

УДК 519.21

DOI: 10.17223/19988605/52/9

Л.А. Нежелская, Д.А. Тумашкина

ОЦЕНИВАНИЕ МЕТОДОМ МОМЕНТОВ ДЛИТЕЛЬНОСТИ НЕПРОДЛЕВАЮЩЕГОСЯ МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ В ПОЛУСИНХРОННОМ ПОТОКЕ СОБЫТИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассматривается полусинхронный поток событий второго порядка, функционирующий в условиях частичной наблюдаемости; методом моментов решается задача оценивания непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности. Приводятся результаты статистических экспериментов для установления качества оценивания неизвестного параметра – длительности мертвого времени.

Ключевые слова: дважды стохастический поток событий; полусинхронный поток событий второго порядка; непродлевающееся мертвое время; оценивание длительности мертвого времени; метод моментов.

В данной работе рассматривается один из типов дважды стохастических потоков событий [1–9], являющихся математическими моделями информационных потоков заявок, функционирующих в современных телекоммуникационных сетях. Множество состояний вышеприведенных потоков дискретно и конечно. В зависимости от того, каким образом происходит смена состояний, данные потоки событий можно разделить на три типа: 1) синхронные потоки [10]; 2) асинхронные [11]; 3) полусинхронные потоки [12]. Объектом изучения настоящей работы является полусинхронный поток событий второго порядка с двумя состояниями.

В большинстве случаев рассматриваются модели входящих потоков, когда события полностью наблюдаемы. Однако на практике любое устройство затрачивает некоторое время на регистрацию события (сообщения), другими словами, событие, поступившее на прибор, порождает период мертвого времени [13], в течение которого другие наступившие события потока недоступны для наблюдения. В статьях [14–18] рассматриваются задачи оценки состояний либо параметров для различных моделей дважды стохастических потоков событий.

В настоящей работе рассматривается полусинхронный поток событий второго порядка, функционирующий в условиях непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности (события, наступившие в данный период, не вызывают его продления). Тогда возникает вопрос об оценке среднего числа потерянных сообщений, ответ на который дает решение задачи оценивания длительности мертвого времени, осуществляемое методом моментов [19]. Данное исследование является непосредственным развитием [20].

1. Постановка задачи

Рассматривается стационарный режим функционирования полусинхронного дважды стохастического потока событий второго порядка (поток), сопровождающий случайный процесс которого $\lambda(t)$ является кусочно-постоянным с двумя состояниями – S_1 и S_2 . Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_1 определяется случайной величиной $\eta = \min(\xi^{(1)}, \xi^{(2)})$, где $\xi^{(1)}$ имеет функцию распределения $F_1^{(1)}(t) = 1 - e^{-\lambda_1 t}$, $t \geq 0$; $\xi^{(2)}$ – функцию распределения $F_1^{(2)}(t) = 1 - e^{-\alpha_1 t}$, $t \geq 0$; $\xi^{(1)}$ и $\xi^{(2)}$ – независимые случайные величины.

В момент наступления события потока в зависимости от того, какая из случайных величин $\xi^{(i)}$, $i = 1, 2$, приняла минимальное значение, процесс $\lambda(t)$ переходит из состояния S_1 в S_2 с вероятностью

стью $P_1^{(i)}(\lambda_2 | \lambda_1)$ либо $\lambda(t)$ остается в состоянии S_1 с вероятностью $P_1^{(i)}(\lambda_1 | \lambda_1)$, $i=1, 2$. Здесь $P_1^{(i)}(\lambda_2 | \lambda_1) + P_1^{(i)}(\lambda_1 | \lambda_1) = 1$, $i=1, 2$. Длительность интервала между событиями потока в состоянии S_1 является случайной величиной с функцией распределения $F_1(t) = 1 - e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)t}$, $t \geq 0$.

Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_2 есть случайная величина с функцией распределения $F_2(t) = 1 - e^{-\alpha_2 t}$, $t \geq 0$. В течение времени пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_2 имеет место пуассоновский поток событий с параметром λ_2 . В последующем изложении полагается, что имеет место состояние S_i (i -е состояние) процесса $\lambda(t)$, если $\lambda(t) = \lambda_i$, $i=1, 2$, $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$.

Матрицы инфинитезимальных характеристик [21] процесса $\lambda(t)$ имеют вид

$$D_0 = \begin{pmatrix} -(\lambda_1 + \alpha_1) & 0 \\ \alpha_2 & -(\lambda_2 + \alpha_2) \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) & \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

После каждого зарегистрированного в момент времени t_k события наступает период мертвого времени фиксированной длительности T , в течение которого другие события исходного потока недоступны наблюдению. По окончании периода мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени длительности T (непродлевающееся мертвое время) и т.д.

На рис. 1 приведен пример возникающей ситуации, где $t_1, t_2, \dots$ – моменты наступления событий в наблюдаемом потоке; периоды мертвого времени длительности T обозначены штриховкой; черными кружками обозначены события потока, недоступные наблюдению.

