УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 681.5
DOI: 10.17223/19988605/52/1

А.Н. Паршуков

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ПРОВЕРКИ РОБАСТНОГО КАЧЕСТВА УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Получен критерий робастного качества управления для системы, состоящей из объекта управления со структурными возмущениями и модального регулятора. На основе данного критерия разработан численный метод проверки робастного качества управления. Эффективность метода проиллюстрирована примером.
Ключевые слова: структурные возмущения; модальный регулятор; робастное качество управления.

Технологические процессы, обладающие разнотемповыми составляющими, широко распространены [1, 2]. Характерной особенностью моделей таких процессов является выделение в модели операторов так называемой «основной динамики», описывающей ту часть объекта управления, которая подлежит регулированию, и операторов «структурных возмущений» – к ним относят те части объекта управления, которые уже обладают свойствами устойчивости и заданного качества управления [3. С. 29–30]. При синтезе регулятора структурные возмущения, как правило, не учитывают, в результате в передаточной функции (ПФ) замкнутой системы возникает неопределенность. Поскольку свойства устойчивости и качества управления системы определяются расположением полюсов ее ПФ, возникает вопрос: при каких операторах структурных возмущений в объекте управления замкнутая система еще сохранит свойства устойчивости (робастная устойчивость) и качества управления (робастное качество управления)?

В схеме модального управления [3. С. 8–21; 4. С. 5–20] качество управления задается в виде области S на комплексной плоскости; область S определяет желаемое расположение полюсов ПФ. Следовательно, вопросы исследования (проверки) робастной устойчивости и робастного качества управления могут быть рассмотрены с единых позиций: требуется проверить, принадлежат ли корни заданного семейства полиномов области S.

Проблема исследования робастной устойчивости и робастного качества управления широко представлена в литературе. Можно выделить три главных направления, в рамках которых решается данная задача: 1) принцип исключения нуля [5–9]; 2) теория H^∞ [10–11]; 3) метод LMI [12–14]. Тем не менее общая формулировка критерия робастного качества управления (не зависящая от формы области S) до сих пор не получена [9. С. 227].

В настоящей статье в развитие результатов, полученных в [9], разрабатывается метод проверки робастного качества управления.

Далее приняты следующие обозначения: $\doteq$ – равно по определению; $\mathbf{I}$ – единичная матрица соответствующей размерности; $^{\mathrm{T}}$ – транспонирование; * – комплексное сопряжение; j – мнимая единица; R^n, C^n – пространства n-мерных векторов $\mathbf{x} \doteq (x_1, \dots x_n)$, коэффициенты которых соответственно вещественные или мнимые числа; s – комплексная переменная; S – область на C^1; ∂S – граница области S; int S – внутренняя часть области S; t – непрерывное время; $p^i \doteq \mathrm{d}^i / \mathrm{d}t^i$ – оператор i-й степени дифференцирования по времени ($0 \le i < \infty$).

Пусть $f(\mathbf{x})$ – комплекснозначная функция векторного аргумента $\mathbf{x}$, определенная на области $X \subset R^l$; обозначим

$$|f|_+ \doteq \max_{\mathbf{x}\in X} |f(\mathbf{x})|, \quad |f|_- \doteq \min_{\mathbf{x}\in X} |f(\mathbf{x})|. \qquad (1)$$

«Полиномиальным оператором» степени l будем называть дифференциальный оператор вида:

$$f(l, p) = \sum_{i=0}^{l} f_i \cdot p^i, \qquad (2)$$

где f_i – постоянные коэффициенты ($0 \le i \le l$).

В изображениях по Лапласу полиномиальному оператору (2) соответствует алгебраический полином[1]

$$f(l, s) = \sum_{i=0}^{l} f_i \cdot s^i,$$

определенный на C^1; здесь за s обозначена переменная преобразования Лапласа ($s \in C^1$).

«Интервальным дифференциальным оператором» степени l будем называть семейство дифференциальных операторов вида:

$$f(l, F, p) \doteq \left\{ f(l, \mathbf{f}, p) \doteq \sum_{i=0}^{l} f_i \cdot p^i : \quad \forall \mathbf{f} \doteq (f_0, \quad \cdots, \quad f_l)^{\mathrm{T}} \in F \right\}, \qquad (3)$$

где

$$F \doteq \left\{ \mathbf{f} \in R^{l+1} : \quad \forall f_i \in \left[f_i^0 - \Delta f_i, \quad f_i^0 + \Delta f_i \right], \quad f_l^0 \ne 0, \quad \Delta f_i \ge 0, \quad i = \overline{0, l} \right\} -$$

область (многомерный параллелепипед) заданная в пространстве коэффициентов.

