УДК 519.872
DOI: 10.17223/19988605/52/8

Д.Я. Копать, М.А. Маталыцкий

АНАЛИЗ В НЕСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ *G*-СЕТИ С ОБХОДАМИ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЗАЯВКАМИ

Проведено исследование открытой экспоненциальной сети массового обслуживания (СеМО) с однолинейными системами массового обслуживания (СМО). СМО характеризуются наличием обходов, положительными заявками и возможностью поступления в них отрицательных заявок. В сеть поступает два независимых простейших потока заявок. Первый поток образуется из обычных (положительных) заявок, второй – из отрицательных заявок, поступление каждой из которых в систему уничтожает в ней ровно одну положительную заявку в очереди, если таковые в ней имеются. Отрицательные заявки не требуют обслуживания, обслуживание положительных заявок в системах сети осуществляется в соответствии с дисциплиной FIFO. Положительные заявки с зависящей от состояния узла вероятностью при направлении в нее присоединяются к очереди, а с дополнительной вероятностью мгновенно обходят ее и ведут себя в дальнейшем как обслуженные. Для решения системы разностно-дифференциальных уравнений (РДУ) для нестационарных вероятностей состояний сети, функционирующей в режиме насыщения, предложено использовать метод многомерных производящих функций.

Ключевые слова: *G*-сеть с обходами систем заявками, нестационарные вероятности состояний, многомерная производящая функция.

СеМО с положительными и отрицательными заявками были введены Э. Геленбе [1, 2]. Основное применение данной сети в качестве модели заключается в ее использовании при моделировании воздействия компьютерных вирусов на исполняемые программы, на сервер или локальный компьютер пользователя. В переходном режиме данная сеть была исследована в работе [3].

Экспоненциальная СеМО с обходами узлов заявками была введена в [4]. В этой работе показано, что такая модель включает возможность обхода систем за счет ограничений на количество заявок или на предполагаемое время ожидания. В ней найдены стационарные вероятности состояний сети в форме произведения. В переходном режиме сеть с обходами была исследована в работе [5]. Применение сети с обходами связано, например, с возможностью клиента, прибывшего в сервисный центр информационной сети, не присоединяться к очереди по тем или иным причинам, а перейти в другой сервисный центр.

В данной работе рассматривается открытая СеМО с отрицательными заявками и обходами узлов положительными заявками, которые учитывают первые две особенности, причем обход систем обслуживания осуществляется только положительными заявками. В стационарном режиме они были исследованы в работе [6]. Ниже для нахождения нестационарных вероятностей состояний сети предложено использовать метод многомерных производящих функций.

1. Система РДУ для вероятностей состояний

Рассмотрим открытую экспоненциальную СеМО с однотипными заявками, состоящую из n однолинейных СМО. Состояние сети в момент времени t описывается вектором размерности $n + 1$: $\vec{k} = \vec{k}(t) = \left(\vec{k}, t\right) = \left(k_1, k_2, ..., k_n, t\right)$, который образует цепь Маркова с непрерывным временем и счетным числом состояний, где состояние $\left(k_i, t\right)$ означает, что в момент времени t в i-й СМО находятся k_i положительных заявок, $i = \overline{1, n}$.

В i-ю систему из внешней среды поступает простейший поток положительных заявок с интенсивностью λ_{0i}^{+} и простейший поток отрицательных заявок с интенсивностью λ_{0i}^{-}, $i=\overline{1,\ n}$. Все потоки заявок, которые поступают в сеть независимы. Длительности обслуживания положительных заявок в i-й СМО распределены по показательному закону с параметром μ_i, $i=\overline{1,\ n}$.

Положительная заявка, направленная в i-ю СМО извне или из другой системы, когда сеть находится в состоянии $\vec{k}$, с вероятностью $f^{(i)}(k_i)$ присоединяется к очереди, а с дополнительной вероятностью $1-f^{(i)}(k_i)$ не присоединяется к очереди, считаясь мгновенно обслуженной (т.е. обходит СМО).

