

УДК 519.872

DOI: 10.17223/19988605/52/11

И.Е. Тананко, Н.П. Фокина**МЕТОД АНАЛИЗА СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ
С НЕНАДЕЖНЫМИ ПРИБОРАМИ И ЗАДЕРЖКОЙ ИНФОРМАЦИИ**

Рассматривается задача определения стационарного распределения вероятностей состояний открытой сети массового обслуживания, содержащей двухприборные системы обслуживания, в которых только один прибор является ненадежным, а информация о выходе из строя приборов поступает с задержкой. Для маршрутизации требований в ненадежной сети решается задача определения оптимальных маршрутных матриц с целью выравнивания математического ожидания длительности пребывания требований в системах.

Ключевые слова: открытая сеть массового обслуживания; ненадежные приборы обслуживания; задержка информации; маршрутизация.

Сети массового обслуживания с переменной структурой используются в качестве моделей дискретных стохастических систем с сетевой структурой и ненадежными элементами. Удобство их применения связано с простотой и естественностью отображения структуры и процессов функционирования таких систем.

Работы [1–4] являются одними из первых, в которых сети массового обслуживания используются в качестве моделей для исследования влияния различных алгоритмов маршрутизации на характеристики сетей передачи данных с коммутацией пакетов и ненадежными каналами [1], для определения характеристик и выявления узких мест в многопроцессорных системах с переменной структурой [2], для решения задачи отыскания оптимальных конфигураций гибких производственных систем с надежными и ненадежными элементами [3], а также для моделирования распределенных информационных систем с ненадежными рабочими станциями [4].

В дальнейшем сети массового обслуживания с переменной структурой были использованы в качестве моделей мультимедийных систем с ненадежными элементами [5], для решения задач анализа сетей мобильной связи [6], задач управления сетями связи с изменяемой топологией, к которым, в частности, относятся сети спутниковой связи и сети мобильной связи [7], а также для исследования динамических характеристик производственных систем конвейерного типа [8].

Класс сетей массового обслуживания с переменной структурой постоянно расширяется за счет рассмотрения различных особенностей изменения структуры, и это требует разработки методов их анализа.

Например, в работе [9] рассматривается замкнутая экспоненциальная сеть массового обслуживания с ненадежными приборами в одноприборных системах обслуживания. Предложен приближенный метод анализа этой сети в предположении, что длительность обслуживания требований с учетом поломок и восстановлений приборов также является экспоненциально распределенной случайной величиной, но с уменьшенной интенсивностью обслуживания.

Стационарное распределение вероятностей состояний получено для открытой экспоненциальной сети массового обслуживания, в которой уничтожаются все требования в системе обслуживания в момент отказа прибора этой системы [10]. Восстановление прибора происходит мгновенно, так что после отказа система готова принимать и обслуживать требования.

Открытая экспоненциальная сеть массового обслуживания с последовательным расположением узлов рассматривается в работе [11]. Каждый узел состоит из нескольких параллельных систем обслуживания с неограниченными очередями. Длительности наработки на отказ и длительности

восстановления систем обслуживания являются экспоненциально распределенными случайными величинами. Требования, находящиеся в отказавшей системе обслуживания, ожидают ее восстановления. Требования после обслуживания в работоспособных системах направляются только в работоспособные системы. Предложенный в данной работе метод анализа сети сочетает в себе несколько известных методов анализа сетей массового обслуживания.

Основными результатами работ [12–14] являются расширение класса сетей ВСМР до сетей массового обслуживания с ненадежными элементами и получение в мультипликативном виде стационарных распределений вероятностей состояний этих сетей.

Метод производящих функций для определения зависящих от времени вероятностей состояний открытой сети массового обслуживания с ненадежными системами обслуживания применен в работе [15]. Предполагается, что сеть функционирует в условиях высокой нагрузки. Интенсивности поступления и обслуживания требований, а также параметры исправной работы и восстановления приборов систем обслуживания зависят от времени. Получены приближенные выражения для определения вероятностей состояний, среднего числа исправных приборов и среднего числа требований в системах сети в произвольный момент времени.

В работе [16] рассматривается открытая сеть массового обслуживания с подвижными системами обслуживания. Когда две системы меняются местами, каждая забирает с собой все требования, стоящие в очереди к ней. Основным результатом работы является доказательство сходимости процесса эволюции сети к некоторому нелинейному марковскому процессу.