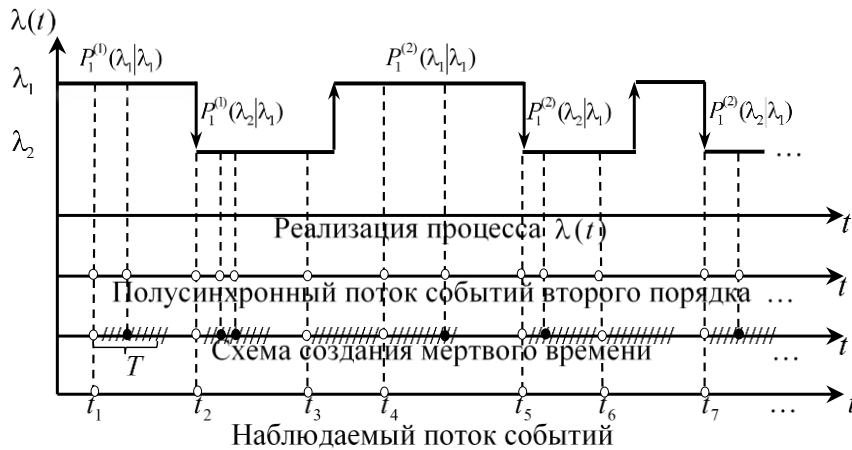


Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий

Fig. 1. Formation of the observed event flow

Поскольку $\lambda(t)$ является принципиально ненаблюдаемым, наблюдаются только моменты наступления событий $t_1, t_2, \dots$, то $\lambda(t)$ – скрытый марковский процесс или ненаблюдаемый сопровождающий марковский процесс. В свою очередь, в моменты $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ последовательность $\{\lambda(t_k)\}$ представляет собой вложенную цепь Маркова.

Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k=1, 2, \dots$ – значение длительности интервала между соседними событиями наблюдаемого потока, $p_T(\tau_k)$ – плотность вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в наблюдаемом потоке. В силу того что рассматривается стационарный режим функционирования потока, $p_T(\tau_k) = p_T(\tau)$ для всех $k=1, 2, \dots$, $\tau \geq 0$. Вследствие этого без ограничения общности момент наступления события t_k можно положить равным нулю, т.е. момент наступления события есть $\tau=0$.

Ставится задача оценивания длительности мертвого времени T методом моментов. Для решения поставленной задачи необходимо найти явный вид плотности вероятности $p_T(\tau)$, $\tau \geq 0$.

2. Вывод плотности вероятности $p_T(\tau)$

Рассмотрим интервал $(0, \tau)$ длительности $\tau = T + t$ между соседними событиями наблюдаемого потока, где T – значение длительности мертвого времени, t – значение длительности интервала между моментом окончания мертвого времени и моментом наступления очередного события, $t > 0$.

Введем переходную вероятность $q_{ij}(T)$ того, что за мертвое время длительности T процесс $\lambda(\tau)$ перейдет из состояния S_i в момент времени $\tau=0$ в состояние S_j в момент $\tau=T$, $i, j=1, 2$; условную стационарную вероятность $\pi_i(0|T)$ того, что процесс $\lambda(\tau)$ в момент времени $\tau=0$ находится в состоянии S_i , $i=1, 2$, при условии, что в данный момент времени наступило событие наблюдаемого потока, породив период мертвого времени длительности T .

Введем в рассмотрение условную вероятность $p_{ij}(t)$ того, что на интервале $(0, t)$ нет событий потока, и в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_j$ при условии, что в момент времени $t=0$ значение процесса $\lambda(0) = \lambda_i$; $\tilde{p}_{ij}(t)$ – соответствующая плотность вероятности, $i, j=1, 2$.

В силу того что процесс $\lambda(t)$ обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать, начиная с момента времени t_k , $k=1, 2, \dots$, наступления события потока, плотность вероятности $p_T(\tau)$ определяется в виде:

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, 0 \leq \tau < T, \\ \sum_{i=1}^2 \pi_i(0|T) \sum_{j=1}^2 q_{ij}(T) \sum_{k=1}^2 \tilde{p}_{jk}(\tau-T), \tau \geq T. \end{cases} \quad (1)$$

Явный вид $\pi_i(0|T)$, $q_{ij}(T)$, $\tilde{p}_{jk}(\tau-T)$, $i, j, k=1, 2$, устанавливают следующие леммы.

Лемма 1. Переходные вероятности $q_{ij}(T)$, $i, j=1, 2$, в полусинхронном потоке событий второго порядка имеют вид:

$$\begin{aligned} q_{11}(T) &= \pi_1 + \pi_2 e^{-(\alpha_1+a)T}, & q_{12}(T) &= \pi_2 - \pi_2 e^{-(\alpha_1+a)T}, \\ q_{21}(T) &= \pi_1 - \pi_1 e^{-(\alpha_1+a)T}, & q_{22}(T) &= \pi_2 + \pi_1 e^{-(\alpha_1+a)T}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $a = \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)$; априорные финальные вероятности состояний S_1 и S_2 равны $\pi_1 = \alpha_2 / (\alpha_2 + a)$, $\pi_2 = a / (\alpha_2 + a)$ соответственно.

