

УДК 519.873

DOI: 10.17223/19988605/52/7

Э.А. Головастова

ВРЕМЯ РАБОТЫ СИСТЕМЫ СО ВЗАИМОЗАМЕНЯЕМЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ, ВЫХОДЯЩИМИ ИЗ СТРОЯ, И НЕНАДЕЖНЫМ ВОССТАНАВЛИВАЮЩИМ ПРИБОРОМ

Рассматривается модель с ненадежными компонентами: одним восстанавливающим прибором и несколькими взаимозаменяемыми элементами. Функции распределения времени работы прибора, времени восстановления прибора и элемента полагаются экспоненциальными с параметром, зависящим от состояния системы. Время работы элемента имеет произвольное распределение. В работе получены соотношения, определяющие распределение времени работы всей системы.

Ключевые слова: задача надежности; состояние системы; преобразование Лапласа; время безотказной работы системы.

По мере развития технических комплексов естественным образом возникла необходимость учитывать влияние разного рода отказов и сбоев их составляющих на эффективность работы всей системы. Данная проблема служит предметом изучения теории надежности. Определение нестационарных характеристик системы является одной из немаловажных задач в рамках этой теории. Разнообразие реальных функциональных систем обеспечивает довольно широкое распространение моделей, имеющих как рабочие компоненты, так и компоненты, отвечающие за восстановление последних. Известны публикации, где рассматривается система с несколькими одинаковыми элементами, когда в каждый момент времени работает только один элемент, а другие находятся в холодном резерве или восстанавливаются [1–8]. Зачастую в подобных моделях предполагается, что время восстановления отдельного элемента имеет экспоненциальное распределение, а время его работы – произвольное. Параметры системы не зависят от ее состояния. При таких условиях находится преобразование Лапласа–Стилтьеса времени безотказной работы системы [9–11]. Также многие исследования посвящены статистическим вопросам, связанным с оценкой надежности практически значимых моделей [7, 10, 11].

Мы рассмотрим случай, когда состояние системы влияет на работу и восстановление ее компонент, и получим результаты для системы с постоянными параметрами. В работе будет предложен метод решения подобной задачи, значительно упрощающий нахождение искомой характеристики: вместо введения многомерного марковского процесса, задающего состояние системы в произвольный момент времени, и попыток решения получающихся в результате уравнений в частных производных, мы рассмотрим двумерный марковский процесс, который в дальнейшем позволит получить систему линейных алгебраических уравнений для искомых неизвестных.

1. Постановка задачи и математическая модель

Ставится задача надежности следующего вида. В системе есть n рабочих элементов и один восстанавливающий прибор. В каждый момент времени работает только один элемент, который после поломки немедленно отправляется ремонтироваться в очередь на прибор, который тоже может выйти из строя. Вероятность восстановления элемента на приборе в интервале $(t, t + \Delta t)$ равна $\mu_i \Delta t + o(\Delta t)$, где i – число неисправных элементов на момент t . Элемент работает случайное время с функцией распределения $G_{i0}(x)$, если на момент начала его работы сломано i элементов и прибор исправен; $G_{i1}(x)$, если прибор неисправен и сломано i элементов. Прибор на интервале $(t, t + \Delta t)$

выходит из строя с вероятностью $\alpha_i \Delta t + o(\Delta t)$, восстанавливается с вероятностью $\beta_i \Delta t + o(\Delta t)$, где i – число неисправных элементов на момент t . Система прекращает свое функционирование, если сломаны все n элементов. Все описанные случайные величины полагаем взаимно независимыми. Цель работы – получение распределения времени работы системы в данной модели.

Рассмотрим время между двумя последовательными поломками элементов. Отметим, что в течение этого времени происходит либо восстановление, либо сохранение исходного числа неисправных элементов.

Введем на этом промежутке времени процесс $\{v(t), e(t)\}$, где $v(t)$ – число неработоспособных элементов в момент t ; $e(t) = 0$, если прибор работает, $e(t) = 1$, если прибор сломан. Обозначим переходные вероятности такого процесса следующим образом:

$$P_{j0}^{i0}(t) = P(v(t) = j, e(t) = 0 | v(0) = i, e(0) = 0), \quad P_{j1}^{i0}(t) = P(v(t) = j, e(t) = 1 | v(0) = i, e(0) = 0),$$

$$P_{j0}^{i1}(t) = P(v(t) = j, e(t) = 0 | v(0) = i, e(0) = 1), \quad P_{j1}^{i1}(t) = P(v(t) = j, e(t) = 1 | v(0) = i, e(0) = 1).$$

Данный процесс является цепью Маркова на промежутке времени работы элемента, и он полностью описывает состояние системы в любой момент из этого промежутка. Отметим, что $j \leq i + 1$.