Несмотря на значительное количество научных работ, посвященных ненадежным сетям массового обслуживания, мало внимания уделяется развитию методов анализа сетей массового обслуживания с задержкой информации об изменении структуры этих сетей.

В данной работе рассматривается открытая экспоненциальная сеть массового обслуживания с одним классом требований, состоящая из систем массового обслуживания типа $M/M/2$. Каждая система обслуживания содержит один абсолютно надежный и один ненадежный прибор. Ненадежный прибор последовательно переходит из работоспособного в неработоспособное состояние и обратно. Длительности пребывания ненадежных приборов систем обслуживания в работоспособном и неработоспособном состояниях являются экспоненциально распределенными случайными величинами. Если в момент отказа прибор был занят, то обслуживаемое требование переходит в очередь системы.

В сети обслуживания реализован алгоритм управления потоком требований в системы обслуживания с задержкой информации о состоянии работоспособности ненадежных приборов систем, который заключается в следующем. Через экспоненциально распределенный интервал времени производится наблюдение за состоянием работоспособности ненадежных приборов систем. На основании полученной информации через экспоненциально распределенный интервал времени принимается решение о перенаправлении потоков требований в системы обслуживания. Критерием оптимального функционирования сети обслуживания является равенство математических ожиданий длительностей пребывания требований во всех системах обслуживания.

Получено стационарное распределение вероятностей состояний работоспособности приборов систем обслуживания, а также стационарное распределение вероятностей числа требований в системах сети обслуживания.

1. Ненадежная сеть массового обслуживания

Рассматривается открытая сеть массового обслуживания, состоящая из L систем массового обслуживания S_i , $i = 1, \dots, L$, типа $M/M/2$. Из источника S_0 в сеть поступает пуассоновский поток требований одного класса с интенсивностью λ_0 . Матрица смежности $W = (w_{ij})$, $i, j = 0, 1, \dots, L$, ориентированного графа определяет структуру сети систем массового обслуживания. Элемент $w_{ij} = 1$, если имеется связь из S_i в S_j , и $w_{ij} = 0$, если такой связи нет, $i, j \in \{0, 1, \dots, L\}$. Маршрутная матрица $\Theta = (\theta_{ij})$, $i, j = 0, 1, \dots, L$, определяет переходы требований в сети обслуживания, где θ_{0i} – вероятность поступления требований из источника S_0 в систему S_i , θ_{i0} – вероятность того, что после завершения обслу-

живания в системе S_i требование покинет сеть обслуживания и возвратится в источник S_0 , θ_{ij} – вероятность того, что после завершения обслуживания в системе S_i требование перейдет в систему S_j , $i, j \in \{1, \dots, L\}$.

Один из двух приборов каждой из систем обслуживания S_i , $i = 1, \dots, L$, является абсолютно надежным. Интенсивность обслуживания требований этим прибором $\mu_i > 0$, $i = 1, \dots, L$.

Другой прибор системы S_i , $i = 1, \dots, L$, является ненадежным и последовательно переходит из работоспособного состояния в неработоспособное состояние.

Пребывание ненадежного прибора системы обслуживания S_i в работоспособном состоянии означает, что интенсивность обслуживания требований этим прибором равна $\mu_i > 0$, $i = 1, \dots, L$. Когда же прибор системы S_i находится в неработоспособном состоянии, то его интенсивность обслуживания $\mu_i = 0$.

Когда отказавший прибор восстанавливается, то система обслуживания представляет собой систему типа $M/M/1$. Если в момент отказа ненадежный прибор обслуживал требование, то это требование возвращается в очередь данной системы. После восстановления ненадежного прибора система обслуживания вновь становится системой типа $M/M/2$.

Длительности наработки на отказ и восстановления ненадежного прибора системы S_i являются экспоненциально распределенными случайными величинами соответственно с параметрами α_i и β_i , $i = 1, \dots, L$, соответственно.

Будем считать, что в сети массового обслуживания существует стационарный режим вне зависимости от того, сколько всего восстанавливается приборов в сети обслуживания и в каких системах обслуживания.

Обозначим $n(t) = (n_i(t))$ – вектор числа работоспособных приборов в системах сети обслуживания в момент t , $n_i(t)$ – число работоспособных приборов в системе S_i в момент t . Состояние $n_i(t) = 2$ означает, что ненадежный прибор системы S_i работоспособен в момент t , $n_i(t) = 1$ – в момент t ненадежный прибор системы S_i восстанавливается, $i = 1, \dots, L$.