Положительная заявка, обслуженная в СМО S_i, с вероятностью p_{ij}^{+} направляется в СМО S_j как положительная заявка, а с вероятностью p_{ij}^{-} – как отрицательная, и с вероятностью $p_{i0}=1-\sum\limits_{j=1}^{n}\left(p_{ij}^{+}+p_{ij}^{-}\right)$ уходит из сети во внешнюю среду (в СМО S_0), $i,\ j=\overline{1,\ n}$.

Отрицательные заявки представляют собой особый тип заявок: они не обслуживаются и поступают непосредственно в СМО (для них $f^{(i)}(k_i)=1$), где уменьшают длину очереди на единицу, если число заявок в системе больше нуля, и не производят никаких изменений, если в СМО нет заявок. После указанных операций отрицательные заявки исчезают и в дальнейшем не оказывают влияния на сеть.

Пусть $\phi_i\left(\vec{k}\right)$ – условная вероятность того, что заявка, поступающая в i-ю СМО, когда сеть находится в состоянии $\vec{k}$, не будет обслужена ни одной из СМО и не изменит состояние сети; $\psi_{ij}\left(\vec{k}\right)$ – условная вероятность того, что положительная заявка, поступающая в i-ю СМО, когда сеть находится в состоянии $\vec{k}$, впервые получит обслуживание в j-й СМО, $j=\overline{1,n}$; $\xi_{ij}\left(\vec{k}\right)$ – условная вероятность того, что заявка, прибывшая извне в i-ю СМО, когда сеть находится в состоянии $\vec{k}$, впервые окажет воздействие на j-ю СМО как отрицательная заявка, $j=\overline{1,n}$; $\alpha_i\left(\vec{k}\right)$ – условная вероятность того, что заявка, обслуживание которой в i-й СМО завершено, когда сеть находится в состоянии $\vec{k}$, не будет больше обслужена ни в одной из СМО и уйдет из сети; $\beta_{ij}\left(\vec{k}\right)$ – условная вероятность того, что заявка, обслуживание которой в i-й СМО завершено, когда сеть находится в состоянии $\vec{k}$, впервые после этого получит обслуживание в j-й СМО, $i,\ j=\overline{1,n}$; $\gamma_{ij}\left(\vec{k}\right)$ – условная вероятность того, что заявка, обслуженная в i-й СМО, когда сеть находится в состоянии $\vec{k}$, впервые окажет воздействие на j-ю СМО, будучи при этом отрицательной, $i,\ j=\overline{1,n}$.

На основании формулы полной вероятности получим:

$$\phi_i\left(\vec{k}\right)=\left(1-f^{(i)}(\vec{k})\right)\left(p_{i0}+\sum_{j=1}^{n}\left[p_{ij}^{+}\phi_j\left(\vec{k}\right)+p_{ij}^{-}\left(1-u\left(k_j\right)\right)\right]\right),\ \ i=\overline{1,n}, \qquad (1)$$

$$\psi_{ij}\left(\vec{k}\right)=f^{(i)}(\vec{k})\delta_{ij}+(1-f^{(i)}(\vec{k}))\sum_{l=1}^{n}p_{il}^{+}\psi_{lj}\left(\vec{k}\right),\ \ i,\ j=\overline{1,n}, \qquad (2)$$

$$\xi_{ij}\left(\vec{k}\right)=\left(1-f^{(i)}(\vec{k})\right)\left[p_{ij}^{-}+\sum_{l=1}^{n}p_{il}^{+}\xi_{lj}\left(\vec{k}\right)\right],\ \ i,\ j=\overline{1,n}, \qquad (3)$$

$$\alpha_i\left(\vec{k}\right)=p_{i0}+\sum_{j=1}^{n}\left[p_{ij}^{+}\phi_j\left(\vec{k}-I_i\right)+p_{ij}^{-}\left(\left(1-u\left(k_j\right)\right)+\delta_{ij}\left(2-u\left(k_i\right)\right)\right)\right],\ \ i=\overline{1,n}, \qquad (4)$$