Уравнения для переходных вероятностей введенного процесса на промежутке времени между двумя последовательными поломками элементов имеют следующий вид для $j = i, 0 < i \leq n-1, e \in \overline{0,1}$:

$$\begin{aligned} P_{ie}^{ie}(0) &= 1, \quad P_{i1-e}^{ie}(0) = 0, \\ P_{je}^{ie}(0) &= 0, \quad P_{j1-e}^{ie}(0) = 0 \quad 0 \leq j < n-1; \\ \frac{d P_{i0}^{ie}(t)}{dt} &= -(\alpha_i + \mu_i) P_{i0}^{ie}(t) + \beta_i P_{i1}^{ie}(t), \\ \frac{d P_{i1}^{i0}(t)}{dt} &= -\beta_i P_{i1}^{ie}(t) + \alpha_i P_{i0}^{ie}(t); \end{aligned} \quad (1)$$

для $0 < j < i$:

$$\begin{aligned} \frac{d P_{j0}^{ie}(t)}{dt} &= -(\alpha_j + \mu_j) P_{j0}^{ie}(t) + \beta_j P_{j1}^{ie}(t) + \mu_{j+1} P_{j+10}^{ie}(t), \\ \frac{d P_{j1}^{ie}(t)}{dt} &= -\beta_j P_{j1}^{ie}(t) + \alpha_j P_{j0}^{ie}(t); \end{aligned} \quad (2)$$

для $j = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d P_{01}^{ie}(t)}{dt} &= -\beta_0 P_{01}^{ie}(t) + \alpha_0 P_{00}^{ie}(t), \\ \frac{d P_{00}^{ie}(t)}{dt} &= -\alpha_0 P_{00}^{ie}(t) + \beta_0 P_{01}^{ie}(t) + \mu_1 P_{10}^{ie}(t); \end{aligned} \quad (3)$$

для $i = 0$:

$$\begin{aligned} P_{0e}^{0e}(0) &= 1, \quad P_{01-e}^{0e}(0) = 0, \\ \frac{d P_{00}^{0e}(t)}{dt} &= -\alpha_0 P_{00}^{0e}(t) + \beta_0 P_{01}^{0e}(t), \\ \frac{d P_{01}^{0e}(t)}{dt} &= -\beta_0 P_{01}^{0e}(t) + \alpha_0 P_{00}^{0e}(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Введем следующие обозначения: τ_i^0 – время до выхода из строя всей системы, если на момент начала работы элемента имеется i неработоспособных элементов и прибор исправен; τ_i^1 – время до выхода из строя всей системы, если на момент начала работы элемента имеется i неработоспособных элементов и прибор неисправен; η_i^0 – время работы элемента, заступающего первым, если на начало его работы имеется i неработоспособных элементов и прибор исправен; η_i^1 – время работы элемента, заступающего первым, если на начало его работы имеется i неработоспособных элементов и прибор неисправен.

Также введем обозначения для события, задающего состояние системы на конец рабочего периода элемента:

$$A_{j0}^{i0} = \{v(\eta_i^0) = j, e(\eta_i^0) = 0\}, \quad A_{j0}^{i1} = \{v(\eta_i^1) = j, e(\eta_i^1) = 0\},$$

$$A_{j1}^{i0} = \{v(\eta_i^0) = j, e(\eta_i^0) = 1\}, \quad A_{j1}^{i1} = \{v(\eta_i^1) = j, e(\eta_i^1) = 1\}.$$

Тогда имеем следующие соотношения времени безотказной работы системы для $i = n-1$:

$$\tau_{n-1}^0 = \eta_{n-1}^0 I(A_{n-10}^{n-10} + A_{n-11}^{n-10}) + \sum_{j=0}^{n-2} (\eta_{n-1}^0 + \tau_{j+1}^0) I(A_{j0}^{n-10}) + \sum_{j=0}^{n-2} (\eta_{n-1}^0 + \tau_{j+1}^1) I(A_{j1}^{n-10}),$$

$$\tau_{n-1}^1 = \eta_{n-1}^1 I(A_{n-10}^{n-11} + A_{n-11}^{n-11}) + \sum_{j=0}^{n-2} (\eta_{n-1}^1 + \tau_{j+1}^0) I(A_{j0}^{n-11}) + \sum_{j=0}^{n-2} (\eta_{n-1}^1 + \tau_{j+1}^1) I(A_{j1}^{n-11});$$