В процессе функционирования сети обслуживания производится наблюдение за работоспособностью ненадежных приборов систем S_i и управление входящими потоками требований в системы S_i , основанное на результатах этих наблюдений. Управление потоками заключается в изменении маршрутной матрицы Θ . Полагаем, что, начиная с момента t получения информации о состоянии $n(t)$, необходимо время для изменения маршрутной матрицы Θ и, следовательно, изменения потоков требований, поступающих в системы обслуживания. Формализуем алгоритм наблюдения за состоянием $n(t)$ и управления матрицей Θ .

Пусть в момент t_s^k , $k = 1, 2, \dots$, производится наблюдение за состоянием работоспособности ненадежных приборов в каждой из систем S_i , $i = 1, \dots, L$. В момент t_d^k , $t_d^k > t_s^k$, принимается решение об изменении потоков требований в системы сети обслуживания. Буквы s и d символизируют соответственно наблюдение за системами обслуживания и принятие решения об изменении матрицы Θ . Обозначим через $\Theta(n(t_s^k))$ – маршрутную матрицу, используемую в сети массового обслуживания с момента t_d^k , при условии, что в момент t_s^k состояние работоспособности приборов систем сети определялось вектором $n(t_s^k)$. Маршрутная матрица $\Theta(n(t_s^k))$ не меняется с момента t_d^k до момента t_d^{k+1} .

Длительности интервалов времени между моментами t_d^k и t_s^{k+1} , $t_s^{k+1} > t_d^k$, $k = 1, 2, \dots$, следующего наблюдения за состоянием работоспособности приборов систем обслуживания, являются независимыми экспоненциально распределенными случайными величинами с параметром Δ .

Полагаем также, что длительности интервалов времени между моментами t_s^k и t_d^k , $k = 1, 2, \dots$, являются независимыми экспоненциально распределенными случайными величинами с параметром τ .

В качестве критерия оптимальности функционирования сети обслуживания установим равенство математических ожиданий (м.о.) длительностей пребывания требований в системах массового обслуживания, т.е. $\bar{u}_i = \bar{U}$, $i = 1, \dots, L$, где \bar{U} – некоторое заданное значение. Задача оптимизации

заключается в определении маршрутной матрицы $\Theta(n(t_s^k))$, $k = 1, 2, \dots$, которая обеспечивает выполнение критерия оптимальности функционирования сети обслуживания.

Целью работы является нахождение вероятностно-временных характеристик сети обслуживания с ненадежными приборами в системах обслуживания и с задержкой в принятии решения об изменении потоков требований.

2. Решение задачи оптимального управления маршрутными матрицами

Пусть μ – интенсивность обслуживания требований прибором системы, λ – интенсивность потока требований в систему обслуживания. Тогда м.о. длительности пребывания требований в системе обслуживания типа $M/M/1$ определяется выражением $\bar{u} = 1/(\mu - \lambda)$.

Определим м.о. длительности пребывания требований в экспоненциальной системе обслуживания с двумя приборами, используя выражения для системы с числом приборов $\kappa \geq 2$. Для этого используем формулу Литтла $\bar{u} = (\bar{b} + \bar{h})/\lambda$, где \bar{b} – м.о. числа требований в очереди системы, \bar{h} – м.о. числа занятых приборов системы, определяются соотношениями

$$\bar{b} = P(0) \frac{\kappa^\kappa \psi^{\kappa+1}}{\kappa!(1-\psi)^2}, \quad \bar{h} = \psi \kappa,$$

$$P(0) = \left[\frac{(\kappa\psi)^\kappa}{\kappa!(1-\psi)} + \sum_{n=0}^{\kappa-1} \frac{(\kappa\psi)^n}{n!} \right]^{-1},$$

где $\psi = \lambda/\kappa\mu$ – коэффициент использования системы, $P(0)$ – стационарная вероятность того, что в системе нет требований. Тогда, при $\kappa = 2$

$$P(0) = \frac{2\mu - \lambda}{2\mu + \lambda},$$

$$\bar{u} = P(0) \frac{\lambda^2}{\mu(2\mu - \lambda)^2} + \frac{1}{\mu} = \frac{4\mu}{4\mu^2 - \lambda^2}.$$

Следовательно, необходимые интенсивности потоков требований в системы с одним и с двумя приборами соответственно, обеспечивающие заданное \bar{U} , определяются соотношениями

$$\lambda(1) = \mu - 1/\bar{U},$$

$$\lambda(2) = \sqrt{4\mu(\mu - 1/\bar{U})}.$$

Используя метод синтеза маршрутных матриц сетей обслуживания [17] для известного вектора ω относительных интенсивностей потоков требований, можно получить маршрутную матрицу Θ , удовлетворяющую системе уравнений $\omega\Theta = \omega$ с условием нормировки $\sum_{i=0}^L \omega_i = 1$.

