

УДК 519.218.72
DOI: 10.17223/19988605/52/12

Г.Ш. Цициашвили

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ПУАССОНОВСКАЯ МОДЕЛЬ НЕПРЕРЫВНО ФУНКЦИОНИРУЮЩЕЙ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Построена математическая модель системы массового обслуживания с пуассоновским входным потоком меняющейся интенсивности, детерминированным временем обслуживания и без ожидания в очереди. Показано, что в любой момент времени случайное число заявок в системе имеет пуассоновское распределение, вычислена зависимость параметра этого распределения от времени. Построение модели и вычисление ее характеристик основаны на наблюдениях за работой бассейна в спорткомплексе. Рассмотрены обобщения этой модели на системы обслуживания конвейерного типа непрерывного действия: многофазные системы, древовидные системы и ациклические системы обслуживания.

Ключевые слова: система массового обслуживания непрерывного действия; пуассоновский входной поток с меняющейся интенсивностью; многофазные, древовидные и ациклические системы обслуживания.

Исследование нестационарных систем массового обслуживания связано с их применениями в вычислительных системах (см., напр.: [1]), развитием моделирования производственных процессов и связи, процессов торговли и бытового обслуживания (см., напр.: [2–4]). В этой связи следует упомянуть активно развивающиеся сейчас государственные программы «Умный город», «Цифровизация экономики» (см., напр.: [5–7]). Алгоритмы расчета нестационарных систем обслуживания являются достаточно сложными (см., напр.: [8, 9]). Поэтому требуется строить нестационарные модели обслуживания так, чтобы их расчет был бы достаточно простым и удобным для вычислений.

В настоящей работе построены модели обслуживания, основанные на предположениях детерминированности времени пребывания заявок в системе, пуассоновости входного нестационарного потока и наличия бесконечного числа приборов, исключающих пребывание заявки в очереди. Системы обслуживания, удовлетворяющие этим условиям, можно назвать системами непрерывного действия, и в них пользователь в течение фиксированного времени получает требуемую услугу сразу после своего прихода. Подобный способ обслуживания очень удобен потребителю, так как не привязывает его к графику работы системы обслуживания, не требует задержки пользователя в очереди и поэтому вписывается, например, в программу «Умный город».

Наряду с рассмотренными однофазными системами обслуживания в работе построены различные конвейерные системы обслуживания непрерывного действия: многофазные системы, древовидные системы и ациклические системы обслуживания непрерывного действия. Такие системы моделируют работу непрерывных транспортных линий (конвейеров), включенных в процесс маркировки, упаковки, сортировки и перемещения продукции в производственных логистических системах. Для исследования систем обслуживания непрерывного действия разработана специальная математическая техника, основанная на вероятностных расчетах и элементах теории графов.

1. Математическая модель системы обслуживания непрерывного действия

Рассмотрим систему массового обслуживания с нестационарным пуассоновским входным потоком интенсивности $\lambda(t)$, $t \geq 0$, детерминированным временем a пребывания пользователя в системе. Обозначим $n(t)$ количество пользователей в системе в момент $t \geq 0$. Полагаем, что интенсивность

пуассоновского потока $\lambda(t)$, $0 \leq t \leq T$, является непрерывной функцией времени t . Для удобства вычислений следует предположить, что $\lambda(t) = 0$ при $t < 0$ и $t > T$. В этом случае число пользователей $n(t)$ имеет пуассоновское распределение с параметром

$$\Lambda(t) = \int_{\tau-a}^{\tau} \lambda(\tau) d\tau. \quad (1)$$

Пусть в независимые случайные моменты времени T_k , $k=1, \dots, n$, с непрерывными плотностями распределения $p_k(t)$, $k=1, \dots, n$, наряду с этими заявками в систему приходят группы пользователей, количества которых независимы друг от друга, имеют пуассоновское распределение с параметрами λ_k и не зависят от пуассоновского потока интенсивности $\lambda(t)$. Пребывание каждой такой группы строго регламентируется моментами T_k начала и $T_k + a$ окончания обслуживания. Тогда в момент времени t число пользователей в системе имеет пуассоновское распределение с параметром $\Lambda(t)$, удовлетворяющим равенству

$$\Lambda(t) = \int_{\tau-a}^{\tau} \bar{\lambda}(\tau) d\tau, \quad \bar{\lambda}(\tau) = \lambda(\tau) + \sum_{k=1}^n \lambda_k p_k(t). \quad (2)$$

Так как функции $\lambda(t)$, $p_k(t)$, $k=1, \dots, n$, непрерывны, то функция $\Lambda(t)$ непрерывно дифференцируема.

