ю. О ненагруженном резервировании с восстановлением // Автоматика и телемеханика. 1968. № 7. С. 105–111.
3. Соловьёв А.Д. О резервировании без восстановления // Энергия. Кибернетика – на службу коммунизму. 1964. Т. 2. С. 83–121.
4. Козлов Б.А. Резервирование с восстановлением. М. : Сов. радио, 1969. 150 с.
5. Димитров Б. О числе отказов системы из n нагруженных элементов // Известия математического института АН Болгарии. 1970. Т. 12. С. 205–210.
6. Jain M., Maheshwari S. Analysis of non-stationary mode of redundant system with additional repair device // Amer. J. Math and Manag. Sci. 2003. V. 23, No. 3-4. P. 347–382.
7. Hsu Yunq-Lin, Ke Jau-Chuan, Lin Tzu-Hsin. Redundant systems with general form recovery, delay in restart, failure of switching's and unreliable repair device // Statistical point of view. Math. and Comput. Simul. 2011. V. 81, No. 11. P. 400–413.
8. Анищенко В.А., Мысло Е.Л., Иванова А.Н. Надежность дублированных технических систем с устройствами встроенного контроля // Энергетика. Известия высших учебных заведений и энергетических объединений СНГ. 2013. № 5. С. 5–10.
9. Golovastova E.A. The system operating time with two different unreliable servicing devices // arXiv.org. 2018. URL: <https://arxiv.org/abs/1811.12193> (accessed: 25.12.2019).
10. Азарсков В.Н., Джассим М.К., Стрельников В.П. Использование порядковой статистики в задачах оценки надежности резервированных систем // ММС. 2005. № 4. С. 152–156.
11. Анищенко В.А., Мысло Е.Л., Иванова А.Н. Анализ надежности резервированных систем автоматического контроля и управления производственными энергетическими процессами // Энергетика. Известия высших учебных заведений и энергетических объединений СНГ. 2014. № 6. С. 5–14.

Поступила в редакцию 20 января 2020 г.

Golovastova E.A. (2020) SYSTEM OPERATING TIME WITH UNRELIABLE INTERCHANGEABLE ELEMENTS AND PRECARIOUS RECOVERY DEVICE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science] 52. pp. 59–65

DOI: 10.17223/19988605/52/7

This paper deals with following reliability problem. We have a system with n unreliable elements and one recovery device, which also can be broken, in prepositions: the distributions of the working and repairing periods of recovery device and the distribution of the element repairing period is exponential with parameter, which depends on the system state. The distribution of the element working period is arbitrary and also depends on the system state. More precisely, these distributions of working or repairing periods depend on the number of broken elements and the recovery device state in the moment, when the corresponding period starts. All the described random variables are assumed to be mutually independent. The purpose is to find the system working time distribution.

We consider two-dimensional process $\{v(t), e(t)\}$ (where the first coordinate describes the quantity of broken elements, another one describes the device state) during the element working period. This process is a Markov chain on such time interval, and it exhaustively describes the system state at any moment from this interval. That's why we can write the system of Kolmogorov ordinary differential equations for the transition probability function of this process. Namely, it becomes possible to find the following probability function:

$$P_{j\tilde{e}}^i(t) = P(v(t) = j, e(t) = \tilde{e} | v(0) = i, e(0) = e), \quad 0 < i \leq n-1; j \leq i+1; e, \tilde{e} \in \overline{0,1}.$$

where argument t varies in the element working period. Then we establish the relations between the random variables, which determine the working time of the system, launched with different initial conditions. By taking the Laplace transform from both part of this expressions we get the system of linear algebraic equations for $i = n-1$:

$$\begin{aligned}\varphi_{n-1}^0(s) &= g_{n-1,n-1}^0(s) + \sum_{j=0}^{n-2} \varphi_{j+1}^0(s) g_{j0}^{n-10}(s) + \sum_{j=1}^{n-2} \varphi_{j+1}^1(s) g_{j1}^{n-10}(s), \\ \varphi_{n-1}^1(s) &= g_{n-1,n-1}^1(s) + \sum_{j=0}^{n-2} \varphi_{j+1}^0(s) g_{j0}^{n-11}(s) + \sum_{j=1}^{n-2} \varphi_{j+1}^1(s) g_{j1}^{n-11}(s);\end{aligned}$$

for $0 \leq i < n-1$:

$$\begin{aligned}\varphi_i^0(s) &= \sum_{j=0}^i \varphi_{j+1}^0(s) g_{j0}^{i0}(s) + \sum_{j=1}^i \varphi_{j+1}^1(s) g_{j0}^{i1}(s), \\ \varphi_i^1(s) &= \sum_{j=0}^i \varphi_{j+1}^0(s) g_{j0}^{i1}(s) + \sum_{j=1}^i \varphi_{j+1}^1(s) g_{j1}^{i1}(s),\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}\varphi_j^0(s) &= E e^{-s\tau_j^0}; \quad g_{n-1,n-1}^0(s) = \int_0^\infty e^{-st} (P_{n-10}^{n-10}(t) + P_{n-11}^{n-10}(t)) dG_{n-1,0}(t), \\ g_{j\tilde{e}}^{i\tilde{e}}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} P_{j\tilde{e}}^{i\tilde{e}}(t) dG_{i,\tilde{e}}(t), \quad j, i \in \overline{0, n-1}, \quad \tilde{e}, \tilde{e} \in \overline{0, 1}.\end{aligned}$$

We notice that here unknown variables are functions and coefficients and free terms are calculated from transition probability function.

Keywords: reliability problem; system state; Laplace transform; system failure time.

GOLOVASTOVA Eleonora Aleksandrovna (Post-graduate Student, Lomonosov Moscow State University, Russian Federation).

E-mail: golovastova.elina@yandex.ru

REFERENCES

1. Gnedenko, B.V., Belyaev, Yu.K. & Soloviev, A.D. (1965) *Matematicheskie metody v teorii nadezhnosti* [Mathematical methods in the theory of reliability]. Moscow: Nauka.
2. Gnedenko, B.V. & Nasr, Yu. (1968) On standby redundancy with recovering. *Automation and Remote Control*. 7. pp. 105–110.
3. Soloviev, A.D. (1964) O rezervirovanii bez vosstanovleniya [On redundancy without recovering]. *Energiya. Kibernetika – na sluzhbu kommunizmu*. 2. pp. 83–121.
4. Kozlov, B.A. (1969) *Rezervirovanie s vosstanovleniem* [On redundancy with recovering]. Moscow: Sovetskoe radio.
5. Dimitrov, B. (1970) O chisle otkazov sistemy iz n nagruzhennykh elementov [On a number of system failures of n loaded elements]. *Izvestiya matematicheskogo instituta AN Bolgarii*. 12. pp. 205–210.
6. Madhu, J. & Maheshwari, S. (2003) Analysis of non-stationary mode of redundant system with additional repair device. *Amer. Journal of Math and Manag. Sci.* 23(3–4). pp. 347–382.
7. Hsu Yunq-Lin, Ke Jau-Chuan & Lin Tzu-Hsin. (2011) Redundant systems with general form recovery, delay in restart, failure of switching's and unreliable repair device. Statistical point of view. *Math. and Comput. Simul.* 81(11). pp. 400–413.
8. Anishenko, V.A., Myslo, E.L. & Ivanova, A.N. (2013) Reliability of Dubbed Technical Systems with Built-In Control Device. *Energetika*. 5. pp. 5–10.
9. Golovastova, E.A. (n.d.) *The system operating time with two different unreliable servicing devices*. [Online] Available from: <https://arxiv.org/abs/1811.12193> (Accessed: 25th December 2019).
10. Azarskov, V.N., Jaseim Mohammed Kasmi & Strelnikov, V.P. (2005) Ispol'zovanie poryadkovoy statistiki v zadachakh otsenki nadezhnosti rezervirovannykh sistem [Use of order statistics in problems of reliability estimation of redundant system]. *MMS*. 4. pp. 52–156.
11. Anishenko, V.A., Myslo, E.L. & Ivanova, A.N. (2014) Analysis of reliability of reserved automatic control systems of industrial power processes. *Energetika*. 6. pp. 5–14.

УДК 519.872

DOI: 10.17223/19988605/52/8

Д.Я. Копать, М.А. Маталыцкий

АНАЛИЗ В НЕСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ G-СЕТИ С ОБХОДАМИ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЗАЯВКАМИ

Проведено исследование открытой экспоненциальной сети массового обслуживания (СеМО) с однолинейными системами массового обслуживания (СМО). СМО характеризуются наличием обходов, положительными заявками и возможностью поступления в них отрицательных заявок. В сеть поступает два независимых простейших потока заявок. Первый поток образуется из обычных (положительных) заявок, второй – из отрицательных заявок, поступление каждой из которых в систему уничтожает в ней ровно одну положительную заявку в очереди, если таковые в ней имеются. Отрицательные заявки не требуют обслуживания, обслуживание положительных заявок в системах сети осуществляется в соответствии с дисциплиной FIFO. Положительные заявки с зависящей от состояния узла вероятностью при направлении в нее присоединяются к очереди, а с дополнительной вероятностью мгновенно обходят ее и ведут себя в дальнейшем как обслуженные. Для решения системы разностно-дифференциальных уравнений (РДУ) для нестационарных вероятностей состояний сети, функционирующей в режиме насыщения, предложено использовать метод многомерных производящих функций.

Ключевые слова: G-сеть с обходами систем заявками, нестационарные вероятности состояний, многомерная производящая функция.

СеМО с положительными и отрицательными заявками были введены Э. Геленбе [1, 2]. Основное применение данной сети в качестве модели заключается в ее использовании при моделировании воздействия компьютерных вирусов на исполняемые программы, на сервер или локальный компьютер пользователя. В переходном режиме данная сеть была исследована в работе [3].

Экспоненциальная СеМО с обходами узлов заявками была введена в [4]. В этой работе показано, что такая модель включает возможность обхода систем за счет ограничений на количество заявок или на предполагаемое время ожидания. В ней найдены стационарные вероятности состояний сети в форме произведения. В переходном режиме сеть с обходами была исследована в работе [5]. Применение сети с обходами связано, например, с возможностью клиента, прибывшего в сервисный центр информационной сети, не присоединяться к очереди по тем или иным причинам, а перейти в другой сервисный центр.

В данной работе рассматривается открытая СеМО с отрицательными заявками и обходами узлов положительными заявками, которые учитывают первые две особенности, причем обход систем обслуживания осуществляется только положительными заявками. В стационарном режиме они были исследованы в работе [6]. Ниже для нахождения нестационарных вероятностей состояний сети предложено использовать метод многомерных производящих функций.

1. Система РДУ для вероятностей состояний

Рассмотрим открытую экспоненциальную СеМО с однотипными заявками, состоящую из n однолинейных СМО. Состояние сети в момент времени t описывается вектором размерности $n + 1$: $\vec{k} = \vec{k}(t) = (\vec{k}, t) = (k_1, k_2, \dots, k_n, t)$, который образует цепь Маркова с непрерывным временем и счетным числом состояний, где состояние (k_i, t) означает, что в момент времени t в i -й СМО находятся k_i положительных заявок, $i = \overline{1, n}$.

В i -ю систему из внешней среды поступает простейший поток положительных заявок с интенсивностью λ_{0i}^+ и простейший поток отрицательных заявок с интенсивностью λ_{0i}^- , $i = \overline{1, n}$. Все потоки заявок, которые поступают в сеть независимы. Длительности обслуживания положительных заявок в i -й СМО распределены по показательному закону с параметром μ_i , $i = \overline{1, n}$.

Положительная заявка, направленная в i -ю СМО извне или из другой системы, когда сеть находится в состоянии \vec{k} , с вероятностью $f^{(i)}(k_i)$ присоединяется к очереди, а с дополнительной вероятностью $1 - f^{(i)}(k_i)$ не присоединяется к очереди, считаясь мгновенно обслуженной (т.е. обходит СМО).

Положительная заявка, обслуженная в СМО S_i , с вероятностью p_{ij}^+ направляется в СМО S_j как положительная заявка, а с вероятностью p_{ij}^- – как отрицательная, и с вероятностью $p_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^n (p_{ij}^+ + p_{ij}^-)$ уходит из сети во внешнюю среду (в СМО S_0), $i, j = \overline{1, n}$.

Отрицательные заявки представляют собой особый тип заявок: они не обслуживаются и поступают непосредственно в СМО (для них $f^{(i)}(k_i) = 1$), где уменьшают длину очереди на единицу, если число заявок в системе больше нуля, и не производят никаких изменений, если в СМО нет заявок. После указанных операций отрицательные заявки исчезают и в дальнейшем не оказывают влияния на сеть.

Пусть $\phi_i(\vec{k})$ – условная вероятность того, что заявка, поступающая в i -ю СМО, когда сеть находится в состоянии \vec{k} , не будет обслужена ни одной из СМО и не изменит состояние сети; $\psi_{ij}(\vec{k})$ – условная вероятность того, что положительная заявка, поступающая в i -ю СМО, когда сеть находится в состоянии \vec{k} , впервые получит обслуживание в j -й СМО, $j = \overline{1, n}$; $\xi_{ij}(\vec{k})$ – условная вероятность того, что заявка, прибывшая извне в i -ю СМО, когда сеть находится в состоянии \vec{k} , впервые окажет воздействие на j -ю СМО как отрицательная заявка, $j = \overline{1, n}$; $\alpha_i(\vec{k})$ – условная вероятность того, что заявка, обслуживание которой в i -й СМО завершено, когда сеть находится в состоянии \vec{k} , не будет больше обслужена ни в одной из СМО и уйдет из сети; $\beta_{ij}(\vec{k})$ – условная вероятность того, что заявка, обслуживание которой в i -й СМО завершено, когда сеть находится в состоянии \vec{k} , впервые после этого получит обслуживание в j -й СМО, $i, j = \overline{1, n}$; $\gamma_{ij}(\vec{k})$ – условная вероятность того, что заявка, обслуженная в i -й СМО, когда сеть находится в состоянии \vec{k} , впервые окажет воздействие на j -ю СМО, будучи при этом отрицательной, $i, j = \overline{1, n}$.

На основании формулы полной вероятности получим:

$$\phi_i(\vec{k}) = (1 - f^{(i)}(\vec{k})) \left(p_{i0} + \sum_{j=1}^n \left[p_{ij}^+ \phi_j(\vec{k}) + p_{ij}^- (1 - u(k_j)) \right] \right), \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

$$\psi_{ij}(\vec{k}) = f^{(i)}(\vec{k}) \delta_{ij} + (1 - f^{(i)}(\vec{k})) \sum_{l=1}^n p_{il}^+ \psi_{lj}(\vec{k}), \quad i, j = \overline{1, n}, \quad (2)$$

$$\xi_{ij}(\vec{k}) = (1 - f^{(i)}(\vec{k})) \left[p_{ij}^- + \sum_{l=1}^n p_{il}^+ \xi_{lj}(\vec{k}) \right], \quad i, j = \overline{1, n}, \quad (3)$$

$$\alpha_i(\vec{k}) = p_{i0} + \sum_{j=1}^n \left[p_{ij}^+ \phi_j(\vec{k} - I_i) + p_{ij}^- \left((1 - u(k_j)) + \delta_{ij} (2 - u(k_i)) \right) \right], \quad i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

$$\beta_{ij}(\vec{k}) = \sum_{l=1}^n p_{il}^+ \psi_{lj}(\vec{k} - I_i), \quad i, j = \overline{1, n}, \quad (5)$$

$$\gamma_{ij}(\vec{k}) = p_{ij}^- + \sum_{l=1}^n p_{il}^+ \xi_{lj}(\vec{k} - I_i), \quad i, j = \overline{1, n}, \quad (6)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, I_i – нулевой вектор размерности n , за исключением компоненты с номером i , которая равна 1, $u(x)$ – единичная функция Хевисайда:

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Пусть $P(\vec{k}, t)$ – вероятность состояния сети \vec{k} в момент времени t . Нетрудно доказать следующую лемму.

Лемма. Нестационарные вероятности состояний рассматриваемой СеМО удовлетворяют системе РДУ Колмогорова:

$$\begin{aligned} \frac{dP(\vec{k}, t)}{dt} = & - \sum_{i=1}^n \left[\lambda_{0i}^+ (1 - \phi_i(\vec{k}) u(k_i)) + \mu_i u(k_i) (1 - \beta_{ii}(\vec{k})) + \lambda_{0i}^- u(k_i) \right] P(\vec{k}, t) + \\ & + \sum_{i=1}^n \lambda_{0i}^+ \sum_{j=1}^n \psi_{ji}(\vec{k} - I_i) u(k_i) P(\vec{k} - I_i, t) + \\ & + \sum_{i=1}^n \left[\lambda_{0i}^- + \sum_{j=1}^n \lambda_{0j}^+ \xi_{ji}(\vec{k} + I_i) + \mu_i \alpha_i(\vec{k} + I_i) \right] P(\vec{k} + I_i, t) + \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mu_j \beta_{ji}(\vec{k} + I_j - I_i) u(k_i) P(\vec{k} + I_j - I_i, t) + \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_j \gamma_{ji}(\vec{k} + I_j + I_i) P(\vec{k} + I_j + I_i, t). \end{aligned} \quad (7)$$

2. Нахождение вероятностей состояний и средних характеристик сети, функционирующей в режиме насыщения

Будем считать, что все СМО сети функционируют в режиме насыщения, т.е. $k_i(t) > 0 \quad \forall t > 0$, $i = \overline{1, n}$, тогда система (7) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dP(\vec{k}, t)}{dt} = & - \sum_{i=1}^n \left[\lambda_{0i}^+ (1 - \phi_i(\vec{k})) + \mu_i (1 - \beta_{ii}(\vec{k})) + \lambda_{0i}^- \right] P(\vec{k}, t) + \sum_{i=1}^n \lambda_{0i}^+ \sum_{j=1}^n \psi_{ji}(\vec{k} - I_i) P(\vec{k} - I_i, t) + \\ & + \sum_{i=1}^n \left[\lambda_{0i}^- + \sum_{j=1}^n \lambda_{0j}^+ \xi_{ji}(\vec{k} + I_i) + \mu_i \alpha_i(\vec{k} + I_i) \right] P(\vec{k} + I_i, t) + \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mu_j \beta_{ji}(\vec{k} + I_j - I_i) P(\vec{k} + I_j - I_i, t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_j \gamma_{ji}(\vec{k} + I_j + I_i) P(\vec{k} + I_j + I_i, t). \end{aligned} \quad (8)$$

Для решения этой системы применим метод многомерных производящих функций.

Обозначим через $\Psi_n(z, t)$, где $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, n -мерную производящую функцию:

$$\Psi_n(z, t) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} P(k_1, k_2, \dots, k_n, t) z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_n^{k_n} = \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} P(k, t) \prod_{i=1}^n z_i^{k_i}, \quad |z| < 1, \quad (9)$$

суммирование берется по каждому k_i , от 1 до $+\infty$, $i = \overline{1, n}$, поскольку сеть функционирует в режиме насыщения.

Рассмотрим случай, когда условные вероятности $\phi_i(\vec{k})$, $\psi_{ij}(\vec{k})$, $\xi_{ij}(\vec{k})$, $\alpha_i(\vec{k})$, $\beta_{ij}(\vec{k})$, $\gamma_{ij}(\vec{k})$, $i, j = \overline{1, n}$, не зависят от состояний сети. Умножим (8) на $\prod_{l=1}^n z_l^{k_l}$ и просуммируем по всем возможным значениям k_l от 1 до $+\infty$, $l = \overline{1, n}$. Тогда получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} \frac{dP(\vec{k}, t)}{dt} \prod_{l=1}^n z_l^{k_l} = - \sum_{i=1}^n \left[\lambda_{0i}^+ (1 - \phi_i) + \mu_i (1 - \beta_{ii}) + \lambda_{0i}^- \right] \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} P(\vec{k}, t) \prod_{l=1}^n z_l^{k_l} + \\ & + \sum_{i=1}^n \lambda_{0i}^+ \sum_{j=1}^n \psi_{ji} \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} P(\vec{k} - I_i, t) \prod_{l=1}^n z_l^{k_l} + \sum_{i=1}^n \left[\lambda_{0i}^- + \sum_{j=1}^n \lambda_{0j}^+ \xi_{ji} + \mu_i \alpha_i \right] \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} P(\vec{k} + I_i, t) \prod_{l=1}^n z_l^{k_l} + \\ & + \sum_{\substack{i, j=1 \\ i \neq j}}^n \mu_j \beta_{ji} \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} P(\vec{k} + I_j - I_i, t) \prod_{l=1}^n z_l^{k_l} + \sum_{i, j=1}^n \mu_j \gamma_{ji} \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} P(\vec{k} + I_j + I_i, t) \prod_{l=1}^n z_l^{k_l}. \end{aligned} \quad (10)$$

Рассмотрим суммы, входящие в правую часть соотношения (10):

$$\sum_1(z, t) = \sum_{i=1}^n \lambda_{0i}^+ \sum_{j=1}^n \psi_{ji} \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} P(\vec{k} - I_i, t) \prod_{l=1}^n z_l^{k_l} = \sum_{i=1}^n \lambda_{0i}^+ z_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \psi_{ji} \Psi_n(z, t);$$

$$\sum_2(z, t) = \sum_{i=1}^n \left[\lambda_{0i}^- + \sum_{j=1}^n \lambda_{0j}^+ \xi_{ji} + \mu_i \alpha_i \right] \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} P(\vec{k} + I_i, t) \prod_{l=1}^n z_l^{k_l} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{z_i} \left(\lambda_{0i}^- + \sum_{j=1}^n \lambda_{0j}^+ \xi_{ji} + \mu_i \alpha_i \right) \Psi_n(z, t),$$

так как вероятности типа $P(k_1, k_2, \dots, k_{i-1}, 0, k_{i+1}, \dots, k_n) = 0$, поскольку сеть функционирует в режиме насыщения;

$$\sum_3(z, t) = \sum_{\substack{i, j=1 \\ i \neq j}}^n \mu_j \beta_{ji} \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} P(\vec{k} + I_j - I_i, t) \prod_{l=1}^n z_l^{k_l} = \sum_{\substack{i, j=1 \\ j \neq i}}^n \mu_j \beta_{ji} \frac{z_i}{z_j} \Psi_n(z, t);$$

$$\sum_4(z, t) = \sum_{i, j=1}^n \mu_j \gamma_{ji} \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} P(\vec{k} + I_j + I_i, t) \prod_{l=1}^n z_l^{k_l} = \sum_{i, j=1}^n \mu_j \gamma_{ji} \frac{1}{z_i z_j} \Psi_n(z, t).$$

Таким образом, для производящей функции получаем линейное однородное дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{d\Psi_n(z, t)}{dt} = - \sum_{i=1}^n \left[(\lambda_{0i}^+ (1 - \phi_i) + \mu_i (1 - \beta_{ii}) + \lambda_{0i}^-) - \right. \\ & \left. - \lambda_{0i}^+ z_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \psi_{ji} - \frac{1}{z_i} (\lambda_{0i}^- + \sum_{j=1}^n \lambda_{0j}^+ \xi_{ji} + \mu_i \alpha_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \mu_j \beta_{ji} \frac{z_i}{z_j} - \sum_{j=1}^n \mu_j \gamma_{ji} \frac{1}{z_i z_j} \right] \Psi_n(z, t). \end{aligned} \quad (11)$$

Общее его решение имеет вид:

$$\begin{aligned} & \Psi_n(z, t) = C_n \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \left[(\lambda_{0i}^+ (1 - \phi_i) + \mu_i (1 - \beta_{ii}) + \lambda_{0i}^-) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \lambda_{0i}^+ z_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \psi_{ji} - \frac{1}{z_i} (\lambda_{0i}^- + \sum_{j=1}^n \lambda_{0j}^+ \xi_{ji} + \mu_i \alpha_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \mu_j \beta_{ji} \frac{z_i}{z_j} - \sum_{j=1}^n \mu_j \gamma_{ji} \frac{1}{z_i z_j} \right] t \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Предположим, что в начальный момент времени сеть находится в состоянии $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0)$, $\alpha_i > 0$, $P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0) = 1$, $P(k_1, k_2, \dots, k_n, 0) = 0$, $\forall \alpha_i \neq k_i$, $i = \overline{1, n}$. Тогда начальным условием для уравнения (12) будет $\Psi_n(z, 0) = P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0) \prod_{l=1}^n z_l^{\alpha_l} = \prod_{l=1}^n z_l^{\alpha_l}$. Используя его, получаем $C_n = 1$.

Таким образом, если в начальный момент времени СеМО находится в состоянии $(x_1, x_2, \dots, x_n, 0)$, $x_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, то выражение для производящей функции $\Psi_n(z, t)$ (12) имеет вид:

$$\Psi_n(z, t) = a_0(t) \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_{0i}^+ z_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \Psi_{ji} t \right\} \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{1}{z_i} (\lambda_{0i}^- + \sum_{j=1}^n \lambda_{0j}^+ \xi_{ji} + \mu_i \alpha_i) t \right\} \times \\ \times \exp \left\{ \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \mu_j \beta_{ji} \frac{z_i}{z_j} t \right\} \exp \left\{ \sum_{i,j=1}^n \mu_j \gamma_{ji} \frac{1}{z_i z_j} t \right\} \prod_{l=1}^n z_l^{\alpha_l}, \quad (13)$$

где

$$a_0(t) = \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n (\lambda_{0i}^+ (1 - \phi_i) + \mu_i (1 - \beta_{ii}) + \lambda_{0i}^-) t \right\}.$$

Для нахождения вероятностей состояний сети преобразуем (13) к удобному виду. Разложим в ряд Маклорена входящие в него экспоненты и преобразуем полученные после этого произведения. Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема. Выражение для производящей функции представимо в виде:

$$\Psi_n(z, t) = a_0(t) \sum_{\bar{l}=0}^{\infty} \dots \sum_{\bar{r}=0}^{\infty} \sum_{\bar{q}=0}^{\infty} \dots \sum_{\bar{u}=0}^{\infty} \sum_{\bar{r}_1=0}^{\infty} \dots \sum_{\bar{r}_n=0}^{\infty} \sum_{\bar{u}_1=0}^{\infty} \dots \sum_{\bar{u}_n=0}^{\infty} t^{\sum_{i=1}^n (l_i + q_i + r_i + u_i)} \times \\ \times \prod_{i=1}^n \left[\frac{1}{l_i! q_i! r_i! u_i!} (\lambda_{0i}^+)^{l_i} \prod_{j=1}^n \Psi_{ji}^{l_i} \left(\lambda_{0i}^- + \sum_{j=1}^n \lambda_{0j}^+ \xi_{ji} + \mu_i \alpha_i \right)^{q_i} \left(\prod_{j=1}^n \mu_j \beta_{ji} \right)^{r_i} \left(\prod_{j=1}^n \mu_j \gamma_{ji} \right)^{u_i} z_i^{\alpha_i + l_i - q_i + nr_i - R - u_i - U} \right], \quad (14)$$

где $R = \sum_{i=1}^n r_i$, $U = \sum_{i=1}^n u_i$.

С помощью полученного выражения для производящей функции можно найти вероятности состояний рассматриваемой сети. Вероятность состояния $P(k_1, k_2, \dots, k_n, t)$ является коэффициентом при $z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_n^{k_n}$ в разложении функции (9) в многократный ряд (14) при условии, что в начальный момент времени сеть находится в состоянии $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0)$.

Заключение

В статье проведено исследование открытой экспоненциальной G-сети с обходами систем обслуживания положительными заявками, функционирующей в режиме насыщения. Для решения системы РДУ для зависящих от времени вероятностей состояний сети применен метод многомерных производящих функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gelenbe E. Product-form queueing networks with negative and positive customers // Journal of Applied Probability. 1991. No. 28. P. 656–663.
2. Gelenbe E., Schassberger R. Stability of product-form G-networks // Probability in Engineering and Informational Science. 1992. No. 6. P. 271–276.
3. Науменко В.В., Матальцкий М.А. Анализ сетей с положительными и отрицательными заявками в переходном режиме // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 4 (25). С. 61–70.
4. Малинковский Ю.В. Сети массового обслуживания с обходами узлов заявками // Автоматика и телемеханика. 1991. № 2. С. 102–110.
5. Матальцкий М.А., Науменко В.В. Анализ сети с обходами систем обслуживания разнотипными заявками // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальна тэхніка і кіраванне, 2013. № 1. С. 152–159.
6. Малинковский Ю.В., Никитенко О.А. Стационарное распределение состояний сетей с обходами и отрицательными заявками // Автоматика и телемеханика. 2000. № 8. С. 79–85.

Поступила в редакцию 9 ноября 2019 г.

Kopats D.Ya., Matalytski M.A. (2020) ANALYSIS IN NON-STATIONARY REGIME OF EXPONENTIAL G-NETWORK WITH BYPASS OF QUEUEING SYSTEMS POSITIVE CUSTOMERS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 52. pp. 66–72

DOI: 10.17223/19988605/52/8

The article deals with open Markov G-networks with bypass. Vector describing the state of the network we denote $\vec{k} = \vec{k}(t) = (k_1, k_2, \dots, k_n, t)$, where k_i is the number of positive customers in the i -th QS at time t . DDE system of Kolmogorov for state probability presented in form:

$$\begin{aligned} \frac{dP(\vec{k}, t)}{dt} = & - \sum_{i=1}^n \left[\lambda_{0i}^+ (1 - \phi_i(\vec{k})) u(k_i) + \mu_i u(k_i) (1 - \beta_{ii}(\vec{k})) + \lambda_{0i}^- u(k_i) \right] P(\vec{k}, t) + \\ & + \sum_{i=1}^n \lambda_{0i}^+ \sum_{j=1}^n \psi_{ji}(\vec{k} - I_i) u(k_i) P(\vec{k} - I_i, t) + \frac{n!}{r!(n-r)!} + \\ & + \sum_{i=1}^n \left[\lambda_{0i}^- + \sum_{j=1}^n \lambda_{0j}^+ \xi_{ji}(\vec{k} + I_i) + \mu_i \alpha_i(\vec{k} + I_i) \right] P(\vec{k} + I_i, t) + \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mu_j \beta_{ji}(\vec{k} + I_j - I_i) u(k_i) P(\vec{k} + I_j - I_i, t) + \\ & + \sum_{i,j=1}^n \mu_j \gamma_{ji}(\vec{k} + I_j + I_i) P(\vec{k} + I_j + I_i, t). \end{aligned}$$

In case, when network operating under a saturation regime and conditional state probabilities $\phi_i(\vec{k})$, $\psi_{ij}(\vec{k})$, $\xi_{ij}(\vec{k})$, $\alpha_i(\vec{k})$, $\beta_{ij}(\vec{k})$, $\gamma_{ij}(\vec{k})$ do not depend on \vec{k} , the multidimensional generating function $\Psi_n(z, t) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} P(k_1, k_2, \dots, k_n, t) z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_n^{k_n}$ has the form:

$$\begin{aligned} \Psi_n(z, t) = & a_0(t) \sum_{l_1=0}^{\infty} \dots \sum_{l_n=0}^{\infty} \sum_{q_1=0}^{\infty} \dots \sum_{q_n=0}^{\infty} \sum_{r_1=0}^{\infty} \dots \sum_{r_n=0}^{\infty} \sum_{u_1=0}^{\infty} \dots \sum_{u_n=0}^{\infty} t^{\sum_{i=1}^n (l_i + q_i + r_i + u_i)} \times \\ & \times \prod_{i=1}^n \left[\frac{1}{l_i! q_i! r_i! u_i!} (\lambda_{0i}^+)^{l_i} \prod_{j=1}^n \psi_{ji}^{l_i} \left(\lambda_{0i}^- + \sum_{j=1}^n \lambda_{0j}^+ \xi_{ji} + \mu_i \alpha_i \right)^{q_i} \left(\prod_{j=1}^n \mu_j \beta_{ji} \right)^{r_i} \left(\prod_{j=1}^n \mu_j \gamma_{ji} \right)^{u_i} z_i^{\alpha_i + l_i - q_i + nr_i - R - u_i - U} \right], \end{aligned}$$

where $a_0(t) = \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n (\lambda_{0i}^+ (1 - \phi_i) + \mu_i (1 - \beta_{ii}) + \lambda_{0i}^-) t \right\}$.

The non-stationary state probability $P(k_1, k_2, \dots, k_n, t)$ can be found as the coefficient of multidimensional generating function in multiple series.

Keywords: G-network with bypass of queueing systems; non-stationary state probability; multidimensional generation function.

KOPATS Dmitry Yaroslavovich (Post-graduate Student, Grodno State University, Belarus).

E-mail: dk80395@mail.ru

MATALYTSKI Mihail Alekseevich (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Grodno State University, Belarus).

E-mail: m.matalytski@gmail.com

REFERENCES

- Gelenbe, E. (1991) Product-form queueing networks with negative and positive customers. *Journal of Applied Probability*. 28. pp. 656–663. DOI: 10.2307/3214499
- Gelenbe, E. & Schassberger, R. (1992) Stability of product-form G-networks. *Probability in Engeneering and Informational Science*. 6. pp. 271–276. DOI: 10.1017/S0269964800002539
- Matalytski, M. & Naumenko, V. (2013) Analysis of networks with positive and negative messages at transient behavior. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(25). pp. 61–70.