3. Анализ ненадежной системы и сети обслуживания с учетом задержки в управлении потоком

Введем обозначение $(a_i, n_i(t), n_i(t_s^k), c(t))$ для определения числа работоспособных приборов и параметров управления потоком в систему S_i , $i = 1, \dots, L$, где a_i – состояние потока ($a_i = 2$ – поток в систему обслуживания установлен из расчета, что в этой системе работоспособны оба прибора, т.е. интенсивность такого потока равна $\lambda_i(2)$; если $a_i = 1$, то интенсивность потока в систему S_i равна $\lambda_i(1)$; $n_i(t)$, $n_i(t_s^k)$ – состояния работоспособности приборов системы соответственно в текущий момент времени t и в момент t_s^k , $t_s^k < t$; $c(t)$ – параметр управления, который равен d , если в момент t , $t \in [t_s^k, t_d^k)$, принимается решение об интенсивности потока требований в систему. Параметр $c(t) = s$, если $t \in [t_d^k, t_s^{k+1})$.

Из всех возможных 16 состояний $(a_i, n_i(t), n_i(t_s^k), c(t))$ системы $S_i, i = 1, \dots, L$, состояния $(1, 2, 2, s), (1, 1, 2, s), (2, 2, 1, s), (2, 1, 1, s)$ являются невозвратными. Остальные образуют класс положительных возвратных состояний, вероятности которых могут быть найдены из решения системы линейных уравнений

$$-(\alpha_i + \tau)P_i(2, 2, 2, d) + \beta_i P_i(2, 1, 2, d) + \Delta P_i(2, 2, 2, s) = 0, \quad (1)$$

$$-(\beta_i + \tau)P_i(2, 1, 2, d) + \alpha_i P_i(2, 2, 2, d) = 0, \quad (2)$$

$$-(\alpha_i + \Delta)P_i(2, 2, 2, s) + \tau P_i(2, 2, 2, d) + \beta_i P_i(2, 1, 2, s) + \tau P_i(1, 2, 2, d) = 0, \quad (3)$$

$$-(\Delta + \beta_i)P_i(2, 1, 2, s) + \tau P_i(2, 1, 2, d) + \alpha_i P_i(2, 2, 2, s) + \tau P_i(1, 1, 2, d) = 0, \quad (4)$$

$$-(\alpha_i + \tau)P_i(1, 2, 2, d) + \beta_i P_i(1, 1, 2, d) + \Delta P_i(1, 2, 1, s) = 0, \quad (5)$$

$$-(\tau + \beta_i)P_i(1, 1, 2, d) + \alpha_i P_i(1, 2, 2, d) = 0, \quad (6)$$

$$-(\beta_i + \tau)P_i(1, 1, 1, d) + \alpha_i P_i(1, 2, 1, d) + \Delta P_i(1, 1, 1, s) = 0, \quad (7)$$

$$-(\alpha_i + \tau)P_i(1, 2, 1, d) + \beta_i P_i(1, 1, 1, d) = 0, \quad (8)$$

$$-(\alpha_i + \Delta)P_i(1, 2, 1, s) + \tau P_i(1, 2, 1, d) + \beta_i P_i(1, 1, 1, s) + \tau P_i(2, 2, 1, d) = 0, \quad (9)$$

$$-(\Delta + \beta_i)P_i(1, 1, 1, s) + \tau P_i(1, 1, 1, d) + \alpha_i P_i(1, 2, 1, s) + \tau P_i(2, 1, 1, d) = 0, \quad (10)$$

$$-(\beta_i + \tau)P_i(2, 1, 1, d) + \alpha_i P_i(2, 2, 1, d) + \Delta P_i(2, 1, 2, s) = 0, \quad (11)$$

$$-(\alpha_i + \tau)P_i(2, 2, 1, d) + \beta_i P_i(2, 1, 1, d) = 0 \quad (12)$$

с условием нормировки

$$\sum_{a_i, n_i, c} P(a_i, n_i(t), n_i(t_s^k), c) = 1. \quad (13)$$

Поскольку система обслуживания $S_i, i = 1, \dots, L$, характеризуется потоком требований с двумя возможными интенсивностями, а также числом работоспособных приборов, то изменение числа требований в системе представляется случайными процессами рождения и гибели $\xi_i(a_i, n_i), a_i = 1, 2, n_i = 1, 2$.