$$\beta_{ij}\left(\vec{k}\right)=\sum_{l=1}^{n}p_{il}^{+}\psi_{lj}\left(\vec{k}-I_i\right),\ \ i,j=\overline{1,n}, \tag{5}$$

$$\gamma_{ij}\left(\vec{k}\right)=p_{ij}^{-}+\sum_{l=1}^{n}p_{il}^{+}\xi_{lj}\left(\vec{k}-I_i\right),\ \ i,j=\overline{1,n}, \tag{6}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, I_i – нулевой вектор размерности n, за исключением компоненты с номером i, которая равна 1, $u(x)$ – единичная функция Хевисайда:

$$u(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

Пусть $P\left(\vec{k},t\right)$ – вероятность состояния сети $\vec{k}$ в момент времени t. Нетрудно доказать следующую лемму.

Лемма. Нестационарные вероятности состояний рассматриваемой СеМО удовлетворяют системе РДУ Колмогорова:

$$\begin{aligned}\frac{dP\left(\vec{k},t\right)}{dt}&=-\sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_{0i}^{+}\left(1-\phi_i\left(\vec{k}\right)u(k_i)\right)+\mu_i u(k_i)\left(1-\beta_{ii}\left(\vec{k}\right)\right)+\lambda_{0i}^{-}u(k_i)\right]P\left(\vec{k},t\right)+\\
&+\sum_{i=1}^{n}\lambda_{0i}^{+}\sum_{j=1}^{n}\psi_{ji}\left(\vec{k}-I_i\right)u(k_i)P\left(\vec{k}-I_i,\ t\right)+\\
&+\sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_{0i}^{-}+\sum_{j=1}^{n}\lambda_{0j}^{+}\xi_{ji}\left(\vec{k}+I_i\right)+\mu_i\alpha_i\left(\vec{k}+I_i\right)\right]P\left(\vec{k}+I_i,t\right)+\\
&+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}\mu_j\beta_{ji}\left(\vec{k}+I_j-I_i\right)u(k_i)P\left(\vec{k}+I_j-I_i,t\right)+\\
&+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mu_j\gamma_{ji}\left(\vec{k}+I_j+I_i\right)P\left(\vec{k}+I_j+I_i,t\right).\end{aligned} \tag{7}$$

2. Нахождение вероятностей состояний и средних характеристик сети, функционирующей в режиме насыщения

Будем считать, что все СМО сети функционируют в режиме насыщения, т.е. $k_i(t)>0\ \ \forall t>0$, $i=\overline{1,n}$, тогда система (7) примет вид:

$$\begin{aligned}\frac{dP\left(\vec{k},t\right)}{dt}&=-\sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_{0i}^{+}\left(1-\phi_i\left(\vec{k}\right)\right)+\mu_i\left(1-\beta_{ii}\left(\vec{k}\right)\right)+\lambda_{0i}^{-}\right]P\left(\vec{k},t\right)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_{0i}^{+}\sum_{j=1}^{n}\psi_{ji}\left(\vec{k}-I_i\right)P\left(\vec{k}-I_i,\ t\right)+\\
&+\sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_{0i}^{-}+\sum_{j=1}^{n}\lambda_{0j}^{+}\xi_{ji}\left(\vec{k}+I_i\right)+\mu_i\alpha_i\left(\vec{k}+I_i\right)\right]P\left(\vec{k}+I_i,t\right)+\\
&+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}\mu_j\beta_{ji}\left(\vec{k}+I_j-I_i\right)P\left(\vec{k}+I_j-I_i,t\right)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mu_j\gamma_{ji}\left(\vec{k}+I_j+I_i\right)P\left(\vec{k}+I_j+I_i,t\right).\end{aligned} \tag{8}$$

Для решения этой системы применим метод многомерных производящих функций.