4. Malinkovsky, Yu. (1991) Queueing network with customer bypass. *Automation and Remote Control*. 2. pp. 102–110.
5. Matalytski, M. & Naumenko, V. (2013) Analysis of network with bypass queueing network multiple types customers. *Vesnik Grodzenskaga dzjarzhajna yuniversiteta imya Yanki Kupaly. Seryya 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka, vylichal'naya tekhnika i kiravanne*. 2(1). pp. 152–159.
6. Malinkovsky, Yu. & Nikitenko, O. (2000) Stationary state probability distribution of network with bypass and negative customers. *Automation and Remote Control*. 8. pp. 79–85.

УДК 519.21

DOI: 10.17223/19988605/52/9

Л.А. Нежелская, Д.А. Тумашкина

ОЦЕНИВАНИЕ МЕТОДОМ МОМЕНТОВ ДЛИТЕЛЬНОСТИ НЕПРОДЛЕВАЮЩЕГОСЯ МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ В ПОЛУСИНХРОННОМ ПОТОКЕ СОБЫТИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассматривается полусинхронный поток событий второго порядка, функционирующий в условиях частичной наблюдаемости; методом моментов решается задача оценивания непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности. Приводятся результаты статистических экспериментов для установления качества оценивания неизвестного параметра – длительности мертвого времени.

Ключевые слова: дважды стохастический поток событий; полусинхронный поток событий второго порядка; непродлевающееся мертвое время; оценивание длительности мертвого времени; метод моментов.

В данной работе рассматривается один из типов дважды стохастических потоков событий [1–9], являющихся математическими моделями информационных потоков заявок, функционирующих в современных телекоммуникационных сетях. Множество состояний вышеприведенных потоков дискретно и конечно. В зависимости от того, каким образом происходит смена состояний, данные потоки событий можно разделить на три типа: 1) синхронные потоки [10]; 2) асинхронные [11]; 3) полусинхронные потоки [12]. Объектом изучения настоящей работы является полусинхронный поток событий второго порядка с двумя состояниями.

В большинстве случаев рассматриваются модели входящих потоков, когда события полностью наблюдаемы. Однако на практике любое устройство затрачивает некоторое время на регистрацию события (сообщения), другими словами, событие, поступившее на прибор, порождает период мертвого времени [13], в течение которого другие наступившие события потока недоступны для наблюдения. В статьях [14–18] рассматриваются задачи оценки состояний либо параметров для различных моделей дважды стохастических потоков событий.

В настоящей работе рассматривается полусинхронный поток событий второго порядка, функционирующий в условиях непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности (события, наступившие в данный период, не вызывают его продления). Тогда возникает вопрос об оценке среднего числа потерянных сообщений, ответ на который дает решение задачи оценивания длительности мертвого времени, осуществляемое методом моментов [19]. Данное исследование является непосредственным развитием [20].

1. Постановка задачи

Рассматривается стационарный режим функционирования полусинхронного дважды стохастического потока событий второго порядка (поток), сопровождающий случайный процесс которого $\lambda(t)$ является кусочно-постоянным с двумя состояниями – S_1 и S_2 . Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_1 определяется случайной величиной $\eta = \min(\xi^{(1)}, \xi^{(2)})$, где $\xi^{(1)}$ имеет функцию распределения $F_1^{(1)}(t) = 1 - e^{-\lambda_1 t}$, $t \geq 0$; $\xi^{(2)}$ – функцию распределения $F_1^{(2)}(t) = 1 - e^{-\alpha_1 t}$, $t \geq 0$; $\xi^{(1)}$ и $\xi^{(2)}$ – независимые случайные величины.

В момент наступления события потока в зависимости от того, какая из случайных величин $\xi^{(i)}$, $i = 1, 2$, приняла минимальное значение, процесс $\lambda(t)$ переходит из состояния S_1 в S_2 с вероятностью

стью $P_1^{(i)}(\lambda_2 | \lambda_1)$ либо $\lambda(t)$ остается в состоянии S_1 с вероятностью $P_1^{(i)}(\lambda_1 | \lambda_1)$, $i=1, 2$. Здесь $P_1^{(i)}(\lambda_2 | \lambda_1) + P_1^{(i)}(\lambda_1 | \lambda_1) = 1$, $i=1, 2$. Длительность интервала между событиями потока в состоянии S_1 является случайной величиной с функцией распределения $F_1(t) = 1 - e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)t}$, $t \geq 0$.

Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_2 есть случайная величина с функцией распределения $F_2(t) = 1 - e^{-\alpha_2 t}$, $t \geq 0$. В течение времени пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_2 имеет место пуассоновский поток событий с параметром λ_2 . В последующем изложении полагается, что имеет место состояние S_i (i -е состояние) процесса $\lambda(t)$, если $\lambda(t) = \lambda_i$, $i=1, 2$, $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$.

Матрицы инфинитезимальных характеристик [21] процесса $\lambda(t)$ имеют вид

$$D_0 = \begin{vmatrix} -(\lambda_1 + \alpha_1) & 0 \\ \alpha_2 & -(\lambda_2 + \alpha_2) \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) & \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}.$$

После каждого зарегистрированного в момент времени t_k события наступает период мертвого времени фиксированной длительности T , в течение которого другие события исходного потока недоступны наблюдению. По окончании периода мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени длительности T (непродлевающееся мертвое время) и т.д.

На рис. 1 приведен пример возникающей ситуации, где t_1, t_2, \dots – моменты наступления событий в наблюдаемом потоке; периоды мертвого времени длительности T обозначены штриховкой; черными кружками обозначены события потока, недоступные наблюдению.

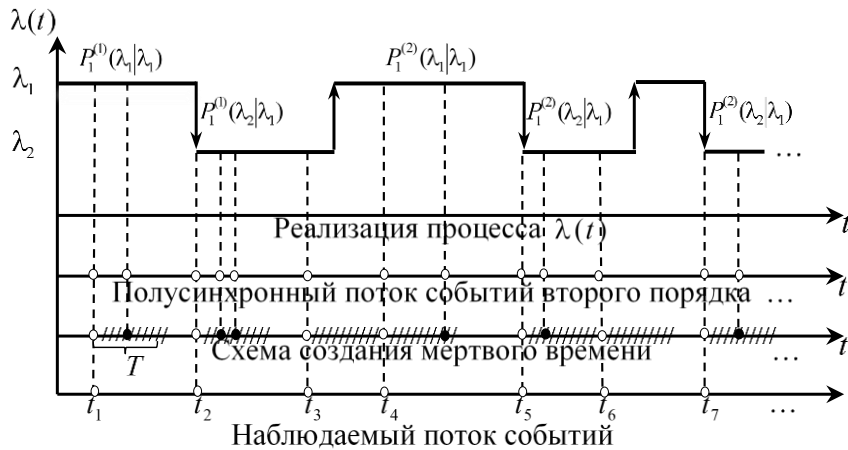


Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий
Fig. 1. Formation of the observed event flow

Поскольку $\lambda(t)$ является принципиально ненаблюдаемым, наблюдаются только моменты наступления событий t_1, t_2, \dots , то $\lambda(t)$ – скрытый марковский процесс или ненаблюдаемый сопровождающий марковский процесс. В свою очередь, в моменты $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ последовательность $\{\lambda(t_k)\}$ представляет собой вложенную цепь Маркова.

Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k=1, 2, \dots$ – значение длительности интервала между соседними событиями наблюдаемого потока, $p_T(\tau_k)$ – плотность вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в наблюдаемом потоке. В силу того что рассматривается стационарный режим функционирования потока, $p_T(\tau_k) = p_T(\tau)$ для всех $k=1, 2, \dots$, $\tau \geq 0$. Вследствие этого без ограничения общности момент наступления события t_k можно положить равным нулю, т.е. момент наступления события есть $\tau=0$.

Ставится задача оценивания длительности мертвого времени T методом моментов. Для решения поставленной задачи необходимо найти явный вид плотности вероятности $p_T(\tau)$, $\tau \geq 0$.

2. Вывод плотности вероятности $p_T(\tau)$

Рассмотрим интервал $(0, \tau)$ длительности $\tau = T + t$ между соседними событиями наблюдаемого потока, где T – значение длительности мертвого времени, t – значение длительности интервала между моментом окончания мертвого времени и моментом наступления очередного события, $t > 0$.

Введем переходную вероятность $q_{ij}(T)$ того, что за мертвое время длительности T процесс $\lambda(\tau)$ перейдет из состояния S_i в момент времени $\tau = 0$ в состояние S_j в момент $\tau = T$, $i, j = 1, 2$; условную стационарную вероятность $\pi_i(0/T)$ того, что процесс $\lambda(\tau)$ в момент времени $\tau = 0$ находится в состоянии S_i , $i = 1, 2$, при условии? что в данный момент времени наступило событие наблюдаемого потока, породив период мертвого времени длительности T .

Введем в рассмотрение условную вероятность $p_{ij}(t)$ того, что на интервале $(0, t)$ нет событий потока, и в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_j$ при условии, что в момент времени $t = 0$ значение процесса $\lambda(0) = \lambda_i$; $\tilde{p}_{ij}(t)$ – соответствующая плотность вероятности, $i, j = 1, 2$.

В силу того что процесс $\lambda(t)$ обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать, начиная с момента времени t_k , $k = 1, 2, \dots$, наступления события потока, плотность вероятности $p_T(\tau)$ определяется в виде:

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \sum_{i=1}^2 \pi_i(0/T) \sum_{j=1}^2 q_{ij}(T) \sum_{k=1}^2 \tilde{p}_{jk}(\tau - T), & \tau \geq T. \end{cases} \quad (1)$$

Явный вид $\pi_i(0/T)$, $q_{ij}(T)$, $\tilde{p}_{jk}(\tau - T)$, $i, j, k = 1, 2$, устанавливаются следующие леммы.

Лемма 1. Переходные вероятности $q_{ij}(T)$, $i, j = 1, 2$, в полусинхронном потоке событий второго порядка имеют вид:

$$\begin{aligned} q_{11}(T) &= \pi_1 + \pi_2 e^{-(\alpha_1 + a)T}, & q_{12}(T) &= \pi_2 - \pi_2 e^{-(\alpha_1 + a)T}, \\ q_{21}(T) &= \pi_1 - \pi_1 e^{-(\alpha_1 + a)T}, & q_{22}(T) &= \pi_2 + \pi_1 e^{-(\alpha_1 + a)T}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $a = \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)$; априорные финальные вероятности состояний S_1 и S_2 равны $\pi_1 = \alpha_2 / (\alpha_2 + a)$, $\pi_2 = a / (\alpha_2 + a)$ соответственно.

Доказательство. Построим систему дифференциальных уравнений для нахождения введенных переходных вероятностей $q_{ij}(T)$, $i, j = 1, 2$:

$$\begin{aligned} q'_{11}(\tau) &= \alpha_2 q_{12}(\tau) - \alpha q_{11}(\tau), & q'_{22}(\tau) &= \alpha q_{21}(\tau) - \alpha_2 q_{22}(\tau), \\ q_{11}(\tau) + q_{12}(\tau) &= 1, & q_{21}(\tau) + q_{22}(\tau) &= 1, & q_{11}(0) &= q_{22}(0) = 1, & q_{12}(0) &= q_{21}(0) = 0. \end{aligned}$$

Интегрируя систему дифференциальных уравнений с учетом начальных условий [22] и заменяя в решении момент времени τ на T , приходим к (2). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Плотности вероятностей $\tilde{p}_{ij}(\tau)$, $i, j = 1, 2$, в полусинхронном потоке событий второго порядка определяются формулами

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{1j}(\tau) &= [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_j | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_j | \lambda_1)] e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}, & j &= 1, 2, \\ \tilde{p}_{21}(\tau) &= \frac{\alpha_2 [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)]}{(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2)} [e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau} - e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}], \\ \tilde{p}_{22}(\tau) &= \frac{\alpha_2 [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)]}{(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2)} [e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau} - e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}] + \lambda_2 e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau}, & \tau &\geq 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) \neq 0$.

Для нахождения $\pi_i(0/T)$, $i=1, 2$, введем в рассмотрение вероятности перехода p_{ij} , $i, j=1, 2$, процесса $\lambda(\tau)$ из состояния S_i в S_j за время, которое пройдет от момента $\tau=0$ до момента наступления очередного события потока.

Лемма 3. Вероятности перехода p_{ij} , $i, j=1, 2$, в полусинхронном потоке событий второго порядка имеют вид:

$$p_{1j} = \frac{\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_j | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_j | \lambda_1)}{\lambda_1 + \alpha_1}, \quad j=1, 2, \quad p_{21} = \frac{\alpha_2 [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)]}{(\lambda_1 + \alpha_1)(\lambda_2 + \alpha_2)},$$

$$p_{22} = \frac{\alpha_2 [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)]}{(\lambda_1 + \alpha_1)(\lambda_2 + \alpha_2)} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \alpha_2}, \quad p_{11} + p_{12} = 1, \quad p_{21} + p_{22} = 1. \quad (4)$$

Лемма 4. Условные стационарные вероятности $\pi_i(0/T)$, $i=1, 2$, в полусинхронном потоке событий второго порядка определяются выражениями:

$$\pi_1(0/T) = (z_1 - a) \left(\alpha_2 + \lambda_2 \pi_1 [1 - e^{-(\alpha_2 + a)T}] \right) / \left(z_1 z_2 - \lambda_2 (z_1 - a) e^{-(\alpha_2 + a)T} \right), \quad \pi_2(0/T) = 1 - \pi_1(0/T), \quad (5)$$

$z_1 = \lambda_1 + \alpha_1$, $z_2 = \lambda_2 + \alpha_2$; π_1 и a определены в (2).

Доказательство. Введем в рассмотрение переходную вероятность $\pi_{ij}(T)$ того, что за время, которое пройдет от момента $\tau=0$ до момента наступления очередного события наблюдаемого потока, процесс $\lambda(\tau)$ перейдет из состояния S_i в S_j , $i, j=1, 2$.

В моменты времени наступления событий $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ последовательность $\{\lambda(t_k)\}$ представляет собой вложенную цепь Маркова, тогда справедлива система уравнений

$$\pi_1(0/T) = \pi_1(0/T)\pi_{11}(T) + \pi_2(0/T)\pi_{21}(T), \quad \pi_2(0/T) = \pi_1(0/T)\pi_{12}(T) + \pi_2(0/T)\pi_{22}(T),$$

$$\pi_1(0/T) + \pi_2(0/T) = 1,$$

из которой находим

$$\pi_1(0/T) = \pi_{21}(T) / (1 - \pi_{11}(T) + \pi_{21}(T)), \quad \pi_2(0/T) = 1 - \pi_1(0/T). \quad (6)$$

Поскольку процесс $\lambda(t)$ является марковским, то справедливо

$$\pi_{11}(T) = q_{11}(T)p_{11} + q_{12}(T)p_{21}, \quad \pi_{12}(T) = q_{11}(T)p_{12} + q_{12}(T)p_{22}, \quad \pi_{11}(T) + \pi_{12}(T) = 1,$$

$$\pi_{21}(T) = q_{21}(T)p_{11} + q_{22}(T)p_{21}, \quad \pi_{22}(T) = q_{21}(T)p_{12} + q_{22}(T)p_{22}, \quad \pi_{21}(T) + \pi_{22}(T) = 1.$$

Учитывая выражения (2) для $q_{ij}(T)$, $i, j=1, 2$, получим

$$\pi_{11}(T) = p_{11} - \pi_2(p_{11} - p_{21})(1 - e^{-(\alpha_2 + a)T}), \quad \pi_{21}(T) = p_{21} + \pi_1(p_{11} - p_{21})(1 - e^{-(\alpha_2 + a)T}), \quad (7)$$

$$\pi_{12}(T) = 1 - \pi_{11}(T), \quad \pi_{22}(T) = 1 - \pi_{21}(T).$$

Подставляя в (6) выражения (7), (4), приходим к (5). *Лемма 4 доказана.*

Леммы 1, 2 и 4 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. Плотность вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в полусинхронном потоке второго порядка в условиях наличия мертвого времени для случая $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) \neq 0$ имеет вид:

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \gamma(T) z_1 e^{-z_1(\tau-T)} + (1 - \gamma(T)) z_2 e^{-z_2(\tau-T)}, & \tau \geq T, \end{cases} \quad (8)$$

$$\gamma(T) = \pi_1 [(z_1 - z_2 - a) / (z_1 - z_2)] [1 + a(z_1 - \lambda_2) / (z_1 z_2 e^{(\alpha_2 + a)T} - \lambda_2(z_1 - a))],$$

где π_1 и a определены в (2); z_1, z_2 - в (5).

Доказательство. Подставляя выражения (2), (3) и (5) в формулу (1), после необходимых преобразований получим (8). *Теорема 1 доказана.*

Рассмотрим особый случай, когда в (8) коэффициент $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) = 0$.

Лемма 5. Плотности вероятностей $\tilde{p}_{ij}(\tau)$, $i, j = 1, 2$, в полусинхронном потоке событий второго порядка для случая $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) = 0$ определяются формулами

$$\begin{aligned}\tilde{p}_{1j}(\tau) &= [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_j | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_j | \lambda_1)] e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}, \quad j = 1, 2, \\ \tilde{p}_{21}(\tau) &= \alpha_2 [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)] \tau e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}, \\ \tilde{p}_{22}(\tau) &= \alpha_2 [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)] \tau e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau} + \lambda_2 e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}, \quad \tau \geq 0.\end{aligned}\quad (9)$$

Лемма 6. Вероятности перехода p_{ij} , $i, j = 1, 2$, в полусинхронном потоке событий второго порядка для случая $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) = 0$ имеют вид:

$$\begin{aligned}p_{1j} &= [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_j | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_j | \lambda_1)] / (\lambda_1 + \alpha_1), \quad j = 1, 2, \\ p_{21} &= \alpha_2 [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)] / (\lambda_1 + \alpha_1)^2, \\ p_{22} &= \alpha_2 [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)] / (\lambda_1 + \alpha_1)^2 + \lambda_2 / (\lambda_2 + \alpha_2).\end{aligned}\quad (10)$$

Теорема 2. Плотность вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в полусинхронном потоке второго порядка в условиях наличия мертвого времени для случая $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) = 0$ имеет вид:

$$\begin{aligned}p_T(\tau) &= \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ [(\lambda_1 + \alpha_1) - \alpha_2 \pi_2 (T) (1 - (\lambda_1 + \alpha_1)(\tau - T))] e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)(\tau - T)}, & \tau \geq T, \end{cases} \\ \pi_2(T) &= \pi_2 \left[1 + a \alpha_2 / \left((\lambda_1 + \alpha_1)^2 e^{(\alpha_2 + a)T} - \lambda_2 (\lambda_1 + \alpha_1 - a) \right) \right],\end{aligned}\quad (11)$$

где π_2 и a определены в (2).

Доказательство. Подставляя в (6) выражения (7), (10), находим стационарные вероятности $\pi_i(0/T)$, $i = 1, 2$. Наконец, подставляя в (1) выражения (2), (9), а также найденные выражения для $\pi_i(0/T)$, $i = 1, 2$, в результате необходимых преобразований приходим к (11). *Теорема 2 доказана.*

3. Среднее число потерянных событий в единицу времени

1. Случай $z_1 \neq z_2$ (общий). Плотность $p_T(\tau)$ позволяет получить среднее число событий в единицу времени Λ в рассматриваемом потоке при полной его наблюдаемости ($T = 0$), а также среднее число событий в единицу времени Λ_T в потоке при наличии мертвого времени ($T \neq 0$):

$$\Lambda = z_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2, \quad \Lambda_T = \frac{z_1 z_2 [1 - e^{(\alpha_2 + a)T}] - (\alpha_2 z_1 + \lambda_2 a)}{T(z_1 z_2 [1 - e^{(\alpha_2 + a)T}] - (\alpha_2 z_1 + \lambda_2 a)) + (z_2 \pi_1 + (z_1 + \alpha_2) \pi_2) [1 - e^{(\alpha_2 + a)T}] - (\alpha_2 + a)}.$$

На основе полученных выражений находим среднее число потерянных событий в потоке в единицу времени для *общего случая* задания параметров:

$$\Delta = \Lambda - \Lambda_T = \frac{\pi_2 (z_1 - \lambda_2) (\pi_1 (z_1 - \lambda_2) - \alpha_2) [1 - e^{(\alpha_2 + a)T}] + T (z_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2) (z_1 z_2 [1 - e^{(\alpha_2 + a)T}] - (\alpha_2 z_1 + \lambda_2 a))}{T(z_1 z_2 [1 - e^{(\alpha_2 + a)T}] - (\alpha_2 z_1 + \lambda_2 a)) + (z_2 \pi_1 + (z_1 + \alpha_2) \pi_2) [1 - e^{(\alpha_2 + a)T}] - (\alpha_2 + a)}.$$

2. Случай $z_1 = z_2 = z$ (особый). Аналогичным образом находятся Λ и Λ_T :

$$\Lambda = \lambda_2 + \alpha_2 \pi_1, \quad \Lambda_T = \frac{z^2 [1 - e^{(\alpha_2 + a)T}] - (\alpha_2 z + \lambda_2 a)}{T(z^2 [1 - e^{(\alpha_2 + a)T}] - (\alpha_2 z + \lambda_2 a)) + (z \pi_1 + (z + \alpha_2) \pi_2) [1 - e^{(\alpha_2 + a)T}] - (\alpha_2 + a)}.$$

На основе полученных выражений находим среднее число потерянных событий в потоке в единицу времени для *особого случая* задания параметров:

$$\Delta = \Lambda - \Lambda_T = \frac{-\alpha_2^2 \pi_2^2 [1 - e^{(\alpha_2 + a)T}] + T (z \pi_1 + \lambda_2 \pi_2) (z^2 [1 - e^{(\alpha_2 + a)T}] - (\alpha_2 z + \lambda_2 a))}{T(z^2 [1 - e^{(\alpha_2 + a)T}] - (\alpha_2 z + \lambda_2 a)) + (z \pi_1 + (z + \alpha_2) \pi_2) [1 - e^{(\alpha_2 + a)T}] - (\alpha_2 + a)},$$

где π_1 , π_2 и a определены в (2).

4. Оценивание длительности мертвого времени методом моментов

Рассмотрим статистику $C = (1/n) \sum_{k=1}^n \tau_k$, где $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ – значение длительности интервала между моментами t_k и t_{k+1} наступления событий в наблюдаемом потоке.

Пусть имеется выборка $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ из распределения $p_T(\tau)$, зависящего от неизвестного параметра T ; $M_T(\tau) = \int_T^{\infty} \tau p_T(\tau) d\tau$ – начальный теоретический момент первого порядка. Тогда в соответствии с методом моментов [19] уравнение моментов выпишется в виде

$$M_T(\tau) = C. \quad (12)$$

С учетом вида (8) уравнение (12) для случая $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) \neq 0$ запишем в виде:

$$\gamma(T)(1/z_1 - 1/z_2) + T + 1/z_2 = C. \quad (13)$$

Уравнение (13) относительно неизвестного параметра T решается только численно.

Утверждение 1. Уравнение моментов (13) имеет единственное решение.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(T) = M_T(\tau)$, где $f(T) = \gamma(T)(1/z_1 - 1/z_2) + T + 1/z_2$. Можно показать, что функция $f(T)$ является возрастающей функцией переменной T , $T \geq 0$. Следовательно, утверждение 1 справедливо.

Для случая $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) = 0$ уравнение (12), с учетом (11), примет следующий вид:

$$T + 1/(\lambda_1 + \alpha_1) + \alpha_2 \pi_2(T) / (\lambda_1 + \alpha_1)^2 = C. \quad (14)$$

Уравнение (14) решается относительно T только с привлечением численных методов.

Утверждение 2. Уравнение моментов (14) имеет единственное решение.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(T) = M_T(\tau)$, где $f(T) = T + 1/(\lambda_1 + \alpha_1) + \alpha_2 \pi_2(T) / (\lambda_1 + \alpha_1)^2$. Аналогично общему случаю можно показать, что $f(T)$ – возрастающая функция переменной T , $T \geq 0$. Следовательно, утверждение 2 верно.

5. Результаты статистических экспериментов

Согласно утверждениям 1 и 2, как для общего, так и для особого случаев задания параметров потока оценивание длительности мертвого времени T производится по следующему алгоритму. В качестве оценки параметра выбирается решение (13) или (14) (в зависимости от задания параметров потока) на полуинтервале $(0, \tau_{\min}]$, где $\tau_{\min} = \min_k(\tau_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$; если $f(0) < C < f(\tau_{\min})$ то $\hat{T}_{numeric} = \hat{T}$; если $f(0) < f(\tau_{\min}) \leq C$, то $\hat{T}_{numeric} = \tau_{\min}$; $f(0) \geq C$, то $\hat{T}_{numeric} = 0$, где $\hat{T}_{numeric}$ – численное решение уравнения (13) или (14) в зависимости от задания параметров потока. Отметим, что применение τ_{\min} дает улучшенную оценку параметра T .

С целью установления качества оценивания длительности мертвого времени проведена серия статистических экспериментов с использованием имитационной модели полусинхронного потока событий второго порядка [23].

По алгоритму, описанному выше, находится выборка оценок $\hat{T}_1, \hat{T}_2, \dots, \hat{T}_N$ и вычисляются выборочные средние $\hat{M}(\hat{T}) = (1/N) \sum_{s=1}^N \hat{T}_s$ и оценки смещения $\delta(\hat{T}) = |\hat{M}(\hat{T}) - T|$.

В первом статистическом эксперименте для общего случая задания параметров потока рассчитываются зависимости $\hat{M}(\hat{T})$, $\delta(\hat{T})$ от количества реализаций $N = 50, 100, \dots, 500$ с шагом 50, при заданных значениях времени моделирования $T_m = 700$ ед. времени, вероятностях $P_1^{(1)}(\lambda_1|\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2|\lambda_1) = 0,4$, $P_1^{(1)}(\lambda_2|\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1|\lambda_1) = 0,6$ и параметрах потока $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 0,8$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$, $T = 1$. Результаты данного эксперимента приведены в табл. 1.

Таблица 1

Результаты первого статистического эксперимента

N	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
$\hat{M}(\hat{T})$	0,9913	0,9928	0,9918	0,9920	0,9928	0,9930	0,9931	0,9932	0,9930	0,9931
$\delta(\hat{T})$	0,0087	0,0072	0,0082	0,0080	0,0072	0,0070	0,0069	0,0068	0,0070	0,0069

Во втором статистическом эксперименте для особого случая задания параметров потока при $T = 1; 1,5; 2$ изучаются зависимости $\hat{M}(\hat{T})$, $\delta(\hat{T})$ от значений времени моделирования $T_m = 50, 100, \dots, 1000$ ед. времени с шагом 50 при фиксированных значениях $N = 300$, $P_1^{(1)}(\lambda_1|\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1|\lambda_1) = 0,65$, $P_1^{(1)}(\lambda_2|\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2|\lambda_1) = 0,35$, $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 1,5$, $\alpha_1 = 0,5$, $\alpha_2 = 3$. Результаты эксперимента продемонстрированы в табл. 2.

Таблица 2

Результаты второго статистического эксперимента

	T_m	50	100	150	...	700	750	...	950	1 000
$T = 1$	$\hat{M}(\hat{T})$	0,7310	0,8001	0,8298	...	0,9943	0,9939	...	0,9942	0,9943
	$\delta(\hat{T})$	0,2690	0,1999	0,1702	...	0,0057	0,0061	...	0,0058	0,0057
$T = 1,5$	$\hat{M}(\hat{T})$	0,1875	1,2224	1,2208	...	1,4625	1,4626	...	1,4621	1,4624
	$\delta(\hat{T})$	0,3125	0,2776	0,2792	...	0,0375	0,0374	...	0,0379	0,0376
$T = 2$	$\hat{M}(\hat{T})$	1,6618	1,6891	1,7455	...	1,9312	1,9312	...	1,9315	1,9313
	$\delta(\hat{T})$	0,3382	0,3109	0,2545	...	0,0688	0,0688	...	0,0685	0,0687

Анализируя полученные численные результаты, можно заключить: 1) найденная оценка является смещенной, впрочем, величина оценки смещения относительно исходного значения остается достаточно приемлемой; 2) оценка ведет себя стабильнее с увеличением количества реализаций N и времени моделирования T_m , что естественно в силу увеличения доступной информации при равных T ; также отметим общую тенденцию уменьшения смещения с ростом T_m ; 3) оценка улучшается (в смысле уменьшения смещения) с уменьшением периода мертвого времени T , что является естественным в силу меньшей потери событий (информации).

Заключение

В настоящей работе рассмотрен полусинхронный поток событий второго порядка при непродлевающемся мертвом времени фиксированной длительности T . В условиях частичной наблюдаемости потока получен явный вид одномерной плотности вероятности $p_T(\tau)$ значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий потока в общем случае и в особом случае задания параметров. Решена задача оценивания периода ненаблюдаемости потока с применением численных методов для решения уравнения моментов относительно неизвестного параметра T . Алгоритм вычисления оценок длительности мертвого времени реализован на языке программирования C# в среде Visual Studio 2013. С целью установления качества оценивания проведена серия статистических экспериментов с использованием имитационной модели потока; численные результаты экспериментов демонстрируют приемлемое качество оценивания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 1 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
2. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч.2 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
3. Neuts M.F. A versatile Markov point process // Journal of Applied Probability. 1979. V. 16. P. 764–779.

4. Cox D.R. The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables // *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 1955. V. 51, No. 3. P. 433–441.
5. Kingman J.F.C. On doubly stochastic Poisson process // *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 1964. V. 60, is. 4. P. 923–930.
6. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a bath markovian arrival process // *Communications in Statistics Stochastic Models*. 1991. V. 7. P. 1–46.
7. Дудин А.Н., Клименок В.И. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск : Изд-во Белорус. гос. ун-та, 2000. 175 с.
8. Basharin G.P., Gaidamaka Yu.V., Samouylov K.E. Mathematical theory of teletraffic and its application to the analysis of multi-service communication of the next generation networks // *Automatic Control and Computer Sciences*. 2013. V. 47, No. 2. P. 62–69.
9. Vishnevsky V.M., Semenova O.V. Polling systems: theory and applications for broadband wireless networks. London : Academic Publishing, 2012. 316 p.
10. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров синхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // *Вестник Томского государственного университета*. 2002. № S1-1. С. 24–29.
11. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Вероятность ошибки при оценивании состояний обобщенного асинхронного потока событий // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2012. № 2 (19). С. 88–101.
12. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events // *Measurement techniques*. 2003. V. 46, is. 6. P. 536–545.
13. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988. 256 с.
14. Nezhel'skaya L. Probability density function for modulated MAP event flows with unextendable dead time // *Communications in Computer and Information Science*. 2015. V. 564. P. 141–151.
15. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежелская Л.А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2013. № 4 (25). С. 32–42.
16. Bakholdina M., Gortsev A. Joint probability density of the intervals length of the modulated semi-synchronous integrated flow of events and its recurrence conditions // *Communications in Computer and Information Science*. 2014. V. 487. P. 18–25.
17. Горцев А.М., Зуевич В.Л. Оптимальная оценка состояний асинхронного дваждыстохастического потока событий с произвольным числом состояний // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2010. № 2 (11). С. 44–65.
18. Gortsev A.M., Klimov I.S. Estimation of intensity of Poisson stream of events for conditions under which it is partially unobservable // *Telecommunications and Radio Engineering*. 1992. V. 47, is. 1. P. 33–38.
19. Малинковский Ю.В. Теория вероятностей и математическая статистика. Гомель : УО «ГТУ им. Ф. Скорины», 2004. Ч. 2: Математическая статистика. 146 с.
20. Nezhelskaya L., Tumashkina D. Optimal state estimation of semi-synchronous event flow of the second order under its complete observability // *Communications in Computer and Information Science*. 2018. V. 912. P. 93–105.
21. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория вероятностей и случайных процессов. Томск : Изд-во НЛТ, 2006. 204 с.
22. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. : Наука, 1969. 424 с.
23. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. М. : Наука, 1973. 312 с.

Поступила в редакцию 12 января 2020 г.

Nezhel'skaya L.A., Tumashkina D.A. (2020) ESTIMATION OF THE UNEXTENDABLE DEAD TIME DURATION IN SEMI-SYNCHRONOUS EVENTS FLOW OF THE SECOND ORDER BY THE METHOD OF MOMENTS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science] 52. pp. 73–82

DOI: 10.17223/19988605/52/9

In the current paper we consider the stationary operation mode of the doubly stochastic semi-synchronous events flow of the second order under conditions of an unextendable dead time, i.e. after each registered event at the time moment t_k , the dead time period of fixed duration T appears, during which other events of the flow are inaccessible to observation. The first event that occurred again at the end of the dead time period creates a period of dead time, etc.

