ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 280 Декабрь 2003

МАТЕМАТИКА

УДК 517.54

А.И. Александров, И.А. Александров, Л.М. Бер

ЛЕВНЕРОВСКИЕ СЕМЕЙСТВА ФУНКЦИЙ В ТЕОРЕМЕ ВРАЩЕНИЯ

Продолжение работы «Об экстремальных функциях в проблеме вращения для однолистных отображений» [1]. Указываются семейства функций, сходящиеся к экстремальным функциям в задаче об оценке аргумента производной на классе голоморфных однолистных функций.

Будем пользоваться обозначениями, введенными и используемыми в работе [1]. В ней была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Экстремальной управляющей функцией в уравнении Левнера в задаче о максимуме функционала*

$$I(f, r) = \arg f'(r), f\in S, r\in(0,1/\sqrt{2}\,)$$

является функция

$$\mu(\tau) = \mu(\tau, r) = \overline{a}^2(r)(re^{-\tau} + i\sqrt{1-r^2e^{-2\tau}})^3,$$

где

$$a(r) = r + i\sqrt{1-r^2}.$$

Ей в классе S соответствует функция

$$F_0(z, r) = \frac{z - rz^3}{\left[1-a(r)z\right]^2} = \int_0^z \frac{1-\overline{a}(r)z}{\left[1-a(r)z\right]^3}dz.$$

В данной статье рассматривается задача о $\max I(f, r), f\in S, r\in(1/\sqrt{2}\,, 1)$.

В этом случае

$$y = \frac{i + T_{1,2}(s)}{i - T_{1,2}(s)},$$

где

$$T_{1,2}(s) = \frac{1 - s \pm \sqrt{1-6s+s^2}}{2},\ s = \frac{1-\rho}{1+\rho},$$

и, следовательно, имеем две непрерывные функции

$$y_{1,2}(\rho) = \frac{1 \mp \sqrt{2\rho^2-1}}{2\rho} - i\frac{1 \pm \sqrt{2\rho^2-1}}{2\rho}$$

и бесконечно много кусочно-непрерывных функций, составленных из чередующихся сужений $y_1(\rho)$, $y_2(\rho)$ на попарно непересекающихся промежутках, объединение которых дает промежуток $1/\sqrt{2} < \rho < 1$. Ограничимся, проводя далее рассуждения и выкладки, функциями $y_1(\rho)$, $y_2(\rho)$. Заметим, что $y_2(\rho) = -i\overline{y_1(\rho)}$.

Из уравнения Левнера имеем

$$\frac{d\ln\rho(\tau, r)}{d\tau} = -\frac{1-\rho^2}{\left|1-\rho y\right|^2},\ \rho(0, r) = r,$$

$$i\frac{d\arg f(\tau, r)}{d\rho} = \frac{y - \overline{y}}{1-\rho^2},\ \arg f(0, r) = 0.$$

Первое из этих уравнений с функцией y, совпадающей или с $y_1(\rho)$, или с $y_2(\rho)$, приводится к виду

$$\frac{\rho^2 \pm \sqrt{2\rho^2-1}}{\rho(1-\rho^2)}d\rho = -d\tau,\ \rho(0, r) = r,$$

и неявно определяет монотонно убывающую функцию $\rho = \rho(\tau, r)$ как решение уравнения

$$\varphi(\rho) - \varphi(r) = \tau,$$

где

$$\varphi(\rho) = \ln\left(1 \mp \sqrt{2\rho^2-1}\right) \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{1-\rho^2}{\rho^2}.$$

Второе уравнение при указанном выборе y приводится к виду

$$\frac{d\arg f}{d\rho} = -\frac{1 \pm \sqrt{2\rho^2-1}}{\rho(1-\rho^2)},\ \arg f(0, r) = 0.$$

Интегрирование уравнения дает

$$f(\tau, r) = \rho\exp\left[i\left(\tau - \ln\frac{\rho}{r}\right)\right].$$

Теперь с учетом формулы

$$f(\tau, r)\overline{\mu(\tau)} = \rho(\tau, r)y(\tau)$$

получаем для экстремальной управляющей функции формулу

$$\mu(\rho) = Q(\rho)\overline{y(\rho)},$$

где

$$Q(\rho) = \exp\left[i\left(\varphi(\rho) \mp \varphi(z) \mp \ln\frac{\rho}{r}\right)\right].$$

Итак,

$$\mu(\rho) = \mu(\rho, r) = \left[a^{\mp}(\rho) + ia^{\pm}(\rho)\right]\times$$
$$\times\exp\left[i\left(\varphi(\rho) \mp \varphi(z) \mp \ln\frac{\rho}{r}\right)\right],$$

где

$$a^{\pm}(\rho) = a^{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{2\rho^2-1}}{2\rho}.$$

Переходим к интегрированию уравнения Левнера с полученной управляющей функцией. В уравнении Левнера сделаем замену переменной τ на ρ . Получим

$$d\varsigma = \varsigma\frac{Q\overline{y} + \varsigma}{Q\overline{y} - \varsigma}\frac{\rho^2 \pm \sqrt{2\rho^2-1}}{\rho(1-\rho^2)}d\rho.$$

Вместо переменной ς введем переменную x, положив $\varsigma = Q\,x$. Рассматриваемое уравнение примет вид

$$\frac{(Qx)'}{Qx} = -\frac{\bar{y}+x}{\bar{y}-x}\varphi'(\rho),\ x|_{\rho=r} = z,$$

где штрихом обозначены производные по ρ.