Обозначим через $\Psi_n(z,t)$, где $z=(z_1,z_2,..,z_n)$, n-мерную производящую функцию:

$$\Psi_n(z,t)=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}...\sum_{k_n=0}^{\infty}P(k_1,k_2,..,k_n,t)z_1^{k_1}z_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot z_n^{k_n}=\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}P(k,t)\prod_{i=1}^{n}z_i^{k_i},\ \ |z|<1, \tag{9}$$

суммирование берется по каждому k_i, от 1 до $+\infty$, $i=\overline{1,n}$, поскольку сеть функционирует в режиме насыщения.

Рассмотрим случай, когда условные вероятности $\varphi_i(\vec{k})$, $\psi_{ij}(\vec{k})$, $\xi_{ij}(\vec{k})$, $\alpha_i(\vec{k})$, $\beta_{ij}(\vec{k})$, $\gamma_{ij}(\vec{k})$, $i, j = \overline{1,n},$ не зависят от состояний сети. Умножим (8) на $\prod_{l=1}^{n} z_l^{k_l}$ и просуммируем по всем возможным значениям k_l от 1 до $+\infty$, $l = \overline{1,n}$. Тогда получим:

$$\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}\frac{dP(\vec{k},t)}{dt}\prod_{l=1}^{n} z_l^{k_l} = -\sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_{0i}^{+}(1-\phi_i)+\mu_i(1-\beta_{ii})+\lambda_{0i}^{-}\right]\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}P(\vec{k},t)\prod_{l=1}^{n} z_l^{k_l} +$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\lambda_{0i}^{+}\sum_{j=1}^{n}\psi_{ji}\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}P(\vec{k}-I_i,\ t)\prod_{l=1}^{n} z_l^{k_l} + \sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_{0i}^{-}+\sum_{j=1}^{n}\lambda_{0j}^{+}\xi_{ji}+\mu_i\alpha_i\right]\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}P(\vec{k}+I_i,t)\prod_{l=1}^{n} z_l^{k_l} +$$
$$+\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\mu_j\beta_{ji}\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}P(\vec{k}+I_j-I_i,t)\prod_{l=1}^{n} z_l^{k_l} + \sum_{i,j=1}^{n}\mu_j\gamma_{ji}\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}P(\vec{k}+I_j+I_i,t)\prod_{l=1}^{n} z_l^{k_l}. \qquad (10)$$

Рассмотрим суммы, входящие в правую часть соотношения (10):

$$\sum\nolimits_1(z,t) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_{0i}^{+}\sum_{j=1}^{n}\psi_{ji}\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}P(\vec{k}-I_i,t)\prod_{l=1}^{n} z_l^{k_l} = \sum_{i=1}^{n}\lambda_{0i}^{+}z_i\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\psi_{ji}\Psi_n(z,t);$$

$$\sum\nolimits_2(z,t) = \sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_{0i}^{-}+\sum_{j=1}^{n}\lambda_{0j}^{+}\xi_{ji}+\mu_i\alpha_i\right]\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}P(\vec{k}+I_i,t)\prod_{l=1}^{n} z_l^{k_l} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z_i}(\lambda_{0i}^{-}+\sum_{j=1}^{n}\lambda_{0j}^{+}\xi_{ji}+\mu_i\alpha_i)\Psi_n(z,t),$$

так как вероятности типа $P(k_1,k_2,...,k_{i-1},0,k_{i+1},...,k_n)=0,$ поскольку сеть функционирует в режиме насыщения;

$$\sum\nolimits_3(z,t) = \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\mu_j\beta_{ji}\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}P(\vec{k}+I_j-I_i,t)\prod_{l=1}^{n} z_l^{k_l} = \sum_{\substack{i,j=1\\ j\neq i}}^{n}\mu_j\beta_{ji}\frac{z_i}{z_j}\Psi_n(z,t);$$

$$\sum\nolimits_4(z,t) = \sum_{i,j=1}^{n}\mu_j\gamma_{ji}\sum_{k_1=1}^{\infty}...\sum_{k_n=1}^{\infty}P(\vec{k}+I_j+I_i,t)\prod_{l=1}^{n} z_l^{k_l} = \sum_{i,j=1}^{n}\mu_j\gamma_{ji}\frac{1}{z_iz_j}\Psi_n(z,t).$$