Under these conditions, one-dimensional probability density of the value of interval duration between neighboring events in the general case of setting parameters $(\lambda_1 + \alpha_1 \neq \lambda_2 + \alpha_2)$ has the following form:

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \gamma(T)z_1 e^{-z_1(\tau-T)} + (1-\gamma(T))z_2 e^{-z_2(\tau-T)}, & \tau \geq T, \end{cases}$$

$$\gamma(T) = \pi_1 [(z_1 - z_2 - a) / (z_1 - z_2)] [1 + a(z_1 - \lambda_2) / (z_1 z_2 e^{(a_2+a)T} - \lambda_2(z_1 - a))], \quad z_1 = \lambda_1 + \alpha_1, \quad z_2 = \lambda_2 + \alpha_2, \quad \pi_1 = \alpha_2 / (\alpha_2 + a),$$

for the special case ($\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$) of setting parameters

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ [(\lambda_1 + \alpha_1) - \alpha_2 \pi_2(T)(1 - (\lambda_1 + \alpha_1)(\tau - T))]e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)(\tau - T)}, & \tau \geq T, \end{cases}$$

$$\pi_2(T) = \pi_2 \left[1 + a\alpha_2 / \left((\lambda_1 + \alpha_1)^2 e^{(\alpha_2 + a)T} - \lambda_2(\lambda_1 + \alpha_1 - a) \right) \right],$$

where $a = \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)$, $\pi_2 = a / (\alpha_2 + a)$.

Using the explicit forms of the density functions, the moment equations obtained to determine parameter T in both cases. The moment equations were solved by applying numerical methods.

The algorithm for calculating the estimates was implemented by C# programming language in Visual Studio 2013. In order to establish the quality of the estimation, the statistical experiments series was carried out using a simulation model of the flow; the numerical results of the experiments are given in the current paper and illustrate an acceptable quality of estimation.

Keywords: doubly stochastic event flow; semi-synchronous event flow of the second order; unextendable dead time; dead time estimation; method of moments.

NEZHEL'SKAYA Lyudmila Alekseevna (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Applied Mathematics Department, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: ludne@mail.tsu.ru

TUMASHKINA Diana Aleksandrovna (Post-graduate Student, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: diana1323@mail.ru

REFERENCES

1. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. Ch. 1 [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 17(6). pp. 92–99.
2. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1980) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. Ch.2 [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 1. pp. 55–61.
3. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markov point process. *Journal of Applied Probability*. 16. pp. 764–779. DOI: 10.2307/3213143
4. Cox, D.R. (1955) The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 51(3). pp. 433–441. DOI: 10.1017/S0305004100030437
5. Kingman, J.F.C. (1964) On doubly stochastic Poisson process. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 60(4). pp. 923–930. DOI: 10.1017/S030500410003838X
6. Lucantoni, D.M. (1991) New results on the single server queue with a bath markovian arrival process. *Communications in Statistics Stochastic Models*. 7. pp. 1–46. DOI: 10.1080/15326349108807174
7. Dudin, A.N. & Klimenok, V.I. (2000) *Sistemy massovogo obsluzhivaniya s korrelirovannymi potokami* [Queueing systems with correlated flows]. Minsk: Belarus State University.
8. Basharin, G.P., Gaidamaka, Yu.V. & Samouylov, K.E. (2013) Mathematical theory of teletraffic and its application to the analysis of multiservice communication of the next generation networks. *Automatic Control and Computer Sciences*. 47(2). pp. 62–69. DOI: 10.3103/S0146411613020028
9. Vishnevsky, V.M. & Semenova, O.V. (2012) *Polling systems: theory and applications for broadband wireless networks*. London: Academic Publishing.
10. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2002) Estimation of the parameters of a synchronous doubly stochastic event flow by the method of moments. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. S1-1. pp. 24–29.
11. Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2012) The probability of wrong decisions in the estimation of states of a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(19). pp. 88–101.
12. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2003) Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events. *Measurement Techniques*. 46(6). pp. 536–545. DOI: 10.1023/A:1025499509015
13. Apanasovich, V.V., Kolyada, A.A. & Chernyavskiy, A.F. (1988) *Statisticheskii analiz sluchaynykh potokov v fizicheskom eksperimente* [The statistical analysis of series of random events in physical experiment]. Minsk: Universitetskoe.
14. Nezhelskaya, L. (2015) Probability density function for modulated MAP event flows with unextendable dead time. *Communications in Computer and Information Science*. 564. pp. 141–151. DOI: 10.1007/978-3-319-25861-4_12

15. Gortsev, A.M., Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2013) The comparison of maximum likelihood estimation and method of moments estimation of dead time value in a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(25). pp. 32–42.
16. Bakholdina, M. & Gortsev, A. (2014) Joint probability density of the intervals length of the modulated semy-synchronous integrated flow of events and its recurrence conditions. *Communications in Computer and Information Science*. 487. pp. 18–25.
17. Gortsev, A.M. & Zuevich, V.L. (2010) Optimal estimation of states of the asynchronous doubly stochastic flow of events with arbitrary number of the states. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(11). pp. 44–65.
18. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1992) Estimation of intensity of Poisson stream of events for conditions under which it is partially unobservable. *Telecommunications and Radio Engineering*. 47(1). pp. 33–38.
19. Malinkovsky, Yu.V. (2004) *Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika* [Probability Theory and Mathematical Statistics]. Gomel: Francisk Skorina Gomel State University.
20. Nezhelskaya, L. & Tumashkina, D. (2018) Optimal state estimation of semi-synchronous event flow of the second order under its complete observability. *Communications in Computer and Information Science*. 912. pp. 93–105. DOI: 10.17223/19988605/46/9
21. Nazarov, A.A. & Terpugov, A.F. (2006) *Teoriya veroyatnostey i sluchaynykh protsessov* [The theory of probability and random processes]. Tomsk: NTL.
22. Elsgolts, L.E. (1969) *Differentsial'nye uravneniya i variatsionnoe* [The differential equations and calculus of variations]. Moscow: Nauka.
23. Sobol, I.M. (1973) *Chislennyye metody Monte-Karlo* [Numerical methods of Monte Carlo]. Moscow: Nauka.

УДК 621.396

DOI: 10.17223/19988605/52/10

И.М. Никольский**ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ФАЗЫ СНА
НА ЭНЕРГОПОТРЕБЛЕНИЕ ЦЕПОЧКИ СЕНСОРОВ**

Беспроводные сенсорные сети (БСС) являются эффективным средством мониторинга, который находит применение в различных сферах деятельности человека. Из-за жестких ограничений на расход энергии в основу построения БСС должен быть положен принцип экономии энергии. Это касается в том числе и механизма маршрутизации. В данной работе рассматривается БСС с цепочечной маршрутизацией на основе протокола PEGASIS. Учитывается наличие фазы сна. Исследуются такие показатели, как расход энергии и скорость сбора информации. Полученные результаты вычислительных экспериментов помогают оценить разницу значений этих параметров при различных соотношениях фазы сна и фазы активности узла.

Ключевые слова: беспроводные сенсорные сети; маршрутизация; PEGASIS; энергоэффективность.

Беспроводные сенсорные сети (БСС) представляют собой совокупность устройств, способных производить измерения каких-либо физических величин (температура, давление и т.д.) и передавать информацию по радиоканалу. БСС представляют собой удобный инструмент для мониторинга различных объектов (товарные склады [1, 2], водопроводы [3, 4], шоссе [5]). Подобного рода мониторинг позволяет более рационально расходовать ресурсы (такие как вода, электричество и т.д.), регулировать плотность движения на дорогах, осуществлять своевременный ремонт построек [6]. Таким образом, БСС является необходимой составляющей интернета вещей, проектов типа «умный город» и цифровой экономики в целом.

Рынок сенсорных сетей растет (ожидается, что к 2022 г. он достигнет 2 млрд долл. США [7]), на нем работает большое количество производителей. Этому способствуют отсутствие унификации (доминирующих протоколов и аппаратных концепций), удешевление за счет успехов технологий, рост популярности из-за созвучия с идеей цифровой экономики.

Сенсорные сети значительно отличаются от привычных нам компьютерных сетей [8]. Перечислим основные особенности БСС:

- 1) необходимость учета интерференции и помех (коммуникации происходят по радиоканалу с помощью маломощных радиомодулей);
- 2) невозможность постоянного администрирования, поскольку узлы зачастую расположены в труднодоступных местах;
- 3) отсутствие доминирующих протоколов и аппаратных концепций (БСС проектируются под конкретные задачи);
- 4) ограниченность энергии (узлы питаются, как правило, от батареек).

Таким образом, сенсорные сети представляют собой достаточно сложные объекты, которые требуют весьма тщательного предварительного проектирования.

Одним из ключевых показателей работы БСС является энергоэффективность. Узлы питаются от батареек, частая замена которых проблематична. Поэтому необходимо насколько возможно сократить расход энергии. Это можно сделать в том числе за счет построения механизма маршрутизации, который минимизировал бы количество передаваемых сообщений, устранял коммуникации на дальние расстояния и т.д.

Существует целый ряд протоколов маршрутизации, в основу которых положен принцип минимизации расхода энергии, – такие как LEACH [9], PEGASIS [10] и их модификации.

В данной работе рассматривается маршрутизация на основе энергоэффективного протокола PEGASIS, разработанного в компании Aerospacе (Лос-Анджелес). Его основной идеей является объединение узлов сети в цепочку. Каждый узел взаимодействует только с ближайшими соседями по цепочке, что позволяет исключить энергозатратные передачи информации на дальние расстояния.

Разумеется, у этого подхода есть и недостатки. Если в цикл функционирования узлов сети входит фаза сна (когда потребление энергии минимально, но в то же время невозможны прием и передача сообщений), скорость сбора информации с узлов сети может упасть, поскольку засыпание узла равносильно возникновению разрыва в цепочке.

В данной работе исследуется влияние продолжительности фазы сна на энергоэффективность сети и скорость сбора информации. Основная часть статьи структурирована следующим образом. В п. 1 дается формальная постановка задачи. Пункт 2 посвящен описанию имитационной модели сети. Результаты вычислительных экспериментов приведены в п. 3

1. Постановка задачи

Рассмотрим БСС, в которой сенсоры расположены вдоль прямой с равными интервалами. Подобные сети могут использоваться для мониторинга шоссе или газопроводов.

В такой сети естественно применять цепочечную маршрутизацию. Будем использовать энергоэффективный цепочечно-ориентированный (chain-based) протокол маршрутизации PEGASIS. Сбор информации в данном протоколе разбит на циклы (раунды). В начале каждого раунда узел-аккумулятор информации (обычно именуемый стоком) рассылает в правую и левую подцепочки сообщения с информацией о своем местоположении. В ответ остальные узлы сети передают замеры отслеживаемой физической величины – температуры, давления и т.д. Раунд заканчивается, когда сток получает информацию со всех узлов.

В работе [10] предполагалось, что сенсоры постоянно активны. Однако на практике в цикле работы сенсоров присутствует фаза сна. Расход энергии во время сна минимален, однако прием и передача сообщений невозможны. Таким образом, скорость сбора информации в цепочке может снизиться (т.е. продолжительность раунда возрастет).

Основной задачей данной работы является изучение зависимости длины раунда и величины расхода энергии от параметров фазы сна. Исследования проводятся с помощью имитационного моделирования. Используемая модель цепочки сенсоров разработана автором. В ней учитывается наличие в работе сенсоров активной и пассивной фазы. Присутствует блок, описывающий работу батареи питания сенсора. Более подробно модель описана в следующем пункте.

2. Имитационная модель

В разработанной модели сенсорной цепочки время является дискретным. Узел может находиться либо в активном состоянии, либо в состоянии сна. График засыпания-пробуждения сенсора подчиняется предположениям модели Чиассерини–Гаретто [11].

В течение одного шага модели активный узел может принять либо передать одно сообщение. Маршрутизация сообщений в сети реализуется с помощью протокола PEGASIS.

Поскольку перед нами стоит задача изучения динамики расхода энергии, в нашу модель включен блок, описывающий диссипацию энергии в сети.

Основными параметрами модели являются: N – количество сенсоров, p – параметр распределения длины активной фазы сенсора, q – параметр распределения длины фазы сна. Ниже даны более подробные описания основных деталей построенной модели.

2.1. Протокол PEGASIS

Протокол маршрутизации PEGASIS (power-efficient gathering in sensor information systems) был предложен в работе [10]. В нем используется идея логической цепочки сенсоров. Каждый узел взаи-

действует только с ближайшими соседями по цепочке. За счет этого удается избежать передач на длинное расстояние, на которые всегда тратится много энергии

Информация с узлов БСС собирается на некоторый выделенный узел сети, который называется стоком (sink). Сток выбирается случайным образом и выполняет функцию аккумулятора данных в течение некоторого временного промежутка, который называется *раундом*. Выбор стока происходит в соответствии с некоторым алгоритмом в начале каждого раунда.

После того как сток определен, он передает правому и левому соседям служебное сообщение (назовем его *маркером*) с информацией об идентификаторе узла-стока. Это сообщение дает указание другим узлам, куда отправлять измеренные данные.

Получив маркер от одного из своих соседей, узел передает его другому соседу. Таким образом, маркер движется по направлению к концу цепочки. Когда крайний сенсор получает маркер, он отправляет в ответ сообщение со сгенерированными данными (замеры наблюдаемой величины).

Сообщение с данными начинает движение в сторону стока. Каждый узел, получив такое сообщение, добавляет в него свои данные и передает его дальше по цепочке. Раунд заканчивается, когда сток получает данные от подцепочек справа и слева от себя. После этого происходит выбор нового стока и начинается очередной раунд.

2.2. Фаза сна

Функционирование отдельного сенсора подчиняется модели Чиассерини–Гаретто[11]. Это одна из самых известных аналитических моделей БСС. В рамках модели Чиассерини–Гаретто предполагается, что длина активной фазы и фазы сна распределена по геометрическому закону, каждая со своим параметром (p и q соответственно).

В разработанной нами модели смена активной фазы и фазы сна каждого узла реализована следующим образом. Изначально все сенсоры активны. Для каждого сенсора вычисляется время бодрствования, измеряемое в шагах модели. Это время является реализацией геометрического распределения с параметром p . Будучи в состоянии активности, сенсор может принять или передать сообщение соседнему узлу. Прием / передача занимает один шаг модели. При выходе из активной фазы вычисляется время сна, которое является реализацией геометрического распределения с параметром q .

2.3. Диссипация энергии в сети

В рамках данной работы предполагается, что расход энергии узлами сети происходит в соответствии с моделью В. Хайнцельман [9], которая часто используется в литературе по БСС.

Эта модель постулирует, что расход энергии на передачу сообщения длиной l_{msg} бит на расстояние d метров составляет E_{tx} единиц энергии, где

$$E_{tx} = E_{elec} l_{msg} + e_{amp} l_{msg} d^2.$$

Энергия, расходуемая на прием одного сообщения, вычисляется по формуле

$$E_{rx} = E_{elec} l_{msg}.$$

В качестве единицы измерения энергии примем наноджоуль. Вслед за [9] будем использовать следующие значения констант:

$$l_{msg} = 2\,000 \text{ бит}; E_{elec} = 50 \text{ нДж/бит}; e_{amp} = 100 \text{ пДж/бит/м}^2 = 0,1 \text{ нДж/бит/м}^2.$$

Передача сообщений происходит только между соседними узлами, расстояние между которыми будем считать одинаковым во всей сети и равным 5 м. Таким образом, $d = 5$. Кроме того, считаем, что начальная энергия каждого узла равна 0,5 Дж, обработка информации требует 5нДж на один бит.

2.4. Программная реализация

Описанная имитационная модель была реализована на языке C++. Кратко опишем алгоритм функционирования модели.

1. Инициализация модели. Все сенсоры активны. Для каждого сенсора реализована переменная-таймер, каждая из них равна реализации случайной величины с геометрическим распределением с параметром p .

2. Шаг модели (п. 2.1–2.2 выполняются только для активных сенсоров):

2.1. Принять / передать сообщение.

2.2. Увеличить счетчик расхода энергии.

2.3. Уменьшить значение таймера на единицу.

3. Если значение таймера после п. 2 становится равным нулю, сенсор меняет свое состояние на состояние сна, если был активен, и наоборот, становится активен, если он спал. После этого значение таймера становится равным реализации случайной величины с геометрическим распределением (с параметром p , если сенсор проснулся, и с параметром q , если он заснул).

4. Пункты 2–3 повторяются заданное количество раз.

3. Вычислительные эксперименты

С помощью симуляций на ЭВМ была смоделирована цепочка из $N = 100$ сенсоров. Для каждого сочетания трех параметров (p , q и положение стока s) проводилась серия из 50 экспериментов. Каждый эксперимент представлял собой один раунд протокола PEGASIS. Вычислялось две метрики: длина раунда l_r и средний расход энергии по всем узлам цепочки e . Метрики усреднялись по всей серии экспериментов. Соответствующие средние значения обозначим L_r и E .

Рассматривались следующие значения варьируемых параметров:

– положение стока s : 16, 25, 50;

– параметр распределения активной фазы p : 0,1 и 0,00001;

– параметр распределения фазы сна q : от 0,6 до 0,95 с шагом 0,05.

Результаты проведенных экспериментов отражены на графиках. Графики зависимости длины раунда от q для каждого положения стока представлены на рис. 1, 3, 5. Графики зависимости разряда батарейки при тех же самых значениях параметров даны на рис. 2, 4, 6. Жирная линия отвечает значению $p = 0,1$, тонкая – $p = 0,00001$. Поскольку математическое ожидание геометрического распределения с параметром p равно $1/p$, можно считать, что тонкая линия отвечает случаю постоянно активных сенсоров (сенсор не успевает заснуть до конца раунда, т.е. фаза сна практически отсутствует).

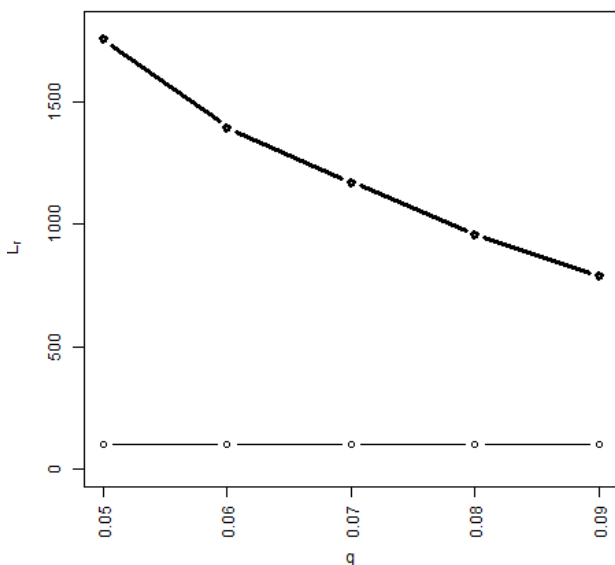


Рис. 1. Средняя длина раунда, $s = 50$

Fig. 1. Average round length, $s = 50$

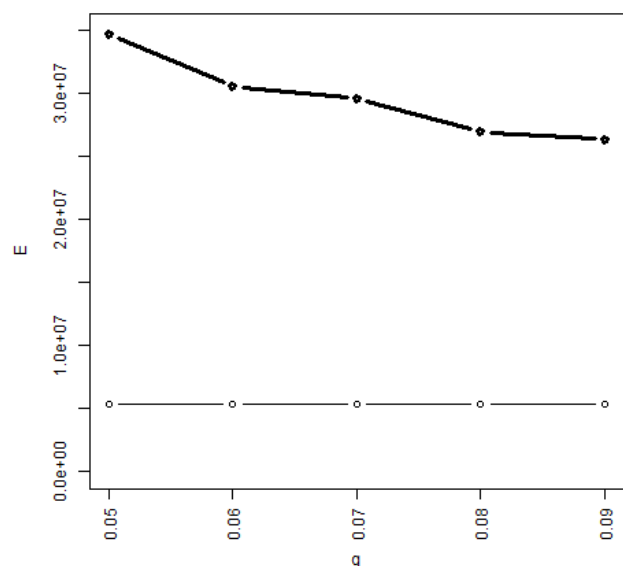


Рис. 2. Средний расход энергии, $s = 50$

Fig. 2. Average energy drain, $s = 50$

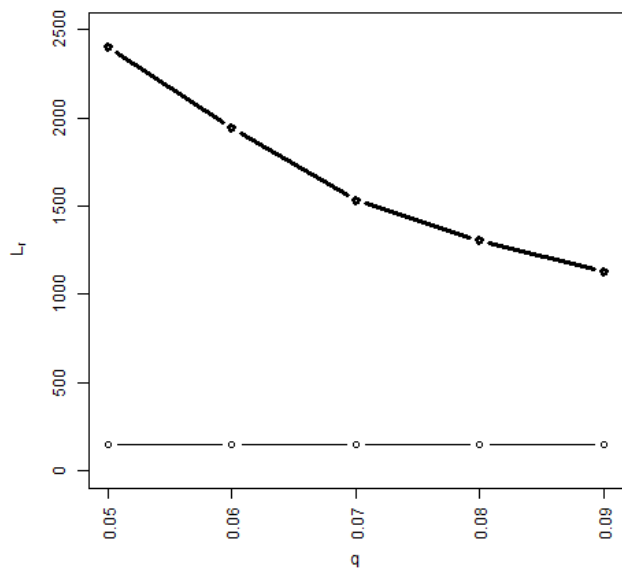


Рис. 3. Средняя длина раунда, $s = 25$
Fig. 3. Average round length, $s = 25$

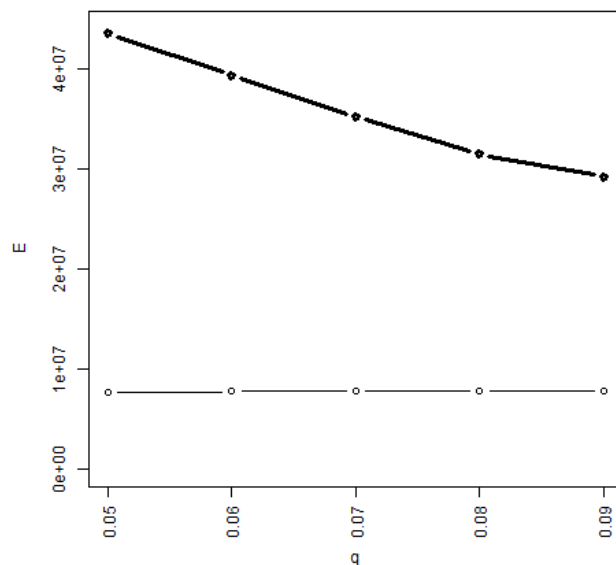


Рис. 4. Средний расход энергии, $s = 25$
Fig. 4. Average energy drain, $s = 25$

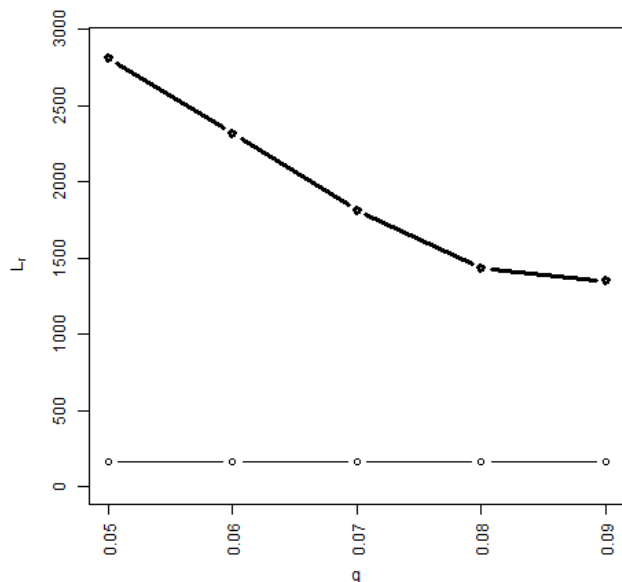


Рис. 5. Средняя длина раунда, $s = 16$
Fig. 5. Average round length, $s = 16$

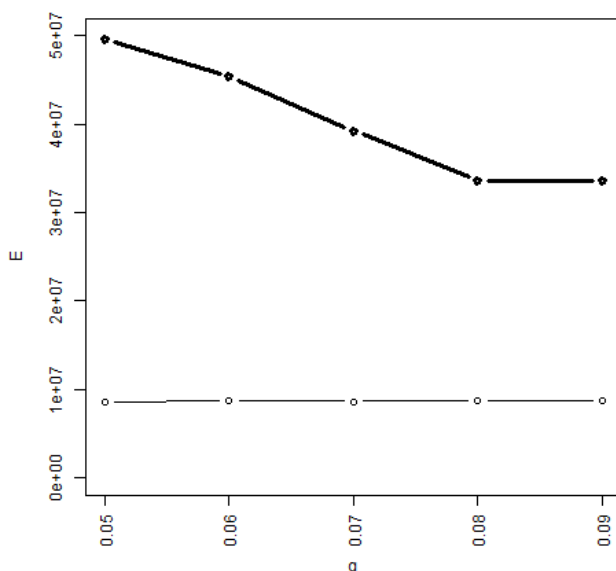


Рис. 6. Средний расход энергии, $s = 16$
Fig. 6. Average energy drain, $s = 16$

На графиках видно, что при всех значениях q жирная линия лежит значительно выше тонкой. Самая большая разница наблюдается при параметре распределения фазы сна $q = 0,05$: расход энергии в случае постоянно активных сенсоров примерно в 6 раз меньше, а длина раунда — в 16 раз меньше.

Заключение

Проведенные эксперименты показывают, что использование фазы сна может быть источником серьезных проблем в сенсорных сетях. В случае цепочечной маршрутизации из-за периодического засыпания сенсоров неизбежно происходит замедление скорости сбора информации. Данный недостаток, вопреки ожиданиям, необязательно компенсируется снижением расхода энергии. Напротив, если продолжительности активной фазы и фазы сна несогласованы, расход энергии увеличивается. Это связано с тем, что узлам приходится ожидать заснувшего соседа, впустую расходуя энергию.

Эта проблема может быть решена за счет внедрения интеллекта в работу сенсора. Накапливая информацию (набирая статистику о прохождении сообщений), сенсор может выработать собственную стратегию засыпания и просыпания с помощью некоторого алгоритма машинного обучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chen Y., Zhang L., Jia Y., Ni D., Zhou B. A warehouse monitoring system based on wireless sensor network // 2011 IEEE 3rd Int. Conf. on Communication Software and Networks. Xi'an. 2011. P. 303–306.
2. Spieker S., Rohrig C. Localization of pallets in warehouses using Wireless Sensor Networks // 16th Mediterranean Conf. on Control and Automation, Ajaccio. 2008. P. 1833–1838.
3. Sadeghioon A.M., Metje N., Chapman D.N., Anthony C.J. SmartPipes: Smart wireless sensor networks for leak detection in water pipelines // J. Sens. Actuator Netw. 2014. V. 3. 64–78.
4. Nnebe S. Wireless sensor networks for long distance pipeline monitoring // WASET / International Science Index. 2013. V. 7, No. 3. P. 78–82.
5. Ghosh S., Rao S., Venkiteswaran B. Sensor network design for smart highways // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. Part A: Systems and Humans. 2012. V. 42, No. 5. P. 1291–1300.
6. Mir M.H., Ravindran D. Role of IoT in smart city applications: a Review // Int. J. of Advanced Research in Computer Engineering & Technology. 2017. V. 6, is. 7. P. 1099–1104.
7. Rawat P., Singh K.D., Chaouchi H., Bonnin J.M. Wireless sensor networks: a survey on recent developments and potential synergies // The J. of Supercomputing. 2014. V. 68, is. 1. P. 1–48.
8. Akyildiz I.F., Su W., Sankarasubramaniam Y., Cayirci E. A Survey on Sensor Networks // IEEE Communications Magazine. 2002. August. P. 102–114.
9. Heinzelman W.R., Chandrakasan A., Balakrishnan H. An application-specific protocol architecture for wireless sensor networks // IEEE Trans. on Wireless Communications. 2002. P. 660–670.
10. Lindsey S., Raghavendra C.S. PEGASIS: Power efficient gathering in sensor information systems // Proc. of the IEEE Aerospace Conference. Big Sky, Montana. March 2002. P. 1–6.
11. Chiasserini C.F., Garetto M. Modeling the performance of wireless sensor networks // Proc. Infocom: Twenty-third Annual Joint Conf. of the IEEE Computer and Communications Societies. 2004. V. 1. P. 231.

Поступила в редакцию 5 ноября 2019 г.

Nikolsky I.M. (2020) STUDY OF THE IMPACT OF SLEEP PHASE DURATION ON ENERGY CONSUMPTION IN SENSOR CHAIN. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 52. pp. 83–89

DOI: 10.17223/19988605/52/10

Wireless sensor networks (WSN) is a fast developing technology used in area of monitoring processes and objects. WSN differs significantly from traditional computer networks. There is no regular administration, radio interference should be taken into account, etc. Another feature of WSNs is limitation of power consumption due to the fact that the nodes are powered by batteries.

The presence of such restrictions forces development of new routing protocols. There is a number of routing protocols built on the principles of energy efficiency. In present paper we consider PEGASIS protocol. This protocol utilizes idea of logical chain. Each node communicates with its nearest neighbours only. The work cycle of WSN is divided into rounds. On each round network randomly chooses a sink-designated node which will accumulate information. Sink notifies other nodes about its location sending a service message. This message travels along the chain in multihop manner, from node to node. When the last node receives such a message it replies with a message containing measured data. Data message moves towards the sink node. Each node adds its data to the message and passes it to the neighbour. Round ends when sink have received information from all the nodes.

In present paper we investigate impact of adding sleep phase in working cycle of nodes. Sleep phase is an important energy saving measure broadly used in real-world sensor networks. But in case of a sensor chain each sleeping node will slow down the movement of messages which implies deceleration of data acquisition. There is a conjecture that this slowdown will be compensated by more economical energy spending.

We study this issue using a simulation model of a sensor chain. Routing is based on PEGASIS protocol. Each sensor can be in one of two phases - active phase or sleep phase. Duration of each phase is a random value distributed by geometrical law (which responds to Chiasserini-Garetto model).

Our simulation results show that in case of random moments of node falling asleep and waking up energy spending under some circumstances may exceed several times compared to the case of no sleep phase. One of main reasons for this situation is idle listening. Our results demonstrate the need to coordinate sleep schedules between WSN nodes.

Keywords: wireless sensor networks; routing protocol; PEGASIS; energy efficiency.

NIKOLSKY Ilya Mikhailovich (Candidate of Physics and Mathematics, Assistant Professor, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation).
E-mail: oliv_mail@mail.ru

REFERENCES

1. Chen, Y., Zhang, L., Jia, Y., Ni, D. & Zhou, B. (2011) A warehouse monitoring system based on wireless sensor network. *2011 IEEE 3rd Int. Conf. on Communication Software and Networks*. Xi'an. pp. 303–306. DOI: 10.1109/ICCSN.2011.6014727
2. Spieker, S. & Rohrig, C. (2008) Localization of pallets in warehouses using Wireless Sensor Networks. *16th Mediterranean Conf. on Control and Automation*. Ajaccio. pp. 1833–1838. DOI: 10.1109/MED.2008.4602031
3. Sadeghioon, A.M., Metje, N., Chapman, D.N. & Anthony, C.J. (2014) SmartPipes: Smart Wireless Sensor Networks for Leak Detection in Water Pipelines. *J. Sens. Actuator Netw.* 3. pp. 64–78. DOI: 10.3390/jsan3010064
4. Nnebe, S. (2013) Wireless Sensor Networks for Long Distance Pipeline Monitoring. *WASET/ Int. Science Index*. 7(3). pp 78–82.
5. Ghosh, S., Rao, S. & Venkateswaran, B. (2012) Sensor network design for smart highways. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics. Part A: Systems and Humans*. 42(5). pp. 1291–1300. DOI: 10.1109/COASE.2009.5234136
6. Mir, M.H. & Ravindran, D. (2017) Role of IoT in smart city applications: A Review. *Int. J. of Advanced Research in Computer Engineering & Technology*. 6(7). DOI: 10.13140/RG.2.2.25207.88482
7. Rawat, P., Singh, K.D., Chaouchi, H. & Bonnin, J.M. (2014) Wireless sensor networks: a survey on recent developments and potential synergies. *The Journal of Supercomputing*. 68(1). pp. 1–48. DOI: 10.1007/s11227-013-1021-9
8. Akyildiz, I.F., Su, W., Sankarasubramaniam, Y. & Cayirci, E. (2002) A Survey on sensor networks. *IEEE Communications Magazine*. 8. pp. 102–114.
9. Heinzelman, W.R., Chandrakasan, A. & Balakrishnan, H. (2002) An application-specific protocol architecture for wireless sensor networks. *IEEE Trans. on Wireless Communications*. pp. 660–670. DOI: 10.1109/TWC.2002.804190
10. Lindsey, S. & Raghavendra, C.S. (2002) PEGASIS: Power efficient gathering in sensor information systems. *Proc. of the IEEE Aerospace Conf.* Big Sky, Montana, March.
11. Chiasserini, C.F. & Garetto, M. (2004) Modeling the Performance of Wireless Sensor Networks. *Proc. Infocom. Twenty-third Annual Joint Conf. of the IEEE Computer and Communications Societies*. 1. p. 231. DOI: 10.1109/INFCOM.2004.1354496

УДК 519.872

DOI: 10.17223/19988605/52/11

И.Е. Тананко, Н.П. Фокина**МЕТОД АНАЛИЗА СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ
С НЕНАДЕЖНЫМИ ПРИБОРАМИ И ЗАДЕРЖКОЙ ИНФОРМАЦИИ**

Рассматривается задача определения стационарного распределения вероятностей состояний открытой сети массового обслуживания, содержащей двухприборные системы обслуживания, в которых только один прибор является ненадежным, а информация о выходе из строя приборов поступает с задержкой. Для маршрутизации требований в ненадежной сети решается задача определения оптимальных маршрутных матриц с целью выравнивания математического ожидания длительности пребывания требований в системах.