для $0 \leq i < n-1$:

$$\tau_i^0 = \sum_{j=0}^i (\eta_i^0 + \tau_{j+1}^0) I(A_{j0}^{i0}) + \sum_{j=0}^i (\eta_i^0 + \tau_{j+1}^1) I(A_{j1}^{i0}),$$

$$\tau_i^1 = \sum_{j=0}^i (\eta_i^1 + \tau_{j+1}^0) I(A_{j0}^{i1}) + \sum_{j=0}^i (\eta_i^1 + \tau_{j+1}^1) I(A_{j1}^{i1}),$$

где $I(A) = 1$, $I(\bar{A}) = 0$ – индикатор события A .

Найдем уравнения для преобразований Лапласа–Стилтьеса искомого. Пусть:

$$\phi_j^0(s) = E e^{-s\tau_j^0},$$

$$g_{n-1,n-1}^0(s) = \int_0^\infty e^{-st} (P_{n-10}^{n-10}(t) + P_{n-11}^{n-10}(t)) dG_{n-1,0}(t),$$

$$g_{j\tilde{e}}^{ie}(s) = \int_0^\infty e^{-st} P_{j\tilde{e}}^{ie}(t) dG_{i,e}(t), \quad j, i \in \overline{0, n-1}, \quad e, \tilde{e} \in \overline{0, 1}.$$

Тогда имеем следующие уравнения для $i = n-1$:

$$\phi_{n-1}^0(s) = g_{n-1,n-1}^0(s) + \sum_{j=0}^{n-2} \phi_{j+1}^0(s) g_{j0}^{n-10}(s) + \sum_{j=0}^{n-2} \phi_{j+1}^1(s) g_{j1}^{n-10}(s),$$

$$\phi_{n-1}^1(s) = g_{n-1,n-1}^1(s) + \sum_{j=0}^{n-2} \phi_{j+1}^0(s) g_{j0}^{n-11}(s) + \sum_{j=0}^{n-2} \phi_{j+1}^1(s) g_{j1}^{n-11}(s); \quad (5)$$

для $0 \leq i < n-1$:

$$\phi_i^0(s) = \sum_{j=0}^i \phi_{j+1}^0(s) g_{j0}^{i0}(s) + \phi_{j+1}^1(s) g_{j0}^{i1}(s), \quad \phi_i^1(s) = \sum_{j=0}^i \phi_{j+1}^0(s) g_{j0}^{i1}(s) + \phi_{j+1}^1(s) g_{j1}^{i1}(s). \quad (6)$$

Заметим, что события, задающие состояние системы на конец рабочего периода элемента, образуют полную систему несовместных событий. Поэтому можно преобразовать систему стохастических уравнений для случайных величин, определяющих время работы системы, и, взяв математическое ожидание от обеих частей этих преобразованных уравнений, получить для $i = n-1$:

$$T_{n-1}^0 = H_{n-1}^0 + \sum_{j=0}^{n-2} (T_{j+1}^0 P_{j0}^{n-10} + T_{j+1}^1 P_{j1}^{n-10}),$$

$$T_{n-1}^1 = H_{n-1}^1 + \sum_{j=0}^{n-2} (T_{j+1}^0 P_{j0}^{n-11} + T_{j+1}^1 P_{j1}^{n-11});$$

для $0 \leq i < n-1$:

$$T_i^0 = H_i^0 + \sum_{j=0}^i (T_{j+1}^0 P_{j0}^{i0} + T_{j+1}^1 P_{j1}^{i0}),$$

$$T_i^1 = H_i^1 + \sum_{j=0}^i (T_{j+1}^0 P_{j0}^{i1} + T_{j+1}^1 P_{j1}^{i1}),$$

где

$$T_j^e = E \tau_j^e, \quad H_j^e = E \eta_j^e, \quad P_{j\bar{e}}^{ie} = \int_0^\infty P_{j\bar{e}}^{ie}(t) dG_{ie}(t).$$

2. Применение метода к более простой модели

Рассмотрим постановку задачи, в которой параметры системы не зависят от числа сломанных элементов и состояния прибора, т.е. распределение времени восстановления элемента – экспоненциальное с параметром μ , распределение времени работы прибора – экспоненциальное с параметром α , распределение времени восстановления прибора – экспоненциальное с параметром β , функция распределения времени работы элемента – $G(x)$. Все описанные случайные величины полагаем взаимно независимыми. Число элементов – n , прибор один. Также предполагаем, что прибор не выходит из строя, когда он не работает.