Доказательство. Построим систему дифференциальных уравнений для нахождения введенных переходных вероятностей $q_{ij}(T)$, $i, j=1, 2$:

$$\begin{aligned} q'_{11}(\tau) &= \alpha_2 q_{12}(\tau) - \alpha q_{11}(\tau), & q'_{22}(\tau) &= \alpha q_{21}(\tau) - \alpha_2 q_{22}(\tau), \\ q_{11}(\tau) + q_{12}(\tau) &= 1, & q_{21}(\tau) + q_{22}(\tau) &= 1, & q_{11}(0) &= q_{22}(0) = 1, & q_{12}(0) &= q_{21}(0) = 0. \end{aligned}$$

Интегрируя систему дифференциальных уравнений с учетом начальных условий [22] и заменяя в решении момент времени τ на T , приходим к (2). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Плотности вероятностей $\tilde{p}_{ij}(\tau)$, $i, j=1, 2$, в полусинхронном потоке событий второго порядка определяются формулами

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{1j}(\tau) &= [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_j | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_j | \lambda_1)] e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}, & j &= 1, 2, \\ \tilde{p}_{21}(\tau) &= \frac{\alpha_2 [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)]}{(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2)} [e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau} - e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}], \\ \tilde{p}_{22}(\tau) &= \frac{\alpha_2 [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)]}{(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2)} [e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau} - e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}] + \lambda_2 e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau}, & \tau &\geq 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) \neq 0$.

Для нахождения $\pi_i(0|T)$, $i=1, 2$, введем в рассмотрение вероятности перехода p_{ij} , $i, j=1, 2$, процесса $\lambda(\tau)$ из состояния S_i в S_j за время, которое пройдет от момента $\tau=0$ до момента наступления очередного события потока.

Лемма 3. Вероятности перехода p_{ij} , $i, j=1, 2$, в полусинхронном потоке событий второго порядка имеют вид:

$$p_{1j} = \frac{\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_j | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_j | \lambda_1)}{\lambda_1 + \alpha_1}, \quad j=1, 2, \quad p_{21} = \frac{\alpha_2 [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)]}{(\lambda_1 + \alpha_1)(\lambda_2 + \alpha_2)},$$

$$p_{22} = \frac{\alpha_2 [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)]}{(\lambda_1 + \alpha_1)(\lambda_2 + \alpha_2)} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \alpha_2}, \quad p_{11} + p_{12} = 1, \quad p_{21} + p_{22} = 1. \quad (4)$$

Лемма 4. Условные стационарные вероятности $\pi_i(0|T)$, $i=1, 2$, в полусинхронном потоке событий второго порядка определяются выражениями:

$$\pi_1(0|T) = (z_1 - a) \left(\alpha_2 + \lambda_2 \pi_1 [1 - e^{-(\alpha_2 + a)T}] \right) / \left(z_1 z_2 - \lambda_2 (z_1 - a) e^{-(\alpha_2 + a)T} \right), \quad \pi_2(0|T) = 1 - \pi_1(0|T), \quad (5)$$

$z_1 = \lambda_1 + \alpha_1$, $z_2 = \lambda_2 + \alpha_2$; π_1 и a определены в (2).

Доказательство. Введем в рассмотрение переходную вероятность $\pi_{ij}(T)$ того, что за время, которое пройдет от момента $\tau=0$ до момента наступления очередного события наблюдаемого потока, процесс $\lambda(\tau)$ перейдет из состояния S_i в S_j , $i, j=1, 2$.

В моменты времени наступления событий $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ последовательность $\{\lambda(t_k)\}$ представляет собой вложенную цепь Маркова, тогда справедлива система уравнений

$$\pi_1(0|T) = \pi_1(0|T)\pi_{11}(T) + \pi_2(0|T)\pi_{21}(T), \quad \pi_2(0|T) = \pi_1(0|T)\pi_{12}(T) + \pi_2(0|T)\pi_{22}(T),$$

$$\pi_1(0|T) + \pi_2(0|T) = 1,$$

из которой находим

$$\pi_1(0|T) = \pi_{21}(T) / (1 - \pi_{11}(T) + \pi_{21}(T)), \quad \pi_2(0|T) = 1 - \pi_1(0|T). \quad (6)$$

Поскольку процесс $\lambda(t)$ является марковским, то справедливо

$$\pi_{11}(T) = q_{11}(T)p_{11} + q_{12}(T)p_{21}, \quad \pi_{12}(T) = q_{11}(T)p_{12} + q_{12}(T)p_{22}, \quad \pi_{11}(T) + \pi_{12}(T) = 1,$$

$$\pi_{21}(T) = q_{21}(T)p_{11} + q_{22}(T)p_{21}, \quad \pi_{22}(T) = q_{21}(T)p_{12} + q_{22}(T)p_{22}, \quad \pi_{21}(T) + \pi_{22}(T) = 1.$$