Таким образом, построена модель массового обслуживания непрерывного действия.

Замечание 1. Для сравнения заметим, что при допуске пользователей в фиксированные моменты времени функция $\Lambda(t)$ кусочно постоянна и время ожидания посетителей в очереди положительно. При этом в системе непрерывного действия время ожидания равно нулю.

Предположим теперь, что имеется r независимых пуассоновских потоков с интенсивностями $\lambda_1(t), \dots, \lambda_r(t)$, а детерминированное время обслуживания заявки j -го потока равно β_j , $j=1, \dots, r$. Тогда число пользователей в системе в момент t имеет пуассоновское распределение с параметром

$$\Lambda(t) = \sum_{j=1}^r \int_{\tau-\beta_j}^{\tau} \lambda_j(\tau) d\tau. \quad (3)$$

Замечание 2. Предложенная в этом разделе математическая модель системы обслуживания непрерывного действия основана на наблюдениях за реально функционирующим спорткомплексом. Переход в этом комплексе к системе обслуживания непрерывного действия существенно улучшил качество обслуживания, сгладил нагрузку на систему в реальном времени и позволил пользователям не зависеть от переменчивой транспортной ситуации в городе.

2. Математическая модель ациклической сети обслуживания непрерывного действия

В настоящем разделе рассматриваются различные сети обслуживания непрерывного действия: многофазная система, сеть с древовидной структурой, сеть с ациклической структурой. Такие сети могут возникнуть не только при обслуживании пользователей, но и в конвейерных системах обработки различных деталей.

Многофазные системы обслуживания непрерывного действия. Рассмотрим m -фазную систему обслуживания с детерминированными временами a_i обслуживания на i -й фазе, $i=1, \dots, m$. Пусть пуассоновский входной поток имеет непрерывную интенсивность $\lambda(t)$, $0 \leq t \leq T$, причем $\lambda(t) = 0$ при $t < 0$ и $t > T$. Тогда число пользователей $n_i(t)$ на i -й фазе в момент времени t имеет пуассоновское распределение с параметром

$$\Lambda_i(t) = \int_{t-a_i-a_{i-1}-\dots-a_1}^{t-a_{i-1}-\dots-a_1} \lambda(\tau) d\tau, \quad 1 < i \leq m, \quad \Lambda_1(t) = \int_{\tau-a_1}^{\tau} \lambda(\tau) d\tau. \quad (4)$$

Сети обслуживания непрерывного действия с древовидной структурой. Предположим, что в корень 0 ориентированного дерева D поступает входной пуассоновский поток интенсивности $\lambda(t)$. Множество вершин K дерева D состоит из непересекающихся подмножеств K_l , $l = 0, \dots, L$, $K_0 = \{0\}$. Заявка, окончив обслуживаться в узле $k \in K_l$ детерминированное время a_k , с положительной вероятностью $p_{k,t}$ перемещается в один из узлов множества K_{l+1} . Обозначим $K_{k,l+1} \subseteq K_{l+1}$ совокупность узлов множества K_{l+1} , куда могут переходить заявки из узла $k \in K_l$ с положительной вероятностью $p_{k,t}$, $t \in K_{k,l+1}$, $\sum_{t \in K_{k,l+1}} p_{k,t} = 1$, причем $K_{k,l+1} \cap K_{k^*,l+1} = \emptyset$, $k, k^* \in K_l$, $k \neq k^*$, следовательно, в узел $t \in K_{k,l+1}$ могут переходить только заявки из узла $k \in K_l$.

Обозначим p_k вероятность поступления заявки входного потока в вершину $k \in K_l$ и положим T_k – суммарное время пребывания заявки в сети до момента ее выхода из вершины k . Из определения сети с древовидной структурой следует, что из вершины 0 в вершину $k \in K_l$ существует единственный путь

$$\gamma_k = \{0, s(1), s(2), \dots, s(l-1), s(l) = k\}, \quad s(1) \in K_1, \dots, s(l-1) \in K_{l-1}, \quad k \in K_l,$$

и значит выполняются равенства

$$p_k = p_{0,s(1)} \cdot p_{s(1),s(2)} \cdot \dots \cdot p_{s(l-1),k}, \quad T_k = a_0 + a_{s(1)} + a_{s(2)} + \dots + a_{s(l-1)} + a_k. \quad (5)$$

Используя формулу (4), получаем, что в момент времени t случайное число заявок в вершине k имеет пуассоновское распределение с параметром

$$\Lambda_k(t) = \int_{\tau=T_{s(l-1)}}^{\tau=T_k} p_k \lambda(\tau) d\tau. \quad (6)$$