Легко видеть, что

$$Q'(\rho) = iQ(\rho)\left[\varphi'(\rho) - \frac{1}{\rho}\right] = PQ,$$

где
$$P = i\left[\varphi'(\rho) - \frac{1}{\rho}\right] = -\frac{2ia^{\pm}(\rho)}{1-\rho^2}.$$

Воспользуемся формулой для $y = y(\rho)$ и представим уравнение в виде

$$\frac{(Qx)'}{Qx}\left[a^{\mp}(\rho) + ia^{\pm}(\rho) - x\right] =$$

$$= -\varphi'(\rho)\left[a^{\mp}\ (\rho) + ia^{\pm}(\rho) + x\right],\ x(r) = z.$$

Умножим левую и правую части этого уравнения на $a^{\pm}(\rho) + ia^{\mp}(\rho) - x$.

После выполнения простых действий приходим к уравнению для $x(\rho)$

$$\frac{(Qx)'}{Qx}\left(x^2 - \frac{1+i}{\rho}x + i\right) =$$

$$= \varphi'(\rho)\left[x^2 \mp (1+i)\frac{\sqrt{2\rho^2-1}}{\rho}x - i\right],$$

которое преобразуем, воспользовавшись равенством

$$\frac{1-\rho^2}{\rho^2\varphi'(\rho)} + \rho = \pm\frac{\sqrt{2\rho^2-1}}{\rho},$$

к виду

$$\frac{(Qx)'}{Qx}\left(x^2 - \frac{1+i}{\rho}x + i\right) =$$

$$= \varphi'\left[x^2 - (1-i)\left(\frac{1-\rho^2}{\rho^2\varphi'} + \rho\right)x - i\right].$$

Умножим обе части уравнения на $-i\rho$. Получим

$$\frac{(Qx)'}{Qx}\left(-i\rho x^2 + ix - x + \rho\right) =$$

$$= -i\rho\varphi' x^2 + (1+i)\left(\frac{1-\rho^2}{\rho} + \rho^2\varphi'\right)x - \rho\varphi'.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что коэффициенты квадратного относительно x многочлена в правой части уравнения можно представить в виде

$$-i\rho\varphi' = 1 - \rho P - i\rho P - i - \rho\varphi',$$

$$-\rho\varphi' = -i - \rho\varphi' + i,$$

$$(1+i)\left(\frac{1-\rho^2}{\rho} + \rho^2\varphi'\right) = (1+\rho^2)\left(\frac{i}{\rho} + \varphi'\right) - i(\rho - P) + \rho^2 P - \rho.$$

Воспользовавшись этими формулами, запишем рассматриваемое уравнение, предварительно перегруппировав слагаемые в его правой части. Имеем

$$\frac{(Qx)'}{Qx}\left(\rho - x + ix - i\rho x\right) = \left(\frac{i}{\rho} + \varphi'\right)\left(x - \rho x^2 - \rho + \rho^2 x\right) +$$

$$+ i\left(1 - \rho x + Px - \rho P x^2\right) - \rho P x^2 + x^2 + \rho^2 P x - \rho x.$$

Сделаем замену $x = Q\varsigma$ и перегруппируем члены уравнения с учетом равенства

$$\frac{i}{\rho} + \varphi' = (1+i)\varphi' - P.$$

Имеем

$$\left[-P + \frac{\varsigma'}{\varsigma} + (1+i)\varphi'\right]\left(\rho - \bar{Q}\varsigma\right)\left(1 - \rho\bar{Q}\varsigma\right) =$$

$$= i\left(1 - \rho\bar{Q}\varsigma\right)\left(1 + P\bar{Q}\varsigma - Q\varsigma'\right) +$$

$$+ \left(\bar{Q}\varsigma - \rho\right)\left(P\bar{Q}\varsigma' + \bar{Q}\varsigma - PQ\rho\varsigma\right).$$

Отсюда

$$\frac{-P\bar{Q} + Q\varsigma'}{\bar{Q}\varsigma'} = -(1+i)\varphi' +$$

$$+ i\frac{1 + PQ\varsigma - Q\varsigma'}{\rho - Q\varsigma} - \frac{\bar{Q}\rho\bar{\varsigma}' + \bar{Q}\varsigma - PQ\rho\varsigma}{1 - \bar{Q}\rho\varsigma}$$