Такая формулировка задачи является более простой по сравнению с представленной ранее, поэтому тут тоже рассмотрим время между двумя последовательными поломками элементов и введем процесс $\{v(t), e(t)\}$ на этом промежутке. В силу предположения

$$\begin{aligned} P_{01}^{ie}(t) &= 0, \quad i \in \overline{0, \dots, n-1}; \quad e \in \overline{0, 1}, \\ i &= 0, \quad P_{00}^{00}(t) = 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнения для переходных вероятностей введенного процесса имеют вид для $j=i, 0 < i \leq n-1, e \in \overline{0, 1}$:

$$\begin{aligned} P_{ie}^{i0}(0) &= 1, \quad P_{i1-e}^{i0}(0) = 0, \\ P_{je}^{ie}(0) &= 0, \quad P_{j1-e}^{ie}(0) = 0 \quad 0 \leq j < i, \\ \frac{d P_{i0}^{ie}(t)}{dt} &= -(\alpha + \mu) P_{i0}^{ie}(t) + \beta P_{i1}^{ie}(t), \\ \frac{d P_{i1}^{ie}(t)}{dt} &= -\beta P_{i1}^{ie}(t) + \alpha P_{i0}^{ie}(t); \end{aligned} \quad (8)$$

для $0 < j < i$:

$$\begin{aligned} \frac{d P_{j0}^{ie}(t)}{dt} &= -(\alpha + \mu) P_{j0}^{ie}(t) + \beta P_{j1}^{ie}(t) + \mu P_{j+10}^{ie}(t), \\ \frac{d P_{j1}^{ie}(t)}{dt} &= -\beta P_{j1}^{ie}(t) + \alpha P_{j0}^{ie}(t); \end{aligned} \quad (9)$$

для $j=0$:

$$\frac{d P_{00}^{ie}(t)}{dt} = \mu P_{10}^{ie}(t). \quad (10)$$

Взяв преобразования Лапласа от обеих частей уравнений (8)–(10), получаем для $1 \leq i \leq n-1$:

$$\begin{aligned} P_{i0}^{i0*}(s) &= \frac{s + \beta}{s(s + \mu + \alpha + \beta) + \mu\beta} = P(s), \quad P_{i1}^{i0*}(s) = \frac{\alpha}{s(s + \mu + \alpha + \beta) + \mu\beta} = A(s), \\ P_{i0}^{i1*}(s) &= \frac{\beta}{s(s + \mu + \alpha + \beta) + \mu\beta} = Q(s), \quad P_{i1}^{i1*}(s) = \frac{s + \mu + \alpha}{s(s + \mu + \alpha + \beta) + \mu\beta} = B(s); \end{aligned}$$

для $2 \leq k \leq i, i \geq 2$:

$$\begin{aligned} P_{i+1-k,0}^{i,0*}(s) &= (P(s))^k \mu^{k-1}, & P_{i+1-k,1}^{i,0*}(s) &= (P(s))^k \mu^{k-1} \frac{\alpha}{s+\beta}, \\ P_{i+1-k,0}^{i,1*}(s) &= (P(s)\mu)^{k-1} Q(s), & P_{i+1-k,1}^{i,1*}(s) &= \frac{\alpha}{s+\beta} (P(s)\mu)^{k-1} Q(s), \\ P_{00}^{i,0*}(s) &= \frac{\mu^i}{s} (P(s))^i, & P_{00}^{i,1*}(s) &= \frac{\mu}{s} (\mu P(s))^{i-1} Q(s). \end{aligned}$$