Заметим, что пуассоновские случайные потоки, поступающие в вершины $k \in K_l$, и, значит, пуассоновски распределенные случайные величины, характеризующие число заявок в вершинах $k \in K_l$ в момент $t \geq 0$, также независимы. Следовательно, если $S \subseteq K_l$, то число заявок, находящихся в момент времени t в множестве вершин S имеет пуассоновское распределение с параметром

$$\Lambda_S(t) = \sum_{k \in S} \Lambda_k(t). \quad (7)$$

Ациклические сети обслуживания непрерывного действия. Предположим теперь, что структура сети обслуживания непрерывного действия определяется ациклическим орграфом F с входной вершиной 0. Полагаем, что на множестве K вершин ациклического орграфа F определяется отношение частичного порядка между вершинами $i \succ j$, если и только если в F существует путь из вершины i в вершину j . Пусть в множестве K вершина 0 является единственной максимальной в смысле порядка $\succ$ вершиной, и значит из нее можно провести путь в любую другую вершину.

В [10] построен алгоритм вычисления максимальной (по числу ребер) длины $L(i)$ пути из вершины 0 в любую другую вершину i . Множество K разбивается на непересекающиеся подмножества $K_0, K_1, \dots, K_L$, по правилу $K_l = \{i: L(i) = l\}$, $l = 0, 1, \dots, L$. Причем любое ребро орграфа F идет из вершины множества i в вершину j , только если $L(i) < L(j)$. Если $L(j) - L(i) = r > 1$, то в ребро (i, j) можно ввести фиктивные вершины $i_1 \in K_{L(i)+1}, \dots, i_{r-1} \in K_{L(i)+r-1}$. В результате дополненный фиктивными вершинами орграф, обозначим его F_1 , как и орграф F , также является ациклическим.

Действительно, при такой замене ребро (i, j) преобразуется в последовательность ребер, идущих одно за другим. Следовательно, в каждую вновь введенную вершину входит ровно одно ребро и из каждой вновь введенной вершины выходит ровно одно ребро. Поэтому доказательство ациклическости орграфа F_1 можно проводить от обратного.

Предположим, что переход из вершины i в следующую за ней фиктивную вершину j осуществляется с единичной вероятностью, а время пребывания заявки в фиктивной вершине j

удовлетворяет равенству $a_j = 0$. Индукцией по L преобразуем оргграф F_1 в древовидный оргграф F_2 . Если в вершину j оргграфа F_1 входит несколько ребер, то эту вершину делим на несколько вершин $j_1, \dots, j_s$ так, чтобы в каждую из них входило только одно ребро. Такое преобразование ациклического оргграфа F_1 в оргграф F_2 никак не меняет процесс обслуживания заявок, поскольку в сети нет задержек заявок в очередях перед обслуживанием. Следовательно, для древовидной сети F_2 можно применить формулу (6). Причем в момент $t > 0$ случайные количества заявок в фиктивных вершинах $j_1, \dots, j_s$ имеют пуассоновские распределения и являются независимыми, поэтому параметр этого распределения, задающего в момент $t > 0$ число точек в вершине $j \in F_1$, вычисляется по формуле (7).

Пример. Пусть ациклическая сеть обслуживания F состоит из вершин 0, 1, 3. Заявка входного потока обслуживается в вершинах 0, 1, 3 детерминированное время a_0, a_1, a_3 соответственно и с вероятностями $p_{0,1}, p_{0,3}, p_{1,3}$, причем $p_{0,1} + p_{0,3} = 1, p_{1,3} = 1$, переходит после обслуживания из одной вершины в другую. Преобразуем сеть F в сеть F_1 , добавляя фиктивную вершину 2 между вершинами 1 и 3, при этом переходные вероятности $p_{0,2} = p_{0,3}, p_{2,3} = 1$, а время обслуживания в этой вершине $a_2 = 0$. Далее преобразуем сеть F_1 в сеть F_2 , разделив вершину 3 на две вершины: 3.1, 3.2.

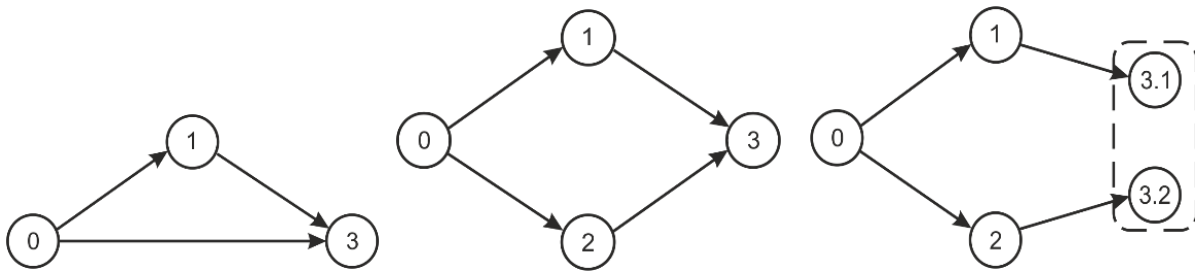


Рис 1. Сеть F (слева), сеть F_1 (по\ середине), сеть F_2 (справа)
Fig. 1. Network F (left), Network F_1 (in the middle), Network F_2 (right)