Выполняя в (3) формальную замену p на s, получаем «интервальный полином»

$$f(l, F, s) \doteq \left\{ f(l, \mathbf{f}, s) \doteq \sum_{i=0}^{l} f_i \cdot s^i : \quad \forall \mathbf{f} \in F \right\}. \qquad (4)$$

Интервальный полином (4) можно представить в виде:

$$f(l, F, s) = f^0(l, s) + \Delta f(l, \Delta F, s), \qquad (5)$$

где $f^0(l, s) \doteq \sum_{i=0}^{l} f_i^0 \cdot s^i$ – «точечный» полином, а интервальный полином с симметричными интервалами неопределенности коэффициентов $\Delta f(l, \Delta F, s)$ определится по формуле:

$$\Delta f(l, \Delta F, s) \doteq \left\{ \delta f(l, \delta \mathbf{f}, s) \doteq \sum_{i=0}^{l} \delta f_i \cdot s^i : \quad \forall \delta \mathbf{f} \doteq (\delta f_0, \quad \cdots, \quad \delta f_l)^{\mathrm{T}} \in \Delta F \right\},$$

$$\Delta F \doteq \left\{ \delta \mathbf{f} : \quad \forall \delta f_i \in [-\Delta f_i, \quad \Delta f_i], \quad i = \overline{0, l} \right\}.$$

1. Синтез модального регулятора для линейных объектов управления со структурными возмущениями и постановка задачи проверки робастного качества управления

Пусть линейный одномерный объект управления задан моделью вида:

$$v(l, V, p) \cdot a(n, A, p) y(t) = w(r, W, p) \cdot b(m, B, p) u(t), \quad n > m, \quad l > r, \qquad (6)$$

здесь u – входной (управляющий) сигнал, y – выходной (управляемый) сигнал, $a(n, A, p)$, $b(m, B, p)$, $v(l, V, p)$, $w(r, W, p)$ – интервальные дифференциальные операторы вида (5) такие, что

$$a_n^0 = 1, \ \Delta a_n = 0, \quad v_0^0 = 1, \quad \Delta v_0 = 0, \quad w_0^0 = 1, \quad \Delta w_0 = 0.$$

[1] Полином $f(l, s)$ может быть получен путем формальной замены в (2) оператора p на s.

Модель

$$a^0(n,p)y(t)=b^0(m,p)u(t), \tag{7}$$

принадлежащую семейству моделей (6), назовем «номинальной»; интервальные операторы $a(n, A, p)$, $b(m, B, p)$ – «основной динамикой»; операторы $v(l, V, p)$, $w(r, W, p)$ – «структурными возмущениями».

Качество управления будем назначать в виде области S, определяющей допустимое расположение полюсов ПФ на C^1. Предполагаем, что область S удовлетворяет условиям: расположена в ограниченной части C^1 слева от мнимой оси; односвязна; для любой точки $s \in S$ также выполняется $s^* \in S$.

Кроме того, исходя из смысла задачи, потребуем, чтобы операторы структурных возмущений $v(l, V, p)$, $w(r, W, p)$ удовлетворяли выражениям[1]

$$\Lambda(v) \subset \operatorname{int} S, \quad \Lambda(w) \subset \operatorname{int} S. \tag{8}$$

Поскольку требования к качеству управления выражены в корневых показателях качества, регулятор будем рассчитывать по схеме модального управления. Следуя методу синтеза модального регулятора (изложенному, например, в монографии [4. С. 5–20]), регулятор для номинальной модели (7) ищется в виде дифференциального уравнения $(n-1)$-го порядка:

$$\beta(n-1,p)u(t)=\alpha(n-1,p)y(t)+\chi(q,p)g(t), \quad q \le n-1, \quad \beta_{n-1}=1, \tag{9}$$

здесь g – заданный программный сигнал. В схеме модального управления коэффициенты операторов $\beta(n-1, p)$ и $\alpha(n-1, p)$ регулятора (9) рассчитываются из условия обращения в тождество уравнения

$$a^{\text{et.}}(2n-1,s)=a^0(n,s)\beta(n-1,s)-b^0(m,s)\alpha(n-1,s), \quad a^{\text{et.}}_{2n-1}=1, \tag{10}$$

где $a^{\text{et.}}(2n-1, s)$ – заданный характеристический полином эталонной системы управления (далее – «эталон»); выбор эталона ограничен условием

$$\Lambda\left(a^{\text{et.}}\right) \subset \operatorname{int} S. \tag{11}$$

Очевидно, что выбор полинома $\chi(q, s)$ не влияет на свойства робастной устойчивости и робастного качества управления, поэтому вопрос расчета полинома $\chi(q, s)$ в данной работе не рассматривается.