Введем обозначения для стационарных вероятностей того, что в системе обслуживания $S_i, i = 1, \dots, L$, осуществляются соответственно процессы $\xi_i(2, 2), \xi_i(2, 1), \xi_i(1, 2), \xi_i(1, 1)$:

$$\pi_i(2, 2) = P_i(2, 2, 2, d) + P_i(2, 2, 2, s) + P_i(2, 2, 1, d),$$

$$\pi_i(2, 1) = P_i(2, 1, 2, d) + P_i(2, 1, 2, s) + P_i(2, 1, 1, d),$$

$$\pi_i(1, 2) = P_i(1, 2, 1, d) + P_i(1, 2, 1, s) + P_i(1, 2, 2, d),$$

$$\pi_i(1, 1) = P_i(1, 1, 1, d) + P_i(1, 1, 1, s) + P_i(1, 1, 2, d).$$

Следующие предложения содержат утверждения о свойствах рассмотренных вероятностей.

Предложение 1. Вероятность $P_i(2, 1, 2, s) = P_i(1, 2, 1, s), i = 1, \dots, L$.

Доказательство. Воспользуемся методом Крамера для решения системы линейных уравнений (1)–(13). Можно показать, что определители матриц, получаемых заменой соответствующих столбцов на столбец свободных членов, равны друг другу и равны

$$\alpha_i \beta_i \Delta \tau^4 (\alpha_i + \beta_i + \tau)^2 (\alpha_i + \beta_i + \tau + \Delta)^2, i = 1, \dots, L,$$

откуда следует требуемое равенство. Что и требовалось доказать.

Предложение 2. Вероятность действия процесса $\xi_i(2, 1)$ в системе обслуживания S_i равна вероятности действия процесса $\xi_i(1, 2)$ в этой системе обслуживания, т.е. $\pi_i(2, 1) = \pi_i(1, 2), i = 1, \dots, L$.

Предложение 3. Вероятность того, что в систему S_i поступает поток требований с интенсивностью $\lambda_i(2)$, равна вероятности того, что ненадежный прибор этой системы работоспособен, т.е.

$$\pi_i(2, 2) + \pi_i(2, 1) = \pi_i(2, 2) + \pi_i(1, 2), i = 1, \dots, L.$$

Предложение 2, так же как и Предложение 1, доказывается с использованием свойств определителей. Предложение 3 непосредственно следует из Предложения 2. Можно показать также, что

$$\pi_i(2,2) + \pi_i(2,1) = \beta_i / (\alpha_i + \beta_i)$$

и

$$\pi_i(1,1) + \pi_i(2,1) = \alpha_i / (\alpha_i + \beta_i), \quad i = 1, \dots, L.$$

Обозначим $q = (q_i)$ – вектор состояния сети обслуживания, где q_i – число требований в системе S_i ; (a, n) – вектор состояния потоков требований и числа приборов в системах сети обслуживания, где $a = (a_i)$, $n = (n_i)$, $i = 1, \dots, L$; $P(q, a, n)$ – стационарная вероятность пребывания сети обслуживания в состоянии q с вектором состояния потоков a и вектором n числа приборов в системах обслуживания, определяемая по теореме Джексона [18].

Тогда стационарная вероятность $\pi(a, n)$ того, что сеть обслуживания находится в состоянии (a, n) , определяется выражением

$$\pi(a, n) = \pi_1(a_1, n_1) \cdot \dots \cdot \pi_L(a_L, n_L).$$

Стационарная вероятность состояния q сети массового обслуживания с ненадежными приборами и с задержкой информации имеет вид:

$$P(q) = \sum_{a, n} P(q, a, n) \pi(a, n), \quad q \in E,$$

где E – множество всех состояний сети обслуживания.