Таким образом, для производящей функции получаем линейное однородное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\Psi_n(z,t)}{dt} = -\sum_{i=1}^{n}[\left(\lambda_{0i}^{+}(1-\phi_i)+\mu_i(1-\beta_{ii})+\lambda_{0i}^{-}\right)-$$
$$-\lambda_{0i}^{+}z_i\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\psi_{ji} - \frac{1}{z_i}(\lambda_{0i}^{-}+\sum_{j=1}^{n}\lambda_{0j}^{+}\xi_{ji}+\mu_i\alpha_i) - \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n}\mu_j\beta_{ji}\frac{z_i}{z_j} - \sum_{j=1}^{n}\mu_j\gamma_{ji}\frac{1}{z_iz_j}]\Psi_n(z,t). \qquad (11)$$

Общее его решение имеет вид:

$$\Psi_n(z,t) = C_n\exp\{-\sum_{i=1}^{n}[\left(\lambda_{0i}^{+}(1-\phi_i)+\mu_i(1-\beta_{ii})+\lambda_{0i}^{-}\right)-$$
$$-\lambda_{0i}^{+}z_i\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\psi_{ji} - \frac{1}{z_i}(\lambda_{0i}^{-}+\sum_{j=1}^{n}\lambda_{0j}^{+}\xi_{ji}+\mu_i\alpha_i) - \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n}\mu_j\beta_{ji}\frac{z_i}{z_j} - \sum_{j=1}^{n}\mu_j\gamma_{ji}\frac{1}{z_iz_j}]t\}. \qquad (12)$$

Предположим, что в начальный момент времени сеть находится в состоянии $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,0)$, $\alpha_i > 0$, $P(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,0)=1$, $P(k_1,k_2,...,k_n,0)=0$, $\forall\alpha_i \neq k_i$, $i=\overline{1,n}$. Тогда начальным условием для уравнения (12) будет $\Psi_n(z,0) = P(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,0)\prod_{l=1}^{n} z_l^{\alpha_l} = \prod_{l=1}^{n} z_l^{\alpha_l}$. Используя его, получаем $C_n = 1$.

Таким образом, если в начальный момент времени СеМО находится в состоянии $(x_1,x_2,...,x_n,0)$, $x_i > 0$, $i=\overline{1,n}$, то выражение для производящей функции $\Psi_n(z,t)$ (12) имеет вид:

$$\Psi_n(z,t)=a_0\left(t\right)\exp\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_{0i}^{+}z_i\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\psi_{ji}\ t\right\}\exp\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z_i}(\lambda_{0i}^{-}+\sum_{j=1}^{n}\lambda_{0j}^{+}\xi_{ji}+\mu_i\alpha_i)\ t\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\mu_j\beta_{ji}\frac{z_i}{z_j}t\right\}\exp\left\{\sum_{i,j=1}^{n}\mu_j\gamma_{ji}\frac{1}{z_i z_j}\ t\right\}\prod_{l=1}^{n}z_l^{\alpha_l}\ , \qquad (13)$$

где

$$a_0\left(t\right)=\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_{0i}^{+}\left(1-\phi_i\right)+\mu_i\left(1-\beta_{ii}\right)+\lambda_{0i}^{-}\right)t\right\}.$$

Для нахождения вероятностей состояний сети преобразуем (13) к удобному виду. Разложим в ряд Маклорена входящие в него экспоненты и преобразуем полученные после этого произведения. Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема. Выражение для производящей функции представимо в виде:

$$\Psi_n\left(z,t\right)=a_0\left(t\right)\sum_{l_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{l_n=0}^{\infty}\ \sum_{q_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{q_n=0}^{\infty}\ \sum_{r_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}\ \sum_{u_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{u_n=0}^{\infty}t^{\sum_{i=1}^{n}\left(l_i+q_i+r_i+u_i\right)}\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{l_i!\ q_i!\ r_i!\ u_i!}\left(\lambda_{0i}^{+}\right)^{l_i}\prod_{j=1}^{n}\psi_{ji}^{l_i}\left(\lambda_{0i}^{-}+\sum_{j=1}^{n}\lambda_{0j}^{+}\xi_{ji}+\mu_i\alpha_i\right)^{q_i}\left(\prod_{j=1}^{n}\mu_j\beta_{ji}\right)^{r_i}\left(\prod_{j=1}^{n}\mu_j\gamma_{ji}\right)z_i^{\alpha_i+l_i-q_i+nr_i-R-u_i-U}\right], \qquad (14)$$

где $R=\sum_{i=1}^{n}r_i$, $U=\sum_{i=1}^{n}u_i$.

С помощью полученного выражения для производящей функции можно найти вероятности состояний рассматриваемой сети. Вероятность состояния $P\left(k_1,k_2,..,k_n,t\right)$ является коэффициентом при $z_1^{k_1}z_2^{k_2},...,z_n^{k_n}$ в разложении функции (9) в многократный ряд (14) при условии, что в начальный момент времени сеть находится в состоянии $\left(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,0\right)$.

Заключение

В статье проведено исследование открытой экспоненциальной *G*-сети с обходами систем обслуживания положительными заявками, функционирующей в режиме насыщения. Для решения системы РДУ для зависящих от времени вероятностей состояний сети применуен метод многомерных производящих функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gelenbe E. Product-form queueing networks with negative and positive customers // Journal of Applied Probability. 1991. No. 28. P. 656–663.
2. Gelenbe E., Schassberger R. Stability of product-form G-networks // Probability in Engenering and Informational Science. 1992. No. 6. P. 271–276.
3. Науменко В.В., Маталыцкий М.А. Анализ сетей с положительными и отрицательными заявками в переходном режиме // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 4 (25). С. 61–70.
4. Малинковский Ю.В. Сети массового обслуживания с обходами узлов заявками // Автоматика и телемеханика. 1991. № 2. С. 102–110.
5. Маталыцкий М.А., Науменко В.В. Анализ сети с обходами систем обслуживания разнотипными заявками // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне, 2013. № 1. С. 152–159.
6. Малинковский Ю.В., Никитенко О.А. Стационарное распределение состояний сетей с обходами и отрицательными заявками // Автоматика и телемеханика. 2000. № 8. С. 79–85.

Поступила в редакцию 9 ноября 2019 г.

Kopats D.Ya., Matalytski M.A. (2020) ANALYSIS IN NON-STATIONARY REGIME OF EXPONENTIAL G-NETWORK WITH BYPASS OF QUEUEING SYSTEMS POSITIVE CUSTOMERS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 52. pp. 66–72

DOI: 10.17223/19988605/52/8

The article deals with open Markov G-networks with bypass. Vector describing the state of the network we denote $\vec{k}=\vec{k}(t)=\left(\vec{k},t\right)=\left(k_1,k_2,...,k_n,t\right)$, where k_i is the number of positive customers in the *i*-th QS at time *t*. DDE system of Kolmogorov for state probability presented in form:

$$\frac{dP\left(\vec{k},t\right)}{dt}=-\sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_{0i}^{+}\left(1-\phi_i\left(\vec{k}\right)u\left(k_i\right)\right)+\mu_i u\left(k_i\right)\left(1-\beta_{ii}\left(\vec{k}\right)\right)+\lambda_{0i}^{-}u\left(k_i\right)\right]P\left(\vec{k},t\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\lambda_{0i}^{+}\sum_{j=1}^{n}\psi_{ji}\left(\vec{k}-I_i\right)u(k_i)P\left(\vec{k}-I_i,\ t\right)+\frac{n!}{r!(n-r)!}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_{0i}^{-}+\sum_{j=1}^{n}\lambda_{0j}^{+}\xi_{ji}\left(\vec{k}+I_i\right)+\mu_i\alpha_i\left(\vec{k}+I_i\right)\right]P\left(\vec{k}+I_i,t\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\mu_j\beta_{ji}\left(\vec{k}+I_j-I_i\right)u\left(k_i\right)P\left(\vec{k}+I_j-I_i,t\right)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\mu_j\gamma_{ji}\left(\vec{k}+I_j+I_i\right)P\left(\vec{k}+I_j+I_i,t\right).$$