Методика вычисления коэффициентов операторов $\beta(n-1, p)$ и $\alpha(n-1, p)$ приведена в работе [3. С. 8–21], она сводится к решению системы из $2n-1$ линейных алгебраических уравнений относительно $2n-1$ неизвестных коэффициентов полиномов $\beta(n-1, s)$ и $\alpha(n-1, s)$. Данная система однозначно разрешима, если корни полинома $a^0(n, s)$ не совпадают с корнями полинома $b^0(m, s)$.

После замыкания исходного объекта (6) регулятором, синтезированным по схеме (9)–(11), несложно получить следующее выражение для характеристического полинома замкнутой системы:

$$a^{\text{c.}}(2n+l-1,A,B,V,W,s) \doteq \{a^{\text{c.}}(2n+l-1,\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{v},\mathbf{w},s): \\ \forall \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B, \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W\}, \tag{12}$$

здесь

$$a^{\text{c.}}(2n+l-1,\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{v},\mathbf{w},s)=v(l,\mathbf{v},s)\cdot a(n,\mathbf{a},s)\cdot\beta(n-1,s)- \\ -w(l,\mathbf{w},s)\cdot b(m,\mathbf{b},s)\cdot\alpha(n-1,s).$$

Множество полиномов $a^{\text{c.}}(2n+l-1, A, B, V, W, s)$ назовем «семейством характеристических полиномов» замкнутой системы. Множество

$$\Lambda\left(a^{\text{c.}}\right)=\{\lambda_i: \ \exists \mathbf{a} \in A, \exists \mathbf{b} \in B, \exists \mathbf{v} \in V, \\ \exists \mathbf{w} \in W, \quad a^{\text{c.}}(2n+l-1,\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{v},\mathbf{w},\lambda_i)=0, \quad i=\overline{1,2n+l-1}\}$$

назовем «множеством корней» семейства характеристических полиномов (или «множеством полюсов» ПФ) замкнутой системы.

Будем считать, что замкнутая система с характеристическим полиномом (12) обладает робастным качеством управления, если множество $\Lambda(a^{\text{c.}})$ лежит внутри области S, т.е. выполнено условие

[1] Выполнение выражений (8) легко проверить методами, изложенными в работе [15].

$$\Lambda\left(a^{\text{c.}}\right) \subset \operatorname{int} S \tag{13}$$

(далее – *условие робастного качества управления*).

При наличии структурных возмущений в объекте управления нельзя заранее гарантировать, что модальный регулятор, рассчитанный по формулам (9)–(11), будет обеспечивать выполнение условия (13). Таким образом, задача синтеза модального регулятора при наличии структурных возмущений в объекте управления состоит из следующих этапов:

1) синтез модального регулятора для номинального объекта (7) по формулам (9)–(11);

2) последующая проверка выполнения условия (13) для заданного семейства характеристических полиномов (12) (*задача проверки робастного качества управления*).

В следующем разделе изложен численный метод проверки робастного качества управления для семейства характеристических полиномов вида (12).

2. Численный метод проверки робастного качества управления

2.1. Критерий робастного качества управления

Лемма 1. Пусть семейство полиномов (12) удовлетворяет условиям (8), (11). Тогда для того, чтобы для данного семейства было выполнено условие робастного качества управления (13) необходимо и достаточно выполнения[1]

$$0 \notin A^{\text{c.}}(s), \quad \forall s \in \partial S, \tag{14}$$

где

$$A^{\text{c.}}(s) \doteq \left\{a^{\text{c.}}(2n+l-1,s): \quad \forall \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B, \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W\right\} \subset C^1 \; –$$

«геометрический образ» семейства полиномов (12) для точки $s \in \partial S$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный полином, принадлежащий семейству (12). Изменение количества корней этого полинома, лежащих внутри области *S*, может происходить только в том случае, когда хотя бы один из них (при вариациях векторов параметров $\mathbf{a} \in A$, $\mathbf{b} \in B$, $\mathbf{v} \in V$ и $\mathbf{w} \in W$) пересечет границу области *S* и условие (14) будет нарушено. Что и требовалось доказать.

Замечание 1. Полиномы, входящие в семейство (12), содержат произведения варьируемых параметров, следовательно, область $A^{\text{c.}}(s)$ на C^1 может быть невыпуклой (и даже неодносвязной). Таким образом, непосредственное построение невыпуклой области $A^{\text{c.}}(s)$ и последующая проверка выражения (14) представляют собой трудные задачи. Ниже мы получим достаточные условия робастного качества управления путем оценки расстояния от области $A^{\text{c.}}(s)$ до точки $(0, j0)$.