Заключение

Сети массового обслуживания с переменной структурой и задержкой в принятии решений, связанных с управлением потоком требований, могут быть использованы не только для анализа стохастических сетевых систем с физическими отказами и восстановлениями отдельных элементов, но также для анализа и разработки методов управления системами, в которых каждый элемент является неделимым общим ресурсом определенного множества пользователей. К таким системам можно отнести, например, некоторые производственные и транспортные системы, сети передачи информации, конфигурируемые вычислительные и информационные ресурсы, на которых основаны, в частности, технологии «облачных вычислений».

ЛИТЕРАТУРА

1. Economides A.A., Silvester J.A. Optimal routing in a network with unreliable links // IEEE INFOCOM'88. 1988. P. 288–297.
2. Blake J.T., Reibman A.L., Trivedi K.S. Sensitivity analysis of reliability and performability measures for multiprocessor systems // Proc. SIGMETRICS '88 Proceed. of the 1988 ACM SIGMETRICS conference on Meas. and modeling of comp. systems. 1988. P. 177–186.
3. Vinod B., Solberg J.J. The optimal design of flexible manufacturing systems // International Journal of Production Research. 1985. V. 23, is. 6. P. 1141–1151.
4. Akyildiz I.F., Liu W. Performance optimization of distributed-system models with unreliable servers // IEEE Trans. on Reliability. 1990. V. 39, No. 2. P. 236–243.
5. Park K., Kim S. A capacity planning model of unreliable multimedia service systems // The Journal of Systems and Software. 2002. V. 63, is. 1. P. 69–76.
6. Sharony J. An architecture for mobile radio networks with dynamically changing topology using virtual subnets // Mobile Networks and applications. 1996. V. 1. P. 75–86.
7. Tassiulas L. Scheduling and performance limits of networks with constantly changing topology // IEEE Transactions on Information Theory. 1997. V. 43, No. 3. P. 1067–1073.
8. Gottlich S., Kuhn S., Schwarz J.A., Stolletz R. Approximations of time-dependent unreliable flow lines with finite buffers // Mathematical Methods of Operations Research. 2016. V. 83, is. 3. P. 295–323.
9. Vinod B., Altiok T. Approximating unreliable queueing networks under the assumption of exponentiality // J. Opl. Res. Soc. 1986. V. 37, No. 3. P. 309–316.
10. Chao X. A queueing network model with catastrophes and product form solution // Operations Research Letters. 1995. V. 18. P. 75–79.
11. Thomas N., Thornley D., Zatschler H. Approximate solution of a class of queueing networks with breakdowns // Proceedings of 17th European Simulation Multiconference, SCS Publishers, Nottingham, UK. 2003. P. 251–256.
12. Sauer C., Daduna H. BCMP networks with unreliable servers // Preprint No. 2003-01, Schwerpunkt Mathematische Statistik und Stochastische Prozesse, Universitat Hamburg. 2003.

13. Цициашвили Г.Ш., Осипова М.А. Вероятностное распределение в сетях массового обслуживания с переменной структурой // Проблемы передачи информации. 2006. Т. 42, № 2. С. 101–108.
14. Sommer J., Berkhout J., Daduna H., Heidergott B. Analysis of Jackson networks with infinite supply and unreliable nodes // Queueing Systems. 2017. V. 87, is. 1–2. P. 181–207.
15. Статкевич С.Э., Маталыцкий М.А. Исследование сети массового обслуживания с ненадежными системами в переходном режиме // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 1 (18). С. 112–125.
16. Баччелли Ф., Рыбко А.Н., Шлосман С.Б. Сети массового обслуживания с подвижными приборами – предел среднего поля // Проблемы передачи информации. 2016. Т. 52, № 2. С. 85–110.
17. Тананко И.Е. Метод оптимизации маршрутных матриц открытых сетей массового обслуживания // Автоматика и вычислительная техника. 2002. № 4. С. 39–46.
18. Вишневикий В.М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. М. : Техносфера, 2003. 512 с.

Поступила в редакцию 5 октября 2019 г.