Ключевые слова: открытая сеть массового обслуживания; ненадежные приборы обслуживания; задержка информации; маршрутизация.

Сети массового обслуживания с переменной структурой используются в качестве моделей дискретных стохастических систем с сетевой структурой и ненадежными элементами. Удобство их применения связано с простотой и естественностью отображения структуры и процессов функционирования таких систем.

Работы [1–4] являются одними из первых, в которых сети массового обслуживания используются в качестве моделей для исследования влияния различных алгоритмов маршрутизации на характеристики сетей передачи данных с коммутацией пакетов и ненадежными каналами [1], для определения характеристик и выявления узких мест в многопроцессорных системах с переменной структурой [2], для решения задачи отыскания оптимальных конфигураций гибких производственных систем с надежными и ненадежными элементами [3], а также для моделирования распределенных информационных систем с ненадежными рабочими станциями [4].

В дальнейшем сети массового обслуживания с переменной структурой были использованы в качестве моделей мультимедийных систем с ненадежными элементами [5], для решения задач анализа сетей мобильной связи [6], задач управления сетями связи с изменяемой топологией, к которым, в частности, относятся сети спутниковой связи и сети мобильной связи [7], а также для исследования динамических характеристик производственных систем конвейерного типа [8].

Класс сетей массового обслуживания с переменной структурой постоянно расширяется за счет рассмотрения различных особенностей изменения структуры, и это требует разработки методов их анализа.

Например, в работе [9] рассматривается замкнутая экспоненциальная сеть массового обслуживания с ненадежными приборами в одноприборных системах обслуживания. Предложен приближенный метод анализа этой сети в предположении, что длительность обслуживания требований с учетом поломок и восстановлений приборов также является экспоненциально распределенной случайной величиной, но с уменьшенной интенсивностью обслуживания.

Стационарное распределение вероятностей состояний получено для открытой экспоненциальной сети массового обслуживания, в которой уничтожаются все требования в системе обслуживания в момент отказа прибора этой системы [10]. Восстановление прибора происходит мгновенно, так что после отказа система готова принимать и обслуживать требования.

Открытая экспоненциальная сеть массового обслуживания с последовательным расположением узлов рассматривается в работе [11]. Каждый узел состоит из нескольких параллельных систем обслуживания с неограниченными очередями. Длительности наработки на отказ и длительности

восстановления систем обслуживания являются экспоненциально распределенными случайными величинами. Требования, находящиеся в отказавшей системе обслуживания, ожидают ее восстановления. Требования после обслуживания в работоспособных системах направляются только в работоспособные системы. Предложенный в данной работе метод анализа сети сочетает в себе несколько известных методов анализа сетей массового обслуживания.

Основными результатами работ [12–14] являются расширение класса сетей ВСМР до сетей массового обслуживания с ненадежными элементами и получение в мультипликативном виде стационарных распределений вероятностей состояний этих сетей.

Метод производящих функций для определения зависящих от времени вероятностей состояний открытой сети массового обслуживания с ненадежными системами обслуживания применен в работе [15]. Предполагается, что сеть функционирует в условиях высокой нагрузки. Интенсивности поступления и обслуживания требований, а также параметры исправной работы и восстановления приборов систем обслуживания зависят от времени. Получены приближенные выражения для определения вероятностей состояний, среднего числа исправных приборов и среднего числа требований в системах сети в произвольный момент времени.

В работе [16] рассматривается открытая сеть массового обслуживания с подвижными системами обслуживания. Когда две системы меняются местами, каждая забирает с собой все требования, стоящие в очереди к ней. Основным результатом работы является доказательство сходимости процесса эволюции сети к некоторому нелинейному марковскому процессу.

Несмотря на значительное количество научных работ, посвященных ненадежным сетям массового обслуживания, мало внимания уделяется развитию методов анализа сетей массового обслуживания с задержкой информации об изменении структуры этих сетей.

В данной работе рассматривается открытая экспоненциальная сеть массового обслуживания с одним классом требований, состоящая из систем массового обслуживания типа $M/M/2$. Каждая система обслуживания содержит один абсолютно надежный и один ненадежный прибор. Ненадежный прибор последовательно переходит из работоспособного в неработоспособное состояние и обратно. Длительности пребывания ненадежных приборов систем обслуживания в работоспособном и неработоспособном состояниях являются экспоненциально распределенными случайными величинами. Если в момент отказа прибор был занят, то обслуживаемое требование переходит в очередь системы.

В сети обслуживания реализован алгоритм управления потоком требований в системы обслуживания с задержкой информации о состоянии работоспособности ненадежных приборов систем, который заключается в следующем. Через экспоненциально распределенный интервал времени производится наблюдение за состоянием работоспособности ненадежных приборов систем. На основании полученной информации через экспоненциально распределенный интервал времени принимается решение о перенаправлении потоков требований в системы обслуживания. Критерием оптимального функционирования сети обслуживания является равенство математических ожиданий длительностей пребывания требований во всех системах обслуживания.

Получено стационарное распределение вероятностей состояний работоспособности приборов систем обслуживания, а также стационарное распределение вероятностей числа требований в системах сети обслуживания.

1. Ненадежная сеть массового обслуживания

Рассматривается открытая сеть массового обслуживания, состоящая из L систем массового обслуживания S_i , $i = 1, \dots, L$, типа $M/M/2$. Из источника S_0 в сеть поступает пуассоновский поток требований одного класса с интенсивностью λ_0 . Матрица смежности $W = (w_{ij})$, $i, j = 0, 1, \dots, L$, ориентированного графа определяет структуру сети систем массового обслуживания. Элемент $w_{ij} = 1$, если имеется связь из S_i в S_j , и $w_{ij} = 0$, если такой связи нет, $i, j \in \{0, 1, \dots, L\}$. Маршрутная матрица $\Theta = (\theta_{ij})$, $i, j = 0, 1, \dots, L$, определяет переходы требований в сети обслуживания, где θ_{0i} – вероятность поступления требований из источника S_0 в систему S_i , θ_{i0} – вероятность того, что после завершения обслу-

живания в системе S_i требование покинет сеть обслуживания и возвратится в источник S_0 , θ_{ij} – вероятность того, что после завершения обслуживания в системе S_i требование перейдет в систему S_j , $i, j \in \{1, \dots, L\}$.

Один из двух приборов каждой из систем обслуживания S_i , $i = 1, \dots, L$, является абсолютно надежным. Интенсивность обслуживания требований этим прибором $\mu_i > 0$, $i = 1, \dots, L$.

Другой прибор системы S_i , $i = 1, \dots, L$, является ненадежным и последовательно переходит из работоспособного состояния в неработоспособное состояние.

Пребывание ненадежного прибора системы обслуживания S_i в работоспособном состоянии означает, что интенсивность обслуживания требований этим прибором равна $\mu_i > 0$, $i = 1, \dots, L$. Когда же прибор системы S_i находится в неработоспособном состоянии, то его интенсивность обслуживания $\mu_i = 0$.

Когда отказавший прибор восстанавливается, то система обслуживания представляет собой систему типа $M/M/1$. Если в момент отказа ненадежный прибор обслуживал требование, то это требование возвращается в очередь данной системы. После восстановления ненадежного прибора система обслуживания вновь становится системой типа $M/M/2$.

Длительности наработки на отказ и восстановления ненадежного прибора системы S_i являются экспоненциально распределенными случайными величинами соответственно с параметрами α_i и β_i , $i = 1, \dots, L$, соответственно.

Будем считать, что в сети массового обслуживания существует стационарный режим вне зависимости от того, сколько всего восстанавливается приборов в сети обслуживания и в каких системах обслуживания.

Обозначим $n(t) = (n_i(t))$ – вектор числа работоспособных приборов в системах сети обслуживания в момент t , $n_i(t)$ – число работоспособных приборов в системе S_i в момент t . Состояние $n_i(t) = 2$ означает, что ненадежный прибор системы S_i работоспособен в момент t , $n_i(t) = 1$ – в момент t ненадежный прибор системы S_i восстанавливается, $i = 1, \dots, L$.

В процессе функционирования сети обслуживания производится наблюдение за работоспособностью ненадежных приборов систем S_i и управление входящими потоками требований в системы S_i , основанное на результатах этих наблюдений. Управление потоками заключается в изменении маршрутной матрицы Θ . Полагаем, что, начиная с момента t получения информации о состоянии $n(t)$, необходимо время для изменения маршрутной матрицы Θ и, следовательно, изменения потоков требований, поступающих в системы обслуживания. Формализуем алгоритм наблюдения за состоянием $n(t)$ и управления матрицей Θ .

Пусть в момент t_s^k , $k = 1, 2, \dots$, производится наблюдение за состоянием работоспособности ненадежных приборов в каждой из систем S_i , $i = 1, \dots, L$. В момент t_d^k , $t_d^k > t_s^k$, принимается решение об изменении потоков требований в системы сети обслуживания. Буквы s и d символизируют соответственно наблюдение за системами обслуживания и принятие решения об изменении матрицы Θ . Обозначим через $\Theta(n(t_s^k))$ – маршрутную матрицу, используемую в сети массового обслуживания с момента t_d^k , при условии, что в момент t_s^k состояние работоспособности приборов систем сети определялось вектором $n(t_s^k)$. Маршрутная матрица $\Theta(n(t_s^k))$ не меняется с момента t_d^k до момента t_d^{k+1} .

Длительности интервалов времени между моментами t_d^k и t_s^{k+1} , $t_s^{k+1} > t_d^k$, $k = 1, 2, \dots$, следующего наблюдения за состоянием работоспособности приборов систем обслуживания, являются независимыми экспоненциально распределенными случайными величинами с параметром Δ .

Полагаем также, что длительности интервалов времени между моментами t_s^k и t_d^k , $k = 1, 2, \dots$, являются независимыми экспоненциально распределенными случайными величинами с параметром τ .

В качестве критерия оптимальности функционирования сети обслуживания установим равенство математических ожиданий (м.о.) длительностей пребывания требований в системах массового обслуживания, т.е. $\bar{u}_i = \bar{U}$, $i = 1, \dots, L$, где \bar{U} – некоторое заданное значение. Задача оптимизации

заключается в определении маршрутной матрицы $\Theta(n(t_s^k))$, $k = 1, 2, \dots$, которая обеспечивает выполнение критерия оптимальности функционирования сети обслуживания.

Целью работы является нахождение вероятностно-временных характеристик сети обслуживания с ненадежными приборами в системах обслуживания и с задержкой в принятии решения об изменении потоков требований.

2. Решение задачи оптимального управления маршрутными матрицами

Пусть μ – интенсивность обслуживания требований прибором системы, λ – интенсивность потока требований в систему обслуживания. Тогда м.о. длительности пребывания требований в системе обслуживания типа $M/M/1$ определяется выражением $\bar{u} = 1/(\mu - \lambda)$.

Определим м.о. длительности пребывания требований в экспоненциальной системе обслуживания с двумя приборами, используя выражения для системы с числом приборов $\kappa \geq 2$. Для этого используем формулу Литтла $\bar{u} = (\bar{b} + \bar{h})/\lambda$, где \bar{b} – м.о. числа требований в очереди системы, \bar{h} – м.о. числа занятых приборов системы, определяются соотношениями

$$\bar{b} = P(0) \frac{\kappa^\kappa \psi^{\kappa+1}}{\kappa!(1-\psi)^2}, \quad \bar{h} = \psi \kappa,$$

$$P(0) = \left[\frac{(\kappa\psi)^\kappa}{\kappa!(1-\psi)} + \sum_{n=0}^{\kappa-1} \frac{(\kappa\psi)^n}{n!} \right]^{-1},$$

где $\psi = \lambda/\kappa\mu$ – коэффициент использования системы, $P(0)$ – стационарная вероятность того, что в системе нет требований. Тогда, при $\kappa = 2$

$$P(0) = \frac{2\mu - \lambda}{2\mu + \lambda},$$

$$\bar{u} = P(0) \frac{\lambda^2}{\mu(2\mu - \lambda)^2} + \frac{1}{\mu} = \frac{4\mu}{4\mu^2 - \lambda^2}.$$

Следовательно, необходимые интенсивности потоков требований в системы с одним и с двумя приборами соответственно, обеспечивающие заданное \bar{U} , определяются соотношениями

$$\lambda(1) = \mu - 1/\bar{U},$$

$$\lambda(2) = \sqrt{4\mu(\mu - 1/\bar{U})}.$$

Используя метод синтеза маршрутных матриц сетей обслуживания [17] для известного вектора ω относительных интенсивностей потоков требований, можно получить маршрутную матрицу Θ , удовлетворяющую системе уравнений $\omega\Theta = \omega$ с условием нормировки $\sum_{i=0}^L \omega_i = 1$.

3. Анализ ненадежной системы и сети обслуживания с учетом задержки в управлении потоком

Введем обозначение $(a_i, n_i(t), n_i(t_s^k), c(t))$ для определения числа работоспособных приборов и параметров управления потоком в систему S_i , $i = 1, \dots, L$, где a_i – состояние потока ($a_i = 2$ – поток в систему обслуживания установлен из расчета, что в этой системе работоспособны оба прибора, т.е. интенсивность такого потока равна $\lambda_i(2)$; если $a_i = 1$, то интенсивность потока в систему S_i равна $\lambda_i(1)$; $n_i(t)$, $n_i(t_s^k)$ – состояния работоспособности приборов системы соответственно в текущий момент времени t и в момент t_s^k , $t_s^k < t$; $c(t)$ – параметр управления, который равен d , если в момент t , $t \in [t_s^k, t_d^k)$, принимается решение об интенсивности потока требований в систему. Параметр $c(t) = s$, если $t \in [t_d^k, t_s^{k+1})$.

Из всех возможных 16 состояний $(a_i, n_i(t), n_i(t_s^k), c(t))$ системы $S_i, i = 1, \dots, L$, состояния $(1, 2, 2, s), (1, 1, 2, s), (2, 2, 1, s), (2, 1, 1, s)$ являются невозвратными. Остальные образуют класс положительных возвратных состояний, вероятности которых могут быть найдены из решения системы линейных уравнений

$$-(\alpha_i + \tau)P_i(2, 2, 2, d) + \beta_i P_i(2, 1, 2, d) + \Delta P_i(2, 2, 2, s) = 0, \quad (1)$$

$$-(\beta_i + \tau)P_i(2, 1, 2, d) + \alpha_i P_i(2, 2, 2, d) = 0, \quad (2)$$

$$-(\alpha_i + \Delta)P_i(2, 2, 2, s) + \tau P_i(2, 2, 2, d) + \beta_i P_i(2, 1, 2, s) + \tau P_i(1, 2, 2, d) = 0, \quad (3)$$

$$-(\Delta + \beta_i)P_i(2, 1, 2, s) + \tau P_i(2, 1, 2, d) + \alpha_i P_i(2, 2, 2, s) + \tau P_i(1, 1, 2, d) = 0, \quad (4)$$

$$-(\alpha_i + \tau)P_i(1, 2, 2, d) + \beta_i P_i(1, 1, 2, d) + \Delta P_i(1, 2, 1, s) = 0, \quad (5)$$

$$-(\tau + \beta_i)P_i(1, 1, 2, d) + \alpha_i P_i(1, 2, 2, d) = 0, \quad (6)$$

$$-(\beta_i + \tau)P_i(1, 1, 1, d) + \alpha_i P_i(1, 2, 1, d) + \Delta P_i(1, 1, 1, s) = 0, \quad (7)$$

$$-(\alpha_i + \tau)P_i(1, 2, 1, d) + \beta_i P_i(1, 1, 1, d) = 0, \quad (8)$$

$$-(\alpha_i + \Delta)P_i(1, 2, 1, s) + \tau P_i(1, 2, 1, d) + \beta_i P_i(1, 1, 1, s) + \tau P_i(2, 2, 1, d) = 0, \quad (9)$$

$$-(\Delta + \beta_i)P_i(1, 1, 1, s) + \tau P_i(1, 1, 1, d) + \alpha_i P_i(1, 2, 1, s) + \tau P_i(2, 1, 1, d) = 0, \quad (10)$$

$$-(\beta_i + \tau)P_i(2, 1, 1, d) + \alpha_i P_i(2, 2, 1, d) + \Delta P_i(2, 1, 2, s) = 0, \quad (11)$$

$$-(\alpha_i + \tau)P_i(2, 2, 1, d) + \beta_i P_i(2, 1, 1, d) = 0 \quad (12)$$

с условием нормировки

$$\sum_{a_i, n_i, c} P(a_i, n_i(t), n_i(t_s^k), c) = 1. \quad (13)$$

Поскольку система обслуживания $S_i, i = 1, \dots, L$, характеризуется потоком требований с двумя возможными интенсивностями, а также числом работоспособных приборов, то изменение числа требований в системе представляется случайными процессами рождения и гибели $\xi_i(a_i, n_i), a_i = 1, 2, n_i = 1, 2$.

Введем обозначения для стационарных вероятностей того, что в системе обслуживания $S_i, i = 1, \dots, L$, осуществляются соответственно процессы $\xi_i(2, 2), \xi_i(2, 1), \xi_i(1, 2), \xi_i(1, 1)$:

$$\pi_i(2, 2) = P_i(2, 2, 2, d) + P_i(2, 2, 2, s) + P_i(2, 2, 1, d),$$

$$\pi_i(2, 1) = P_i(2, 1, 2, d) + P_i(2, 1, 2, s) + P_i(2, 1, 1, d),$$

$$\pi_i(1, 2) = P_i(1, 2, 1, d) + P_i(1, 2, 1, s) + P_i(1, 2, 2, d),$$

$$\pi_i(1, 1) = P_i(1, 1, 1, d) + P_i(1, 1, 1, s) + P_i(1, 1, 2, d).$$

Следующие предложения содержат утверждения о свойствах рассмотренных вероятностей.

Предложение 1. Вероятность $P_i(2, 1, 2, s) = P_i(1, 2, 1, s), i = 1, \dots, L$.

Доказательство. Воспользуемся методом Крамера для решения системы линейных уравнений (1)–(13). Можно показать, что определители матриц, получаемых заменой соответствующих столбцов на столбец свободных членов, равны друг другу и равны

$$\alpha_i \beta_i \Delta \tau^4 (\alpha_i + \beta_i + \tau)^2 (\alpha_i + \beta_i + \tau + \Delta)^2, i = 1, \dots, L,$$

откуда следует требуемое равенство. Что и требовалось доказать.

Предложение 2. Вероятность действия процесса $\xi_i(2, 1)$ в системе обслуживания S_i равна вероятности действия процесса $\xi_i(1, 2)$ в этой системе обслуживания, т.е. $\pi_i(2, 1) = \pi_i(1, 2), i = 1, \dots, L$.

Предложение 3. Вероятность того, что в систему S_i поступает поток требований с интенсивностью $\lambda_i(2)$, равна вероятности того, что ненадежный прибор этой системы работоспособен, т.е.

$$\pi_i(2, 2) + \pi_i(2, 1) = \pi_i(2, 2) + \pi_i(1, 2), i = 1, \dots, L.$$

Предложение 2, так же как и Предложение 1, доказывается с использованием свойств определителей. Предложение 3 непосредственно следует из Предложения 2. Можно показать также, что

$$\pi_i(2,2) + \pi_i(2,1) = \beta_i / (\alpha_i + \beta_i)$$

и

$$\pi_i(1,1) + \pi_i(2,1) = \alpha_i / (\alpha_i + \beta_i), \quad i = 1, \dots, L.$$

Обозначим $q = (q_i)$ – вектор состояния сети обслуживания, где q_i – число требований в системе S_i ; (a, n) – вектор состояния потоков требований и числа приборов в системах сети обслуживания, где $a = (a_i)$, $n = (n_i)$, $i = 1, \dots, L$; $P(q, a, n)$ – стационарная вероятность пребывания сети обслуживания в состоянии q с вектором состояния потоков a и вектором n числа приборов в системах обслуживания, определяемая по теореме Джексона [18].

Тогда стационарная вероятность $\pi(a, n)$ того, что сеть обслуживания находится в состоянии (a, n) , определяется выражением

$$\pi(a, n) = \pi_1(a_1, n_1) \cdot \dots \cdot \pi_L(a_L, n_L).$$

Стационарная вероятность состояния q сети массового обслуживания с ненадежными приборами и с задержкой информации имеет вид:

$$P(q) = \sum_{a, n} P(q, a, n) \pi(a, n), \quad q \in E,$$

где E – множество всех состояний сети обслуживания.

Заключение

Сети массового обслуживания с переменной структурой и задержкой в принятии решений, связанных с управлением потоком требований, могут быть использованы не только для анализа стохастических сетевых систем с физическими отказами и восстановлениями отдельных элементов, но также для анализа и разработки методов управления системами, в которых каждый элемент является неделимым общим ресурсом определенного множества пользователей. К таким системам можно отнести, например, некоторые производственные и транспортные системы, сети передачи информации, конфигурируемые вычислительные и информационные ресурсы, на которых основаны, в частности, технологии «облачных вычислений».

ЛИТЕРАТУРА

1. Economides A.A., Silvester J.A. Optimal routing in a network with unreliable links // IEEE INFOCOM'88. 1988. P. 288–297.
2. Blake J.T., Reibman A.L., Trivedi K.S. Sensitivity analysis of reliability and performability measures for multiprocessor systems // Proc. SIGMETRICS '88 Proceed. of the 1988 ACM SIGMETRICS conference on Meas. and modeling of comp. systems. 1988. P. 177–186.
3. Vinod B., Solberg J.J. The optimal design of flexible manufacturing systems // International Journal of Production Research. 1985. V. 23, is. 6. P. 1141–1151.
4. Akyildiz I.F., Liu W. Performance optimization of distributed-system models with unreliable servers // IEEE Trans. on Reliability. 1990. V. 39, No. 2. P. 236–243.
5. Park K., Kim S. A capacity planning model of unreliable multimedia service systems // The Journal of Systems and Software. 2002. V. 63, is. 1. P. 69–76.
6. Sharony J. An architecture for mobile radio networks with dynamically changing topology using virtual subnets // Mobile Networks and applications. 1996. V. 1. P. 75–86.
7. Tassiulas L. Scheduling and performance limits of networks with constantly changing topology // IEEE Transactions on Information Theory. 1997. V. 43, No. 3. P. 1067–1073.
8. Gottlich S., Kuhn S., Schwarz J.A., Stolletz R. Approximations of time-dependent unreliable flow lines with finite buffers // Mathematical Methods of Operations Research. 2016. V. 83, is. 3. P. 295–323.
9. Vinod B., Altiok T. Approximating unreliable queueing networks under the assumption of exponentiality // J. Opl. Res. Soc. 1986. V. 37, No. 3. P. 309–316.
10. Chao X. A queueing network model with catastrophes and product form solution // Operations Research Letters. 1995. V. 18. P. 75–79.
11. Thomas N., Thornley D., Zatschler H. Approximate solution of a class of queueing networks with breakdowns // Proceedings of 17th European Simulation Multiconference, SCS Publishers, Nottingham, UK. 2003. P. 251–256.
12. Sauer C., Daduna H. BCMP networks with unreliable servers // Preprint No. 2003-01, Schwerpunkt Mathematische Statistik und Stochastische Prozesse, Universitat Hamburg. 2003.

13. Цициашвили Г.Ш., Осипова М.А. Вероятностное распределение в сетях массового обслуживания с переменной структурой // Проблемы передачи информации. 2006. Т. 42, № 2. С. 101–108.
14. Sommer J., Berkhout J., Daduna H., Heidergott B. Analysis of Jackson networks with infinite supply and unreliable nodes // Queueing Systems. 2017. V. 87, is. 1–2. P. 181–207.
15. Статкевич С.Э., Маталыцкий М.А. Исследование сети массового обслуживания с ненадежными системами в переходном режиме // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 1 (18). С. 112–125.
16. Баччелли Ф., Рыбко А.Н., Шлосман С.Б. Сети массового обслуживания с подвижными приборами – предел среднего поля // Проблемы передачи информации. 2016. Т. 52, № 2. С. 85–110.
17. Тананко И.Е. Метод оптимизации маршрутных матриц открытых сетей массового обслуживания // Автоматика и вычислительная техника. 2002. № 4. С. 39–46.
18. Вишневикий В.М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. М. : Техносфера, 2003. 512 с.

Поступила в редакцию 5 октября 2019 г.

Tananko I.E., Fokina N.P. (2020) AN ANALYSIS OF QUEUEING NETWORKS WITH UNRELIABLE SERVERS AND INFORMATION DELAY. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnik i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 52. pp. 90–97

DOI: 10.17223/19988605/52/11

Consider open queueing network with L queues S_i , $i = 1, \dots, L$, type of $M/M/2$. The customers arrive from the external source S_0 according to a Poisson process with arrival rate λ_0 . The queueing network topology is defined by the adjacency matrix $W = (w_{ij})$, $i, j = 0, 1, \dots, L$, of a graph, where $w_{ij} = 1$ if there is a connection from S_i to S_j and $w_{ij} = 0$ otherwise, $i, j \in \{0, 1, \dots, L\}$. Transitions of demands between systems are defined by the routing matrix $\Theta = (\theta_{ij})$, $i, j = 0, 1, \dots, L$. Each queue of network contains reliable server and unreliable server. The unreliable server consistently passes from efficient into a disabled state and back. If unreliable server of queue S_i is operating state then $\mu_i > 0$, $i = 1, \dots, L$, otherwise, if server is repairable state then $\mu_i = 0$. Times between server failures / repairs of queue S_i have exponential distributions with parameters α_i and β_i , $i = 1, \dots, L$. We assume that servers of queues fail independently of each other and the queueing network have steady-state probability if all unreliable servers are recovered.

Let $n(t) = (n_i(t))$ be the vector of number of operable servers in the queues at the moment t , where $n_i(t) = 2$ if unreliable server of queue S_i is operable at the moment t , and $n_i(t) = 1$ if it is recovered, $i = 1, \dots, L$. We watch for unreliable servers of queues S_i , $i = 1, \dots, L$, at moments t_s^k , $k = 1, 2, \dots$, and we control arrival of demands on queues via routing matrix.

The routing matrix is changed so that equality of response time in all queues is equal to \bar{U} . We assume that the routing matrix forms in network not instantly, and through exponential distributed interval with parameter τ . After change of a matrix Θ the following observation of a state $n(t)$ is carried out through exponential distributed interval with the parameter Δ .

Optimum flows in the systems S_i , $i = 1, \dots, L$, with one and two operable servers are determined as

$$\lambda_i(1) = \mu_i - 1/\bar{U}, \quad \lambda_i(2) = \sqrt{4\mu_i(\mu_i - 1/\bar{U})}.$$

Using $\lambda = (\lambda_i)$ and a system of equations $\lambda\Theta = \lambda$, we calculate a routing matrix Θ .

Let $q = (q_i)$ be the vector of queueing network state, where q_i is the number of demands on queue S_i , $a = (a_i)$ be the vector of flow states on queues, $n = (n_i)$ be the vector of number of operable servers in queues, $i = 1, \dots, L$. Let $(a_i, n_i(t), n_i(t_s^k), c(t))$ be the vector of queue state S_i , $i = 1, \dots, L$, where $n_i(t)$, $n_i(t_s^k)$ is the number of operable servers in the queue at moments t and t_s^k , $t_s^k < t$, $k = 1, 2, \dots$, $c(t)$ control parameter, $c(t) = d$ if the routing matrix is forming and $c(t) = s$ if the routing matrix is using in queueing network. Probabilities $P(a_i, n_i(t), n_i(t_s^k), c(t))$ is solution of balance equations.

The queue S_i has four the birth and death processes. This processes are defined (a_i, n_i) . Then steady-state probabilities $\pi_i(a_i, n_i)$ of processes on queue S_i , $i = 1, \dots, L$, are defined as

$$\pi_i(2, 2) = P_i(2, 2, 2, d) + P_i(2, 2, 2, s) + P_i(2, 2, 1, d), \quad \pi_i(2, 1) = P_i(2, 1, 2, d) + P_i(2, 1, 2, s) + P_i(2, 1, 1, d),$$

$$\pi_i(1, 2) = P_i(1, 2, 1, d) + P_i(1, 2, 1, s) + P_i(1, 2, 2, d), \quad \pi_i(1, 1) = P_i(1, 1, 1, d) + P_i(1, 1, 1, s) + P_i(1, 1, 2, d).$$

Steady-state probability $\pi(a, n) = \pi_1(a_1, n_1) \dots \pi_L(a_L, n_L)$, where $\pi_i(a_i, n_i)$, $i = 1, \dots, L$, is solution of balance equations. Steady-state probability $P(q, a, n)$ of network state q on condition of a and n is determined by Jackson's theorem. Then steady-state probability of network state q with unreliable servers and information delay is determined as follows:

$$P(q) = \sum_{a, n} P(q, a, n) \pi(a, n), \quad q \in E,$$

where E is the set of queueing network states.

Keywords: open queueing network; unreliable servers; information delay; routing.

TANANKO Igor Evstafievich (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Saratov National Research State University, Saratov, Russian Federation).
E-mail: tanankoie@info.sgu.ru

FOKINA Nadezhda Petrovna (Candidate of Physics and Mathematics, Assistant Professor, Saratov National Research State University, Saratov, Russian Federation).
E-mail: fokinanp.sgu@gmail.com

REFERENCES

1. Economides, A.A. & Silvester, J.A. (1988) Optimal routing in a network with unreliable links. *Proc. IEEE 1988 Computer Networking Symposium*. pp. 288–297. DOI: 10.1109/CNS.1988.5007
2. Blake, J.T., Reibman, A.L. & Trivedi, K.S. (1988) Sensitivity analysis of reliability and performability measures for multiprocessor systems. *Proc. SIGMETRICS '88 Proceed. of the 1988 ACM SIGMETRICS conference on Meas. and modeling of comp. systems*. pp. 177–186.
3. Vinod, B. & Solberg, J.J. (1985) The optimal design of flexible manufacturing systems. *International Journal of Production Research*. 23(6). pp. 1141–1151. DOI: 10.1080/07408179908969897
4. Akyildiz, I.F. & Liu, W. (1990) Performance optimization of distributed-system models with unreliable servers. *IEEE Trans. on Reliability*. 39(2). pp. 236–243. DOI: 10.1109/24.55887
5. Park, K. & Kim, S. (2002) A capacity planning model of unreliable multimedia service systems. *The Journal of Systems and Software*. 63(1). pp. 69–76. DOI: 10.1016/S0164-1212(01)00141-8
6. Sharony, J. (1996) An architecture for mobile radio networks with dynamically changing topology using virtual subnets. *Mobile Networks and applications*. 1. pp. 75–86. DOI: 10.1007/BF01342734
7. Tassiulas, L. (1997) Scheduling and performance limits of networks with constantly changing topology. *IEEE Transactions on Information Theory*. 43(3). pp. 1067–1073. DOI: 10.1109/18.568722
8. Gottlich S., Kuhn, S., Schwarz, J.A. & Stolletz, R. (2016) Approximations of time-dependent unreliable flow lines with finite buffers. *Mathematical Methods of Operations Research*. 83(3). pp. 295–323. DOI: 10.1007/s00186-015-0529-6
9. Vinod, B. & Aliok, T. (1986) Approximating unreliable queueing networks under the assumption of exponentiality. *J. Opl. Res. Soc.* 37(3). pp. 309–316. DOI: 10.1057/jors.1986.49
10. Chao, X. (1995) A queueing network model with catastrophes and product form solution. *Operations Research Letters*. 18. pp. 75–79. DOI: 10.1016/0167-6377(95)00029-0
11. Thomas, N., Thornley, D. & Zatschler, H. (2003) Approximate solution of a class of queueing networks with breakdowns. In: *Proceedings of 17th European Simulation Multiconference*. Nottingham, UK: SCS Publishers. pp. 251–256.
12. Sauer, C. & Daduna, H. (2003) BCMP networks with unreliable servers. Preprint No.2003-01. In: *Schwerpunkt Mathematische Statistik und Stochastische Prozesse*. Universitat Hamburg.
13. Tsitsiashvili, G.Sh. & Osipova, M.A. (2006) Probability Distribution in Varying-Structure Queueing Networks. *Problemy peredachi informatsii – Problems of Information Transmission*. 42(2). pp. 158–165.
14. Sommer, J., Berkhout, J., Daduna, H. & Heidergott, B. (2017) Analysis of Jackson networks with infinite supply and unreliable nodes. *Queueing Systems*. 87(1–2). pp. 181–207. DOI: 10.1007/s11134-017-9542-1
15. Statkevich, S. & Matalytski, M. (2012) Investigation of queueing network with unreliable systems at transient regime. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(18). pp. 112–125.
16. Baccelli, F., Rybko, A. N. & Shlosman, S. B. (2016) Queueing Networks with Mobile Servers: The Mean-Field Approach. *Problems of Information Transmission*. 52(2). pp. 178–199. DOI: 10.1134/S0032946016020071
17. Tananko, I.E. (2002) Optimization method of routing matrices of open queueing networks. *Automatic Control and Computer Sciences*. 36(4). pp. 39–46.
18. Vishnevsky, V. (2003) *Teoreticheskie osnovy proektirovaniya komp'yuternykh setey* [Theoretical Foundations of Computer Network Design]. Moscow: Tekhnosfera.