Тогда параметры пуассоновского распределения числа заявок в вершинах сети F_2 рассчитываются по формулам

$$\Lambda_0(t) = \int_{t-a_0}^t \lambda(\tau) d\tau, \quad \Lambda_1(t) = \int_{t-a_0-a_1}^{t-a_0-a_1} p_{0,1} \lambda(\tau) d\tau, \quad \Lambda_2(t) = \int_{t-a_0}^t p_{0,2} \lambda(\tau) d\tau,$$

$$\Lambda_{3,1}(t) = \int_{t-a_0-a_1-a_{3,1}}^{t-a_0-a_1} p_{0,1} \lambda(\tau) d\tau, \quad \Lambda_{3,2}(t) = \int_{t-a_0-a_1-a_{3,2}}^{t-a_0-a_1} p_{0,2} \lambda(\tau) d\tau, \quad \Lambda_3(t) = \Lambda_{3,1}(t) + \Lambda_{3,2}(t).$$

Заключение

В настоящей работе построена математическая модель системы массового обслуживания непрерывного действия. В этой модели предполагается, что входной поток заявок является пуассоновским с меняющейся интенсивностью. Заявки сразу после своего поступления начинают обслуживаться. Время обслуживания является детерминированным. Данная модель вполне согласуется с наблюдениями за работой бассейна в спорткомплексе. Методы расчета такой системы существенно проще известных методов анализа систем массового обслуживания с меняющейся интенсивностью входного потока. Это позволяет обобщить данную модель на многофазные, древовидные и ациклические системы обслуживания конвейерного типа, встречающиеся в конвейерных системах обработки различных деталей. При таком обобщении используются как вероятностные методы, так и методы прикладной теории графов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горцев А.М. Адаптивное управление потоками задач в вычислительной системе // Автоматика и вычислительная техника. 1982. № 6. С. 53–60.
2. Догадина Е.П., Холкина Н.Е. Математическая модель функционирования производственных процессов с учетом их особенностей // Системы управления, связи и безопасности. 2016. Вып. 1. С. 1–9.
3. Дуплякин В.М., Княжева Ю.Н. Выбор закона распределения входного потока заявок при моделировании системы массового обслуживания торгового предприятия // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. 2012. № 1 (37). С. 102–111.
4. Поршнев С.В., Корелин И.А. Исследование особенностей нестационарной одноканальной системы массового обслуживания в разрезе числа обслуженных заявок // Cloud of Science. 2017. V. 3, No. 4. P. 366–374.
5. Greenfield A. Against the Smart City. London : Verso, 2013. 152 p.
6. Boyle D.E., Yates D.C., Yeatman E.M. Urban Sensor Data Streams: London 2013 // IEEE Internet Computing. 2013. V. 17, No. 6. P. 12–20.
7. Намиот Д.Е., Шнепс-Шнеппе М.А. Об отечественных стандартах для Умного города // Int. J. of Open Information Technologies. 2016. V. 4, No. 7. P. 3–36.
8. Ивницкий В.А. Теория сетей массового обслуживания. М. : Физматлит, 2004. 772 с.
9. Катрахов В.В., Рыжков Д.Е. Введение в функционально-аналитический метод в динамической теории массового обслуживания. Владивосток : Изд-во ДВГУ, 2004. 102 с.
10. Цициашвили Г.Ш., Осипова М. А. Стационарные потоки в ациклических сетях массового обслуживания // Дальневосточный математический журнал. 2016. Т. 16, № 2. С. 223–228.

Поступила в редакцию 14 февраля 2020 г.

Tsitsiasvili G.Sh. (2020) NON-STATIONARY POISSON MODEL OF CONTINUOUSLY FUNCTIONING QUEUING SYSTEM. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 52. pp. 98–103

DOI: 10.17223/19988605/52/12

The study of non-stationary queuing systems is relating to their important applications in computing systems. Algorithms for calculating non-stationary queuing service systems are quite complex. Nevertheless, the development of modeling of production processes and communications, trade processes and consumer services requires the development of methods for calculating such queuing systems. In this regard, we should mention the currently actively developing state programs "Smart city" and "Digitalization of the economy", requiring the development and specification of methods for calculating non-stationary queuing systems. Therefore, it is necessary to build non-stationary service models in such a way that their calculation would be quite simple and convenient for calculations.