Для точки $s \in \partial S$ такое расстояние равно (с учетом обозначений (1))

$$\left|a^{\text{c.}}(2n+l-1, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, s)\right|_{-},$$

таким образом, выражение (14) принимает вид:

$$\left|a^{\text{c.}}(2n+l-1, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, s)\right|_{-} > 0, \quad \forall s \in \partial S.$$

Для выражения в левой части последнего неравенства справедлива оценка

$$\left|a^{\text{c.}}(2n+l-1,s)\right|_{-} = \left|\left(v^0(l,s) + \delta v(l,\delta\mathbf{v},s)\right)\cdot\left(a^{\text{et.}}(2n-1,s) + \delta a(n-1,\delta\mathbf{a},s)\cdot\right.\right.$$

$$\cdot\beta(n-1,s) - \delta b(m,\delta\mathbf{b},s)\cdot\alpha(n-1,s)\Big) + \Big(v^0(l,s) + \delta v(l,\delta\mathbf{v},s) - w^0(r,s) -$$

$$\left.- \delta w(r,\delta\mathbf{w},s)\right)\cdot\left(b^0(m,s) + \delta b(m,\delta\mathbf{b},s)\right)\cdot\alpha(n-1,s)\Big|_{-} \geq$$

[1] Здесь и далее (там, где это не будет вызывать недоразумений) несущественные для рассуждений аргументы полиномов будем опускать.

$$\geq \left|v^0(l,s)+\delta v(l,\delta\mathbf{v},s)\right|_- \cdot \left|a^{\text{et}\cdot}(2n-1,s)+\delta a(n-1,\delta\mathbf{a},s)\cdot\beta(n-1,s)-\right.$$

$$\left.-\,\delta b(m,\delta\mathbf{b},s)\cdot\alpha(n-1,s)\right|_- - \left|v^0(l,s)+\delta v(l,\delta\mathbf{v},s)-w^0(r,s)-\right.$$

$$\left.-\,\delta w(r,\delta\mathbf{w},s)\right|_+ \cdot \left|b^0(m,s)+\delta b(m,\delta\mathbf{b},s)\right|_+ \cdot \left|\alpha(n-1,s)\right|.$$

Приведенные рассуждения можно рассматривать в качестве нестрогого доказательства следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть семейство полиномов (12) удовлетворяет условиям (8), (11) и

$$\rho(s) \doteq \rho_1(s)-\rho_2(s) > 0, \quad \forall\, s\in\partial S, \tag{15}$$

где

$$\rho_1(s) \doteq \left|v^0(l,s)+\delta v(l,\delta\mathbf{v},s)\right|_- \cdot \left|a^{\text{et}\cdot}(2n-1,s)+\right.$$

$$\left.+\,\delta a(n-1,\delta\mathbf{a},s)\cdot\beta(n-1,s)-\delta b(m,\delta\mathbf{b},s)\cdot\alpha(n-1,s)\right|_-,$$

$$\rho_2(s) \doteq \left|v^0(l,s)+\delta v(l,\delta\mathbf{v},s)-w^0(r,s)-\delta w(r,\delta\mathbf{w},s)\right|_+ \cdot$$

$$\cdot \left|b^0(m,s)+\delta b(m,\delta\mathbf{b},s)\right|_+ \cdot \left|\alpha(n-1,s)\right|. \tag{16}$$

Тогда для (12) выполнено (13).

Технология проверки условия (15) изложена ниже.

2.2. Методика проверки робастного качества управления

Вычисление функций $\rho_1(s)$ и $\rho_2(s)$ в точке s сводится к решению четырех задач квадратичного программирования (далее – задач QP):

$$J_k(\mathbf{x}_k) = 0{,}5\,\mathbf{x}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{C}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{q}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k + e_k \to \min, \qquad k\in\overline{1,4},$$

$$\boldsymbol{\Xi}_k\mathbf{x}_k - \zeta_k \leq \mathbf{0},^{1} \tag{17}$$

где

$$\mathbf{x}_1 \doteq \delta\mathbf{v}, \quad \Delta\mathbf{x}_1 \doteq (\Delta v_1, \;\cdots,\; \Delta v_l)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{z}_1 \doteq \left(s, \;\cdots,\; s^l\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\varphi}_1 \doteq \left(\operatorname{Re}(s), \;\cdots,\; \operatorname{Re}\left(s^l\right)\right)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\psi}_1 \doteq \left(\operatorname{Im}(s), \;\cdots,\; \operatorname{Im}\left(s^l\right)\right)^{\mathrm{T}},^{2}$$