Учитывая выражения (2) для $q_{ij}(T)$, $i, j=1, 2$, получим

$$\pi_{11}(T) = p_{11} - \pi_2(p_{11} - p_{21})(1 - e^{-(\alpha_2 + a)T}), \quad \pi_{21}(T) = p_{21} + \pi_1(p_{11} - p_{21})(1 - e^{-(\alpha_2 + a)T}), \quad (7)$$

$$\pi_{12}(T) = 1 - \pi_{11}(T), \quad \pi_{22}(T) = 1 - \pi_{21}(T).$$

Подставляя в (6) выражения (7), (4), приходим к (5). *Лемма 4 доказана.*

Леммы 1, 2 и 4 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. Плотность вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в полусинхронном потоке второго порядка в условиях наличия мертвого времени для случая $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) \neq 0$ имеет вид:

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \gamma(T) z_1 e^{-z_1(\tau-T)} + (1 - \gamma(T)) z_2 e^{-z_2(\tau-T)}, & \tau \geq T, \end{cases} \quad (8)$$

$$\gamma(T) = \pi_1 [(-z_2 - a) / (z_1 - z_2)] [1 + a(z_1 - \lambda_2) / (z_1 z_2 e^{(\alpha_2 + a)T} - \lambda_2(z_1 - a))],$$

где π_1 и a определены в (2); z_1, z_2 – в (5).

Доказательство. Подставляя выражения (2), (3) и (5) в формулу (1), после необходимых преобразований получим (8). *Теорема 1 доказана.*

Рассмотрим особый случай, когда в (8) коэффициент $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) = 0$.

Лемма 5. Плотности вероятностей $\tilde{p}_{ij}(\tau)$, $i, j = 1, 2$, в полусинхронном потоке событий второго порядка для случая $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) = 0$ определяются формулами

$$\begin{aligned}\tilde{p}_{1j}(\tau) &= [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_j | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_j | \lambda_1)] e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}, \quad j = 1, 2, \\ \tilde{p}_{21}(\tau) &= \alpha_2 [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)] \tau e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}, \\ \tilde{p}_{22}(\tau) &= \alpha_2 [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)] \tau e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau} + \lambda_2 e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}, \quad \tau \geq 0.\end{aligned}\quad (9)$$

Лемма 6. Вероятности перехода p_{ij} , $i, j = 1, 2$, в полусинхронном потоке событий второго порядка для случая $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) = 0$ имеют вид:

$$\begin{aligned}p_{1j} &= [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_j | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_j | \lambda_1)] / (\lambda_1 + \alpha_1), \quad j = 1, 2, \\ p_{21} &= \alpha_2 [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)] / (\lambda_1 + \alpha_1)^2, \\ p_{22} &= \alpha_2 [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)] / (\lambda_1 + \alpha_1)^2 + \lambda_2 / (\lambda_2 + \alpha_2).\end{aligned}\quad (10)$$

Теорема 2. Плотность вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в полусинхронном потоке второго порядка в условиях наличия мертвого времени для случая $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) = 0$ имеет вид:

$$\begin{aligned}p_T(\tau) &= \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ [(\lambda_1 + \alpha_1) - \alpha_2 \pi_2(T)(1 - (\lambda_1 + \alpha_1)(\tau - T))] e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)(\tau - T)}, & \tau \geq T, \end{cases} \\ \pi_2(T) &= \pi_2 \left[1 + a \alpha_2 / \left((\lambda_1 + \alpha_1)^2 e^{(\alpha_2 + a)T} - \lambda_2 (\lambda_1 + \alpha_1 - a) \right) \right],\end{aligned}\quad (11)$$

где π_2 и a определены в (2).

Доказательство. Подставляя в (6) выражения (7), (10), находим стационарные вероятности $\pi_i(0|T)$, $i = 1, 2$. Наконец, подставляя в (1) выражения (2), (9), а также найденные выражения для $\pi_i(0|T)$, $i = 1, 2$, в результате необходимых преобразований приходим к (11). Теорема 2 доказана.