В данной постановке задачи уравнения для преобразований Лапласа–Стилтьеса искомого будут иметь вид для $i = n-1$:

$$\begin{aligned} \varphi_{n-1}^0(s) &= g_{n-1,n-1}^0(s) + \sum_{j=0}^{n-2} \varphi_{j+1}^0(s) g_{j0}^{n-10}(s) + \sum_{j=1}^{n-2} \varphi_{j+1}^1(s) g_{j1}^{n-10}(s), \\ \varphi_{n-1}^1(s) &= g_{n-1,n-1}^1(s) + \sum_{j=0}^{n-2} \varphi_{j+1}^0(s) g_{j0}^{n-11}(s) + \sum_{j=1}^{n-2} \varphi_{j+1}^1(s) g_{j1}^{n-11}(s); \end{aligned} \quad (11)$$

для $0 < i < n-1$:

$$\begin{aligned} \varphi_i^0(s) &= \sum_{j=0}^i \varphi_{j+1}^0(s) g_{j0}^{i0}(s) + \sum_{j=1}^i \varphi_{j+1}^1(s) g_{j0}^{i1}(s), \\ \varphi_i^1(s) &= \sum_{j=0}^i \varphi_{j+1}^0(s) g_{j0}^{i1}(s) + \sum_{j=1}^i \varphi_{j+1}^1(s) g_{j1}^{i1}(s); \end{aligned} \quad (12)$$

для $i = 0$:

$$\varphi_0^0(s) = \varphi_1^0(s) \int_0^\infty e^{-st} P_{00}^{00}(t) dG(t). \quad (13)$$

Рассмотрим случай $n = 2$ для последней системы. Решая дифференциальные уравнения для переходных вероятностей (7)–(10), получаем:

$$\begin{aligned} P_{00}^{00}(t) &= 1, \quad P_{00}^{10}(t) = 1 - P_{10}^{10}(t) - P_{11}^{10}(t), \quad P_{00}^{11}(t) = 1 - P_{10}^{11}(t) - P_{11}^{11}(t), \\ P_{10}^{10}(t) &= (r_1 - r_2)^{-1} ((\beta + r_1)e^{r_1 t} - (\beta + r_2)e^{r_2 t}), \quad P_{11}^{10}(t) = \alpha(r_1 - r_2)^{-1} (e^{r_1 t} - e^{r_2 t}), \\ P_{10}^{11}(t) &= (r_1 - r_2)^{-1} ((\mu + \alpha + r_1)e^{r_1 t} - (\mu + \alpha + r_2)e^{r_2 t}), \quad P_{11}^{11}(t) = \beta(r_1 - r_2)^{-1} (e^{r_1 t} - e^{r_2 t}), \end{aligned}$$

где

$$r_i = -\frac{\alpha + \beta + \mu}{2} (1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\beta\mu}{(\alpha + \beta + \mu)^2}}), \quad i = \overline{1, 2}.$$

Заметим, что $r_1 < 0, r_2 < 0$. Тогда из уравнений (11)–(13) для преобразований Лапласа–Стилтьеса времени работы системы имеем следующие выражения:

$$\begin{aligned} \varphi_1^0(s) &= \frac{(\alpha + \beta + r_1)g(s - r_1) - (\alpha + \beta + r_2)g(s - r_2)}{(r_1 - r_2)(1 - g(s)) + (\alpha + \beta + r_1)g(s - r_1) - (\alpha + \beta + r_2)g(s - r_2)}, \\ \varphi_1^1(s) &= \frac{1}{r_1 - r_2} ((\mu + \alpha + \beta + r_1)g(s - r_1) - (\mu + \alpha + \beta + r_2)g(s - r_2) + \\ &+ ((r_1 - r_2)g(s) + (\mu + \alpha + \beta + r_1)g(s - r_1) - (\mu + \alpha + \beta + r_2)g(s - r_2))\varphi_1^0(s)), \\ \varphi_0^0(s) &= g(s)\varphi_1^0(s), \end{aligned}$$

где $g(s) = \int_0^\infty e^{-st} dG(t)$.

Заключение

В работе получены соотношения для преобразований Лапласа–Стилтьеса от функции распределения времени работы системы. Они имеют вид системы линейных алгебраических уравнений (5)–(6),

в которой искомые неизвестные, множители и свободные переменные являются функциями. Причем как коэффициенты, так и свободные члены в этой системе вычисляются с помощью вероятностей событий, задающих состояние системы в конце рабочего периода элемента, потому являются известными. Эти вероятности находятся из системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1)–(4). Для систем линейных алгебраических уравнений известны алгоритмы, по которым можно найти их точное решение, а также имеется программное обеспечение, реализующее эти алгоритмы. Для небольшого числа рабочих элементов можно выписать явные выражения для ответа в поставленной задаче, что было представлено в качестве примера в данной работе.