$$\theta_1 \doteq v^0(l,s), \quad \mathbf{x}_2 \doteq (\delta\mathbf{a}, \;\; \delta\mathbf{b})^{\mathrm{T}},$$

$$\Delta\mathbf{x}_2 \doteq (\Delta a_0, \cdots, \Delta a_{n-1}, \Delta b_0, \cdots, \Delta b_m)^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{z}_2 \doteq \left(\beta(n-1,s), \cdots, s^{n-1}\cdot\beta(n-1,s),\right.$$

$$\left.-\alpha(n-1,s), \;\cdots,\; -s^m\cdot\alpha(n-1,s)\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\varphi}_2 \doteq \operatorname{Re}(\mathbf{z}_2), \quad \boldsymbol{\psi}_2 \doteq \operatorname{Im}(\mathbf{z}_2), \quad \theta_2 \doteq a^{\text{et}\cdot}(2n-1,s), \qquad \mathbf{x}_3 \doteq (\delta\mathbf{v}, \;\; \delta\mathbf{w})^{\mathrm{T}},$$

$$\Delta\mathbf{x}_3 \doteq (\Delta v_1, \cdots, \Delta v_l, \Delta w_1, \cdots, \Delta w_r)^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{z}_3 \doteq \left(1, \;\; s, \;\; \cdots, \;\; s^l, \;\; -1, \;\; -s, \;\; \cdots, \;\; -s^r\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\varphi}_3 \doteq \operatorname{Re}(\mathbf{z}_3), \quad \boldsymbol{\psi}_3 \doteq \operatorname{Im}(\mathbf{z}_3), \quad \theta_3 \doteq v^0(l,s)-w^0(r,s), \;\; \mathbf{x}_4 = \delta\mathbf{b},$$

$$\Delta\mathbf{x}_4 \doteq (\Delta b_0, \;\; \cdots, \;\; \Delta b_m)^{\mathrm{T}}, \qquad \mathbf{z}_4 \doteq \left(1, \;\; s, \;\; \cdots, \;\; s^m\right)^{\mathrm{T}},$$

---

[1] За **0** обозначен вектор-столбец, целиком состоящий из нулей.

[2] Далее за $\boldsymbol{\varphi}_k$ и $\boldsymbol{\psi}_k$ обозначены векторы, состоящие соответственно из вещественных и мнимых частей компонент вектора $\mathbf{z}_k$, $1 \leq k \leq 4$, что условно записывается в виде: $\boldsymbol{\varphi}_k = \operatorname{Re}(\mathbf{z}_k)$, $\boldsymbol{\psi}_k = \operatorname{Im}(\mathbf{z}_k)$.

$$\boldsymbol{\varphi}_4 \doteq \mathrm{Re}(\mathbf{z}_4), \quad \boldsymbol{\psi}_4 \doteq \mathrm{Im}(\mathbf{z}_4), \quad \theta_4 \doteq b^0(m,s),$$

$$\mathbf{C}_k = \begin{cases} +2\left(\boldsymbol{\varphi}_k \cdot \boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\psi}_k \cdot \boldsymbol{\psi}_k^{\mathrm{T}}\right), & k \in \overline{1,2}, \\ -2\left(\boldsymbol{\varphi}_k \cdot \boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\psi}_k \cdot \boldsymbol{\psi}_k^{\mathrm{T}}\right), & k \in \overline{3,4}, \end{cases}$$

$$\mathbf{q}_k = \begin{cases} +2\left(\mathrm{Re}(\theta_k)\cdot \boldsymbol{\varphi}_k + \mathrm{Im}(\theta_k)\cdot \boldsymbol{\psi}_k\right), & k \in \overline{1,2}, \\ -2\left(\mathrm{Re}(\theta_k)\cdot \boldsymbol{\varphi}_k + \mathrm{Im}(\theta_k)\cdot \boldsymbol{\psi}_k\right), & k \in \overline{3,4}, \end{cases}$$

$$e_k = \mathrm{Re}^2(\theta_k) + \mathrm{Im}^2(\theta_k),$$

а $\boldsymbol{\Xi}_k$ и $\boldsymbol{\zeta}_k$ – матрицы и вектора блочного вида:

$$\boldsymbol{\Xi}_k = \left(+\mathbf{I} \,\middle|\, -\mathbf{I}\right)^{\mathrm{T}}, \qquad \zeta_k = \left(\Delta\mathbf{x}_k, \quad \Delta\mathbf{x}_k\right)^{\mathrm{T}}, \qquad k \in \overline{1,4}.$$