3. Среднее число потерянных событий в единицу времени

1. Случай $z_1 \neq z_2$ (общий). Плотность $p_T(\tau)$ позволяет получить среднее число событий в единицу времени Λ в рассматриваемом потоке при полной его наблюдаемости ($T = 0$), а также среднее число событий в единицу времени Λ_T в потоке при наличии мертвого времени ($T \neq 0$):

$$\Lambda = z_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2, \quad \Lambda_T = \frac{z_1 z_2 [1 - e^{(\alpha_2 + a)T}] - (\alpha_2 z_1 + \lambda_2 a)}{T(z_1 z_2 [1 - e^{(\alpha_2 + a)T}] - (\alpha_2 z_1 + \lambda_2 a)) + (z_2 \pi_1 + (z_1 + \alpha_2) \pi_2) [1 - e^{(\alpha_2 + a)T}] - (\alpha_2 + a)}.$$

На основе полученных выражений находим среднее число потерянных событий в потоке в единицу времени для *общего случая* задания параметров:

$$\Delta = \Lambda - \Lambda_T = \frac{\pi_2 (z_1 - \lambda_2) (\pi_1 (z_1 - \lambda_2) - \alpha_2) [1 - e^{(\alpha_2 + a)T}] + T (z_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2) (z_1 z_2 [1 - e^{(\alpha_2 + a)T}] - (\alpha_2 z_1 + \lambda_2 a))}{T(z_1 z_2 [1 - e^{(\alpha_2 + a)T}] - (\alpha_2 z_1 + \lambda_2 a)) + (z_2 \pi_1 + (z_1 + \alpha_2) \pi_2) [1 - e^{(\alpha_2 + a)T}] - (\alpha_2 + a)}.$$

2. Случай $z_1 = z_2 = z$ (особый). Аналогичным образом находятся Λ и Λ_T :

$$\Lambda = \lambda_2 + \alpha_2 \pi_1, \quad \Lambda_T = \frac{z^2 [1 - e^{(\alpha_2 + a)T}] - (\alpha_2 z + \lambda_2 a)}{T(z^2 [1 - e^{(\alpha_2 + a)T}] - (\alpha_2 z + \lambda_2 a)) + (z \pi_1 + (z + \alpha_2) \pi_2) [1 - e^{(\alpha_2 + a)T}] - (\alpha_2 + a)}.$$

На основе полученных выражений находим среднее число потерянных событий в потоке в единицу времени для *особого случая* задания параметров:

$$\Delta = \Lambda - \Lambda_T = \frac{-\alpha_2^2 \pi_2^2 [1 - e^{(\alpha_2 + a)T}] + T (z \pi_1 + \lambda_2 \pi_2) (z^2 [1 - e^{(\alpha_2 + a)T}] - (\alpha_2 z + \lambda_2 a))}{T(z^2 [1 - e^{(\alpha_2 + a)T}] - (\alpha_2 z + \lambda_2 a)) + (z \pi_1 + (z + \alpha_2) \pi_2) [1 - e^{(\alpha_2 + a)T}] - (\alpha_2 + a)},$$

где π_1 , π_2 и a определены в (2).

4. Оценивание длительности мертвого времени методом моментов

Рассмотрим статистику $C = (1/n) \sum_{k=1}^n \tau_k$, где $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ – значение длительности интервала между моментами t_k и t_{k+1} наступления событий в наблюдаемом потоке.

Пусть имеется выборка $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ из распределения $p_T(\tau)$, зависящего от неизвестного параметра T ; $M_T(\tau) = \int_T^\infty \tau p_T(\tau) d\tau$ – начальный теоретический момент первого порядка. Тогда в соответствии с методом моментов [19] уравнение моментов выпишется в виде

$$M_T(\tau) = C. \quad (12)$$

С учетом вида (8) уравнение (12) для случая $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) \neq 0$ запишем в виде:

$$\gamma(T)(1/z_1 - 1/z_2) + T + 1/z_2 = C. \quad (13)$$

Уравнение (13) относительно неизвестного параметра T решается только численно.

Утверждение 1. Уравнение моментов (13) имеет единственное решение.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(T) = M_T(\tau)$, где $f(T) = \gamma(T)(1/z_1 - 1/z_2) + T + 1/z_2$. Можно показать, что функция $f(T)$ является возрастающей функцией переменной T , $T \geq 0$. Следовательно, утверждение 1 справедливо.

Для случая $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) = 0$ уравнение (12), с учетом (11), примет следующий вид:

$$T + 1/(\lambda_1 + \alpha_1) + \alpha_2 \pi_2(T) / (\lambda_1 + \alpha_1)^2 = C. \quad (14)$$

Уравнение (14) решается относительно T только с привлечением численных методов.

Утверждение 2. Уравнение моментов (14) имеет единственное решение.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(T) = M_T(\tau)$, где $f(T) = T + 1/(\lambda_1 + \alpha_1) + \alpha_2 \pi_2(T) / (\lambda_1 + \alpha_1)^2$. Аналогично общему случаю можно показать, что $f(T)$ – возрастающая функция переменной T , $T \geq 0$. Следовательно, утверждение 2 верно.

5. Результаты статистических экспериментов

Согласно утверждениям 1 и 2, как для общего, так и для особого случаев задания параметров потока оценивание длительности мертвого времени T производится по следующему алгоритму. В качестве оценки параметра выбирается решение (13) или (14) (в зависимости от задания параметров потока) на полуинтервале $(0, \tau_{\min}]$, где $\tau_{\min} = \min_k(\tau_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$; если $f(0) < C < f(\tau_{\min})$ то $\hat{T}_{numeric} = \hat{T}$; если $f(0) < f(\tau_{\min}) \leq C$, то $\hat{T}_{numeric} = \tau_{\min}$; $f(0) \geq C$, то $\hat{T}_{numeric} = 0$, где $\hat{T}_{numeric}$ – численное решение уравнения (13) или (14) в зависимости от задания параметров потока. Отметим, что применение $\tau_{\min}$ дает улучшенную оценку параметра T .