Tananko I.E., Fokina N.P. (2020) AN ANALYSIS OF QUEUEING NETWORKS WITH UNRELIABLE SERVERS AND INFORMATION DELAY. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnik i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 52. pp. 90–97

DOI: 10.17223/19988605/52/11

Consider open queueing network with L queues S_i , $i = 1, \dots, L$, type of $M/M/2$. The customers arrive from the external source S_0 according to a Poisson process with arrival rate λ_0 . The queueing network topology is defined by the adjacency matrix $W = (w_{ij})$, $i, j = 0, 1, \dots, L$, of a graph, where $w_{ij} = 1$ if there is a connection from S_i to S_j and $w_{ij} = 0$ otherwise, $i, j \in \{0, 1, \dots, L\}$. Transitions of demands between systems are defined by the routing matrix $\Theta = (\theta_{ij})$, $i, j = 0, 1, \dots, L$. Each queue of network contains reliable server and unreliable server. The unreliable server consistently passes from efficient into a disabled state and back. If unreliable server of queue S_i is operating state then $\mu_i > 0$, $i = 1, \dots, L$, otherwise, if server is repairable state then $\mu_i = 0$. Times between server failures / repairs of queue S_i have exponential distributions with parameters α_i and β_i , $i = 1, \dots, L$. We assume that servers of queues fail independently of each other and the queueing network have steady-state probability if all unreliable servers are recovered.

Let $n(t) = (n_i(t))$ be the vector of number of operable servers in the queues at the moment t , where $n_i(t) = 2$ if unreliable server of queue S_i is operable at the moment t , and $n_i(t) = 1$ if it is recovered, $i = 1, \dots, L$. We watch for unreliable servers of queues S_i , $i = 1, \dots, L$, at moments t_s^k , $k = 1, 2, \dots$, and we control arrival of demands on queues via routing matrix.

The routing matrix is changed so that equality of response time in all queues is equal to \bar{U} . We assume that the routing matrix forms in network not instantly, and through exponential distributed interval with parameter τ . After change of a matrix Θ the following observation of a state $n(t)$ is carried out through exponential distributed interval with the parameter Δ .

Optimum flows in the systems S_i , $i = 1, \dots, L$, with one and two operable servers are determined as

$$\lambda_i(1) = \mu_i - 1/\bar{U}, \quad \lambda_i(2) = \sqrt{4\mu_i(\mu_i - 1/\bar{U})}.$$

Using $\lambda = (\lambda_i)$ and a system of equations $\lambda\Theta = \lambda$, we calculate a routing matrix Θ .

Let $q = (q_i)$ be the vector of queueing network state, where q_i is the number of demands on queue S_i , $a = (a_i)$ be the vector of flow states on queues, $n = (n_i)$ be the vector of number of operable servers in queues, $i = 1, \dots, L$. Let $(a_i, n_i(t), n_i(t_s^k), c(t))$ be the vector of queue state S_i , $i = 1, \dots, L$, where $n_i(t)$, $n_i(t_s^k)$ is the number of operable servers in the queue at moments t and t_s^k , $t_s^k < t$, $k = 1, 2, \dots$, $c(t)$ control parameter, $c(t) = d$ if the routing matrix is forming and $c(t) = s$ if the routing matrix is using in queueing network. Probabilities $P(a_i, n_i(t), n_i(t_s^k), c(t))$ is solution of balance equations.

The queue S_i has four the birth and death processes. This processes are defined (a_i, n_i) . Then steady-state probabilities $\pi_i(a_i, n_i)$ of processes on queue S_i , $i = 1, \dots, L$, are defined as

$$\pi_i(2, 2) = P_i(2, 2, 2, d) + P_i(2, 2, 2, s) + P_i(2, 2, 1, d), \quad \pi_i(2, 1) = P_i(2, 1, 2, d) + P_i(2, 1, 2, s) + P_i(2, 1, 1, d),$$

$$\pi_i(1, 2) = P_i(1, 2, 1, d) + P_i(1, 2, 1, s) + P_i(1, 2, 2, d), \quad \pi_i(1, 1) = P_i(1, 1, 1, d) + P_i(1, 1, 1, s) + P_i(1, 1, 2, d).$$

Steady-state probability $\pi(a, n) = \pi_1(a_1, n_1) \dots \pi_L(a_L, n_L)$, where $\pi_i(a_i, n_i)$, $i = 1, \dots, L$, is solution of balance equations. Steady-state probability $P(q, a, n)$ of network state q on condition of a and n is determined by Jackson's theorem. Then steady-state probability of network state q with unreliable servers and information delay is determined as follows:

$$P(q) = \sum_{a, n} P(q, a, n) \pi(a, n), \quad q \in E,$$

where E is the set of queueing network states.

Keywords: open queueing network; unreliable servers; information delay; routing.