УДК 519.218.72
DOI: 10.17223/19988605/52/12

Г.Ш. Цициашвили

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ПУАССОНОВСКАЯ МОДЕЛЬ НЕПРЕРЫВНО ФУНКЦИОНИРУЮЩЕЙ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Построена математическая модель системы массового обслуживания с пуассоновским входным потоком меняющейся интенсивности, детерминированным временем обслуживания и без ожидания в очереди. Показано, что в любой момент времени случайное число заявок в системе имеет пуассоновское распределение, вычислена зависимость параметра этого распределения от времени. Построение модели и вычисление ее характеристик основаны на наблюдениях за работой бассейна в спорткомплексе. Рассмотрены обобщения этой модели на системы обслуживания конвейерного типа непрерывного действия: многофазные системы, древовидные системы и ациклические системы обслуживания.

Ключевые слова: система массового обслуживания непрерывного действия; пуассоновский входной поток с меняющейся интенсивностью; многофазные, древовидные и ациклические системы обслуживания.

Исследование нестационарных систем массового обслуживания связано с их применениями в вычислительных системах (см., напр.: [1]), развитием моделирования производственных процессов и связи, процессов торговли и бытового обслуживания (см., напр.: [2–4]). В этой связи следует упомянуть активно развивающиеся сейчас государственные программы «Умный город», «Цифровизация экономики» (см., напр.: [5–7]). Алгоритмы расчета нестационарных систем обслуживания являются достаточно сложными (см., напр.: [8, 9]). Поэтому требуется строить нестационарные модели обслуживания так, чтобы их расчет был бы достаточно простым и удобным для вычислений.

В настоящей работе построены модели обслуживания, основанные на предположениях детерминированности времени пребывания заявок в системе, пуассоновости входного нестационарного потока и наличия бесконечного числа приборов, исключающих пребывание заявки в очереди. Системы обслуживания, удовлетворяющие этим условиям, можно назвать системами непрерывного действия, и в них пользователь в течение фиксированного времени получает требуемую услугу сразу после своего прихода. Подобный способ обслуживания очень удобен потребителю, так как не привязывает его к графику работы системы обслуживания, не требует задержки пользователя в очереди и поэтому вписывается, например, в программу «Умный город».

Наряду с рассмотренными однофазными системами обслуживания в работе построены различные конвейерные системы обслуживания непрерывного действия: многофазные системы, древовидные системы и ациклические системы обслуживания непрерывного действия. Такие системы моделируют работу непрерывных транспортных линий (конвейеров), включенных в процесс маркировки, упаковки, сортировки и перемещения продукции в производственных логистических системах. Для исследования систем обслуживания непрерывного действия разработана специальная математическая техника, основанная на вероятностных расчетах и элементах теории графов.

1. Математическая модель системы обслуживания непрерывного действия

Рассмотрим систему массового обслуживания с нестационарным пуассоновским входным потоком интенсивности $\lambda(t)$, $t \geq 0$, детерминированным временем a пребывания пользователя в системе. Обозначим $n(t)$ количество пользователей в системе в момент $t \geq 0$. Полагаем, что интенсивность

пуассоновского потока $\lambda(t)$, $0 \leq t \leq T$, является непрерывной функцией времени t . Для удобства вычислений следует предположить, что $\lambda(t) = 0$ при $t < 0$ и $t > T$. В этом случае число пользователей $n(t)$ имеет пуассоновское распределение с параметром

$$\Lambda(t) = \int_{\tau-a}^{\tau} \lambda(\tau) d\tau. \quad (1)$$

Пусть в независимые случайные моменты времени T_k , $k=1, \dots, n$, с непрерывными плотностями распределения $p_k(t)$, $k=1, \dots, n$, наряду с этими заявками в систему приходят группы пользователей, количества которых независимы друг от друга, имеют пуассоновское распределение с параметрами λ_k и не зависят от пуассоновского потока интенсивности $\lambda(t)$. Пребывание каждой такой группы строго регламентируется моментами T_k начала и $T_k + a$ окончания обслуживания. Тогда в момент времени t число пользователей в системе имеет пуассоновское распределение с параметром $\Lambda(t)$, удовлетворяющим равенству

$$\Lambda(t) = \int_{\tau-a}^{\tau} \bar{\lambda}(\tau) d\tau, \quad \bar{\lambda}(\tau) = \lambda(\tau) + \sum_{k=1}^n \lambda_k p_k(\tau). \quad (2)$$

Так как функции $\lambda(t)$, $p_k(t)$, $k=1, \dots, n$, непрерывны, то функция $\Lambda(t)$ непрерывно дифференцируема.

Таким образом, построена модель массового обслуживания непрерывного действия.

Замечание 1. Для сравнения заметим, что при допуске пользователей в фиксированные моменты времени функция $\Lambda(t)$ кусочно постоянна и время ожидания посетителей в очереди положительно. При этом в системе непрерывного действия время ожидания равно нулю.

Предположим теперь, что имеется r независимых пуассоновских потоков с интенсивностями $\lambda_1(t), \dots, \lambda_r(t)$, а детерминированное время обслуживания заявки j -го потока равно β_j , $j=1, \dots, r$. Тогда число пользователей в системе в момент t имеет пуассоновское распределение с параметром

$$\Lambda(t) = \sum_{j=1}^r \int_{\tau-\beta_j}^{\tau} \lambda_j(\tau) d\tau. \quad (3)$$

Замечание 2. Предложенная в этом разделе математическая модель системы обслуживания непрерывного действия основана на наблюдениях за реально функционирующим спорткомплексом. Переход в этом комплексе к системе обслуживания непрерывного действия существенно улучшил качество обслуживания, сгладил нагрузку на систему в реальном времени и позволил пользователям не зависеть от переменной транспортной ситуации в городе.

2. Математическая модель ациклической сети обслуживания непрерывного действия

В настоящем разделе рассматриваются различные сети обслуживания непрерывного действия: многофазная система, сеть с древовидной структурой, сеть с ациклической структурой. Такие сети могут возникнуть не только при обслуживании пользователей, но и в конвейерных системах обработки различных деталей.

Многофазные системы обслуживания непрерывного действия. Рассмотрим m -фазную систему обслуживания с детерминированными временами a_i обслуживания на i -й фазе, $i=1, \dots, m$. Пусть пуассоновский входной поток имеет непрерывную интенсивность $\lambda(t)$, $0 \leq t \leq T$, причем $\lambda(t) = 0$ при $t < 0$ и $t > T$. Тогда число пользователей $n_i(t)$ на i -й фазе в момент времени t имеет пуассоновское распределение с параметром

$$\Lambda_i(t) = \int_{t-a_i-a_{i-1}-\dots-a_1}^{t-a_{i-1}-\dots-a_1} \lambda(\tau) d\tau, \quad 1 < i \leq m, \quad \Lambda_1(t) = \int_{\tau-a_1}^{\tau} \lambda(\tau) d\tau. \quad (4)$$

Сети обслуживания непрерывного действия с древовидной структурой. Предположим, что в корень 0 ориентированного дерева D поступает входной пуассоновский поток интенсивности $\lambda(t)$. Множество вершин K дерева D состоит из непересекающихся подмножеств $K_l, l = 0, \dots, L, K_0 = \{0\}$. Заявка, окончив обслуживаться в узле $k \in K_l$ детерминированное время a_k , с положительной вероятностью $p_{k,t}$ перемещается в один из узлов множества K_{l+1} . Обозначим $K_{k,l+1} \subseteq K_{l+1}$ совокупность узлов множества K_{l+1} , куда могут переходить заявки из узла $k \in K_l$ с положительной вероятностью $p_{k,t}, t \in K_{k,l+1}, \sum_{t \in K_{k,l+1}} p_{k,t} = 1$, причем $K_{k,l+1} \cap K_{k^*,l+1} = \emptyset, k, k^* \in K_l, k \neq k^*$, следовательно, в узел $t \in K_{k,l+1}$ могут переходить только заявки из узла $k \in K_l$.

Обозначим p_k вероятность поступления заявки входного потока в вершину $k \in K_l$ и положим T_k – суммарное время пребывания заявки в сети до момента ее выхода из вершины k . Из определения сети с древовидной структурой следует, что из вершины 0 в вершину $k \in K_l$ существует единственный путь

$$\gamma_k = \{0, s(1), s(2), \dots, s(l-1), s(l) = k\}, s(1) \in K_1, \dots, s(l-1) \in K_{l-1}, k \in K_l,$$

и значит выполняются равенства

$$p_k = p_{0,s(1)} \cdot p_{s(1),s(2)} \cdot \dots \cdot p_{s(l-1),k}, T_k = a_0 + a_{s(1)} + a_{s(2)} + \dots + a_{s(l-1)} + a_k. \quad (5)$$

Используя формулу (4), получаем, что в момент времени t случайное число заявок в вершине k имеет пуассоновское распределение с параметром

$$\Lambda_k(t) = \int_{\tau-T_{s(l-1)}}^{\tau-T_k} p_k \lambda(\tau) d\tau. \quad (6)$$

Заметим, что пуассоновские случайные потоки, поступающие в вершины $k \in K_l$, и, значит, пуассоновски распределенные случайные величины, характеризующие число заявок в вершинах $k \in K_l$ в момент $t \geq 0$, также независимы. Следовательно, если $S \subseteq K_l$, то число заявок, находящихся в момент времени t в множестве вершин S имеет пуассоновское распределение с параметром

$$\Lambda_S(t) = \sum_{k \in S} \Lambda_k(t). \quad (7)$$

Ациклические сети обслуживания непрерывного действия. Предположим теперь, что структура сети обслуживания непрерывного действия определяется ациклическим орграфом F с входной вершиной 0. Полагаем, что на множестве K вершин ациклического орграфа F определяется отношение частичного порядка между вершинами $i \succ j$, если и только если в F существует путь из вершины i в вершину j . Пусть в множестве K вершина 0 является единственной максимальной в смысле порядка \succ вершиной, и значит из нее можно провести путь в любую другую вершину.

В [10] построен алгоритм вычисления максимальной (по числу ребер) длины $L(i)$ пути из вершины 0 в любую другую вершину i . Множество K разбивается на непересекающиеся подмножества K_0, K_1, \dots, K_L , по правилу $K_l = \{i: L(i) = l\}, l = 0, 1, \dots, L$. Причем любое ребро орграфа F идет из вершины множества i в вершину j , только если $L(i) < L(j)$. Если $L(j) - L(i) = r > 1$, то в ребро (i, j) можно ввести фиктивные вершины $i_1 \in K_{L(i)+1}, \dots, i_{r-1} \in K_{L(i)+r-1}$. В результате дополненный фиктивными вершинами орграф, обозначим его F_1 , как и орграф F , также является ациклическим.

Действительно, при такой замене ребро (i, j) преобразуется в последовательность ребер, идущих одно за другим. Следовательно, в каждую вновь введенную вершину входит ровно одно ребро и из каждой вновь введенной вершины выходит ровно одно ребро. Поэтому доказательство ациклическости орграфа F_1 можно проводить от обратного.

Предположим, что переход из вершины i в следующую за ней фиктивную вершину j осуществляется с единичной вероятностью, а время пребывания заявки в фиктивной вершине j

удовлетворяет равенству $a_j = 0$. Индукцией по L преобразуем оргграф F_1 в древовидный оргграф F_2 . Если в вершину j оргграфа F_1 входит несколько ребер, то эту вершину делим на несколько вершин j_1, \dots, j_s так, чтобы в каждую из них входило только одно ребро. Такое преобразование ациклического оргграфа F_1 в оргграф F_2 никак не меняет процесс обслуживания заявок, поскольку в сети нет задержек заявок в очередях перед обслуживанием. Следовательно, для древовидной сети F_2 можно применить формулу (6). Причем в момент $t > 0$ случайные количества заявок в фиктивных вершинах j_1, \dots, j_s имеют пуассоновские распределения и являются независимыми, поэтому параметр этого распределения, задающего в момент $t > 0$ число точек в вершине $j \in F_1$, вычисляется по формуле (7).

Пример. Пусть ациклическая сеть обслуживания F состоит из вершин 0, 1, 3. Заявка входного потока обслуживается в вершинах 0, 1, 3 детерминированное время a_0, a_1, a_3 соответственно и с вероятностями $p_{0,1}, p_{0,3}, p_{1,3}$, причем $p_{0,1} + p_{0,3} = 1, p_{1,3} = 1$, переходит после обслуживания из одной вершины в другую. Преобразуем сеть F в сеть F_1 , добавляя фиктивную вершину 2 между вершинами 1 и 3, при этом переходные вероятности $p_{0,2} = p_{0,3}, p_{2,3} = 1$, а время обслуживания в этой вершине $a_2 = 0$. Далее преобразуем сеть F_1 в сеть F_2 , разделив вершину 3 на две вершины: 3.1, 3.2.

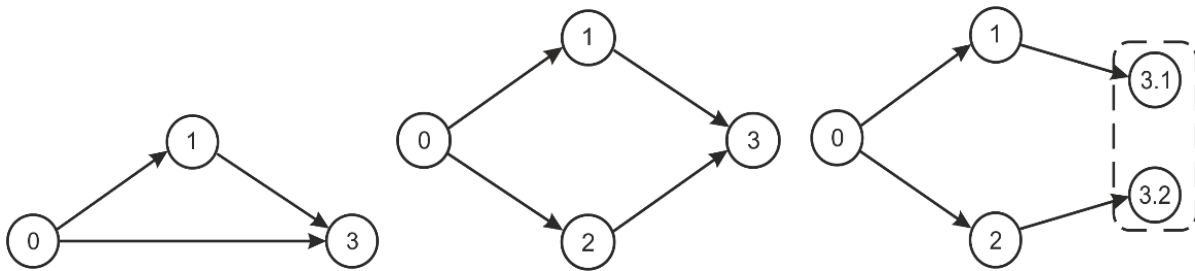


Рис 1. Сеть F (слева), сеть F_1 (по\ середине), сеть F_2 (справа)
 Fig. 1. Network F (left), Network F_1 (in the middle), Network F_2 (right)

Тогда параметры пуассоновского распределения числа заявок в вершинах сети F_2 рассчитываются по формулам

$$\Lambda_0(t) = \int_{t-a_0}^t \lambda(\tau) d\tau, \quad \Lambda_1(t) = \int_{t-a_0-a_1}^{t-a_0} p_{0,1} \lambda(\tau) d\tau, \quad \Lambda_2(t) = \int_{t-a_0}^t p_{0,2} \lambda(\tau) d\tau,$$

$$\Lambda_{3,1}(t) = \int_{t-a_0-a_1-a_{3,1}}^{t-a_0-a_1} p_{0,1} \lambda(\tau) d\tau, \quad \Lambda_{3,2}(t) = \int_{t-a_0-a_1-a_{3,2}}^{t-a_0-a_1} p_{0,2} \lambda(\tau) d\tau, \quad \Lambda_3(t) = \Lambda_{3,1}(t) + \Lambda_{3,2}(t).$$

Заключение

В настоящей работе построена математическая модель системы массового обслуживания непрерывного действия. В этой модели предполагается, что входной поток заявок является пуассоновским с меняющейся интенсивностью. Заявки сразу после своего поступления начинают обслуживаться. Время обслуживания является детерминированным. Данная модель вполне согласуется с наблюдениями за работой бассейна в спорткомплексе. Методы расчета такой системы существенно проще известных методов анализа систем массового обслуживания с меняющейся интенсивностью входного потока. Это позволяет обобщить данную модель на многофазные, древовидные и ациклические системы обслуживания конвейерного типа, встречающиеся в конвейерных системах обработки различных деталей. При таком обобщении используются как вероятностные методы, так и методы прикладной теории графов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горцев А.М. Адаптивное управление потоками задач в вычислительной системе // Автоматика и вычислительная техника. 1982. № 6. С. 53–60.
2. Догадина Е.П., Холкина Н.Е. Математическая модель функционирования производственных процессов с учетом их особенностей // Системы управления, связи и безопасности. 2016. Вып. 1. С. 1–9.
3. Дуплякин В.М., Княжева Ю.Н. Выбор закона распределения входного потока заявок при моделировании системы массового обслуживания торгового предприятия // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. 2012. № 1 (37). С. 102–111.
4. Поршнев С.В., Корелин И.А. Исследование особенностей нестационарной одноканальной системы массового обслуживания в разрезе числа обслуженных заявок // Cloud of Science. 2017. V. 3, No. 4. P. 366–374.
5. Greenfield A. Against the Smart City. London : Verso, 2013. 152 p.
6. Boyle D.E., Yates D.C., Yeatman E.M. Urban Sensor Data Streams: London 2013 // IEEE Internet Computing. 2013. V. 17, No. 6. P. 12–20.
7. Намиот Д.Е., Шнепс-Шнеппе М.А. Об отечественных стандартах для Умного города // Int. J. of Open Information Technologies. 2016. V. 4, No. 7. P. 3–36.
8. Ивницкий В.А. Теория сетей массового обслуживания. М. : Физматлит, 2004. 772 с.
9. Катрахов В.В., Рыжков Д.Е. Введение в функционально-аналитический метод в динамической теории массового обслуживания. Владивосток : Изд-во ДВГУ, 2004. 102 с.
10. Цициашвили Г.Ш., Осипова М. А. Стационарные потоки в ациклических сетях массового обслуживания // Дальневосточный математический журнал. 2016. Т. 16, № 2. С. 223–228.

Поступила в редакцию 14 февраля 2020 г.

Tsitsiashvili G.Sh. (2020) NON-STATIONARY POISSON MODEL OF CONTINUOUSLY FUNCTIONING QUEUING SYSTEM. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 52. pp. 98–103

DOI: 10.17223/19988605/52/12

The study of non-stationary queuing systems is relating to their important applications in computing systems. Algorithms for calculating non-stationary queuing service systems are quite complex. Nevertheless, the development of modeling of production processes and communications, trade processes and consumer services requires the development of methods for calculating such queuing systems. In this regard, we should mention the currently actively developing state programs "Smart city" and "Digitalization of the economy", requiring the development and specification of methods for calculating non-stationary queuing systems. Therefore, it is necessary to build non-stationary service models in such a way that their calculation would be quite simple and convenient for calculations.

In this paper, the construction of such service models is basing on the assumptions of deterministic service time, Poisson nature of the input non-stationary flow of customers, and the presence of an infinite number of servers, which excludes the presence of customers in the queue. Queuing systems that meet these conditions may be called continuous systems, and in them, the user receives the required service immediately after his arrival for a fixed time. This method of service is very convenient for the consumer, because it does not link it to the schedule of the service system. This is why such service systems fit perfectly, for example, in the "Smart city" program.

In addition to the single-phase continuous queuing systems described above, various continuous conveyor service systems are available. These include continuous transport lines that are included in the process of marking and packaging products; sorting lines designed to move goods during sorting in logistics systems; secondary packaging lines that provide storage, protection, marking and transportation to storage locations; production logistics systems combining equipment and continuous vehicles (conveyors) to participate in the process of production, sorting and labeling of industrial products.

In this paper, a special mathematical technique based on graph theory along with probabilistic calculations is developing for the study of continuous service systems.

A mathematical model of a continuous queuing system can serve as a non-stationary Poisson flow of intensity $\lambda(t)$, $t \geq 0$, the moments of arrival of customers, the deterministic time a of user's stay in the system, as well as the number of users $n(t)$ in the system at the time $t \geq 0$. At the first stage, we assume that the intensity of the Poisson flow $\lambda(t)$, $0 \leq t \leq T$, is a continuous function of time t . However, for the convenience of calculations, we should assume that for $t < 0$ and for $t > T$, the function $\lambda(t) = 0$. In this case, the number of users $n(t)$ has a Poisson distribution with the parameter $\Lambda(t) = \int_{\tau-a}^t \lambda(\tau) d\tau$.

However, there is many different generalizations of such a model: when, along with free swimming, groups of users come to the pool at some fixed moments, multi-phase system, and system with tree like structure or acyclic structure and so on. All these systems are considering in this paper also.

Keywords: queuing system; Poisson input flow with varying intensity; multiphase and tree-based service systems.

TSITSIASHVILI Gurami Shalvovich (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch of RAS, Vladivostok, Russian Federation).

E-mail: guram@iam.dvo.ru

REFERENCES

1. Gortsev, A.M. (1982) Adaptive control of flows of customers in a computing system. *Avtomatika i vychislitel'naya tekhnika – Automatic Control and Computer Sciences*. 6. pp. 53–60.
2. Dogadina, E.P. & Kholkina, N.E. (2016) Mathematical Model of the Production Processes, Taking into Account Their Specific Features. *Sistemy upravleniya, svyazi i bezopasnosti – Systems of Control, Communication and Security*. 1. pp. 1–9.
3. Duplyakin, V.M. & Knyazeva, Yu.N. (2002) Choice of the law of distribution of the input flow of customers in modeling the queuing system of a commercial enterprise. *Vestnik Samarskogo gosudastvennogo aerokosmicheskogo universiteta – Vestnik Of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 1(37). pp. 102–111.
4. Porshnev, S.V. & Karelin, I.A. (2017) Research of features of non-stationary single-server queuing system in the context of the number of serviced customers. *Cloud of Science*. 4(3). pp. 366–374.
5. Greenfield, A. (2013) *Against the Smart City*. London: Verso.
6. Boyle, D.E., Yates, D.C. & Yeatman, E.M. (2013) Urban Sensor Data Streams: London. *IEEE Internet Computing*. 17(6). pp. 12–20. DOI: 10.1109/MIC.2013.85
7. Namiot, D.E. & Schneps-Schnappe, M.A. (2016) About domestic standards for Smart cities. *Int. J. of Open Information Technologies*. 4(7). pp. 32–36.
8. Ivnitky, V.A. (2004) *Teoriya setey massovogo obsluzhivaniya* [Theory of Queuing Networks]. Moscow: Fizmatlit.
9. Katrakhov, V.V. & Ryzhkov, D.E. (2004) *Vvedenie v funktsional'no-analiticheskiy metod v dinamicheskoy teorii massovogo obsluzhivaniya* [Introduction to the functional-analytical method in the dynamic theory of queuing]. Vladivostok: Far East State University.
10. Tsitsiashvili, G.Sh. & Osipova, M.A. (2016) Stationary flows in acyclic queuing networks. *Dal'nevostochnyy matematicheskiy zhurnal – Far Eastern Mathematical Journal*. 16(2). pp. 223–228.

ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

УДК 621.31

DOI: 10.17223/19988605/52/13

А.В. Асадчий, А.И. Солдатов, О.Х. Ким, А.А. Солдатов

ОЦЕНКА РЕСУРСОВ ОЗУ ПРИ КОНТРОЛЕ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Работа выполнена в рамках Программы повышения конкурентоспособности ТПУ.

Рассматриваются функции устройств контроля и функции сбора данных. Описаны возможные способы минимизации объема сохраняемых данных. Предложены способ и устройство, позволяющие минимизировать объем сохраняемых данных, которые основаны на синхронизации получения отсчетов с изменениями электрических параметров во времени. Продемонстрированы требования, предъявляемые к устройству. Проведена экспериментальная оценка объема сохраняемых данных при изменении параметров дифференцирующего устройства. Уточнена разница в объемах требуемой памяти при двух значениях постоянной времени дифференцирующей цепи.

Ключевые слова: устройство контроля; генератор, управляемый напряжением; спектр; дифференцирующая цепь; постоянная времени дифференцирования; оперативное запоминающее устройство.

В практике управления большое значение имеют устройства контроля технических объектов (дискретных или аналоговых), которые позволяют проводить оценку их рабочего состояния по полученным измерениям [1–6]. Функции данных устройств заключаются в слежении за параметрами контролируемых объектов, их обработке и выдаче информации потребителю в определенной форме [7]. К данным устройствам также предъявляется требование выполнения функции накопления информации за определенный период времени штатной работы и до момента аварии с последующей фиксацией данных.

Как известно, для выполнения функции хранения данных необходимо использование элементов памяти, которые, в свою очередь, подвергаются физическому износу при многократных перезаписях информации. Данная задача на сегодняшний день решается различными способами, а именно: увеличение объема памяти с применением схемотехнических решений, использование современной элементной базы или применение алгоритмов сжатия информации [8–10].

Каждый из этих способов имеет свои достоинства и недостатки. Схемотехнические методы наращивания объема оперативного запоминающего устройства (ОЗУ) приводят к усложнению структуры устройства, увеличению габаритных показателей и снижению надежности. Алгоритмические способы при большем количестве контролируемых параметров могут значительно задействовать вычислительные ресурсы. Также стоит отметить, что не каждый способ сжатия способен обработать высокочастотные изменения контролируемых параметров, при этом может происходить пропуск информации о контролируемом параметре.

Одним из возможных вариантов оптимизации сохранения данных может быть синхронизация процесса обработки информации с процессом изменения контролируемого параметра. Данный способ позволяет контролировать параметр с переменной частотой записи информации, которая зависит от скорости изменения самого контролируемого параметра [11].

1. Минимизация объема сохраняемых данных

Для реализации этого способа был разработан блок синхронизации, структурная схема которого приведена на рис. 1. Основная функция данного блока – изменение частоты записываемой в память информации в зависимости от скорости изменения контролируемого параметра [11, 12].

Блок состоит из следующих узлов: согласующего устройства (СУ), аналогово-цифрового преобразователя (АЦП), дифференцирующего устройства (ДУ), генератора, управляемого напряжением (ГУН), микроконтроллера (МК), запоминающего устройства (ЗУ), персонального компьютера (ПК).

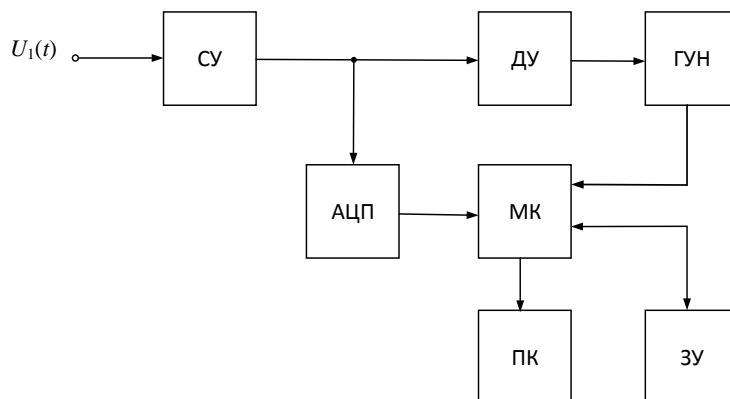


Рис.1. Структурная схема устройства
Fig. 1. Structural scheme of device

Принцип работы заключается в следующем. Контролируемый параметр $U_1(t)$ поступает на вход согласующего устройства, где он преобразовывается до уровня, необходимого для работы аналогово-цифрового преобразователя и дифференцирующего устройства. Аналогово-цифровой преобразователь преобразовывает контролируемый сигнал в цифровую форму и передает данные на микроконтроллер. Дифференцирующее устройство формирует на своем выходе значение напряжения, пропорциональное скорости изменения контролируемого параметра. Выходное напряжение дифференцирующего устройства поступает на генератор, управляемый напряжением, который формирует импульсы синхронизации, необходимые для работы микроконтроллера [13, 14]. Микроконтроллер сохраняет информацию о контролируемом параметре в запоминающее устройство, а также запрашивает данную информацию из запоминающего устройства по команде с персонального компьютера. Персональный компьютер через свой интерфейс связи обеспечивает взаимодействие между пользователем (оператором) и микроконтроллером, а также отображает информацию о контролируемых параметрах [14].

2. Требования, предъявляемые к устройству

Одним из важных факторов, влияющих на объем сохраняемых данных, является постоянная времени дифференцирования, которая характеризует длительность протекания переходного процесса.

Как известно [15, 16], при дифференцировании входного импульса активная ширина его спектра ограничена граничной частотой $f_{гр}$.

Если неравенство [16] $\omega RC \leq 0,25$ выполняется при $\omega = 2\pi f_{гр}$, то оно будет обязательно выполняться и при $f < f_{гр}$. Это позволяет из активной ширины спектра сигнала определить требования к постоянной времени дифференцирующей цепи:

$$\omega RC = 2\pi f_{гр} RC = 0,25. \quad (1)$$

Для грубой оценки активной ширины спектра сигнала при $t_{\phi} = t_c$ можно использовать приближенное выражение:

$$f_{гр} \approx K_c / t_{\phi},$$

где $K_C = 0,2-0,4$ для импульсов, у которых $t_\phi/t_{и}$ и $t_c/t_{и} < 0,2$, t_ϕ – длительность фронта, t_c – длительность спада импульса, $t_{и}$ – длительность плоской вершины импульса.

Тогда, подставив в (1) значение $f_{гр}$, получим оценку для значения RC (при $K_C \approx 0,4$):

$$RC = \frac{0,25t_\phi}{(2\pi K_C)} = 0,1t_\phi.$$

Таким образом, постоянная времени дифференцирующей RC -цепи должна быть примерно в 10 раз меньше активной длительности фронта (спада) дифференцируемого импульса.

Как известно, любой контролируемый сигнал имеет свою форму спектральной плотности, по которой можно определить требуемую частоту дискретизации, необходимую для его восстановления с заданной точностью.

Рассмотрим сигнал в виде случайного переходного процесса и проведем анализ его спектральной плотности по аппроксимированной функции. Длительность спада импульса составляет t_c (рис. 2).

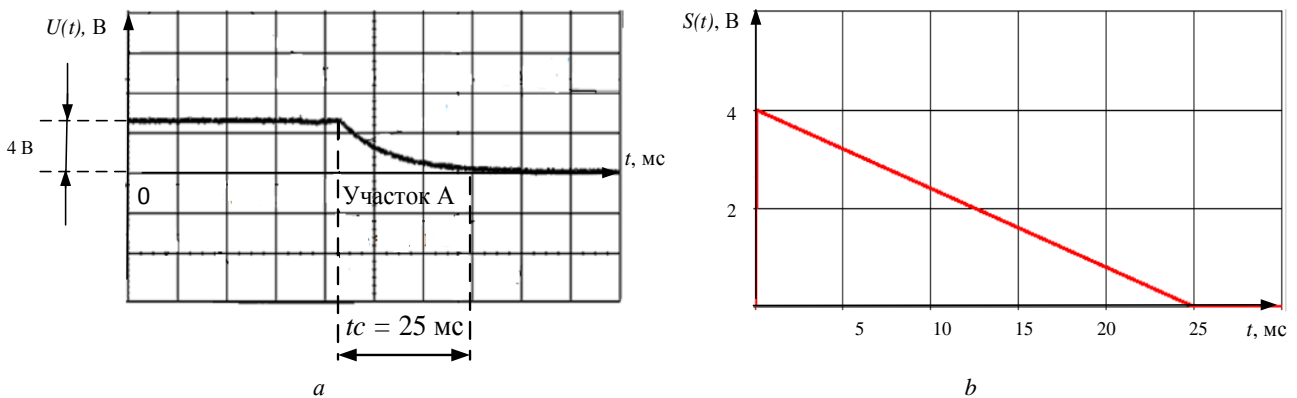


Рис. 2. Случайный переходный процесс (а) и его аппроксимированная функция (b)
 Fig. 2. Random transient (a) and approximated function (b)

Для упрощения анализа аппроксимированная функция построена только для участка, изменяющегося во времени, а именно участка А, остальные участки исключены.

Аппроксимированная функция выражена через поинтервальное описание и имеет вид:

$$S(t) = \begin{cases} S(t_0) - \frac{S(t_0)}{t_c} \cdot t, & t \in [0; t_c.] \\ 0, & t \in (-\infty; 0) \cup (t_c; +\infty). \end{cases}$$

Исходя из теоремы Котельникова, частоту дискретизации ω_d выбирают так, чтобы $\omega_d = 2\omega_B$, где ω_B – верхняя граничная частота спектра сигнала.