С целью установления качества оценивания длительности мертвого времени проведена серия статистических экспериментов с использованием имитационной модели полусинхронного потока событий второго порядка [23].

По алгоритму, описанному выше, находится выборка оценок $\hat{T}_1, \hat{T}_2, \dots, \hat{T}_N$ и вычисляются выборочные средние $\hat{M}(\hat{T}) = (1/N) \sum_{s=1}^N \hat{T}_s$ и оценки смещения $\delta(\hat{T}) = |\hat{M}(\hat{T}) - T|$.

В первом статистическом эксперименте для общего случая задания параметров потока рассчитываются зависимости $\hat{M}(\hat{T})$, $\delta(\hat{T})$ от количества реализаций $N = 50, 100, \dots, 500$ с шагом 50, при заданных значениях времени моделирования $T_m = 700$ ед. времени, вероятностях $P_1^{(1)}(\lambda_1|\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2|\lambda_1) = 0,4$, $P_1^{(1)}(\lambda_2|\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1|\lambda_1) = 0,6$ и параметрах потока $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 0,8$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$, $T = 1$. Результаты данного эксперимента приведены в табл. 1.

Таблица 1

Результаты первого статистического эксперимента

N	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
$\hat{M}(\hat{T})$	0,9913	0,9928	0,9918	0,9920	0,9928	0,9930	0,9931	0,9932	0,9930	0,9931
$\delta(\hat{T})$	0,0087	0,0072	0,0082	0,0080	0,0072	0,0070	0,0069	0,0068	0,0070	0,0069

Во втором статистическом эксперименте для особого случая задания параметров потока при $T = 1; 1,5; 2$ изучаются зависимости $\hat{M}(\hat{T})$, $\delta(\hat{T})$ от значений времени моделирования $T_m = 50, 100, \dots, 1000$ ед. времени с шагом 50 при фиксированных значениях $N = 300$, $P_1^{(1)}(\lambda_1|\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1|\lambda_1) = 0,65$, $P_1^{(1)}(\lambda_2|\lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2|\lambda_1) = 0,35$, $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 1,5$, $\alpha_1 = 0,5$, $\alpha_2 = 3$. Результаты эксперимента продемонстрированы в табл. 2.

Таблица 2

Результаты второго статистического эксперимента

	T_m	50	100	150	...	700	750	...	950	1 000
$T = 1$	$\hat{M}(\hat{T})$	0,7310	0,8001	0,8298	...	0,9943	0,9939	...	0,9942	0,9943
	$\delta(\hat{T})$	0,2690	0,1999	0,1702	...	0,0057	0,0061	...	0,0058	0,0057
$T = 1,5$	$\hat{M}(\hat{T})$	0,1875	1,2224	1,2208	...	1,4625	1,4626	...	1,4621	1,4624
	$\delta(\hat{T})$	0,3125	0,2776	0,2792	...	0,0375	0,0374	...	0,0379	0,0376
$T = 2$	$\hat{M}(\hat{T})$	1,6618	1,6891	1,7455	...	1,9312	1,9312	...	1,9315	1,9313
	$\delta(\hat{T})$	0,3382	0,3109	0,2545	...	0,0688	0,0688	...	0,0685	0,0687

Анализируя полученные численные результаты, можно заключить: 1) найденная оценка является смещенной, впрочем, величина оценки смещения относительно исходного значения остается достаточно приемлемой; 2) оценка ведет себя стабильнее с увеличением количества реализаций N и времени моделирования T_m , что естественно в силу увеличения доступной информации при равных T ; также отметим общую тенденцию уменьшения смещения с ростом T_m ; 3) оценка улучшается (в смысле уменьшения смещения) с уменьшением периода мертвого времени T , что является естественным в силу меньшей потери событий (информации).

Заключение

В настоящей работе рассмотрен полусинхронный поток событий второго порядка при непродлевающемся мертвом времени фиксированной длительности T . В условиях частичной наблюдаемости потока получен явный вид одномерной плотности вероятности $p_T(\tau)$ значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий потока в общем случае и в особом случае задания параметров. Решена задача оценивания периода ненаблюдаемости потока с применением численных методов для решения уравнения моментов относительно неизвестного параметра T . Алгоритм вычисления оценок длительности мертвого времени реализован на языке программирования C# в среде Visual Studio 2013. С целью установления качества оценивания проведена серия статистических экспериментов с использованием имитационной модели потока; численные результаты экспериментов демонстрируют приемлемое качество оценивания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 1 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
2. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч.2 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
3. Neuts M.F. A versatile Markov point process // Journal of Applied Probability. 1979. V. 16. P. 764–779.

