3. *Салий В. Н.* Об одном классе конечных динамических систем // Вестник Томского госуниверситета. Приложение. 2005. №14. С. 23–26.
4. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, 1997.
5. *Жаркова А. В.* О ветвлении и непосредственных предшественниках состояний в конечной динамической системе всех возможных ориентаций графа // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2013. №6. С. 76–78.
6. *Жаркова А. В.* Недостижимые состояния в динамических системах, ассоциированных с цепями и циклами // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11. Вып. 4. С. 116–123.

УДК 519.17 DOI 10.17223/2226308X/13/30

ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ РЕАЛИЗАЦИЙ ГРАФОВ С ЗАДАННЫМИ МЕРАМИ СВЯЗНОСТИ[1]

Б. А. Теребин, М. Б. Абросимов

Две основные меры связности графа — вершинная k и рёберная λ — связаны с минимальной степенью вершины δ графа известным соотношением Уитни: $k \leqslant \lambda \leqslant \delta$. Г. Чартрэнд и Ф. Харари доказали, что этот результат не улучшаем в том смысле, что для любых натуральных чисел a, b, c, таких, что $a \leqslant b \leqslant c$, можно построить граф, у которого $k = a$, $\lambda = b$, $\delta = c$. В доказательстве Чартрэнда и Харари предлагается граф с числом вершин $2(c+1)$ и числом рёбер $c(c+1)+b$. В данной работе рассматривается вопрос построения соответствующей реализации с наименьшим возможным числом вершин и рёбер.

Ключевые слова: *вершинная связность, рёберная связность, неравенство Уитни.*

1. Условие Уитни

Связные графы имеют важнейшее значение с точки зрения прикладной теории графов. Две основные меры связности графа — вершинная k и рёберная λ. *Вершинной связностью* k графа G называется наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному или тривиальному графу. *Рёберная связность* λ графа G определяется как наименьшее количество рёбер, удаление которых приводит к несвязному или тривиальному графу. Основные определения используются по работе [1].

Вершинная связность графа k, его рёберная связность λ и минимальная степень вершины δ связаны неравенством Уитни [2]:

Теорема 1 [2]. Для любого графа G справедливо неравенство $k \leqslant \lambda \leqslant \delta$.

Результат теоремы является неулучшаемым:

Теорема 2 (Чартрэнд, Харари [3]). Для любых натуральных чисел a, b, c, таких, что $a \leqslant b \leqslant c$, существует граф G, у которого $k = a$, $\lambda = b$, $c = \delta$.

Из доказательства теоремы 2 следует, что для любых a, b, c можно построить граф с числом вершин $2(c + 1)$ и числом рёбер $c(c + 1) + b$. Предлагается схема построения соответствующего графа: необходимо взять два полных графа K_{c+1}, в одном выбрать a вершин, в другом — b вершин и соединить выбранные вершины b рёбрами.

[1]Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках выполнения государственного задания (проект №FSRR-2020-0006).

Возникает вопрос: можно ли для заданных $k = a$, $\lambda = b$, $c = \delta$ построить граф с меньшим числом вершин и рёбер? Оказывается, что в некоторых случаях это действительно возможно, что и является предметом исследования данной работы.

2. Основные результаты

Результат теоремы 2 можно улучшить не всегда, поэтому общий случай $a \leqslant b \leqslant c$ разделим на следующие неравенства:

1) $a \leqslant b < c$;
2) $a = b = c$;
3) $a < b = c$.

Для первого случая оказалось, что результат теоремы 2 является оптимальным по числу вершин:

Теорема 3. Граф с наименьшим количеством вершин, удовлетворяющий условию Уитни при $a \leqslant b < c$, является графом с числом вершин $2(c+1)$.

Однако число рёбер может быть меньше. Следующий пример иллюстрирует данный случай.

Пример 1. Пусть $a = b = 4$, $c = 5$, т. е. $k = \lambda = 4$, $\delta = 5$.

Количество вершин равно $2(c+1) = 2(5+1) = 12$. Количество рёбер в реализации из теоремы 2 должно быть $c(c+1) + b = 34$. На рис. 1 изображён граф, построенный по теореме 3, с числом рёбер 30.

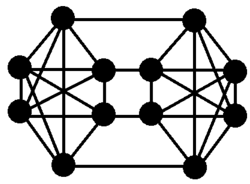

Рис. 1

В двух остальных случаях результат теоремы 2 может быть улучшен и по числу вершин. Второй случай является достаточно тривиальным:

Теорема 4. Граф с наименьшим количеством вершин, удовлетворяющий условию Уитни при $a = b = c$, является полным графом с числом вершин $c + 1$.

Наиболее интересным оказался третий случай, для которого удалось получить следующий результат:

Теорема 5. Граф с наименьшим количеством вершин, удовлетворяющий условию Уитни при $a < b = c$, является графом с числом вершин $2(c+1) - a$.

Доказательство теоремы также является конструктивным и предлагает схему построения соответствующего графа. Следует отметить, что в общем случае можно построить несколько реализаций с числом вершин, как в теореме 5, но с разным числом рёбер. Схема из теоремы 5 позволяет строить граф не только с минимальным числом вершин, но и с минимально возможным числом рёбер.

Теорема 6. Граф с наименьшим количеством рёбер, удовлетворяющий условию Уитни при $a < b = c$, является графом с числом рёбер $c^2 - a^2 + a + c + \sigma$, где

$$\sigma = \begin{cases} 0, & \text{если } \lceil (2a^2 - ac - 2a)/2 \rceil \leqslant 0, \\ \lceil (2a^2 - ac - 2a)/2 \rceil & \text{иначе.} \end{cases}$$

Следующий пример иллюстрирует этот случай.

Пример 2. Пусть $a = 4$, $b = c = 5$, т. е. $k = 4$, $\lambda = \delta = 5$.

Данный случай удовлетворяет условию теорем 5 и 6. Согласно теореме 5, количество вершин равно $2(c+1) - a = 2(5+1) - 4 = 8$. Найдем значение σ:

$$\sigma = \lceil (2a^2 - ac - 2a)/2 \rceil = \lceil (36 - 20 - 8)/2 \rceil = 2.$$

Тогда число рёбер равно $c^2 - a^2 + a + c + \sigma = 25 - 16 + 4 + 5 + 2 = 20$. На рис. 2 изображён соответствующий граф.

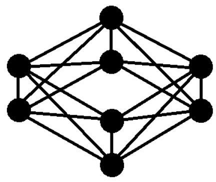

Рис. 2

ЛИТЕРАТУРА

1. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1973. 300 с.
2. *Whitney H.* Congruent graphs and the connectivity of graphs // Am. J. Math. 1932. V. 54. P. 150–168.
3. *Chartrand G. and Harary F.* Graphs with prescribed connectivities // 1966 Symp. on Graph Theory. Tihany, Acad. Sci. Hung. 1967. P. 61–63.