Нетрудно убедиться, что выполняются

$$\mathbf{C}_k^{\mathrm{T}} = \mathbf{C}_k, \quad e_k \ge 0, \quad k \in \overline{1,4}.$$

В обозначениях (17) функции $\rho_1(s)$ и $\rho_2(s)$ принимают вид:

$$\rho_1(s) = J_1^{\frac{1}{2}}\left(\mathbf{x}_1^*\right)\cdot J_2^{\frac{1}{2}}\left(\mathbf{x}_2^*\right), \quad \rho_2(s) = J_3^{\frac{1}{2}}\left(\mathbf{x}_3^*\right)\cdot J_4^{\frac{1}{2}}\left(\mathbf{x}_4^*\right)\cdot\left|\alpha(n-1,s)\right|, \tag{18}$$

$$\mathbf{x}_k^* \doteq \arg\min_{\Xi_k \mathbf{x}_k - \zeta_k \le \mathbf{0}} f_k(\mathbf{x}_k), \quad f_k(\mathbf{x}_k) \doteq 0{,}5\mathbf{x}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{C}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{q}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k. \tag{19}$$

Задача QP (19) относится к решенным. В случае ограничений в виде линейных неравенств эта задача может быть решена только численными методами.

Теорема 1 и приведенные в данном разделе рассуждения являются основой для изложенного далее алгоритма проверки робастного качества управления. Итак, пусть:

1) на ∂S задано множество точек

$$\Omega(n') = \left\{s_i \in \partial S, \quad i \in \overline{1, n'}\right\}, \quad (n' < \infty).$$

2) в каждой точке $s_i \in \Omega(n')$ для семейства полиномов (12) составлены задачи QP (17).

Алгоритм проверки робастного качества управления

1. В каждой точке $s_i \in \Omega(n')$ решить четыре задачи QP (17) и по формулам (18)–(19) вычислить значения $\rho_1(s)$ и $\rho_2(s)$.

2. Проверить выполнение условия (15). Если условие (15) выполнено, значит для заданного семейства характеристических полиномов выполняется робастное качество управления, если нет – модальный регулятор следует рассчитывать по полной модели объекта управления (6).

3. Пример проверки робастного качества управления

Пусть объект управления задан моделью

$$\left(v^0(2,p) + \Delta v(2,p)\right)\cdot\left(a^0(2,p) + \Delta a(1,p)\right)y(t) =$$
$$= \left(w^0(2,p) + \Delta w(2,p)\right)\cdot\left(b^0(1,p) + \Delta b(1,p)\right)u(t),$$

здесь

$$a^0(2,p) = p^2 + 4p + 13; \quad b^0(1,p) = 10{,}7p + 138{,}7;$$

$$\Delta a(1,p) = [-0{,}5;\, 0{,}5]\,p + [-2;\, 2]; \quad \Delta b(1,p) = [-0{,}5;\, 0{,}5]\,p + [-0{,}5;\, 0{,}5];$$

$$v^0(2,p) = 4{,}4\cdot 10^{-3}p^2 + 1{,}33\cdot 10^{-1}p + 1{,}00;$$

$$w^0(2,p) = 4{,}2\cdot 10^{-3}p^2 + 1{,}29\cdot 10^{-1}p + 1{,}00;$$

$$\Delta v(2,p) = [-5;\, 5]\cdot 10^{-4}p^2 + [-1;\, 1]\cdot 10^{-3}p;$$

$$\Delta w(2,p) = [-5;\, 5]\cdot 10^{-4}p^2 + [-1{,}5;\, 1{,}5]\cdot 10^{-3}p.$$

Нули полиномов $v^0(2, s)$ и $w^0(2, s)$:

$$\Lambda\left(v^0\right)=\{-15, \quad -15\}\subset C^1, \quad \Lambda\left(w^0\right)=\{-15, \quad -16\}\subset C^1.$$

Требования к качеству управления задаются областью

$$S=\left\{s:\eta_2\le -\operatorname{Re}(s)\le \eta_1, \quad \left|\operatorname{Im}(s)/\operatorname{Re}(s)\right|\le \mu_1\right\},$$

где $\eta_1 = 25$, $\eta_2 = 2$, $\mu = 1$. Отметим, что множества $\Lambda(v^0)$ и $\Lambda(w^0)$ лежат внутри области S.