In case, when network operating under a saturation regime and conditional state probabilities $\varphi_i\left(\vec{k}\right)$, $\psi_{ij}\left(\vec{k}\right)$, $\xi_{ij}\left(\vec{k}\right)$, $\alpha_i\left(\vec{k}\right)$, $\beta_{ij}\left(\vec{k}\right)$, $\gamma_{ij}\left(\vec{k}\right)$ do not depend on $\vec{k}$, the multidimensional generating function $\Psi_n(z,t)=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}...\sum_{k_n=0}^{\infty}P(k_1,k_2,..,k_n,t)z_1^{k_1}z_2^{k_2}\cdot...\cdot z_n^{k_n}$ has the form:

$$\Psi_n\left(z,t\right)=a_0\left(t\right)\sum_{l_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{l_n=0}^{\infty}\ \sum_{q_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{q_n=0}^{\infty}\ \sum_{r_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=0}^{\infty}\ \sum_{u_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{u_n=0}^{\infty}t^{\sum_{i=1}^{n}\left(l_i+q_i+r_i+u_i\right)}\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{l_i!\ q_i!\ r_i!\ u_i!}\left(\lambda_{0i}^{+}\right)^{l_i}\prod_{j=1}^{n}\psi_{ji}^{l_i}\left(\lambda_{0i}^{-}+\sum_{j=1}^{n}\lambda_{0j}^{+}\xi_{ji}+\mu_i\alpha_i\right)^{q_i}\left(\prod_{j=1}^{n}\mu_j\beta_{ji}\right)^{r_i}\left(\prod_{j=1}^{n}\mu_j\gamma_{ji}\right)z_i^{\alpha_i+l_i-q_i+nr_i-R-u_i-U}\right],$$

where $a_0\left(t\right)=\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_{0i}^{+}\left(1-\phi_i\right)+\mu_i\left(1-\beta_{ii}\right)+\lambda_{0i}^{-}\right)t\right\}$.

The non-stationary state probability $P\left(k_1,k_2,..,k_n,t\right)$ can be found as the coefficient of multidimensional generating function in multiple series.

Keywords: *G*-network with bypass of queueing systems; non-stationary state probability; multidimensional generation function.

KOPATS Dmitry Yaroslavovich (Post-graduate Student, Grodno State University, Belarus).
E-mail: dk80395@mail.ru

MATALYTSKI Mihail Alekseevich (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Grodno State University, Belarus).
E-mail: m.matalytski@gmail.com

REFERENCES

1. Gelenbe, E. (1991) Product-form queueing networks with negative and positive customers. *Journal of Applied Probability*. 28. pp. 656–663. DOI: 10.2307/3214499
2. Gelenbe, E. & Schassberger, R. (1992) Stability of product-form G-networks. *Probability in Engenering and Informational Science*. 6. pp. 271–276. DOI: 10.1017/S0269964800002539
3. Matalytski, M. & Naumenko, V. (2013) Analysis of networks with positive and negative messages at transient behavior. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 4(25). pp. 61–70.

4. Malinkovsky, Yu. (1991) Queueing network with customer bypass. *Automation and Remote Control*. 2. pp. 102–110.
5. Matalytski, M. & Naumenko, V. (2013) Analysis of network with bypass queueing network multiple types customers. *Vesnik Grodzenskaga dzyarzhaўnaga ўniversiteta imya Yanki Kupaly. Seryya 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka, vylichal'naya tekhnika i kiravanne*. 2(1). pp. 152–159.
6. Malinkovsky, Yu. & Nikitenko, O. (2000) Stationary state probability distribution of network with bypass and negative customers. *Automation and Remote Control*. 8. pp. 79–85.