Благодарность. Автор выражает благодарность доктору физико-математических наук Л.Г. Афанасьевой, профессору кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, за помощь в подготовке материала и ценные замечания в процессе оформления данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьёв А.Д. Математические методы в теории надежности. М. : Наука, 1965. 524 с.
2. Гнеденко Б.В., Наср Ю. О ненагруженном резервировании с восстановлением // Автоматика и телемеханика. 1968. № 7. С. 105–111.
3. Соловьёв А.Д. О резервировании без восстановления // Энергия. Кибернетика – на службу коммунизму. 1964. Т. 2. С. 83–121.
4. Козлов Б.А. Резервирование с восстановлением. М. : Сов. радио, 1969. 150 с.
5. Димитров Б. О числе отказов системы из n нагруженных элементов // Известия математического института АН Болгарии. 1970. Т. 12. С. 205–210.
6. Jain M., Maheshwari S. Analysis of non-stationary mode of redundant system with additional repair device // Amer. J. Math and Manag. Sci. 2003. V. 23, No. 3-4. P. 347–382.
7. Hsu Yunq-Lin, Ke Jau-Chuan, Lin Tzu-Hsin. Redundant systems with general form recovery, delay in restart, failure of switching's and unreliable repair device // Statistical point of view. Math. and Comput. Simul. 2011. V. 81, No. 11. P. 400–413.
8. Анищенко В.А., Мысло Е.Л., Иванова А.Н. Надежность дублированных технических систем с устройствами встроенного контроля // Энергетика. Известия высших учебных заведений и энергетических объединений СНГ. 2013. № 5. С. 5–10.
9. Golovastova E.A. The system operating time with two different unreliable servicing devices // arXiv.org. 2018. URL: <https://arxiv.org/abs/1811.12193> (accessed: 25.12.2019).
10. Азарсков В.Н., Джассим М.К., Стрельников В.П. Использование порядковой статистики в задачах оценки надежности резервированных систем // ММС. 2005. № 4. С. 152–156.
11. Анищенко В.А., Мысло Е.Л., Иванова А.Н. Анализ надежности резервированных систем автоматического контроля и управления производственными энергетическими процессами // Энергетика. Известия высших учебных заведений и энергетических объединений СНГ. 2014. № 6. С. 5–14.

Поступила в редакцию 20 января 2020 г.

Golovastova E.A. (2020) SYSTEM OPERATING TIME WITH UNRELIABLE INTERCHANGEABLE ELEMENTS AND PRECARIOUS RECOVERY DEVICE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science] 52. pp. 59–65

DOI: 10.17223/19988605/52/7

This paper deals with following reliability problem. We have a system with n unreliable elements and one recovery device, which also can be broken, in prepositions: the distributions of the working and repairing periods of recovery device and the distribution of the element repairing period is exponential with parameter, which depends on the system state. The distribution of the element working period is arbitrary and also depends on the system state. More precisely, these distributions of working or repairing periods depend on the number of broken elements and the recovery device state in the moment, when the corresponding period starts. All the described random variables are assumed to be mutually independent. The purpose is to find the system working time distribution.

We consider two-dimensional process $\{v(t), e(t)\}$ (where the first coordinate describes the quantity of broken elements, another one describes the device state) during the element working period. This process is a Markov chain on such time interval, and it exhaustively describes the system state at any moment from this interval. That's why we can write the system of Kolmogorov ordinary differential equations for the transition probability function of this process. Namely, it becomes possible to find the following probability function:

$$P_{j\bar{e}}^i(t) = P(v(t) = j, e(t) = \bar{e} | v(0) = i, e(0) = e), \quad 0 < i \leq n-1; j \leq i+1; e, \bar{e} \in \overline{0,1}.$$

where argument t varies in the element working period. Then we establish the relations between the random variables, which determine the working time of the system, launched with different initial conditions. By taking the Laplace transform from both part of this expressions we get the system of linear algebraic equations for $i = n-1$:

$$\begin{aligned}\varphi_{n-1}^0(s) &= g_{n-1,n-1}^0(s) + \sum_{j=0}^{n-2} \varphi_{j+1}^0(s) g_{j0}^{n-10}(s) + \sum_{j=1}^{n-2} \varphi_{j+1}^1(s) g_{j1}^{n-10}(s), \\ \varphi_{n-1}^1(s) &= g_{n-1,n-1}^1(s) + \sum_{j=0}^{n-2} \varphi_{j+1}^0(s) g_{j0}^{n-11}(s) + \sum_{j=1}^{n-2} \varphi_{j+1}^1(s) g_{j1}^{n-11}(s);\end{aligned}$$

for $0 \leq i < n-1$:

$$\begin{aligned}\varphi_i^0(s) &= \sum_{j=0}^i \varphi_{j+1}^0(s) g_{j0}^{i0}(s) + \sum_{j=1}^i \varphi_{j+1}^1(s) g_{j0}^{i1}(s), \\ \varphi_i^1(s) &= \sum_{j=0}^i \varphi_{j+1}^0(s) g_{j0}^{i1}(s) + \sum_{j=1}^i \varphi_{j+1}^1(s) g_{j1}^{i1}(s),\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}\varphi_j^0(s) &= E e^{-s\tau_j^0}; \quad g_{n-1,n-1}^0(s) = \int_0^\infty e^{-st} (P_{n-10}^{n-10}(t) + P_{n-11}^{n-10}(t)) dG_{n-1,0}(t), \\ g_{j\tilde{e}}^{ie}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} P_{j\tilde{e}}^{ie}(t) dG_{i,e}(t), \quad j, i \in \overline{0, n-1}, \quad e, \tilde{e} \in \overline{0, 1}.\end{aligned}$$

We notice that here unknown variables are functions and coefficients and free terms are calculated from transition probability function.

Keywords: reliability problem; system state; Laplace transform; system failure time.

GOLOVASTOVA Eleonora Aleksandrovna (Post-graduate Student, Lomonosov Moscow State University, Russian Federation).

E-mail: golovastova.elina@yandex.ru

REFERENCES

1. Gnedenko, B.V., Belyaev, Yu.K. & Soloviev, A.D. (1965) *Matematicheskie metody v teorii nadezhnosti* [Mathematical methods in the theory of reliability]. Moscow: Nauka.
2. Gnedenko, B.V. & Nasr, Yu. (1968) On standby redundancy with recovering. *Automation and Remote Control*. 7. pp. 105–110.
3. Soloviev, A.D. (1964) O rezervirovanii bez vosstanovleniya [On redundancy without recovering]. *Energiya. Kibernetika – na sluzhbu kommunizmu*. 2. pp. 83–121.
4. Kozlov, B.A. (1969) *Rezervirovanie s vosstanovleniem* [On redundancy with recovering]. Moscow: Sovetskoe radio.
5. Dimitrov, B. (1970) O chisle otkazov sistemy iz n nagruzhennykh elementov [On a number of system failures of n loaded elements]. *Izvestiya matematicheskogo instituta AN Bolgarii*. 12. pp. 205–210.
6. Madhu, J. & Maheshwari, S. (2003) Analysis of non-stationary mode of redundant system with additional repair device. *Amer. Journal of Math and Manag. Sci.* 23(3–4). pp. 347–382.
7. Hsu Yunq-Lin, Ke Jau-Chuan & Lin Tzu-Hsin. (2011) Redundant systems with general form recovery, delay in restart, failure of switching's and unreliable repair device. Statistical point of view. *Math. and Comput. Simul.* 81(11). pp. 400–413.
8. Anishenko, V.A., Myslo, E.L. & Ivanova, A.N. (2013) Reliability of Dubbed Technical Systems with Built-In Control Device. *Energetika*. 5. pp. 5–10.
9. Golovastova, E.A. (n.d.) *The system operating time with two different unreliable servicing devices*. [Online] Available from: <https://arxiv.org/abs/1811.12193> (Accessed: 25th December 2019).
10. Azarskov, V.N., Jaseim Mohammed Kasmi & Strelnikov, V.P. (2005) Ispol'zovanie poryadkovoy statistiki v zadachakh otsenki nadezhnosti rezervirovannykh sistem [Use of order statistics in problems of reliability estimation of redundant system]. *MMS*. 4. pp. 52–156.
11. Anishenko, V.A., Myslo, E.L. & Ivanova, A.N. (2014) Analysis of reliability of reserved automatic control systems of industrial power processes. *Energetika*. 6. pp. 5–14.