4. Cox D.R. The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables // *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 1955. V. 51, No. 3. P. 433–441.
5. Kingman J.F.C. On doubly stochastic Poisson process // *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 1964. V. 60, is. 4. P. 923–930.
6. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a bath markovian arrival process // *Communications in Statistics Stochastic Models*. 1991. V. 7. P. 1–46.
7. Дудин А.Н., Клименок В.И. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск : Изд-во Белорус. гос. ун-та, 2000. 175 с.
8. Basharin G.P., Gaidamaka Yu.V., Samouylov K.E. Mathematical theory of teletraffic and its application to the analysis of multi-service communication of the next generation networks // *Automatic Control and Computer Sciences*. 2013. V. 47, No. 2. P. 62–69.
9. Vishnevsky V.M., Semenova O.V. Polling systems: theory and applications for broadband wireless networks. London : Academic Publishing, 2012. 316 p.
10. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров синхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // *Вестник Томского государственного университета*. 2002. № S1-1. С. 24–29.
11. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Вероятность ошибки при оценивании состояний обобщенного асинхронного потока событий // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2012. № 2 (19). С. 88–101.
12. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events // *Measurement techniques*. 2003. V. 46, is. 6. P. 536–545.
13. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988. 256 с.
14. Nezhel'skaya L. Probability density function for modulated MAP event flows with unextendable dead time // *Communications in Computer and Information Science*. 2015. V. 564. P. 141–151.
15. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежелская Л.А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2013. № 4 (25). С. 32–42.
16. Bakholdina M., Gortsev A. Joint probability density of the intervals length of the modulated semi-synchronous integrated flow of events and its recurrence conditions // *Communications in Computer and Information Science*. 2014. V. 487. P. 18–25.
17. Горцев А.М., Зуевич В.Л. Оптимальная оценка состояний асинхронного дваждыстохастического потока событий с произвольным числом состояний // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2010. № 2 (11). С. 44–65.
18. Gortsev A.M., Klimov I.S. Estimation of intensity of Poisson stream of events for conditions under which it is partially unobservable // *Telecommunications and Radio Engineering*. 1992. V. 47, is. 1. P. 33–38.
19. Малинковский Ю.В. Теория вероятностей и математическая статистика. Гомель : УО «ГТУ им. Ф. Скорины», 2004. Ч. 2: Математическая статистика. 146 с.
20. Nezhelskaya L., Tumashkina D. Optimal state estimation of semi-synchronous event flow of the second order under its complete observability // *Communications in Computer and Information Science*. 2018. V. 912. P. 93–105.
21. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория вероятностей и случайных процессов. Томск : Изд-во НЛТ, 2006. 204 с.
22. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. : Наука, 1969. 424 с.
23. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. М. : Наука, 1973. 312 с.

Поступила в редакцию 12 января 2020 г.

Nezhel'skaya L.A., Tumashkina D.A. (2020) ESTIMATION OF THE UNEXTENDABLE DEAD TIME DURATION IN SEMI-SYNCHRONOUS EVENTS FLOW OF THE SECOND ORDER BY THE METHOD OF MOMENTS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science] 52. pp. 73–82

DOI: 10.17223/19988605/52/9

In the current paper we consider the stationary operation mode of the doubly stochastic semi-synchronous events flow of the second order under conditions of an unextendable dead time, i.e. after each registered event at the time moment t_k , the dead time period of fixed duration T appears, during which other events of the flow are inaccessible to observation. The first event that occurred again at the end of the dead time period creates a period of dead time, etc.

Under these conditions, one-dimensional probability density of the value of interval duration between neighboring events in the general case of setting parameters $(\lambda_1 + \alpha_1 \neq \lambda_2 + \alpha_2)$ has the following form:

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \gamma(T)z_1 e^{-z_1(\tau-T)} + (1-\gamma(T))z_2 e^{-z_2(\tau-T)}, & \tau \geq T, \end{cases}$$

$$\gamma(T) = \pi_1[(z_1 - z_2 - a) / (z_1 - z_2)][1 + a(z_1 - \lambda_2) / (z_1 z_2 e^{(a_2 + a)T} - \lambda_2(z_1 - a))], \quad z_1 = \lambda_1 + \alpha_1, \quad z_2 = \lambda_2 + \alpha_2, \quad \pi_1 = \alpha_2 / (\alpha_2 + a),$$

for the special case ($\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$) of setting parameters

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ [(\lambda_1 + \alpha_1) - \alpha_2 \pi_2(T)(1 - (\lambda_1 + \alpha_1)(\tau - T))] e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)(\tau - T)}, & \tau \geq T, \end{cases}$$

$$\pi_2(T) = \pi_2 \left[1 + a \alpha_2 / \left((\lambda_1 + \alpha_1)^2 e^{(\alpha_2 + a)T} - \lambda_2 (\lambda_1 + \alpha_1 - a) \right) \right],$$

where $a = \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)$, $\pi_2 = a / (\alpha_2 + a)$.