Характеристический полином эталона выберем

$$a^{\text{et.}}(3,s)=s^3+15s^2+75s+125.$$

Для номинальной модели и эталона $a^{\text{et.}}(3, s)$ рассчитан модальный регулятор

$$(p+9{,}062)u(t)=(-0{,}182\,p-0{,}052)y(t)+\chi_0\cdot g(t).$$

Семейство характеристических полиномов замкнутой системы

$$\begin{aligned} a^{\text{c.}}(5,s)&=\left(v^0(2,s)+v(2,s)\right)\cdot\left(a^{\text{et.}}(3,s)+\Delta a(1,s)\cdot\beta(1,s)\right)+\\ &+\left(v^0(2,s)+\Delta v(2,s)-w^0(2,s)-\Delta w(2,s)\right)\cdot b^0(1,s)\cdot\alpha(1,s)-\\ &-\left(w^0(2,s)+\Delta w(2,s)\right)\cdot\Delta b(1,s)\cdot\alpha(1,s). \end{aligned} \tag{20}$$

Рассчитав численно значения функции $\rho(s)$ в точках ($n'=42$) на множестве Ω (граница области S), в результате получим, что значения $\rho(s)\in[3{,}393; 8840{,}0]$, т.е. для семейства полиномов (20) выполнено условие (15) Теоремы 1. Следовательно, по Теореме 1 для семейства полиномов (20) выполняется робастное качество управления.

Заключение

В настоящей статье получен критерий робастного качества управления для замкнутой системы управления, состоящей из линейного одномерного объекта управления со структурными возмущениями и модального регулятора. Теорема 1 устанавливает критерий принадлежности множества корней для семейства характеристических полиномов заданной области S на комплексной плоскости. На основе данной теоремы разработан численный метод проверки робастного качества управления, состоящий в решении четырех задач квадратичного программирования для каждой точки s на границе области S.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крушель Е.Г., Степанченко О.В. Синтез и моделирование цифровых управляющих систем с двойной шкалой времени. М. : Машиностроение-1, 2006. 96 с.
2. Юркевич В.Д. Синтез нелинейных нестационарных систем управления с разнотемповыми процессами. СПб. : Наука, 2000. 288 с.
3. Паршуков А.Н. Методы синтеза модальных регуляторов. Тюмень : ТюмГНГУ, 2009. 84 с.
4. Кузовков Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. М. : Машиностроение, 1976. 184 с.
5. Ackermann J.A., Bartlett D., Kaesbauer W.S., Steinhauser R. Robust control. Systems with uncertain physical parameters. London: Springer-Verlag, 1993. 413 p.
6. Barmish B.R. New tools for robustness of linear systems. New York : MacMillan, 1994. 394 p.
7. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Частотные критерии робастной устойчивости и апериодичности линейных систем // Автоматика и телемеханика. 1990. № 9. С. 45–54.
8. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Устойчивость и робастная устойчивость однотипных систем // Автоматика и телемеханика. 1996. № 11. С. 91–104.
9. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М. : Наука, 2002. 303 с.
10. Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1989. V. 34, No. 8. P. 831–847.
11. Kogan M. M. Optimal Discrete-time $H\infty/\gamma 0$ Filtering and Control under Unknown Covariances // Int. J. Control, 2016. V. 89, No. 4. P. 691–700.
12. Честнов В.Н. $H\infty$-подход к синтезу регуляторов при параметрической неопределенности и полигармонических внешних возмущениях // Автоматика и телемеханика. 2015. № 6. С. 112–127.

13. Сельвесюк Н.И. Аналитический синтез робастных регуляторов заданной точности при внешних возмущениях // Известия РАН. Теория и системы управления. 2016. № 4. С. 62–72. DOI: 10.7868/S0002338816040107.
14. Баландин Д.В., Коган М.М., Кривдина Л.Н. Федюков А.А. Синтез обобщенного H∞-оптимального управления в дискретном времени на конечном и бесконечном интервалах // Автоматика и телемеханика. 2014. № 1. С. 3–22.
15. Паршуков А.Н. Метод синтеза модального регулятора для объекта управления с интервальной неопределенностью коэффициентов // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2019. № 4 (49). С. 14–22.

Поступила в редакцию 23 марта 2020 г.

Parshukov A.N. (2020) NUMERICAL METHOD FOR TESTING ROBUST CONTROL QUALITY FOR LINEAR ONE-DIMENSIONAL DYNAMIC CONTROL SYSTEMS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 52. pp. 4–12

DOI: 10.17223/19988605/52/1

Technological processes with multi-tempo components are quite widespread. A characteristic feature of the models of such processes is the allocation in the model of operators of the so – called" basic dynamics", describing the part of the control object that is subject to regulation, and operators of" structural disturbances " - these include those parts of the control object that already have the properties of stability and a given quality of control. In the synthesis of the regulator structural perturbations, as a rule, do not take into account, as a result of the transfer function of a closed system there is uncertainty. Since the properties of stability and control quality of the system are determined by the location of the poles of its transfer function, the question arises: at what operators of structural disturbances in the control object the closed system will still retain the properties of stability (robust stability) and control quality (robust control quality)?