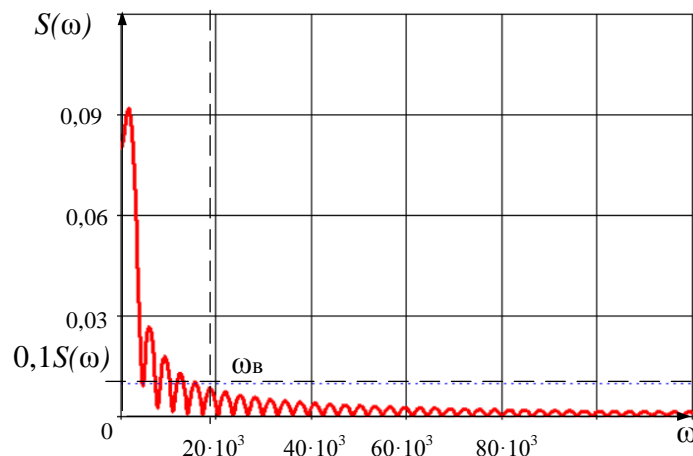


Рис. 3. Спектральная плотность сигнала $S(t)$
 Fig. 3. Spectral density of $S(t)$ signal

Верхнюю граничную частоту ω_B определяют, исходя из построения функции спектральной плотности по пороговому критерию. Выражение для спектральной плотности функции, изображенной на рис. 2, имеет вид:

$$\dot{S}(\omega) = \int_0^{t_c} S(t)e^{-j\omega t} dt.$$

где j – мнимая единица ($j = \sqrt{-1}$); ω – круговая частота.

Исходя из графика модуля спектральной плотности (рис. 3), для определения верхней граничной частоты спектра сигнала воспользуемся пороговым критерием: на частотах выше ω_B модуль спектральной плотности не должен превышать уровня 0,1 от максимального значения.

Из рис. 3 можно определить ω_B и, соответственно, частоту дискретизации f_d .

3. Экспериментальная часть

Проведем экспериментальную оценку ресурсов памяти, которые необходимы для сохранения данных при трех значениях постоянной времени RC -цепи дифференцирующего устройства, и обозначим их: $\tau_1 = 0,01t_c$, $\tau_2 = 0,1t_c$, и $\tau_3 = t_c$. Дифференцируемый сигнал представлен в виде экспоненциально спадающего импульса с длительностью плоской вершины 30 мс и длительностью спада $t_c = 25$ мс (см. рис. 2). Из спектральной плотности сигнала определяем диапазон рабочих частот ГУН 50–10 кГц. Стоит отметить, что 50 Гц – это нижняя рабочая частота ГУН.

Результаты эксперимента для трех значений постоянной времени представлены на рис. 4–6 соответственно. Рисунки 4, а–б, а условно разбиты на три участка, которые характеризуют определенный процесс: участок А» и участок В характеризуют установившийся процесс, участок Б представляет спадающий аperiодический процесс. На рис. 4, б–б, б представлены исходные и восстановленные сигналы.

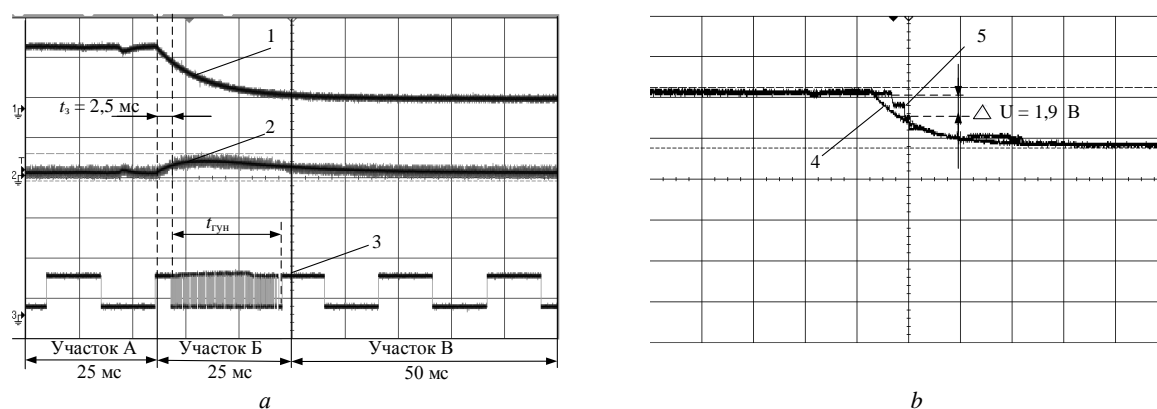


Рис. 4. Дифференцирование переходного процесса (а): $\tau_1 = 0,01t_c$. Восстановленный и исходный сигнал (б): 1 – переходный процесс; 2 – выход ДУ; 3 – выходные импульсы ГУН, 4 – исходный сигнал, 5 – восстановленный сигнал
Fig. 4. Differentiation of transient process (а): $\tau_1 = 0,01t_c$. Restored and original signal (б): 1 – transient process, 2 – output voltage of differentiator, 3 – output pulses of voltage controlled oscillator, 4 – original signal, 5 – restored signal

Проведем количественную оценку объема сохраняемых данных для участка Б при значениях постоянной времени $\tau_1 = 0,01t_c = 0,25$ мс (см. рис. 4, а). На этом участке выходное напряжение дифференцирующего устройства составляет 0,5 В и практически не изменяется. Длительность этого участка 25 мс, однако время работы ГУН на максимальной частоте $t_{гун\ макс}$ составило порядка 20 мс. При входном напряжении ГУН 0,5 В его частота работы равна 3 кГц, а период дискретизации $T_d = 333$ мкс. Для обеспечения высокой точности восстановления сигнала используем 16-разрядный АЦП.

Определим количество отсчетов, затраченных для сохранения данных о переходном процессе за время генератора, управляемого напряжением, $t_{гун}$:

$$N_1 = \frac{t_{гун}}{T_d} = 60.$$

Объем требуемой памяти определится как

$$V = N_1 \cdot M = 960 \text{ бит.}$$

Дополнительно стоит отметить, что на рис. 4, *а* имеется время задержки $t_3 = 2,5$ мс, обусловленное инертностью генератора, управляемого напряжением, и плавным нарастанием фронта выходного импульса дифференцирующего устройства. Очевидно, что данный фактор приведет к значительной погрешности восстановленного сигнала (см. рис. 4, *б*), так как количество отсчетов на данном участке минимально.

Определим максимальную погрешность восстановления сигнала (рис. 4, *б*). Максимальное отклонение восстановленного сигнала от исходного равно $\Delta U = 1,9$ В. Полный размах исходного сигнала составляет 4 В (см. рис. 2, *а*). Следовательно, значение погрешности составит (при $U = 4$)

$$\delta = \frac{\Delta U \cdot 100}{U} \% = 47,5 \%,$$

где U – полный размах исходного сигнала, ΔU – максимальное отклонение восстановленного сигнала от исходного.

На рис. 5. представлен процесс дифференцирования переходного процесса при $\tau_2 = 0,1t_c$.

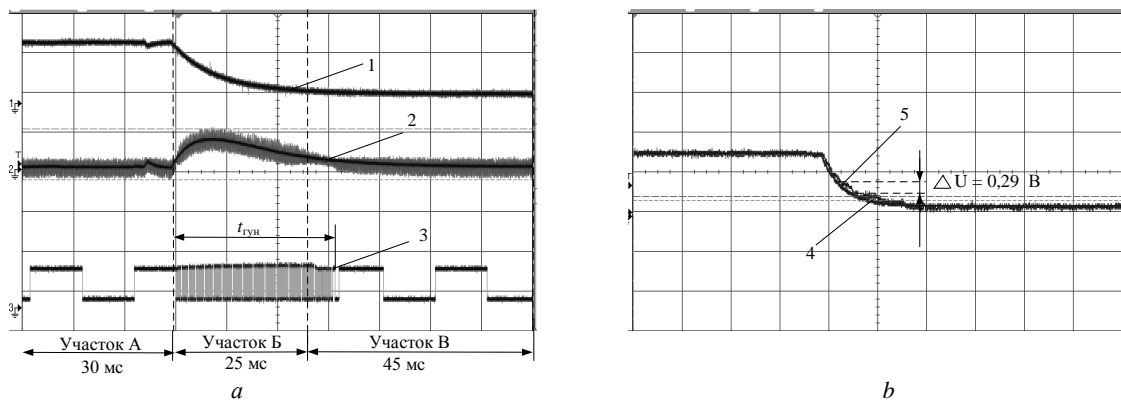


Рис. 5. Дифференцирование переходного процесса (*а*): $\tau_2 = 0,1 \cdot t_c$. Восстановленный и исходный сигнал (*б*): 1 – переходный процесс; 2 – выход ДУ; 3 – выходные импульсы ГУН, 4 – исходный сигнал, 5 – восстановленный сигнал

Fig. 5. Differentiation of transient process (*а*): $\tau_2 = 0,1 \cdot t_c$. Restored and original signal (*б*): 1 – transient process, 2 – output voltage of differentiator, 3 – output pulses of voltage controlled oscillator, 4 – original signal, 5 – restored signal

Проведем количественную оценку объема сохраняемых данных при значениях постоянной времени $\tau_2 = 0,1t_c = 2,5$ мс. Для этого случая максимальное выходное напряжение дифференцирующего устройства получилось 1 В. При входном напряжении ГУН 1 В его частота работы равна 6 кГц, а период дискретизации равен $T_d = 166$ мкс. Время работы ГУН на повышенной частоте $t_{гун}$ составило порядка 30 мс.

Определим количество отсчетов, затраченных для сохранения данных за время работы генератора, управляемого напряжением на повышенной частоте $t_{гун}$:

$$N_1 = \frac{t_{гун}}{T_d} = 180.$$

При этом длительность переходного процесса исходного сигнала t_c составляет 25 мс. Определим количество отсчетов необходимое для записи переходного процесса:

$$N_n = \frac{t_c}{T_d} = 150.$$

Объем требуемой памяти для записи переходного процесса определится как

$$V = N_n \cdot M = 12900 \text{ бит.}$$

Так как генератор, управляемый напряжением, работает на повышенной частоте больше времени переходного процесса, то в результате мы получаем избыточное количество тактовых импульсов, которые приведут к увеличению объема сохраняемых данных и требуемого объема ОЗУ. Определим избыточный объем данных, записываемых в ОЗУ, который обусловлен длительностью работы ГУН,

равной $t_{гун} = 30$ мс. Он будет определяться как разность количества бит, записанных в ОЗУ, и количества бит, необходимых для записи только переходного процесса, длительность которого равна 25 мс:

$$V_{из1} = N_1 \cdot M - N_{п} \cdot M = 480 \text{ бит.}$$

По результатам расчета видно, что избыточный объем памяти составит 480 бит при условии, что значение постоянной времени составляет $\tau_2 = 0,1t_c$. Максимальное отклонение восстановленного сигнала от исходного равно $\Delta U = 0,29$ В, следовательно, погрешность восстановления сигнала по рис. 5, б составит

$$\delta = \frac{\Delta U \cdot 100 \%}{U} = 7,25 \%,$$

где U – полный размах исходного сигнала, ΔU – максимальное отклонение восстановленного сигнала от исходного.

На рис. 6. представлен процесс дифференцирования переходного процесса при $\tau_3 = t_c$.

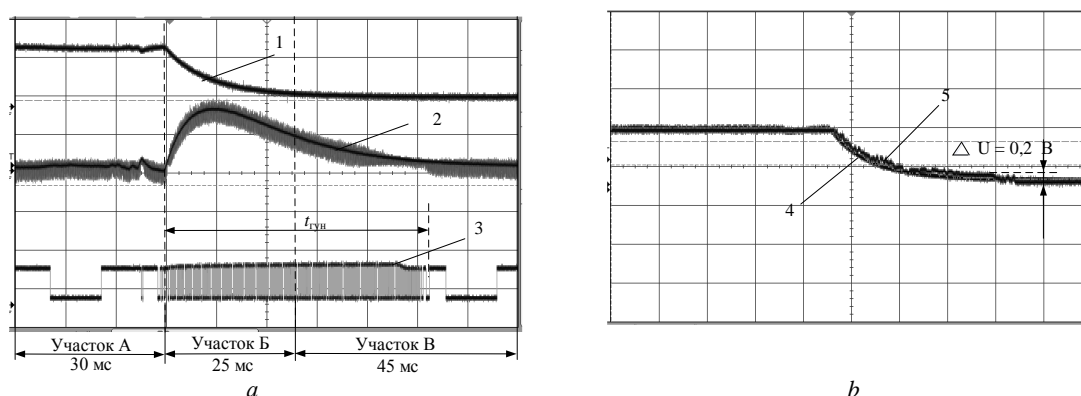


Рис. 6. Дифференцирование переходного процесса (а): $\tau_3 = t_c$. Восстановленный и исходный сигнал (б): 1 – переходный процесс; 2 – выход ДУ; 3 – выходные импульсы ГУН, 4 – исходный сигнал, 5 – восстановленный сигнал
Fig. 6. Differentiation of transient process (a): $\tau_3 = t_c$. Restored and original signal (b): 1 – transient process, 2 – output voltage of differentiator, 3 – output pulses of voltage controlled oscillator, 4 – original signal, 5 – restored signal

Для этого случая максимальное выходное напряжение дифференцирующего устройства получилось 2 В. При входном напряжении ГУН 2 В его максимальная частота работы равна 10 кГц, а период дискретизации $T_d = 100$ мкс. Время работы ГУН на повышенной частоте $t_{гун}$ составило порядка 52,5 мс.

Определим количество отсчетов затраченных для сохранения данных:

$$N_3 = \frac{t_{гун}}{T_d} = 525.$$

При этом длительность переходного процесса t_c также составляет 25 мс. Определим количество отсчетов, необходимое для записи переходного процесса:

$$N_n = \frac{t_c}{T_d} = 250.$$

Объем требуемой памяти для записи переходного процесса

$$V = N_{п} \cdot M = 4000 \text{ бит.}$$

Аналогичным образом, как при постоянной времени τ_2 , определим избыточный объем ОЗУ, который обусловлен увеличенной длительностью работы ГУН, равной $t_{гун} = 52,5$ мс:

$$V_{из2} = N_3 \cdot M - N_{п} \cdot M = 4400 \text{ бит.}$$

Максимальное отклонение восстановленного сигнала от исходного равно $\Delta U = 0,2$ В, следовательно, погрешность восстановления сигнала по рис. 6, б составит:

$$\delta = \frac{\Delta U \cdot 100 \%}{U} = 5 \%.$$

Оценим разницу в объемах требуемой памяти при двух значениях постоянной времени RC-цепи, а именно: при $0,1t_c$ и t_c (учитывая, что $V_{из1}(0,1t_c) = 480$):

$$\frac{V_{из2}(t_c)}{V_{из1}(0,1 \cdot t_c)} = 9,2.$$

Разница в объемах требуемой памяти для сохранения одного и того же контролируемого сигнала при двух значениях постоянной времени отличается в 9,2 раза.

На участках А и В для всех рассмотренных выше случаев частота работы ГУН составила 50 Гц, а период дискретизации $T_d = 20$ мс. Определим количество отсчетов, затраченных для сохранения данных:

$$N_4 = \frac{t_{\text{ГУН}}}{T_d} = 3,73 \approx 4.$$

Объем требуемой памяти для записи участков А и В определится как

$$V = N_n \cdot M = 48 \text{ бит.}$$

С учетом записи переходного процесса для случая $\tau_2 = 0,1 \cdot t_c$, получаем

$$V_1 = N_2 \cdot M + N_4 \cdot M = 2944 \text{ бит.}$$

При работе АЦП с постоянной частотой дискретизации получилось бы намного большее количество отсчетов:

$$N_2 = \frac{t_{\text{ГУН}}}{T_d} = 1000,$$

и объем требуемой памяти:

$$V_2 = N_n \cdot M = 16\,000 \text{ бит.}$$

Оценим разницу в объемах требуемой памяти:

$$\frac{V_2}{V_1} = 5,4.$$

Использование предложенного подхода для сохранения данных о контролируемых параметрах позволяет более чем в 5 раз уменьшить объем требуемого ОЗУ.

Заключение

Проведенные исследования показали, что при изменении постоянной времени дифференцирования пропорционально изменяется время работы ГУН на повышенной частоте, что приводит к увеличению общего объема сохраняемых данных и объема избыточной информации.

Оптимальный объем памяти для сохранения данных достигается при значениях постоянной времени дифференцирования, равной $0,1t_c$, так как при данном значении длительность переходного процесса близка к времени дифференцирования, при этом погрешность восстановления сигнала не превысила 7,5%.

При значении постоянной времени дифференцирования, равной $0,01t_c$, время дифференцирования меньше времени переходного процесса. При этом количество отсчетов АЦП будет минимальным, что позволяет уменьшить объем необходимой памяти для сохранения контролируемого параметра, однако погрешность восстановления сигнала оказывается очень большой.

При значении постоянной времени дифференцирования, равной t_c , время дифференцирования почти в 2 раза больше времени переходного процесса. Тогда количество отсчетов АЦП будет максимальным, и это увеличивает объем необходимой памяти для сохранения контролируемого параметра, при этом в память производится запись избыточной информации. Погрешность восстановления сигнала будет менее 5%, а разница в объемах требуемой памяти для сохранения одного и того же контролируемого сигнала при двух значениях постоянной времени отличается в 9,2 раза. Поэтому для уменьшения ресурсов ОЗУ оптимальное значение постоянной времени цепи должно составлять порядка $0,1t_c$.

Использование предложенного подхода для сохранения данных о контролируемых параметрах позволяет более чем в 5 раз уменьшить объем требуемого ОЗУ или при неизменных параметрах ОЗУ уменьшить его износ, поочередно используя разные его области.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мосин С.Г. Оптимизация построения нейроморфного справочника неисправностей для тестирования и диагностики аналоговых интегральных схем // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2019. № 48. С. 92–103.

2. Матросова А.Ю., Митрофанов Е.В., Шах Т. Упрощение контролепригодных комбинационных схем и поиск тестовых пар для неисправностей задержек путей // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2017. № 39. С. 85–93.
3. Сапожников В.В., Сапожников В.В., Ефанов Д.В., Пивоваров Д.В. Синтез систем функционального контроля многовыходных комбинационных схем на основе метода логического дополнения // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2017. № 41. С. 69–80.
4. Смирнов В.А. Поиск неисправностей в бортовых системах управления в процессе приемочного контроля // Информационно-управляющие системы. 2013. № 2. С. 24–28.
5. Голованов Д.А. Цифровое устройство диагностики для многоканальных вторичных источников питания // Электронные и электромеханические системы и устройства : сб. науч. тр. Томск : Изд-во Том. политехн. ун-та, 2016. С. 104–109.
6. Пат. 2682802 Российская Федерация, МПК G05B 23/02, G05B 21/02, G05R 19/255. Контрольное устройство / Асадчий А.В., Солдатов А.И., Солдатов А.А., Сорокин П.В. № 2017137456. Заявл. 25.10.2017; опубл. 21.03.2019.
7. Асадчий А.В., Солдатов А.И. Моделирование алгоритма формирования диагностических сигналов в преобразовательном устройстве при неисправностях // Неразрушающий контроль: электронное приборостроение, технологии, безопасность : материалы VI Всерос. науч.-техн. конф. студентов и молодых ученых. Томск, 2016. Т. 2. С. 8–12.
8. Асадчий А.В. Способ минимизации физического износа EEPROM-памяти для устройств контроля преобразователей напряжения // XXIV Макеевские чтения : материалы науч.-техн. конф. Екатеринбург : НПО автоматики им. акад. Н.А. Семихатова, 2017 С. 5–10.
9. Федулеева М.В. Разработка многоканального блока сжатия в составе измерительной системы / Известия ЮФУ. Технические науки. 2012. № 5 (130). С. 190–194.
10. Андрейко Д.Н., Комаров П.Ю., Игнатов Ф.М. Основные методы сжатия в передаче цифровых видеоизображений // Технологии информационного общества. 2013. № 9. С. 10–14.
11. Пат. 2687302 Российская Федерация, СПК G01R 19/165 (2019.02), G01R 19/257 (2019.02). Способ контроля параметров вторичного источника бесперебойного питания / Асадчий А.В., Солдатов А.И., Солдатов А.А., Сорокин П.В., Шульгина Ю.В., Костина М.А., Чубов С.В. № 2018133184. Заявл. 18.09.2018; опубл. 13.05.2019.
12. Пат. 2689323 Российская Федерация, СПК G01R 19/165 (2019.02), G01R 19/257 (2019.02). Устройство для контроля параметров вторичного источника бесперебойного питания / Асадчий А.В., Солдатов А.И., Солдатов А.А., Сорокин П.В., Шульгина Ю.В., Костина М.А., Чубов С.В. № 2018133185. Заявл. 18.09.2018; опубл. 27.05.2019.
13. Гальперин М.В. Введение в схемотехнику. М. : Энергоатомиздат, 1982. 120 с. (Библиотека по автоматике; вып. 623).
14. Гальперин М.В. Практическая схемотехника в промышленной автоматике. М. : Энергоатомиздат, 1987. 320 с.
15. Гусев В.Г., Гусев Ю.М. Электроника : учеб. пособие для вузов. М. : Высшая школа, 1982. 622 с.
16. Герасимов В.М., Скворцов В.А. Электронные цепи и микросхемотехника : учеб. пособие. Томск : Изд-во Том. гос. ун-та систем управления и радиозлектроники, 2004. Ч. 2: Схемотехника ключевых устройств формирования и преобразования сигналов. 209 с.

Поступила в редакцию 10 декабря 2019 г.

Asadchiy A.V., Soldatov A.I., Kim O.H., Soldatov A.A. (2020) EVALUATION OF THE AMOUNT OF RAM IN THE MONITORING OF TECHNICAL OBJECTS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tehnik i informatika.* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 52. pp. 104–113

DOI: 10.17223/19988605/52/13

The current state of control systems shows that the monitoring devices of technical objects are of great importance. Monitoring devices allow to evaluate the parameters of the testing object by the received data. Their main function is to monitor the parameters, process and transmit it to the consumer in a convenient form. Minimizing the amount of data without loss of quality is the main requirement in the construction of such devices.

One of the possible options for such minimization can be synchronization of the information processing with the change of the monitoring parameter. This method allows you to monitor the parameter with a variable frequency, which depends on the input rate.

Synchronization is carried out through the use of a differentiating circuit. The output signal of this circuit is used to change the frequency of the voltage-controlled oscillator (VCO), which determines the sampling period of the ADC. One important factor determining the amount of data is the differentiation time constant. As is known [15, 16], when differentiating the input pulse, the active width of its spectrum is limited by the boundary frequency f_{fp} . This allows you to determine the requirements for the time constant of the differentiating circuit:

$$RC \approx 0,1 \cdot t_{\phi}.$$

To analyze of the proposed approach, a linearly decreasing function was chosen:

$$S(t) = S(t_0) - \frac{S(t_0)}{t_f} \cdot t, \quad t \in [0; t_f],$$

where t_f is pulse fall time, $S(t_0)$ is initial value.

The analysis was carried out for three values of the derivative time constant: $\tau_1 = 0,01 \cdot t_f$, $\tau_2 = 0,1 \cdot t_f$, and $\tau_3 = t_f$. For these cases, the amount of data stored was 960, 2880 and 8400 bits, respectively. The distortion of the recovered signal was 47,5%; 7,25% and 5%, respectively. It should be noted that the increase of the derivative time constant leads not only to a decrease in the distortion of the restored signal, but also to an increase in the running time of the VCO at a high frequency and an increase in the amount of RAM, respectively.

Keywords: monitoring device; voltage-controlled oscillator; the spectrum; the differentiating circuit; the time constant of differentiation; random-access memory.

ASADCHIY Artem Vladimirovich (Postgraduate Student, Department of Electronic Engineering, School of Non-Destructive Testing and Safety, National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: asadchiav118@gmail.com

SOLDATOV Alexei Ivanovich (Doctor of Technical Sciences, Professor, Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Professor, National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: asoldatof@mail.ru

KIM Oleg Honbinovich (Scientist National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: oh.kim@mail.ru

SOLDATOV Andrey Alexeevich (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Associate Professor, National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation).
E-mail: Soldatov.88@bk.ru

REFERENCES

1. Mosin, S.G. (2019) Optimization of constructing the neuromorphic fault dictionary for testing and diagnostics of analog ICs. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 48. pp. 92–103. DOI: 10.17223/19988605/48/12
2. Matrosova, A., Mitrofanov, E. & Shah, T. (2017) Simplification of fully delay testable combinational circuits and finding of PDF test pairs. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 39. pp. 85–93. DOI: 10.17223/19988605/39/11
3. Sapozhnikov, V.V., Sapozhnikov, V.V., Efanov, D.V. & Pivovarov, D.V. (2017) Synthesis of concurrent error detection systems of multioutput combinational circuits based on Boolean complement method. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 41. pp. 69–80. DOI: 10.17223/19988605/41/9
4. Smirnov, V.A. (2013) Malfunction Searching in Onboard Control Systems during Acceptance Control. *Informatsionno-upravlyayushchie sistemy – Information and Control Systems*. 2. pp. 24–28.
5. Golovanov, D.A. (2016) Tsifrovoye ustroystvo diagnostiki dlya mnogokanal'nykh vtorichnykh istochnikov pitaniya [Digital diagnostic device for multichannel power supplies]. In: *Elektronnye i elektromekhanicheskie sistemy i ustroystva* [Electronic and electromechanical systems and devices]. Tomsk: Tomsk Polytechnic University. pp. 104–109.
6. Asadchiy, A.V., Soldatov, A.I., Soldatov, A.A. & Sorokin, P.V. (2017) Device for control. *Patent of the Russian Federation*. № 2682802. MPK G05B 23/02, G05B 21/02, G05R 19/255. Application dated October 25, 2017; published March 21, 2019.
7. Asadchiy, A.V. & Soldatov, A.I. (2016) [Modelling of algorithm formation diagnostics signals in converter device at malfunctions]. *Nerazrushayushchiy kontrol': elektronnoe priborostroenie, tekhnologii, bezopasnost'* [Non-destructive test, electronic equipment and protection]. *Proc. of the Sixth All-Russian Conference*. Vol. 2. Tomsk. pp. 8–12.
8. Asadchiy, A.V. (2018) [Method of minimization of physical wear of EEPROM-memory for control device of voltage transducer]. *XXIV Makeevskie chteniya* [Proc. of the 24th Makeev Readings]. Ekaterinburg. pp. 5–10.
9. Feduleeva, M.V. (2012) Development of the multi-channel compression block as a part of measuring system. *Izvestiya YUFU. Tehnicheskie nauki – Izvestiya SFEDU. Engineering Sciences*. 5(130). pp. 190–194.
10. Andreyko, D.N., Komarov, P.Yu. & Ignatov, F.M. (2013) Osnovnye metody szhatiya v peredache tsifrovyykh videoizobrazheniy [Basic compression methods in digital video transmission]. *Tekhnologii informatsionnogo obshchestva – Information Society Technologies*. vol. 9. pp. 10–14.
11. Asadchiy, A.V., Soldatov, A.I., Soldatov, A.A., Sorokin, P.V., Shulgina, Yu.V., Kostina, M.A. & Chubov, S.V. (2018) Method for controlling parameters of secondary uninterruptible power supply. *Patent of the Russian Federation*. № 2687302. SPK G01R 19/165 (2019.02), G01R 19/257 (2019.02). Application dated September 18, 2018; published May 13, 2019.
12. Asadchiy, A.V., Soldatov, A.I., Soldatov, A.A., Sorokin, P.V., Shulgina, Yu.V., Kostina, M.A. & Chubov, S.V. (2018) Device for controlling parameters of secondary uninterruptible power supply. *Patent of the Russian Federation*. № 2689323. SPK G01R 19/165 (2019.02), G01R 19/257 (2019.02). Application September 18, 2018; published May 27, 2019.

13. Galperin, M.V. (1982) *Vvedenie v skhemotekhniku* [Introduction of Circuitry]. Moscow: Energoatomizdat.
14. Galperin, M.V. (1987) *Prakticheskaya skhemotekhnika v promyshlennoy avtomatike* [Practical circuitry in industrial automation]. Moscow: Energoatomizdat.
15. Gusev, V.M. & Gusev, V.Y. (1982) *Elektronika* [Electronics]. Moscow: Vysshaya shkola.
16. Gerasimov, V.M. & Skvortsov, V.A. (2004) *Elektronnye tsepi i mikroskhemotekhnika* [Electronic circuit and circuit engineering]. Vol. 2. Tomsk: Tomsk State University of Automated Control Systems and Radioelectronics.

УДК 004.272.2

DOI: 10.17223/19988605/52/14

О.В. Климова

ДЕКОМПОЗИЦИОННЫЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ ОБРАБОТКИ ДВУМЕРНЫХ ДАННЫХ

Рассматривается путь построения параллельных алгоритмов для обработки двумерных данных (двумерных свертки и корреляции, двумерного дискретного преобразования Фурье (ДПФ) и других структурно подобных им операций). Предлагаемый путь характеризуется использованием декомпозиционного подхода и формированием композиционных форм, предназначенных для описания параллельных вычислений. Представляются новые возможности, открывающиеся при использовании этих форм для реализации вычислений двумерных операций и позволяющие повысить эффективность параллельной обработки.

Ключевые слова: декомпозиционный подход; параллельные алгоритмы; композиционные формы; модельное описание.

Использование параллельного принципа обработки информации позволяет значительно повысить производительность вычислений и открывает путь для решения задач больших размеров. Базой для внедрения параллельного принципа обработки данных стали архитектурные решения, формирующие пространственно-временные вычислительные среды, позволяющие выполнять вычислительные действия параллельно, но требующие внесения изменений в отношения между алгоритмом и архитектурами. Действительно, при последовательной обработке алгоритм и архитектура – это всего лишь отдельные компоненты вычислительной системы, а при использовании параллельной обработки они должны быть взаимосвязанными частями параметризованной пространственно-временной среды. Только совместное изучение алгоритмов и архитектур позволит сделать выбор варианта организации вычислений обоснованным, а параллельную обработку эффективной.

Решение проблемы обоснованного выбора, впервые сформулированной в работе [1], может дать ключ к разработке эффективных реализаций параллельных вычислений. Однако упомянутая проблема в большинстве своем и по сей день ожидает требуемых формальных решений, сложность поиска которых подчеркивалась во многих исследованиях [2–5]. Поэтому для современных параллельных вычислений проблема повышения их эффективности является актуальной. Путь же решения этой проблемы характеризуется введением в процесс выбора варианта организации вычислений этапа совместных исследований алгоритмов и архитектур [6–8], для реализации которого необходимы формальные инструменты, позволяющие связать воедино алгоритмические и архитектурные параметры. Для разработки таких инструментов нужно изучать внутреннюю пространственно-временную структуру вычислительных алгоритмов. Создаваемые при этом новые формы описания организации вычислений должны быть архитектурно независимыми, тогда на их основе можно анализировать различные сценарии отношений между алгоритмом и архитектурой. Эти сценарии можно представить следующим образом: алгоритм задан – требуется установить наилучшую архитектуру для его реализации; архитектура задана – требуется определить для нее наилучший вариант организации вычислений (алгоритм); наилучший вариант отношений между значениями алгоритмических и архитектурных параметров устанавливается в процессе их взаимонастройки, который характеризуется изменениями значений как одних, так и других параметров. Последний сценарий отличается наибольшей гибкостью выбора вариантов организации вычислений, поэтому его реализация позволит достичь наибольшего эффекта от использования параллельного принципа обработки.

На сегодняшний день можно выделить два пути, по которым идет разработка формальных инструментов, позволяющих выявить внутренний параллелизм последовательных алгоритмов и пред-

ставить их в виде, обеспечивающем проведение совместных исследований алгоритмов и архитектур. Эти пути отличаются формами представления алгоритмов (графовыми и аналитическими), изначально положенными в основу процессов указанной разработки. Результаты [8], связанные с использованием исходных графовых форм (графов потоков данных), характеризуются их анализом, в процессе которого с помощью аппарата линейной алгебры выявляется внутренний параллелизм алгоритмов и образуются эквивалентные им модели параллельных вычислений, позволяющие выполнять совместные исследования алгоритмов и архитектур. Представленная в работе [8] методика такого анализа характеризуется достаточно высокой сложностью реализации. В данной работе будет рассмотрен результат разработки формальных инструментов, полученный на пути, связанном с изучением аналитических выражений, представляющих алгоритмы, с целью поиска эквивалентных им композиционных форм. По-видимому, получить требуемые формальные описания организации параллельных вычислений можно лишь для алгоритмов определенного класса, изучив их внутреннюю пространственно-временную структуру. В работе [6] представлен общий путь формирования таких решений для операций цифровой обработки сигналов (ЦОС), основанный на предложенном декомпозиционном подходе. В данной статье показывается, как изучение с помощью этого подхода внутренней структуры вычислительных операций обработки двумерных данных (двумерных свертки и корреляции, двумерного дискретного преобразования Фурье (ДПФ) и других структурно подобных им операций) привело к построению их композиционных форм и открыло новые возможности для обработки данных больших размеров и размерностей.