Using the explicit forms of the density functions, the moment equations obtained to determine parameter T in both cases. The moment equations were solved by applying numerical methods.

The algorithm for calculating the estimates was implemented by C# programming language in Visual Studio 2013. In order to establish the quality of the estimation, the statistical experiments series was carried out using a simulation model of the flow; the numerical results of the experiments are given in the current paper and illustrate an acceptable quality of estimation.

Keywords: doubly stochastic event flow; semi-synchronous event flow of the second order; unextendable dead time; dead time estimation; method of moments.

NEZHEL'SKAYA Lyudmila Alekseevna (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Applied Mathematics Department, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: ludne@mail.tsu.ru

TUMASHKINA Diana Aleksandrovna (Post-graduate Student, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: diana1323@mail.ru

REFERENCES

1. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. Ch. 1 [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 17(6). pp. 92–99.
2. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1980) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. Ch.2 [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 1. pp. 55–61.
3. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markov point process. *Journal of Applied Probability*. 16. pp. 764–779. DOI: 10.2307/3213143
4. Cox, D.R. (1955) The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 51(3). pp. 433–441. DOI: 10.1017/S0305004100030437
5. Kingman, J.F.C. (1964) On doubly stochastic Poisson process. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 60(4). pp. 923–930. DOI: 10.1017/S030500410003838X
6. Lucantoni, D.M. (1991) New results on the single server queue with a bath markovian arrival process. *Communications in Statistics Stochastic Models*. 7. pp. 1–46. DOI: 10.1080/15326349108807174
7. Dudin, A.N. & Klimenok, V.I. (2000) *Sistemy massovogo obsluzhivaniya s korrelirovannymi potokami* [Queueing systems with correlated flows]. Minsk: Belarus State University.
8. Basharin, G.P., Gaidamaka, Yu.V. & Samouylov, K.E. (2013) Mathematical theory of teletraffic and its application to the analysis of multiservice communication of the next generation networks. *Automatic Control and Computer Sciences*. 47(2). pp. 62–69. DOI: 10.3103/S0146411613020028
9. Vishnevsky, V.M. & Semenova, O.V. (2012) *Polling systems: theory and applications for broadband wireless networks*. London: Academic Publishing.
10. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2002) Estimation of the parameters of a synchronous doubly stochastic event flow by the method of moments. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. S1-1. pp. 24–29.
11. Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2012) The probability of wrong decisions in the estimation of states of a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(19). pp. 88–101.
12. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2003) Estimation of the dead-time period and parameters of a semi-synchronous double-stochastic stream of events. *Measurement Techniques*. 46(6). pp. 536–545. DOI: 10.1023/A:1025499509015
13. Apanasovich, V.V., Kolyada, A.A. & Chernyavskiy, A.F. (1988) *Statisticheskii analiz sluchaynykh potokov v fizicheskom eksperimente* [The statistical analysis of series of random events in physical experiment]. Minsk: Universitetskoe.
14. Nezhelskaya, L. (2015) Probability density function for modulated MAP event flows with unextendable dead time. *Communications in Computer and Information Science*. 564. pp. 141–151. DOI: 10.1007/978-3-319-25861-4_12

15. Gortsev, A.M., Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2013) The comparison of maximum likelihood estimation and method of moments estimation of dead time value in a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(25). pp. 32–42.
16. Bakholdina, M. & Gortsev, A. (2014) Joint probability density of the intervals length of the modulated semy-synchronous integrated flow of events and its recurrence conditions. *Communications in Computer and Information Science*. 487. pp. 18–25.
17. Gortsev, A.M. & Zuevich, V.L. (2010) Optimal estimation of states of the asynchronous doubly stochastic flow of events with arbitrary number of the states. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(11). pp. 44–65.
18. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1992) Estimation of intensity of Poisson stream of events for conditions under which it is partially unobservable. *Telecommunications and Radio Engineering*. 47(1). pp. 33–38.
19. Malinkovsky, Yu.V. (2004) *Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika* [Probability Theory and Mathematical Statistics]. Gomel: Francisk Skorina Gomel State University.
20. Nezhelskaya, L. & Tumashkina, D. (2018) Optimal state estimation of semi-synchronous event flow of the second order under its complete observability. *Communications in Computer and Information Science*. 912. pp. 93–105. DOI: 10.17223/19988605/46/9
21. Nazarov, A.A. & Terpugov, A.F. (2006) *Teoriya veroyatnostey i sluchaynykh protsessov* [The theory of probability and random processes]. Tomsk: NTL.
22. Elsgolts, L.E. (1969) *Differentsial'nye uravneniya i variatsionnoe* [The differential equations and calculus of variations]. Moscow: Nauka.
23. Sobol, I.M. (1973) *Chislennyye metody Monte-Karlo* [Numerical methods of Monte Carlo]. Moscow: Nauka.