или, что то же самое,

$$\frac{\left(\bar{Q}x\right)'}{\bar{Q}x} = -(1+i)\varphi' + i\frac{\left(\rho - \bar{Q}\varsigma\right)'}{\rho - \bar{Q}\varsigma} + \frac{\left(1 - \bar{Q}\rho\varsigma\right)'}{1 - \bar{Q}\rho\varsigma}.$$

Интегрируя уравнение при начальном условии $\varsigma|_{\rho=r} = z$ (т.е. $\varsigma|_{\tau=0} = z$), получаем

$$\ln\frac{\bar{Q}\varsigma}{z} = -(1-i)\left[\varphi(\rho) - \varphi(r)\right] + i\ln\frac{\rho - \bar{Q}\varsigma}{r - z} + \ln\frac{1 - \bar{Q}\rho\varsigma}{1 - rz}.$$

Это решение следует рассматривать на промежутке от $\tau = 0$ до $\tau = \tau^0$, где τ^0 определяется условием $\rho(\tau^0, r) = 1/\sqrt{2}$.

Подсчет дает

$$\varphi(1/\sqrt{2}) = 0,$$

$$Q_0 = Q\left(1/\sqrt{2}\right) = \exp\left\{-i\left[\varphi(r) + \ln\frac{1}{\sqrt{2}r}\right]\right\}.$$

Пусть

$$\varsigma_0(z) = \varsigma(\tau^0, z) = \varsigma(\rho, z)|_{\rho=1/\sqrt{2}}.$$

С этим значением решение уравнения Левнера с управляющими функциями $\mu(\tau)$, соответствующими $T_{1,2}(s)$, переходит в решение с управляющей функцией, соответствующей $T_0(s)$.

Итак, доказана

Теорема 2. *Экстремальными управляющими функциями в задаче о* $\max \arg f'(r)$, $f \in S$, $r \in \left(1/\sqrt{2}, 1\right)$ *являются функции*

$$\mu_{1,2}(\tau) = \begin{cases} \overline{Q'}(\rho)\overline{y(\rho)}, 0 < \tau < \tau^0, \\ \overline{a^2(r)\left(re^{-\tau} + i\sqrt{1 - r^2e^{-2\tau}}\right)}, \tau^0 < \tau < \infty, \end{cases}$$

где $$Q(\rho)=\exp\left\{i\left[\varphi(\rho)-\varphi(r)-\ln\frac{\rho}{r}\right]\right\},$$

$$y(\rho)=\frac{1\mp\sqrt{2\rho^2-1}}{2\rho}-i\frac{1\pm\sqrt{2\rho^2-1}}{2\rho},$$

$$\varphi(\rho)=\ln\left(1\mp\sqrt{2\rho^2-1}\right)\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1-\rho^2}{\rho^2},$$

$$\tau=\varphi(\rho)-\varphi(r),\ a(r)=r+i\sqrt{1-r^2}.$$

Этим функциям в классе S соответствуют функции

$$F_{1,2}(z,r)=e^{-\varphi(r)}F_0\left(\varsigma_{1,2}(\tau^0,z),1/\sqrt{2}\right),$$

где $\varsigma_{1,2}(\tau^0,z)$ *– решения уравнения* (*относительно* ς)

$$\ln\frac{\bar{Q}_0\varsigma}{z}=(1+i)\left[\varphi(r)-\ln 1/\sqrt{2}\right]+$$
$$+i\ln\frac{1-\sqrt{2}Q_0\varsigma}{r-z}+\ln\frac{\sqrt{2}-\bar{Q}_0\varsigma}{1-rz},$$

в котором

$$Q_0=\exp\left\{-i\left[\varphi(r)-\ln\frac{1}{\sqrt{2}r}\right]\right\}.$$

Известно, что функция $F_0\left(z,1/\sqrt{2}\right)$ однолистно и конформно отображает единичный круг на w-плоскость с разрезом по лучу

$$l=\left\{w:\operatorname{Re}w\le 0,\operatorname{Im}w=\sqrt{2}/4\right\},$$

параллельному отрицательной части вещественной оси.

Указанные в теореме 2 функции $F_{1,2}(z,r)$ отображают единичный круг на w-плоскость, из которой исключен луч L, получающийся сдвигом l в направлении мнимой оси, с последующим исключением из $\boldsymbol{C}\backslash L$ некоторой простой жордановой дуги с началом на L и не имеющей других общих точек с этим лучом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А.И., Александров И.А.* Об экстремальных функциях в проблеме вращения для однолистных отображений // Вестник ТГУ. 2000. № 269. С.15–16.

Статья представлена лабораторией математического анализа научно-исследовательской части Томского государственного университета, поступила в научную редакционную коллегию «Математика» 25 мая 2003 г.