In the modal control scheme, the control quality is given as an area S on the complex plane; area S determines the desired location of the poles of the transfer function. Therefore, the questions of research (verification) of robust stability and robust control quality can be considered from a single point of view: is it necessary to check whether the roots of a given family of polynomials in the domain S?

In the literature devoted to robust theory focuses on the problem of robust stability, and the problem of robust quality control fades into the background and is still not solved. The purpose of the study is to develop a robust control quality criterion for the case of structural disturbances in the control object model. Method: a theorem known as the "zero elimination principle" is generalized. The article provides a robust control quality criterion for a control system consisting of a control object with structural disturbances and a modal controller. Based on this criterion, a numerical method has been developed to check the robust quality of control. The proposed method is illustrated by an example.

Keywords: structural disturbances; modal regulator; robust control quality.

PARSHUKOV Andrej Nikolaevich (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Federal State Budget Educational Institution of Higher Education «Industrial University of Tyumen», Tyumen, Russian Federation).
E-mail: anparshukov@mail.ru

REFERENCES

1. Krushel, E.G. & Stepanchenko, O.V. (2006) *Sintez i modelirovanie tsifrovykh upravlyayushchikh sistem s dvoynoy shkaloy vremeni* [Synthesis and modeling of digital control systems with a double time scale]. Moscow: Mashinostroenie-1.
2. Yurkevich, V.D. (2000) *Sintez nelineynykh nestatsionarnykh sistem upravleniya s raznotempovymi protsessami* [Synthesis of nonlinear non-stationary control systems with multi-rate processes]. St. Petersburg: Nauka.
3. Parshukov, A.N. (2009) *Metody sinteza modal'nykh regulyatorov* [Methods of synthesis of modal regulators]. Tyumen: Industrial University of Tyumen.
4. Kuzovkov, N.T. (1976) *Modal'noe upravlenie i nablyudayushchie ustroystva* [Modal control and monitoring devices]. Moscow: Mashinostroenie. 184 p.
5. Ackermann, J.A., Bartlett, D., Kaesbauer, W.S. & Steinhauser, R. (1993) *Robust control. Systems with uncertain physical parameters*. London: Springer-Verlag.
6. Barmish, B.R. (1994) *New tools for robustness of linear systems*. New York: MacMillan.
7. Polyak, B.T. & Tsypkin, Ya.Z. (1990) Frequency criteria of robust stability and aperiodicity of linear systems. *Automation and Remote Control*. 51(9). pp. 1192–1201.
8. Polyak, B.T. & Tsypkin, Ya.Z. (1996) Stability and Robust Stability of Uniform Systems. *Automation and Remote Control*. 57(11). pp. 1606–1617.
9. Polyak, B.T. & Shcherbakov, P.S. (2002) *Robastnaya ustoychivost' i upravlenie* [Robust stability and control]. Moscow: Nauka.
10. Doyle, J.C., Glover, K., Khargonekar, P.P. & Francis, B.A. (1989) State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 34(8). pp. 831–847. DOI: 10.1109/9.29425

11. Kogan, M.M. (2016) Optimal Discrete-time H∞/γ0 Filtering and Control under Unknown Covariances. *International Journal of Control*. 89(4). pp. 691–700. DOI: 10.1080/00207179.2015.1091511
12. Chestnov, V.N. (2015) H∞-approach to controller synthesis under parametric uncertainty and polyharmonic external disturbances. *Automation and Remote Control*. 76(6). pp. 1036–1048. DOI: 10.1134/S0005117915060077
13. Selvesyuk, N.I. (2016) Analytical synthesis of robust controllers of the given accuracy under external perturbations. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya – Journal of Computer and Systems Sciences International*. 55(4). pp. 558–569. DOI: 10.1134/S1064230716040109
14. Balandin, D.V., Kogan, M.M., Krivdina, L.N. & Fedyukov, A.A. (2014) Design of Generalized Descretetime H∞-optimal Control over Finite and Infinite Intervals. *Automation and Remote Control*. 75(1). pp. 1–17. DOI: 10.1134/S0005117914010019
15. Parshukov, A.N. (2019) Synthesis method of modal regulator for control object with interval uncertainty of coefficients. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja technika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 49. pp. 14–22. DOI: 10.17223/19988605/49/2