1. Параллельная обработка и теоретико-групповой декомпозиционный подход

Представим общие характеристики подхода, позволившего изменить отношения между алгоритмом и архитектурами и получить композиционные формы различных операций, характеризующиеся параметризованными пространственно-временными структурами. В работе [5] отмечается важность поиска путей создания таких форм для разработки эффективных способов реализации параллельных вычислений. Интерес к построению композиционных форм связан с тем, что на их основе формируются описания организации вычислений, не только эквивалентные исходным аналитическим описаниям последовательных алгоритмов, но и изначально ориентированные на представление параллельных вычислений и установление отношений между алгоритмическими и архитектурными параметрами. Таким образом, необходимость изменения отношений между алгоритмом и архитектурами привела к необходимости изменения форм для описания организации вычислений на композиционные формы, позволяющие исследовать различные варианты организации параллельных вычислений. На основе предложенного декомпозиционного подхода [9], нацеленного на изучение внутренней структуры операций и данных, были получены параметризованные композиционные формы для представления операций цифровой обработки сигналов (ЦОС). Эти формы позволяют описывать разнообразие вариантов организации параллельных вычислений, синтезировать их различные пространственно-временные структуры и гибко управлять их изменениями. Общность предложенного подхода к построению композиционных форм для различных операций, а также его характер позволили расширить применение подхода на область обработки многомерных данных. В статье будет в общем виде представлена схема его использования при построении композиционных форм для операций обработки двумерных данных. Указанная схема характеризуется следующими действиями:

- изучением с помощью подхода внутренней структуры двумерных данных;
- образованием композиционных форм данных (КФД);
- изучением с помощью подхода внутренней структуры двумерных операций;
- образованием композиционных форм операций (КФО).

На основе этих действий можно также выполнить расширение подхода на область обработки многомерных данных с целью построения соответствующих им композиционных форм.

Прежде чем перейти к представлению результатов использования подхода при изучении внутренней структуры двумерных данных и операций, приведем описание его характера. Это позволит выделить существенные особенности подхода, обеспечивающие возможность перехода к композиционным формам для различных операций и различных размерностей.

Итак, предложенный подход к формированию композиционных форм носит, как и было указано выше, декомпозиционный характер, проявляющийся в способности выделения инвариантных компонентов рассматриваемой операции и установления правил их композиции в исходную операцию. Такие способности были установлены на основе использования аппарата теории групп, поэтому подход был назван теоретико-групповым. Основой подхода является декомпозиция данных, приводящая к построению их композиционных форм, обеспечивающих построение композиционных форм для различных операций. Важной чертой предложенного теоретико-группового декомпозиционного подхода является его эволюционный характер, с одной стороны, обеспечивающий преемственность форм (алгоритм и параметризованная композиционная форма) описания организации вычислений для последовательного и параллельного способов обработки данных, а с другой – способствующий его развитию путем расширения на большие размерности операций, а также на иные классы операций.

Теперь, выявив эволюционный и теоретико-групповой характер предложенного декомпозиционного подхода, приведем результат его применения для установления и изучения внутренних структур одномерных операций вышеозначенного класса. Исходные структуры этих операций, действующих на входные данные длины N , можно представить с помощью операции умножения матрицы размера $N \times N$ на вектор $x(t)$. Использование подхода позволило на основе выполненных эквивалентных преобразований соответствующих аналитических выражений перейти от матрицы, действующей во временной области на вектор $x(t)$, к параметризованной пространственно-временной структуре, порождающей координационно-вычислительную среду. Эта двумерная среда состоит из L^2 матриц размера $h_1 \times h_1$ и характеризуется соответствующей исследуемому классу операций координацией результатов вычислений, полученных при умножении этих матриц на векторы $x_j(t_1)$ длины h_1 , образованные в результате теоретико-групповой декомпозиции входных данных $x(t)$, где

$$N = h_1 L, \quad t = j + t_1 L, \quad t = 0, \dots, N-1 \quad \text{и} \quad j = 0, \dots, L-1, \quad t_1 = 0, \dots, h_1-1.$$

Установленная с помощью использования предложенного подхода внутренняя структура рассматриваемого класса одномерных операций представлена на рис. 1.

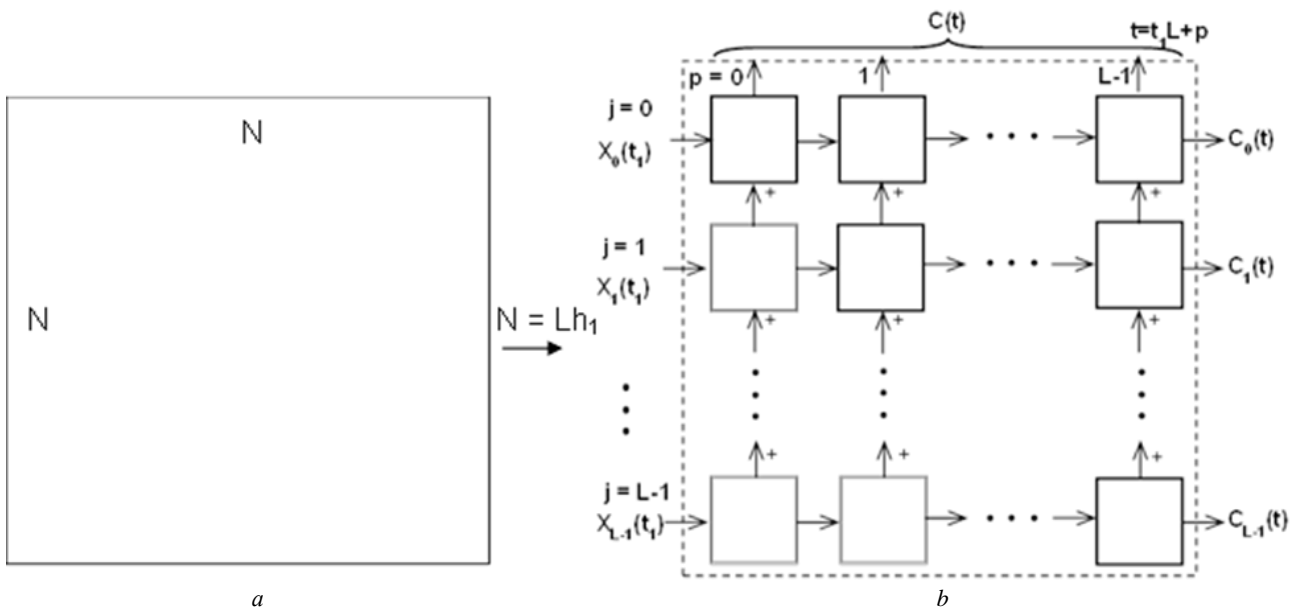


Рис. 1. Иллюстрация двух структур для вычислительных операций – временной (а) и пространственно-временной (b)
 Fig. 1. Illustration of two structures for computational operations – time (a) and space-time (b)

Полученная структура может быть охарактеризована как параметризованная однородная вычислительная среда, представляемая с помощью двумерной решетки. В ее L^2 узлах расположены вычислительные блоки, реализующие исследуемую операцию, сжатую до размера h_1 и представляемую с помощью полученной параметризованной среды, описываемой параметрами j, p . С помощью

этих параметров можно работать с установленной внутренней структурой операций как с целью выявления наиболее эффективных вариантов организации их параллельных вычислений, так и с целью выполнения более тонкого и гибкого анализа формируемых результатов вычислений.

Представив в общем виде предложенный декомпозиционный подход и результат его использования при изучении внутренних структур операций – параметризованную пространственно-временную структуру, предназначенную для описания параллельной обработки одномерных данных, расширим применение подхода на область обработки двумерных данных с целью ее перевода в параметризованную координационно-вычислительную среду.

2. Декомпозиционный подход к обработке двумерных данных

Для получения композиционных форм операций вышеуказанного класса, предназначенных для обработки двумерных данных и характеризующихся единой матричной структурой вычислений, необходимо в рамках представленного подхода выполнить ряд следующих действий:

- формирование композиционных форм (КФ) двумерных данных;
- использование этих форм в исходных аналитических выражениях, описывающих рассматриваемые операции, и образование их исходных КФ;
- выполнение необходимых эквивалентных преобразований над этими формами;
- формирование и анализ композиционных форм для представления изучаемых операций.

Эти действия были выполнены с помощью предложенного декомпозиционного подхода и привели к формированию параметризованного описания пространственно-временных структур изучаемых операций. Так как нас интересуют структурные изменения, произошедшие при этом и являющиеся общими для операций этого класса, то для их иллюстрации можно без потери общности использовать аналитические выражения для любой операции из рассматриваемого класса. Приведем описание выполненных структурных преобразований для операции двумерной циклической свертки, определенной на некоторой абелевой группе $H = Z_{N_1} \times Z_{N_2}$:

$$C_{N_1 N_2}(t) = C_{N_1 N_2}(t_1, t_2) = \sum_{q_2=0}^{N_2-1} \sum_{q_1=0}^{N_1-1} x(t_1 -_{N_1} q_1, t_2 -_{N_2} q_2) \cdot y(q_1, q_2),$$

где индексы $-_{N_1}$ и $-_{N_2}$ обозначают операции вычитания на группах Z_{N_1} и Z_{N_2} порядков N_1 и N_2 соответственно, $t_1, q_1 = 0, \dots, N_1 - 1, t_2, q_2 = 0, \dots, N_2 - 1$. Используем для этого композиционную форму двумерных данных, представленную в работе [6] и полученную в результате теоретико-групповой декомпозиции функции $x(t) = x(t_1, t_2)$ на группе $H = Z_{N_1} \times Z_{N_2}$:

$$x(t) = \sum_{j_1=0}^{L_1-1} \sum_{j_2=0}^{L_2-1} x_{j_1 j_2}^*(t - j_1 N_2 -_{N_2} j_2) = \sum_{j_1=0}^{L_1-1} \sum_{j_2=0}^{L_2-1} x_{j_1 j_2}^*((t_2 -_{N_2} j_2) + (t_1 - j_1) N_2).$$

В процессе декомпозиции выполняется разложение порядков $N_1 = h_{11} L_1, N_2 = h_{21} L_2$, числа t_1 и t_2 представляются в виде: $t_1 = j_1 + t_{11} \cdot L_1, t_2 = j_2 +_{N_2} t_{21} \cdot L_2$, где

$$t_{11} = 0, \dots, h_{11} - 1, j_1 = 0, \dots, L_1 - 1, t_{21} = 0, \dots, h_{21} - 1, j_2 = 0, \dots, L_2 - 1,$$

число t задается с помощью выражения $t = j_2 +_{N_2} t_{21} L_2 + j_1 N_2 + t_{11} L_1 N_2$ и вводятся специальные функции $x_{j_1 j_2}^*(t)$, описанные в работе [6] и характеризующиеся свойствами композиции и эквивалентности сдвигов на группах разной структуры, но одного порядка. Формирование представленной композиционной формы данных соответствует реализации первого из перечисленных выше действий. Выполнение этих действий в полном объеме позволило получить композиционные формы для указанного класса вычислительных операций. Описать произведенные при этом структурные преобразования можно, представив полученное выражение для композиционной формы циклической свертки

$$C_{N_1 N_2}(t) = C_{P_1 +_{N_2} P_2}(t_{11}, t_{21}) = \sum_{j_1=0}^{L_1-1} \sum_{j_2=0}^{L_2-1} \sum_{q \in H} x_{j_1 N_2, j_2}^*((t_{21} -_{h_{21}} q_{21}) L_2 +$$

$$+(t_{11} - h_{11} \cdot q_{11}) \cdot L_1 \cdot N_2) y_{-j_1 - N_2, j_2, p_1 + N_2, p_2} (q_{21} \cdot L_2 + q_{11} \cdot L_1 \cdot N_2) = \sum_{j_1=0}^{L_1-1} \sum_{j_2=0}^{L_2-1} C_{j_1, j_2, p_1, p_2} (t_{11}, t_{21})$$

и сравнив его с приведенным выше исходным выражением, определяющим эту операцию. Переход к композиционным формам данных и операций позволил выявить их внутреннюю вычислительную структуру и изменить форму представления организации вычислений при обработке двумерных данных с алгоритмической на модельную.

Проиллюстрируем сказанное с помощью приведенного выше выражения для композиционной формы операции (КФО) циклической свертки, перейдем от частного к общему, основываясь на выявленном структурном единстве полученных композиционных форм для различных операций рассматриваемого класса и представим их общее параметризованное описание КФО($A_i^{jp}(t_{11}, t_{21})$, $KVC_i(j, p)$), имеющее модельный характер. Действительно, его компонентами являются алгоритмы $A_i^{jp}(t_{11}, t_{21})$, полученные в результате декомпозиции, погружения в пространственную среду и сжатия во времени последовательных алгоритмов $A_i(t)$, а также параметризованные координационно-вычислительные среды $KVC_i(j, p)$, при этом значение индекса i определяет вид операции, а параметры (j, p) описываются следующими выражениями:

$$p = p_2 + p_1 N_2, j = j_2 + j_1 N_2.$$

Иллюстрация полученного параметризованного описания для операции двумерной свертки представлена на рис. 2, свертка представлена суммой $L^2 = (L_1 L_2)^2$ независимых сверток $C_{jp}(t_{11}, t_{21})$, заданных на группе $H'' = Z_{h_{11}} \times Z_{h_{21}}$.

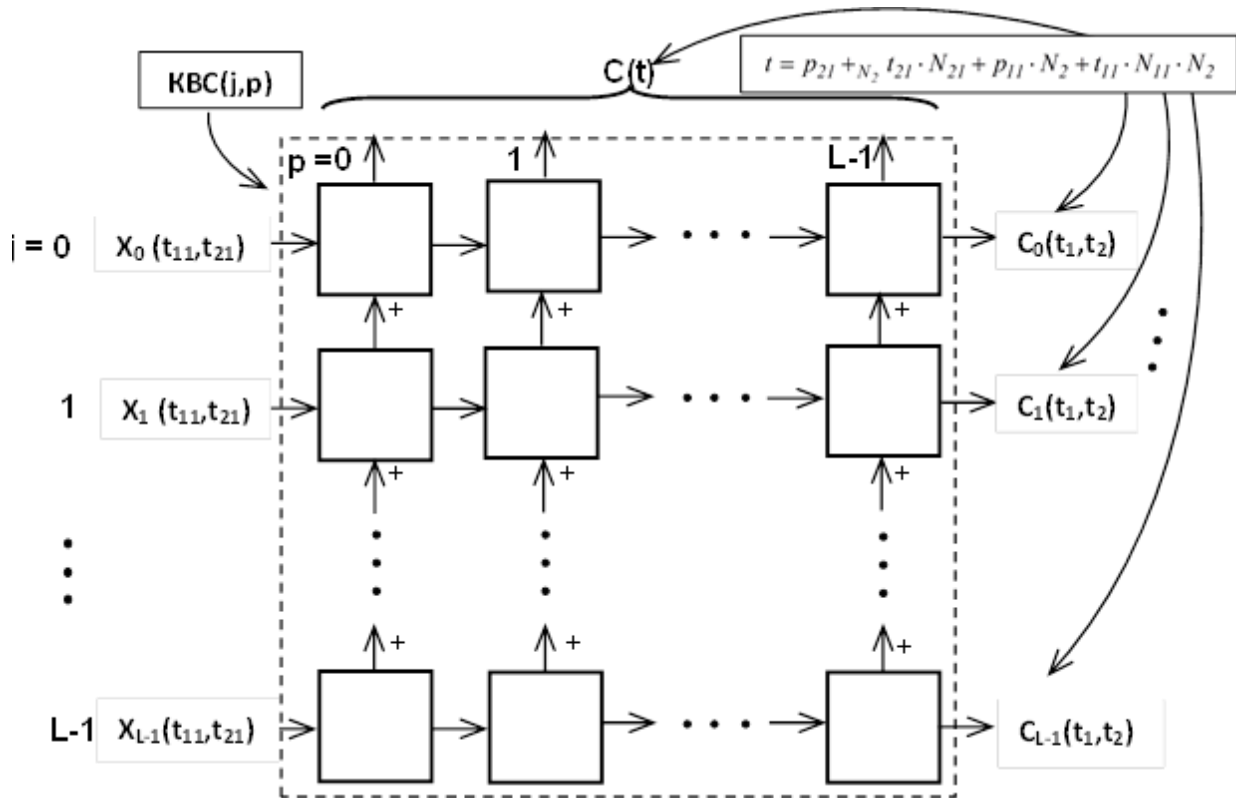


Рис. 2. Параметризованное пространственно-временное описание внутренней вычислительной структуры для операции двумерной свертки

Fig. 2. Parametrized space-time description of the internal computational structure for two-dimensional convolution operation

Перейдя от алгоритмической формы представления двумерных операций вышеуказанного класса к модельной форме, мы не только увидели их внутреннюю пространственную структуру, но и получили возможность ее настройки по параметрам h_{11} , L_1 , $N_1 = h_{11} L_1$ и h_{21} , L_2 , $N_2 = h_{21} L_2$, обеспечив гибкость такой настройки вследствие отсутствия ограничений на их значения. Разработанная мо-

дельная форма описывает разнообразие вариантов организации вычислений, является формальной основой для синтеза параллельных алгоритмов и предлагает формальный инструмент для управления изменениями структур вычислений. Такие характеристики полученной формы описания организации вычислений двумерных данных открывают новые вычислительные возможности, краткому представлению которых посвящен следующий параграф.

3. Декомпозиционный подход и новые вычислительные возможности

Анализируя созданную в рамках предложенного декомпозиционного подхода модель, можно увидеть вычислительные возможности, потенциально заложенные в ее параметризованное описание. Чтобы показать эти возможности, выделим три класса актуальных задач, решить которые можно путем их реализации. Представим эти задачи, а затем покажем, как с помощью полученной модели они могут быть решены. Прежде всего это задача обеспечения реализации этапа совместных исследований алгоритмов и архитектур, присущего современному проектированию вычислительных устройств и позволяющего выполнять по формальным правилам синтез, оценку и выбор наилучших в заданных условиях вариантов организации вычислений на высоком уровне абстракции. Решение этой задачи направлено на обеспечение эффективности параллельной обработки. Следующей из вышеуказанных задач является задача совершенствования формального инструмента, предназначенного для анализа двумерных данных. Решение этой задачи позволит реализовать гибкий и точный доступ к различным участкам обрабатываемой информации и выполнять оценку внутренней структуры проводимых вычислений и получаемых при этом результатов. И наконец, реализация полученных возможностей представленного модельного описания позволяет решить задачу управляемой по параметрам реструктуризации вычислений. Решение этой задачи дает ключ к сокращению сложности и повышению надежности вычислений. Теперь рассмотрим более подробно полученные возможности в свете решения вышеуказанных задач.

Возможность решения задачи реализации совместных исследований алгоритмов и архитектур базируется на создании формального инструмента – модельного описания организации вычислений, характеристики которого позволяют выполнять такие исследования. Представим эти характеристики. Прежде всего это способность порождать разнообразие алгоритмов и их структур, а также способность управления их изменениями, основанные на полученном параметризованном описании. Следующей характеристикой полученного описания $KFO(A_i^{jp}(t_{11}, t_{21}), KBC_i(j, p))$ является наличие в его составе в качестве компоненты параметризованной координационно-вычислительной среды $KBC_i(j, p)$, определяемой параметрами (j, p) . Эта характеристика наделяет рассматриваемое описание способностью организации параллельно-конвейерной обработки за счет погружения вычислений в параметризованную пространственную среду и расширения самого описания путем введения в его состав архитектурных параметров. Следует отметить, что изначально полученное описание не зависит от архитектуры вычислительных устройств, но предполагает возможность внедрения в свой состав архитектурных параметров при выполнении совместных исследований алгоритмов и архитектур. Все вышесказанное свидетельствует о гибкости и адаптивности рассматриваемого описания.

Таким образом, создание представленного модельного описания позволяет проектировать многопроцессорные вычислительные системы в едином пространстве, определяемом алгоритмическими и архитектурными параметрами, на основе алгоритмических оценок сложности реализации синтезируемых вариантов организации вычислений. Предлагаемый подход к проектированию отвечает современным тенденциям его развития [7, 8], при таком подходе поиск и выбор варианта осуществляются на этапе синтеза, оценки и анализа разнообразия вариантов на алгоритмическом уровне с учетом заданных ограничений на аппаратурно-временные затраты. Реализация возможности решения задачи проведения совместных исследований алгоритмов и архитектур наделяет процесс проектирования свойством адаптивности, позволяющим на основе формальных правил устанавливать наилучшие варианты организации вычислений. Обоснованный выбор таких вариантов на исследовательском этапе проектирования приводит к повышению эффективности параллельной обработки.

Рассмотренное описание организации вычислений также предоставляет возможность решения вышеуказанной задачи совершенствования формального инструмента, предназначенного для анализа двумерных данных. Эта возможность формируется благодаря установлению на основе декомпозиционного подхода закона описания внутренней структуры для операций рассматриваемого класса. Можно сказать, что этот закон представляется с помощью полученного параметризованного описания композиционных форм операций $KFO(A_i^{jp}(t_{11}, t_{21}), KBC_i(j, p))$, позволяющего реализовать гибкий доступ по параметрам к внутренней структуре вычислительного процесса, анализ композиционных форм, конструирование данных и корректировку результатов вычислений. Короче говоря, этот закон позволяет работать с элементами внутренней структуры вычислительных процессов и тем самым расширяет возможности для анализа двумерных данных.

Решение последней задачи управляемой по параметрам реструктуризации вычислений, нацеленной на сокращение сложности и повышение надежности вычислений, также базируется на законе описания внутренней структуры операций и полученной при этом возможности управления изменениями этой структуры. Именно благодаря такой возможности мы можем сокращать сложность вычислений операции путем перехода к композиционной форме ее представления, описывающей длинную операцию с помощью композиции коротких операций. Также благодаря данной возможности мы получаем потенциальную способность предложенного описания организации вычислений к повышению надежности вычислений. Эта способность базируется на его готовности к управляемым по параметрам изменениям структуры вычислений. Таким образом, возможность перехода от одного структурного варианта к другому создает алгоритмический потенциал для повышения надежности вычислений.

Заключение

Представлено расширение теоретико-группового декомпозиционного подхода на область обработки двумерных данных. Подход был изначально разработан для построения композиционных форм базовых операций цифровой обработки сигналов. Его расширение выполнено с целью перевода обработки двумерных данных в параметризованную координационно-вычислительную среду, предназначенную для описания параллельных вычислений. В результате выполненного расширения сформирована система действий, порождаемых и реализуемых в рамках предложенного подхода и направленных на изучение внутренней структуры вычислительных операций обработки двумерных данных (двумерных свертки и корреляции, двумерного дискретного преобразования Фурье (ДПФ) и других структурно подобных им операций) с целью образования их композиционных форм. Проведен анализ структур полученных форм, в ходе которого выявлен их модельный характер. Таким образом, переход к композиционным формам позволил изменить форму представления организации вычислений при обработке двумерных данных с алгоритмической на модельную. Приведено общее модельное описание организации вычислений для различных операций рассматриваемого класса, отличительной особенностью которого является погружение вычислений в параметризованную координационно-вычислительную среду. Показано, что полученное модельное описание открывает новые вычислительные возможности, позволяющие решать актуальные задачи, нацеленные на повышение эффективности параллельной обработки, сокращение ее сложности, а также на повышение гибкости анализа обрабатываемых данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марчук Г.И., Котов В.Е. Проблемы вычислительной техники и фундаментальные исследования // Автоматика и вычислительная техника. 1979. № 2. С. 3–14.
2. Воеводин В.В. Вычислительная математика и структура алгоритмов. М. : Изд-во МГУ, 2006. 112 с.
3. Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. Параллельные вычисления. СПб. : БХВ Петербург, 2002. 608 с.
4. Kung S.Y. VLSY Array Processors. Prentice Hall, 1987. 667 p.
5. Lee E.A. The problem with threads // IEEE Computer. 2006. V. 39, No. 5. P. 33–42.
6. Климова О.В. Методология декомпозиции данных и единое описание последовательных и параллельных алгоритмов вычисления операций цифровой обработки сигналов // Вестник Томского Государственного Университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. Т. 23., № 2. С. 112–120.

7. Lee G.G., Chen Y.K., Mattavelli M., Jang E.S. Algorithm / Architecture co-exploration of visual computing: Overview and future perspectives // *IEEE Trans. Circuits and Systems for Video Technology*. 2009. V. 19, No. 11. P. 1576–1587.
8. Gwo Giun (Chris) Lee, He-Yuan Lin, Chun-Fu Chen, Tsung-Yuan Huang. Quantifying intrinsic parallelism using linear algebra for algorithm/architecture coexploration // *IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems*. 2012. V. 23, No. 5. P. 944–957.
9. Климова О.В. Параллельные вычисления и закон построения модельного описания для алгоритмов цифровой обработки сигналов // *Информационные технологии и вычислительные системы*. 2016. № 2. С. 11–22.

Поступила в редакцию 23 ноября 2019 г.

Klimova O.V. (2020) DECOMPOSITION APPROACH TO THE CONSTRUCTION OF PARALLEL ALGORITHMS FOR PROCESSING OF TWO-DIMENSIONAL DATA. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 52. pp. 114–122

DOI: 10.17223/19988605/52/14

The formal tool for synthesizing a variety of parallel algorithms for processing of two-dimensional data is presented in this paper. The tool is intended to represent a variety of variants of computation organization for two-dimensional convolution and correlation, two-dimensional discrete Fourier transform (DFT), and other operations structurally similar to them. The creation way of such a tool, characterized by the use of the group-theoretical decomposition approach, is shown. The tool obtained is a parameterized, space-time description of parallel computation organization and provides a basis for combining algorithmic and architectural parameters in a single formal description. The tool is also architecturally independent and allows us to implement a stage of concurrent exploration of algorithms and architectures. This research stage is an integral part of the process of designing advanced computation systems and its implementation leads to improving the efficiency of parallel computing. The development of the formal tool presented in the article is based on the study of the internal space-time structure of algorithms using the proposed decomposition approach. Using this approach, which was originally developed for constructing compositional forms of the basic operations of digital signal processing, became possible due to its extension to the field of processing of two-dimensional data. The paper presents such an extension that made it possible to transfer the processing of two-dimensional data into a parameterized coordination-computing environment (CCE) intended to describe parallel computations. As a result of the extension realized, a system of an actions aimed at studying the internal structure of the computational operations of processing of two-dimensional data in order to detect their compositional forms is formed. These actions are developed and implemented within the scope of the approach proposed. The analysis of the structures of the obtained forms is carried out as a result their model nature is discovered. Thus, the transition to compositional forms of operations (CFO) made it possible to change the form of representation of computation organization in the processing of two-dimensional data from algorithmic to model one. A general model description of computation organization $CFO(A_i^{jp}(t_{11}, t_{21}), CCE_i(j, p))$ for various operations of the class in question is given, the distinguishing feature of which is immersion of computations in a parametrized coordination-computing environment. The components of the description presented are the algorithms $A_i^{jp}(t_{11}, t_{21})$ obtained as a result of decomposition, immersion into the spatial environment, and time compression of the sequential algorithms $A_i(t)$, as well as the parameterized coordination-computational environments $CCE_i(j, p)$. The parameters describing the processing of two-dimensional data $x(t_1, t_2)$ given on a group H of order $N = N_1 \times N_2$ are presented as follows: $t = t_2 + t_1 N_2$, $N_1 = h_{11} L_1$, $N_2 = h_{21} L_2$, $t_1 = 0, \dots, N_1 - 1$, $t_{11} = 0, \dots, h_{11} - 1$, $j_1 = 0, \dots, L_1 - 1$, $t_2 = 0, \dots, N_2 - 1$, $t_{21} = 0, \dots, h_{21} - 1$, $j_2 = 0, \dots, L_2 - 1$. Having moved from the algorithmic form of representing two-dimensional operations to their model form, we not only saw the internal spatial structure of the operations, but also got the opportunity to configure it by parameters h_{11}, L_1 and h_{21}, L_2 synthesizing various variants of computation organization. Such an opportunity allows one to solve urgent problems aimed at increasing the efficiency of parallel processing, reducing its complexity, as well as increasing the flexibility of analysis of the data processed.

Keywords: decomposition approach; parallel algorithms; composition forms; model description.

KLIMOVA Olga Vitalievna (Candidate of Technical Sciences, Senior Research Scientist, Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation).
E-mail: ovk31@mail.ru

REFERENCES

1. Marchuk, G.I. & Kotov, V.E. (1979) Problems of computers and fundamental research. *Avtomatika i vychislitel'naya tekhnika – Automatic Control and Computer Sciences*. 2. pp. 3–14.
2. Voevodin, V.V. (2006) *Vychislitel'naya matematika i struktura algoritmov* [Computational Mathematics and Algorithm Structure]. Moscow: Moscow State University.
3. Voevodin, V.V. & Voevodin, V.I. (2002) *Parallel'nye vychisleniya* [Parallel Computing]. St. EPtersburg: BKhV Peterburg.
4. Kung, S.Y. (1987) *VLSY Array Processors*. Prentice Hall.
5. Lee, E.A. (2006) The Problem with Threads. *IEEE Computer*. 39(5). pp. 33–42.

6. Klimova, O.V. (2013) Methodology of data decomposition and general description of sequential and parallel algorithms for digital signal processing operations. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 23(2). pp. 112–120.
7. Lee, G.G., Chen, Y.K., Mattavelli, M. & Jang, E.S. (2009) Algorithm/Architecture co-exploration of visual computing: Overview and future perspectives. *IEEE Trans. Circuits and Systems for Video Technology*. 19(11). pp. 1576–1587. DOI: 10.1109/TCSVT.2009.2031376
8. Gwo Giun (Chris) Lee, He-Yuan Lin, Chun-Fu Chen & Tsung-Yuan Huang (2012) Quantifying Intrinsic Parallelism Using Linear Algebra for Algorithm/Architecture Coexploration. *IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems*. 23(5). pp. 944–957.
9. Klimova, O.V. (2016) Parallel computations and construction law of model description for digital signal processing algorithms. *Informatsionnye tekhnologii i vychislitel'nye sistemy – Journal of Information Technologies and Computing Systems*. 2. pp. 11–22.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ДИАГНОСТИКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

УДК 53.083.9

DOI: 10.17223/19988605/52/15

В.М. Соловьев, Д.В. Сперанский

ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ДИАГНОСТИЧЕСКИХ ТЕСТОВ НА МОДЕЛЯХ ЦИФРОВЫХ УСТРОЙСТВ ISCAS

Рассматривается методика оценки качества диагностических тестов на моделях цифровых устройств, стандартизованных международным симпозиумом IEEE. Методика ориентирована на использование современных программных средств автоматизированного проектирования электронных устройств.

Ключевые слова: цифровые устройства (ЦУ); языки описания ЦУ Verilog, VHDL; контроль и диагностика ЦУ; программная среда автоматизированного проектирования ЦУ.

В настоящее время интенсивно идет процесс внедрения во все области человеческой деятельности электронных изделий, которые являются основой цифровизации общества. Эти электронные изделия (цифровые устройства, ЦУ) нужно проектировать, изготавливать и эксплуатировать, поддерживая в рабочем состоянии. На каждом этапе жизненного цикла ЦУ требуется знать их техническое состояние, что обеспечивается контролем и диагностированием, подачей воздействий (теста) и анализом реакции изделия на него. Создание эффективных тестов является одной из актуальных задач современной диагностики. Эффективность тестов зависит от используемых алгоритмов их создания, поэтому это направление технической диагностики активно развивается. Появляется большое количество таких алгоритмов, продукция которых (тесты) требует анализа и оценки качества. Для объективного анализа и оценки алгоритмов экспертами разработаны тестовые схемы ЦУ, стандартизованные международным симпозиумом IEEE по схемам и системам ISCAS [1]. Используя эти тестовые схемы, можно в среде автоматизированного проектирования электронных устройств (Electronic Design Automation, EDA) создавать алгоритмические модели ЦУ ISCAS [1], почти не отличающиеся от их реальных физических моделей.

Современные EDA, как правило, позволяют создавать алгоритмические модели на языках описания электронных схем Verilog или VHDL. Язык Verilog ближе к ЦУ, быстрее и современнее VHDL. В то же время ранее созданные модели на VHDL могут транслироваться в Verilog с последующей компиляцией, что и обеспечивает их совместимость. При этом появляется возможность эффективно исследовать различные подходы и идеи, лежащие в основе алгоритмов синтеза тестов для сложных ЦУ. Кроме того, такой подход позволяет оценить техническое состояние ЦУ, создать удобный аппарат для получения, хранения и анализа результатов диагностических экспериментов и, что особенно важно, представить эти результаты (scientific data) в различной удобной для исследователя форме (битовым массивом, бинарным вектором, графическими изображениями и т. д.). Все это делает EDA базой для разработки новой перспективной методики, решающей широкий круг задач технического диагностирования сложных ЦУ. Демонстрировать возможности такой методики можно на стандартных тестовых схемах ISCAS. Для них предлагаемая методика может содержать следующие этапы: выбор тестовой схемы из состава ISCAS; ввод исходных данных (принципиальная схема или описание ЦУ на языках Verilog, VHDL) и параметров в среде моделирования (например, Quartus II [2],

ModelSim [3], Icarus Verilog (Iverilog) [4] и т.д.); разработка на основе анализируемых алгоритмов контрольных и диагностических тестов (testbench) в среде моделирования; компиляция и отладка созданной модели ЦУ и testbench; диагностические эксперименты (simulation) с отлаженной моделью ЦУ и тестами в среде моделирования, а также визуализация результатов диагностического эксперимента; анализ полученных результатов и размещение результатов в открытом доступе (например, GitHub) для обеспечения возможности их проверки и повторения [5].