TANANKO Igor Evstafievich (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Saratov National Research State University, Saratov, Russian Federation).
E-mail: tanankoie@info.sgu.ru

FOKINA Nadezhda Petrovna (Candidate of Physics and Mathematics, Assistant Professor, Saratov National Research State University, Saratov, Russian Federation).
E-mail: fokinanp.sgu@gmail.com

REFERENCES

1. Economides, A.A. & Silvester, J.A. (1988) Optimal routing in a network with unreliable links. *Proc. IEEE 1988 Computer Networking Symposium*. pp. 288–297. DOI: 10.1109/CNS.1988.5007
2. Blake, J.T., Reibman, A.L. & Trivedi, K.S. (1988) Sensitivity analysis of reliability and performability measures for multiprocessor systems. *Proc. SIGMETRICS '88 Proceed. of the 1988 ACM SIGMETRICS conference on Meas. and modeling of comp. systems*. pp. 177–186.
3. Vinod, B. & Solberg, J.J. (1985) The optimal design of flexible manufacturing systems. *International Journal of Production Research*. 23(6). pp. 1141–1151. DOI: 10.1080/07408179908969897
4. Akyildiz, I.F. & Liu, W. (1990) Performance optimization of distributed-system models with unreliable servers. *IEEE Trans. on Reliability*. 39(2). pp. 236–243. DOI: 10.1109/24.55887
5. Park, K. & Kim, S. (2002) A capacity planning model of unreliable multimedia service systems. *The Journal of Systems and Software*. 63(1). pp. 69–76. DOI: 10.1016/S0164-1212(01)00141-8
6. Sharony, J. (1996) An architecture for mobile radio networks with dynamically changing topology using virtual subnets. *Mobile Networks and applications*. 1. pp. 75–86. DOI: 10.1007/BF01342734
7. Tassiulas, L. (1997) Scheduling and performance limits of networks with constantly changing topology. *IEEE Transactions on Information Theory*. 43(3). pp. 1067–1073. DOI: 10.1109/18.568722
8. Gottlich S., Kuhn, S., Schwarz, J.A. & Stolletz, R. (2016) Approximations of time-dependent unreliable flow lines with finite buffers. *Mathematical Methods of Operations Research*. 83(3). pp. 295–323. DOI: 10.1007/s00186-015-0529-6
9. Vinod, B. & Aliok, T. (1986) Approximating unreliable queueing networks under the assumption of exponentiality. *J. Opl. Res. Soc.* 37(3). pp. 309–316. DOI: 10.1057/jors.1986.49
10. Chao, X. (1995) A queueing network model with catastrophes and product form solution. *Operations Research Letters*. 18. pp. 75–79. DOI: 10.1016/0167-6377(95)00029-0
11. Thomas, N., Thornley, D. & Zatschler, H. (2003) Approximate solution of a class of queueing networks with breakdowns. In: *Proceedings of 17th European Simulation Multiconference*. Nottingham, UK: SCS Publishers. pp. 251–256.
12. Sauer, C. & Daduna, H. (2003) BCMP networks with unreliable servers. Preprint No.2003-01. In: *Schwerpunkt Mathematische Statistik und Stochastische Prozesse*. Universitat Hamburg.
13. Tsitsiashvili, G.Sh. & Osipova, M.A. (2006) Probability Distribution in Varying-Structure Queueing Networks. *Problemy peredachi informatsii – Problems of Information Transmission*. 42(2). pp. 158–165.
14. Sommer, J., Berkhout, J., Daduna, H. & Heidergott, B. (2017) Analysis of Jackson networks with infinite supply and unreliable nodes. *Queueing Systems*. 87(1–2). pp. 181–207. DOI: 10.1007/s11134-017-9542-1
15. Statkevich, S. & Matalytski, M. (2012) Investigation of queueing network with unreliable systems at transient regime. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(18). pp. 112–125.
16. Baccelli, F., Rybko, A. N. & Shlosman, S. B. (2016) Queueing Networks with Mobile Servers: The Mean-Field Approach. *Problems of Information Transmission*. 52(2). pp. 178–199. DOI: 10.1134/S0032946016020071
17. Tananko, I.E. (2002) Optimization method of routing matrices of open queueing networks. *Automatic Control and Computer Sciences*. 36(4). pp. 39–46.
18. Vishnevsky, V. (2003) *Teoreticheskie osnovy proektirovaniya komp'yuternykh setey* [Theoretical Foundations of Computer Network Design]. Moscow: Tekhnosfera.