In this paper, the construction of such service models is basing on the assumptions of deterministic service time, Poisson nature of the input non-stationary flow of customers, and the presence of an infinite number of servers, which excludes the presence of customers in the queue. Queuing systems that meet these conditions may be called continuous systems, and in them, the user receives the required service immediately after his arrival for a fixed time. This method of service is very convenient for the consumer, because it does not link it to the schedule of the service system. This is why such service systems fit perfectly, for example, in the "Smart city" program.

In addition to the single-phase continuous queuing systems described above, various continuous conveyor service systems are available. These include continuous transport lines that are included in the process of marking and packaging products; sorting lines designed to move goods during sorting in logistics systems; secondary packaging lines that provide storage, protection, marking and transportation to storage locations; production logistics systems combining equipment and continuous vehicles (conveyors) to participate in the process of production, sorting and labeling of industrial products.

In this paper, a special mathematical technique based on graph theory along with probabilistic calculations is developing for the study of continuous service systems.

A mathematical model of a continuous queuing system can serve as a non-stationary Poisson flow of intensity $\lambda(t)$, $t \geq 0$, the moments of arrival of customers, the deterministic time a of user's stay in the system, as well as the number of users $n(t)$ in the system at the time $t \geq 0$. At the first stage, we assume that the intensity of the Poisson flow $\lambda(t)$, $0 \leq t \leq T$, is a continuous function of time t . However, for the convenience of calculations, we should assume that for $t < 0$ and for $t > T$, the function $\lambda(t) = 0$. In this case, the number of users $n(t)$ has a Poisson distribution with the parameter $\Lambda(t) = \int_{t-a}^t \lambda(\tau) d\tau$.

However, there is many different generalizations of such a model: when, along with free swimming, groups of users come to the pool at some fixed moments, multi-phase system, and system with tree like structure or acyclic structure and so on. All these systems are considering in this paper also.

Keywords: queuing system; Poisson input flow with varying intensity; multiphase and tree-based service systems.

TSITSIASHVILI Gurami Shalvovich (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch of RAS, Vladivostok, Russian Federation).

E-mail: guram@iam.dvo.ru

REFERENCES

1. Gortsev, A.M. (1982) Adaptive control of flows of customers in a computing system. *Avtomatika i vychislitel'naya tekhnika – Automatic Control and Computer Sciences*. 6. pp. 53–60.
2. Dogadina, E.P. & Kholkina, N.E. (2016) Mathematical Model of the Production Processes, Taking into Account Their Specific Features. *Sistemy upravleniya, svyazi i bezopasnosti – Systems of Control, Communication and Security*. 1. pp. 1–9.
3. Duplyakin, V.M. & Knyazeva, Yu.N. (2002) Choice of the law of distribution of the input flow of customers in modeling the queuing system of a commercial enterprise. *Vestnik Samarskogo gosudastvennogo aerokosmicheskogo universiteta – Vestnik Of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 1(37). pp. 102–111.
4. Porshnev, S.V. & Karelin, I.A. (2017) Research of features of non-stationary single-server queuing system in the context of the number of serviced customers. *Cloud of Science*. 4(3). pp. 366–374.
5. Greenfield, A. (2013) *Against the Smart City*. London: Verso.
6. Boyle, D.E., Yates, D.C. & Yeatman, E.M. (2013) Urban Sensor Data Streams: London. *IEEE Internet Computing*. 17(6). pp. 12–20. DOI: 10.1109/MIC.2013.85
7. Namiot, D.E. & Schneps-Schnappe, M.A. (2016) About domestic standards for Smart cities. *Int. J. of Open Information Technologies*. 4(7). pp. 32–36.
8. Ivnitky, V.A. (2004) *Teoriya setey massovogo obsluzhivaniya* [Theory of Queuing Networks]. Moscow: Fizmatlit.
9. Katrakhov, V.V. & Ryzhkov, D.E. (2004) *Vvedenie v funktsional'no-analiticheskiy metod v dinamicheskoy teorii massovogo obsluzhivaniya* [Introduction to the functional-analytical method in the dynamic theory of queuing]. Vladivostok: Far East State University.
10. Tsitsiashvili, G.Sh. & Osipova, M.A. (2016) Stationary flows in acyclic queuing networks. *Dal'nevostochnyy matematicheskiy zhurnal – Far Eastern Mathematical Journal*. 16(2). pp. 223–228.