1. Подготовка и проведение диагностических экспериментов

Использование тестовых цифровых устройств, рекомендованных IEEE (ISCAS-85, ISCAS-89, ISCAS-99) [1], позволяет создавать одинаковые транспарентные условия для проведения диагностических экспериментов. Это обеспечивает объективную оценку эффективности контрольных и диагностических тестов, создаваемых на основе предлагаемых алгоритмов. Кроме того, такой подход решает и целый ряд других задач диагностирования, например облегчает (формализует) построение входных тестовых последовательностей в среде автоматизированного проектирования электронных устройств (EDA) и их отладку. К сожалению, автоматизированная генерация диагностической среды (testbench) в EDA до сих пор не решена. Разработчики ЦУ вынуждены создавать ее в «ручном» режиме, используя для построения, например, языки программирования высокого уровня и вводить затем тесты в EDA практически вручную. Для небольших ЦУ, содержащих до 100 элементов (вентилей, комбинационных схем) это еще может быть как-то оправдано. Однако при большом количестве входов-выходов и элементов в ЦУ (а именно такие тестовые схемы и входят в ISCAS) создание и ввод диагностических последовательностей, ориентированных даже на константные неисправности, является трудоемкой задачей. Поэтому чаще всего исследователи используют свои «закрытые» методики, представляя в публикациях результаты моделирования таблицами, проверить которые не представляется возможным.

Моделирование в среде EDA – это практически создание алгоритмической модели с высокой степенью адекватности реальному (физическому) ЦУ (рис. 1).

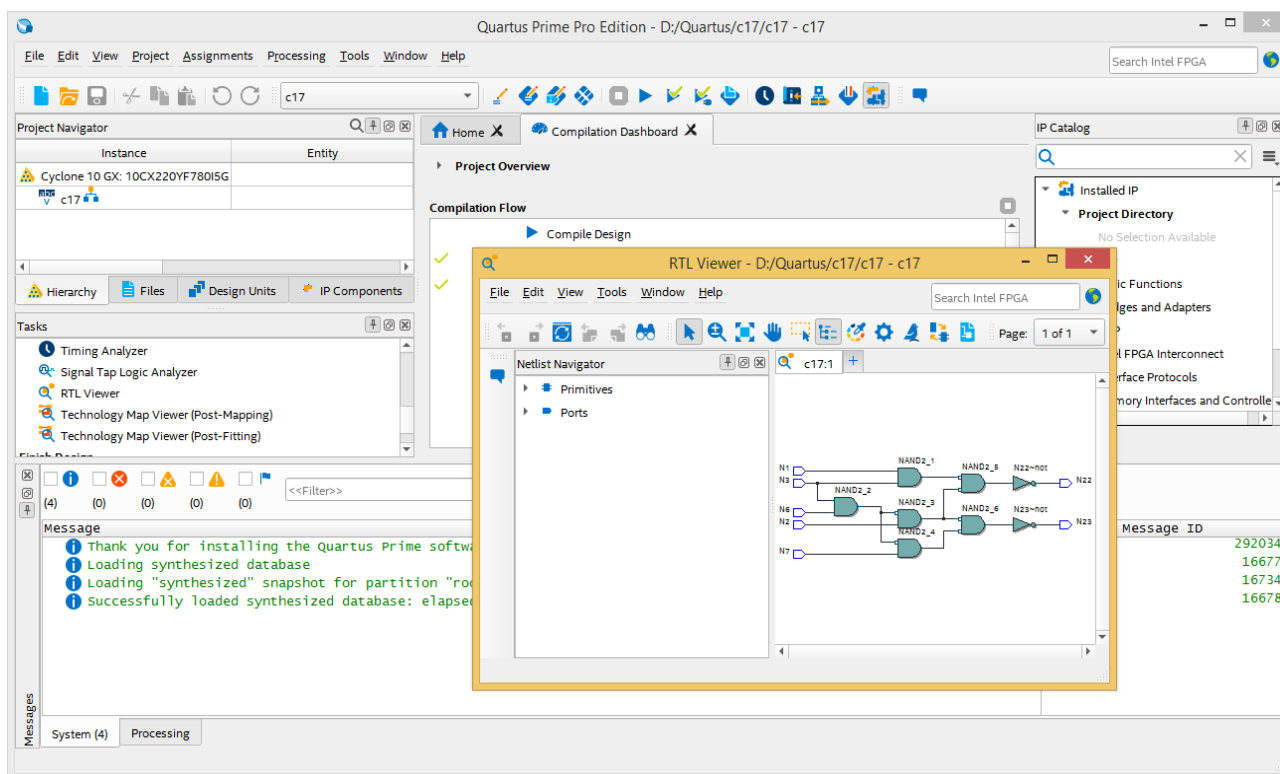


Рис. 1. Моделирование в EDA Quartus II тестовой схемы ISCAS c17

Fig. 1. Simulation in EDA Quartus II test circuit ISCAS c17

Это подтверждается многолетним опытом применения такого подхода при создании заказных схем на основе FPGA [6]. В качестве среды моделирования могут использоваться как проприетарные системы (proprietary system) EDA, например Quartus II или ModelSim, так и программы с открытым исходным кодом (open source), например пакет программ Iverilog. В первом случае это системы автоматизированного проектирования (САПР), ориентированные на разработку заказных микросхем на основе программируемых матриц. Производители этих САПР (Intel, Altera, Mentor Graphics, Xilinx и т.д.), предусматривают в них, как правило, три этапа проектирования: создание алгоритмической (электронной) модели будущей микросхемы; трассировку соединений элементов в FPGA; программирование логической матрицы (перенос программы трассировки в FPGA с помощью программатора, подключенного к EDA). Каждый этап проектирования сопровождается своим поведенческим контролем (simulation) и отладкой. При организации диагностических экспериментов вначале вполне достаточно ограничиться проведением функционального контроля, остальные два нужны для настройки технологического процесса изготовления готовых микросхем. Аналогичный этап содержится и в проектировании микросхем на основе Silicon IP [7] для подготовки документации и передачи ее кремниевой фабрике для производства микросхем. Упомянутые выше EDA имеют предпочтение перед последними САПР, так как имеют «облегченные» (студенческие) лицензии, которые предоставляют для диагностических экспериментов практически все функции EDA [8]. Кроме того, большинство форматов данных в современных EDA совместимы и дополняют друг друга. В случае необходимости недоступные функции можно реализовать open source программами, например входящими в комплект программ Iverilog. Вводить исходные данные в среде EDA можно с помощью традиционных эпюр, используя графический редактор САПР, или программируя их на языках Verilog, VHDL. Первый язык предпочтительней, так как Verilog более компактен и лучше адаптирован к EDA. После ввода элементов архитектуры и параметров ЦУ (для большинства ЦУ из ISCAS в свободном доступе уже имеется описание на языке Verilog, VHDL) программа компилируется и при положительном результате формируется файл, отображающий ЦУ на уровне регистровых передач – RTL (Register Transfer Level). Вызвав этот файл в среде EDA, можно графически проконтролировать схему ЦУ, она должна соответствовать требованиям ISCAS. Кроме контроля она еще является и подтверждением успешного завершения этого этапа.

2. Создание тестов на языке Verilog в среде EDA

Создание тестов (testbench) на языке Verilog в среде EDA, по мнению некоторых авторов [6], является «самой интеллектуальной работой», даже сравнимой с искусством. Эта работа трудно поддается автоматизации, ее трудоемкость сильно зависит от требований к тестовым наборам. Проще всего задать псевдослучайные или периодически повторяющиеся регулярные наборы (САПР их сама генерирует по задаваемым параметрам), сложнее сформировать функциональные контрольные тесты, так как не для всех тестовых схем ISCAS можно найти подробное описание их работы. Самыми сложными тестами являются диагностические, ориентированные на задаваемые модели неисправностей. Как правило, EDA testbench оформляют в виде второго файла (рис. 2), а первый – это модель ЦУ.

Например, в EDA Quartus II это VWF файлы, в Iverilog это V файлы (Verilog файлы). Современные EDA в testbench могут включать не только тестовые наборы, но и средства анализа и визуализации (программный вариант логического анализатора), управляемые графически или программно (Quartus II). Кроме того, EDA могут кроме функционального анализа (Functional Simulation) выполнять и временной анализ (Timing Simulation), а это уже охватывает не только логические неисправности (одиночные константные или кратные, но и динамические). Все это требует тестовых наборов, обеспечивающих выявление «симптомов» такого рода неисправностей. Создание сложных диагностических тестов и является одной из целей современной диагностики, предполагающей наряду с использованием традиционных и новые алгоритмы (эволюционные, нейроморфные, квантовые и т. д.). Именно поэтому и нужны современные автоматизированные средства оценки качества этих и вновь разрабатываемых алгоритмов построения эффективных тестов.

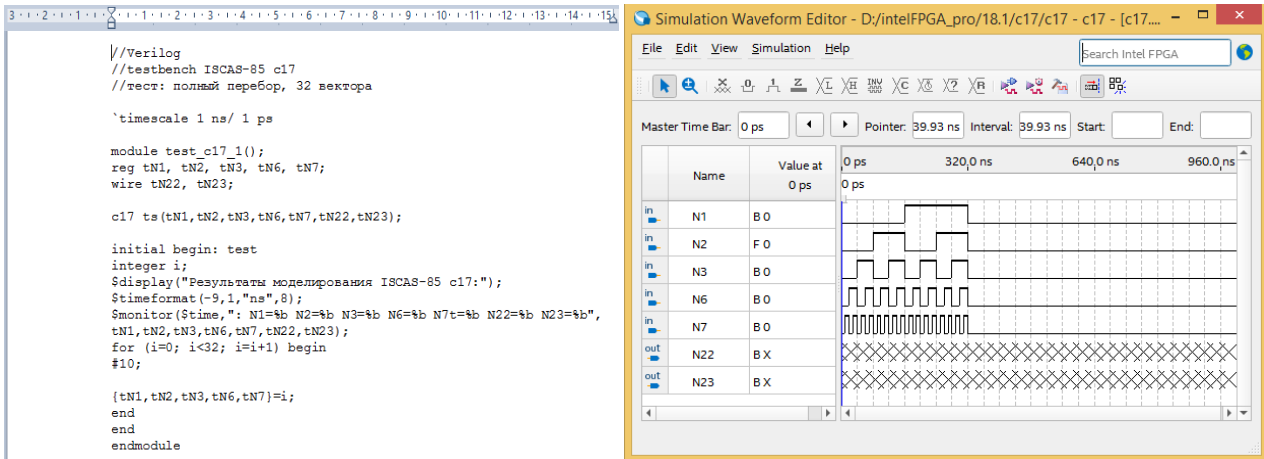


Рис. 2. Testbench схемы ISCAS c17
Fig. 2. Testbench circuit ISCAS c17

При использовании графических средств построения testbench и генерации тестовых наборов средствами EDA анализируется модель ЦУ. Визуализатор при этом может выводить шаблон логического анализа (горизонтальные оси и соответствующие им обнаруженные входы и выходы). Используя этот шаблон, можно графически задать (как бы «начертить») входные наборы, тем самым сформировать testbench. После создания модели ЦУ и testbench, как правило, оформленных в виде двух файлов, наступает этап компиляции и отладки. По существу, это итерационный процесс устранения ошибок в поведении модели ЦУ и тестах. Так как ошибки модели обычно устраняются на втором этапе, то на этом этапе в основном выявляются ошибки testbench, описание которых выводится сообщениями EDA. Реакция на эти сообщения и изменение testbench являются основной целью этапа отладки, затрагивающего как валидность самой модели, так и особенности анализируемого алгоритма построения теста. В результате такого итерационного процесса, когда сообщения об ошибках при компиляции не возникают, генерируются файлы внутреннего формата EDA (в некоторых EDA они доступны в каталоге модели) и выводятся результаты моделирования, если в меню визуализатора указывались соответствующие панели отображения.

Диагностические эксперименты заключаются в задании временных параметров работы симулятора, получении массива данных (data set), сгенерированного EDA, и отображении их в заданном формате. Так, в EDA Quartus II в панели Simulation Waveform Editor, где графически создается и testbench, можно задать временную шкалу моделирования и вызвать в меню процедуру функционального моделирования (Run Functional Simulation), выведя результаты на соответствующие оси. Причем в подкаталог Simulation рабочего каталога модели ЦУ будет выведен файл результата диагностического эксперимента, который можно в дальнейшем проанализировать и опубликовать (рис. 3).

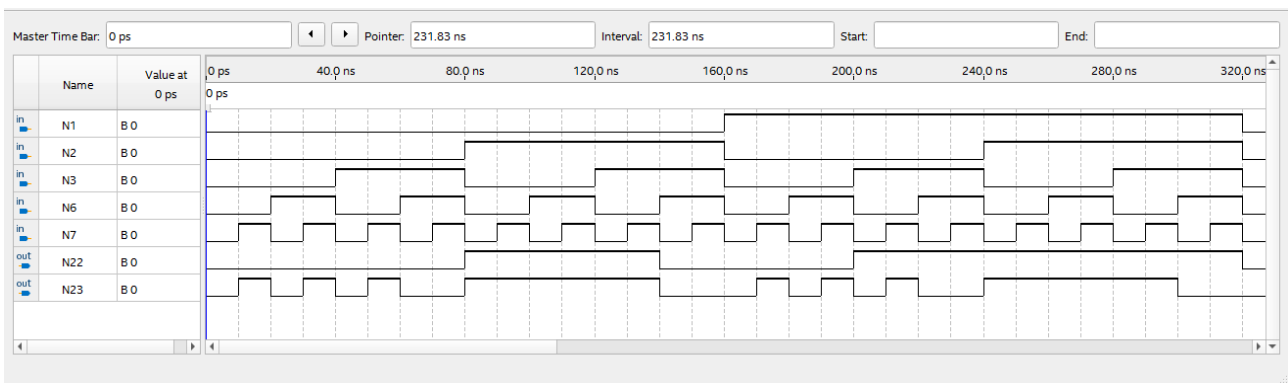


Рис. 3. Результаты диагностического эксперимента с тестовой схемой ISCAS c17
Fig. 3. The results of a diagnostic experiment with a test circuit ISCAS c17

В пакете программ Iverilog процесс моделирования запускается отдельной моделирующей программой, которая вызывает откомпилированный файл и выводит результат на экран или в указанный файл (рис. 4).

```

Результаты моделирования ISCAS-85 c17:
0: N1=x N2=x N3=x N6=x N7=t=x N22=x N23=x
10: N1=0 N2=0 N3=0 N6=0 N7=t=0 N22=0 N23=0
20: N1=0 N2=0 N3=0 N6=0 N7=t=1 N22=0 N23=1
30: N1=0 N2=0 N3=0 N6=1 N7=t=0 N22=0 N23=0
40: N1=0 N2=0 N3=0 N6=1 N7=t=1 N22=0 N23=1
50: N1=0 N2=0 N3=1 N6=0 N7=t=0 N22=0 N23=0
60: N1=0 N2=0 N3=1 N6=0 N7=t=1 N22=0 N23=1
70: N1=0 N2=0 N3=1 N6=1 N7=t=0 N22=0 N23=0
80: N1=0 N2=0 N3=1 N6=1 N7=t=1 N22=0 N23=1
90: N1=0 N2=1 N3=0 N6=0 N7=t=0 N22=1 N23=1
100: N1=0 N2=1 N3=0 N6=0 N7=t=1 N22=1 N23=1
110: N1=0 N2=1 N3=0 N6=1 N7=t=0 N22=1 N23=1
120: N1=0 N2=1 N3=0 N6=1 N7=t=1 N22=1 N23=1
130: N1=0 N2=1 N3=1 N6=0 N7=t=0 N22=1 N23=1
140: N1=0 N2=1 N3=1 N6=0 N7=t=1 N22=1 N23=1
150: N1=0 N2=1 N3=1 N6=1 N7=t=0 N22=0 N23=0
160: N1=0 N2=1 N3=1 N6=1 N7=t=1 N22=0 N23=0
170: N1=1 N2=0 N3=0 N6=0 N7=t=0 N22=0 N23=0
180: N1=1 N2=0 N3=0 N6=0 N7=t=1 N22=0 N23=1
190: N1=1 N2=0 N3=0 N6=1 N7=t=0 N22=0 N23=0
200: N1=1 N2=0 N3=0 N6=1 N7=t=1 N22=0 N23=1
210: N1=1 N2=0 N3=1 N6=0 N7=t=0 N22=1 N23=0
220: N1=1 N2=0 N3=1 N6=0 N7=t=1 N22=1 N23=1
230: N1=1 N2=0 N3=1 N6=1 N7=t=0 N22=1 N23=0
240: N1=1 N2=0 N3=1 N6=1 N7=t=1 N22=1 N23=0
250: N1=1 N2=1 N3=0 N6=0 N7=t=0 N22=1 N23=1
260: N1=1 N2=1 N3=0 N6=0 N7=t=1 N22=1 N23=1
270: N1=1 N2=1 N3=0 N6=1 N7=t=0 N22=1 N23=1
280: N1=1 N2=1 N3=0 N6=1 N7=t=1 N22=1 N23=1
290: N1=1 N2=1 N3=1 N6=0 N7=t=0 N22=1 N23=1
300: N1=1 N2=1 N3=1 N6=0 N7=t=1 N22=1 N23=1
310: N1=1 N2=1 N3=1 N6=1 N7=t=0 N22=1 N23=0
320: N1=1 N2=1 N3=1 N6=1 N7=t=1 N22=1 N23=0
    
```

Рис. 4. Результаты диагностического эксперимента с тестовой схемой ISCAS c17 в Iverilog
 Fig. 4. The results of the diagnostic experiment with the test circuit ISCAS c17 in Iverilog

При необходимости можно создать и графический файл визуализации, который будет открываться в отдельной программе визуализатора. Причем в Iverilog все параметры моделирования указываются в testbench. Полученные данные (data set) и являются целью диагностического эксперимента, так как по ним можно судить о качестве тестов, созданных на основе анализируемого алгоритма. Сама среда EDA в такой диагностический эксперимент ничего от себя не вносит, она только позволяет создать адекватную модель ЦУ и тест на основе исследуемого алгоритма. При необходимости тест можно создать и другими средствами, а EDA использовать для его подачи. При этом упоминавшиеся выше EDA имеют возможность тестировать и физические объекты (ЦУ), подключаемые к ним через порты компьютера.

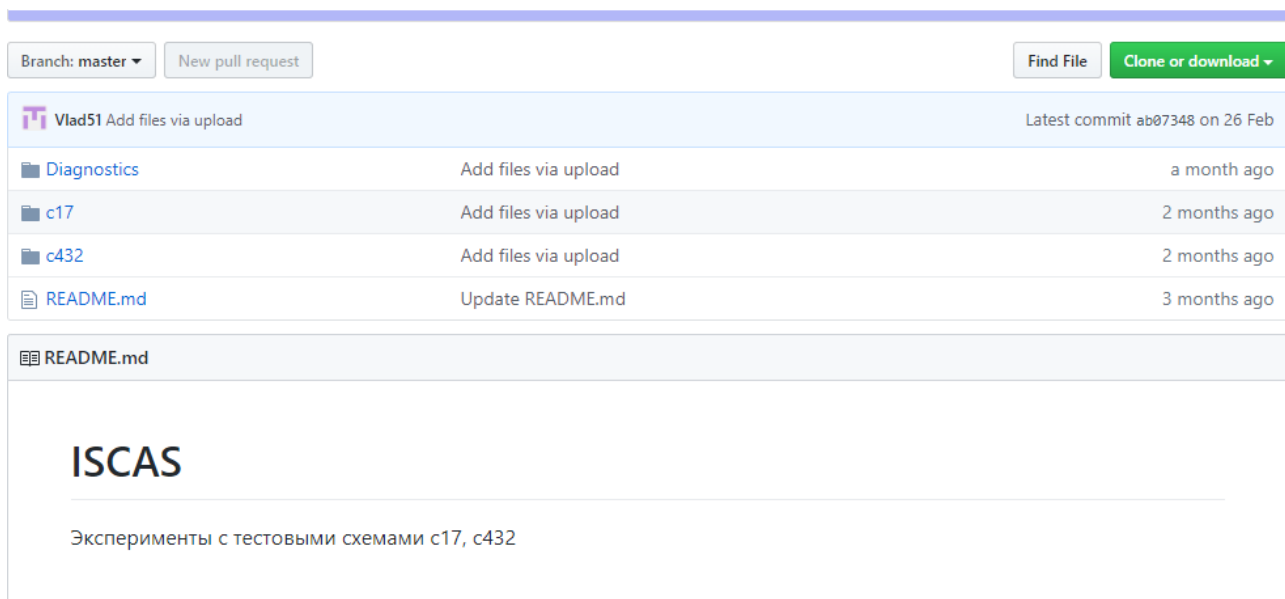


Рис. 5. Публикация результатов диагностических экспериментов в открытом доступе
 Fig. 5. Publication of the results of diagnostic experiments in the public domain

Завершающим этапом в диагностическом эксперименте является анализ полученных результатов и публикация их в открытом доступе (рис. 5). Для этого можно использовать как публичные облачные сервисы, так и сервисы контроля версий типа GitHub [9]. Это позволит в дальнейшем неоднократно обращаться к ним в процессе работы над алгоритмом и представить конечный результат на суд экспертам.

Заключение

Предложенная методика оценки качества контрольных и диагностических тестов позволяет объективно оценить качество алгоритмов построения тестов и автоматизировать диагностический эксперимент, проводимый на алгоритмических моделях тестовых схем ISCAS. Кроме того, результаты диагностического эксперимента, представленные как scientific data, имеют широко распространенные форматы, что облегчает их анализ и публикацию.

ЛИТЕРАТУРА

1. ISCAS. 2019. URL: <http://www.pld.ttu.ee/~maksim/benchmarks/> (accessed: 15.10.2019).
2. Quartus II Introduction for Verilog Users. Altera Corporation, 2009. 30 p.
3. ModelSim : руководство пользователя. Model Technology Incorporated, 2002. 540 с.
4. Icarus Verilog. 2019. URL: <http://iverilog.icarus.com/> (accessed: 15.10.2019).
5. Эксперименты с тестовыми схемами. 2019. URL: <https://github.com/Vlad51/ISCAS> (дата обращения: 15.10.2019).
6. Соловьев В.В. Основы языка проектирования цифровой аппаратуры Verilog. М. : Горячая линия. Телеком, 2014. 206 с. ISBN 978-5-9912-0353-1.
7. Заказные блоки в микросхемах (Silicon IP): как это работает. 2019. URL: <https://habr.com/ru/post/414215/> (дата обращения: 15.10.2019).
8. Quartus II Handbook. Altera Corporation, 2015. Vol. 1: Design and Synthesis. 1800 p.
9. Chacon S., Straub B. Pro Git. Second ed. Apress, 2019. 518 p.

Поступила в редакцию 15 октября 2019 г.

Solovyev V.M., Speranskiy D.V. (2020) ASSESSMENT OF THE QUALITY OF DIAGNOSTIC TESTS ON MODELS OF DIGITAL DEVICES ISCAS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 52. pp. 123–129

DOI: 10.17223/19988605/52/15

A methodology for evaluation of the quality of diagnostic tests on models of digital devices (DD) standardised by the IEEE International Symposium is considered. The need to develop such a technique is caused by the intensive process of introducing electronic products into all areas of human activity. These electronic products (digital devices) need to be designed, manufactured and operated, keeping them in a good working state. At each stage of the life cycle of the DD it is necessary to know their technical status (correct or faulty), which is ensured by monitoring and diagnostic, apply the tests and to analyze the DD reaction to it. Creating effective tests is one of the urgent tasks of modern diagnostics. The effectiveness of tests depends on the algorithms used to create them. Now there are many such algorithms, whose products (tests) require analysis and evaluation of quality. For an objective analysis and evaluation of algorithms experts developed test circuits of DD (ISCAS [1]), standardised by the IEEE International Symposium on Circuits and Systems.

Using these test circuits, it is possible in the computer-aided design of electronic devices (Electronic Design Automation, EDA) to create algorithmic models of the ISCAS of DD, which are almost the same as their actual physical models. Modern EDA, as a rule, allows you to create algorithmic models in the languages of the description of electronic circuits Verilog or VHDL. Previously developed models on VHDL can be translated to Verilog with subsequent compilation, which ensures their compatibility. At the same time, it becomes possible to effectively explore the various approaches and ideas underlying the test synthesis algorithms for complex DD. In addition, this approach allows us to evaluate the technical DD state to create a convenient apparatus for obtaining, storing and analyzing the results of diagnostic experiments. It is very important that these results can be presented in various convenient forms for the researcher (bit array, binary vector, graphic images, etc). All this makes EDA the basis for the development of a new promising methodology that solves a wide range of problems of technical diagnostics of complex DD. The capabilities of this technique were illustrated on standard ISCAS circuits «c17» and «c432». For ISCAS circuits the proposed methodology may include the following steps: selection of a test circuit from ISCAS; data input (schematic diagram or description of DD in Verilog, VHDL) and parameters in the simulation environment (for example, Quartus II [2], ModelSim [3], Icarus Verilog (Iverilog) [4], etc.); development on the base of analyzed algorithms tests for control and diagnostic in the simulation environment; compilation and debugging of the created

DD model and tests; diagnostic experiments with a well-functioning model DD and tests in the simulation environment, as well as visualization of the results of diagnostic experiment; analysis of the results and placing the results in open access to ensure the possibility of their verification and repetition [5].

Keywords: digital devices (DD); languages of DD description Verilog, VHDL; control and diagnostic of DD; programs of Electronic Design Automation (EDA).

SOLOVYEV Vladimir Mikhailovich (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Head of the Volga Regional Center for New Information Technologies of Saratov State University, Saratov, Russian Federation).

E-mail: ign1122@mail.ru

SPERANSKIY Dmitriy Vasilyevich (Professor, Doctor of Technical Sciences, Department Railway Automatics, Telemechanics and Communication of Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russian Federation).

E-mail: speranskiy.dv@gmail.com

REFERENCES

1. ISCAS. (2019) [Online] Available from: <http://www.pld.ttu.ee/~maksim/benchmarks/>. (Accessed: 15th October 2019).
2. CSEWEB. (2009) *Quartus II Introduction for Verilog Users*. Altera Corporation.
3. Model Technology Incorporated. (2002) *ModelSim. User's Manual*. [s.l.; s.n.].
4. *Icarus Verilog*. (2019). [Online] Available from: <http://iverilog.icarus.com/>. (Accessed: 15th October 2019).
5. Github.com. (2019) *Eksperimenty s testovymi skhemami* [Experiments with test circuits]. [Online] Available from: <https://github.com/Vlad51/ISCAS>. (Accessed: 15th October 2019).
6. Solovyev, V.V. (2014) *Osnovy yazyka proektirovaniya tsifrovoy apparatury Verilog* [Fundamentals of the language of design of Verilog digital equipment]. Moscow: Goryachaya liniya. Telekom.
7. Habr.com. (2019) *Zakaznye bloki v mikroskhemakh (Silicon IP): kak eto rabotaet* [Custom blocks in chips (Silicon IP): how it works]. [Online] Available from: <https://habr.com/ru/post/414215/>. (Accessed: 15th October 2019).
8. CSEWEB. (2015) *Quartus II Handbook*. Vol. 1. Altera Corporation.
9. Chacon, S. & Straub, B. (2019) *Pro Git. Second Edition*. Apress.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АНДРЕЙЧЕНКО Дмитрий Константинович – профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического обеспечения вычислительных комплексов и информационных систем Саратовского Национального исследовательского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского. E-mail: andreichenkodk@gmail.com

АНДРЕЙЧЕНКО Константин Петрович – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики и системного анализа Саратовского государственного технического университета им. Гагарина Ю.А. E-mail: kp_andreichenko@renet.ru

АСАДЧИЙ Артем Владимирович – аспирант Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: asadchiav118@gmail.com

БАРАБАНОВА Любовь Петровна – доцент, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Ковровской государственной технологической академии им. В.А. Дегтярева. E-mail: lpbarabanova@yandex.ru

ГИНДУЛЛИН Рамиз Вилевич – доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математических методов в экономике Института экономики, финансов и бизнеса Башкирского государственного университета (г. Уфа). E-mail: ramiz-gindullin@gmail.com

ГОЛОВАСТОВА Элеонора Александровна – аспирант кафедры теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова. E-mail: golovastova.elina@yandex.ru

ГУДКОВА Ирина Андреевна – доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей Российского университета дружбы народов (г. Москва). E-mail: gudkova-ia@rudn.ru

ЖУКОВ Дмитрий Олегович – профессор, доктор технических наук, профессор Российского технологического университета (МИРЭА) (г. Москва). E-mail: zhukovdm@yandex.ru

КИМ Олег Хонбинович – научный сотрудник Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: oh.kim@mail.ru

КЛИМОВА Ольга Витальевна – старший научный сотрудник, кандидат технических наук, научный сотрудник Института машиноведения Уральского отделения Российской академии наук (г. Екатеринбург). E-mail: ovk31@mail.ru

КОПАТЬ Дмитрий Ярославович – аспирант Гродненского государственного университета им. Я. Купалы (Беларусь). E-mail: dk80395@mail.ru

ИСТРАТОВ Леонид Андреевич – лаборант Российского технологического университета (МИРЭА) (г. Москва). E-mail: kuyahstibov@gmail.com

ЛЕСЬКО Сергей Александрович – кандидат технических наук, доцент Российского технологического университета «МИРЭА» (г. Москва). E-mail: lesko@testor.ru

МАКЕЕВА Елена Дмитриевна – студент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей Российского университета дружбы народов (г. Москва). E-mail: len16730637@yandex.ru

МАТАЛЫЦКИЙ Михаил Алексеевич – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной и прикладной математики Гродненского государственного университета им. Я. Купалы (Беларусь). E-mail: m.matalytski@gmail.com

МЕЛЬНИЧУК Дмитрий Вадимович – аспирант кафедры математического обеспечения вычислительных комплексов и информационных систем Саратовского Национального исследовательского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского. E-mail: melnichukdv@sgu.ru

НЕЖЕЛЬСКАЯ Людмила Алексеевна – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: ludne@mail.ru

НИКОЛЬСКИЙ Илья Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры суперкомпьютеров и квантовой информатики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова. E-mail: oliv_mail@mail.ru

ПАРШУКОВ Андрей Николаевич – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры электроэнергетики Тюменского индустриального университета. E-mail: anparshukov@mail.ru

ПОЛЯКОВ Никита Алексеевич – студент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей Российского университета дружбы народов (г. Москва). E-mail: goto97@mail.ru

СОЛДАТОВ Андрей Алексеевич – кандидат технических наук, доцент Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники, доцент Национального исследовательского Томского политехнического университета. E-mail: Soldatov.88@bk.ru

СОЛДАТОВ Алексей Иванович – доктор технических наук, профессор Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники, профессор Национального исследовательского Томского политехнического университета. E-mail: asoldatof@mail.ru

СОЛОВЬЕВ Владимир Михайлович – доцент, кандидат технических наук, начальник Поволжского регионального центра новых информационных технологий Саратовского государственного университета (г. Саратов). E-mail: svm@sgu.ru

СПЕРАНСКИЙ Дмитрий Васильевич – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры железнодорожной автоматики и телемеханики Российского университета транспорта (МИИТ) (г. Москва). E-mail: speranskiy.dv@gmail.com

ТАНАНКО Игорь Евстафьевич – доцент, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой системного анализа и автоматического управления факультета компьютерных наук и информационных технологий Саратовского Национального исследовательского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского. E-mail: tanankoie@info.sgu.ru

ТУМАШКИНА Диана Александровна – аспирант кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: diana1323@mail.ru

ФОКИНА Надежда Петровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного анализа и автоматического управления факультета компьютерных наук и информационных технологий Саратовского Национального исследовательского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского. E-mail: fokinanp.sgu@gmail.com

ХАРИН Петр Александрович – аспирант кафедры прикладной информатики и теории вероятностей Российского университета дружбы народов (г. Москва). E-mail: gruzavjeg@mail.ru

ЦИЦИАШВИЛИ Гурами Шалвович – профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института прикладной математики Дальневосточного отделения РАН (г. Владивосток). E-mail: guram@iam.dvo.ru

Научный журнал

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

**УПРАВЛЕНИЕ,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И ИНФОРМАТИКА**

**TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE**

2020. № 52

Редактор Е.Г. Шумская
Оригинал-макет Е.Г. Шумской
Редакторы-переводчики: Г.М. Кошкин; В.Н. Горенинцева
Дизайн обложки Л.Д. Кривцовой

Подписано к печати 29.09.2020 г. Формат 60x84^{1/8}.
Гарнитура Times. Усл. печ. л. 15,4.
Тираж 250 экз. Заказ № 4413. Цена свободная.

Дата выхода в свет 02.10.2020 г.

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании
Издательского Дома Томского государственного университета
634050, г. Томск, Ленина, 36
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: rio.tsu@mail.ru