УДК 514.752

Е.М. Горбатенко

АЛГЕБРОИДЫ ЛИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ПОГРУЖЕННЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Приводится модель дифференциальной геометрии на основе теории алгеброидов Ли.

В предлагаемой модели основное отличие от классического подхода [1, 2], состоит, говоря кратко, в систематическом исключении вторичных параметров [1], во-первых, и в использовании стандартных плоских связностей Картана на группах Ли, во-вторых.

При использовании метода внешних форм Картана в задачах локальной дифференциальной геометрии [1,2] погруженное многообразие задается как слой некоторого слоения, что не умаляет общности, поскольку исследуемые свойства инвариантны относительно преобразований основной группы. По этой причине мы задаем некоторый алгеброид Ли L [3], структуру L-модуля на алгебре Ли векторных полей D и слоение $E \subset D$. Оно порождает некоторую связность, аналогичную связности Ботта.

Кроме того, на алгеброиде Ли L мы задаем связность, инвариантную относительно алгебры Ли основной группы, и предлагаем алгоритм оснащения слоения и его конормального распределения. Поскольку мы предполагаем, что все подмодули, используемые при построении цепочки дифференциальных систем, являются прямыми слагаемыми модулей струй, приводимый ниже алгоритм является по существу локальным. Во второй части статьи разработанный алгоритм переносится на так называемые неголономные многообразия, то есть, учитывая сказанное выше, на подмодули алгеброида Ли, не замкнутые относительно скобки. С ними мы связываем градуированный аналог алгеброида Ли, построенный из нильпотентного флага расширений подмодуля и, с соответствующими изменениями, излагаем алгоритм оснащения. Хотя язык изложения – чисто алгебраический, но, согласно теореме Суона-Серра [4] и идее послойной алгебраичности М. Громова [5], результаты работы легко геометризуются.

АЛГЕБРОИДЫ ЛИ, СВЯЗНОСТИ И ИХ ПРОДОЛЖЕНИЯ

Через k обозначим коммутативное кольцо с единицей, содержащее $\boldsymbol{Q}$.

Пусть A – некоторая коммутативная ассоциативная гладкая k-алгебра с единицей, то есть такая, модуль дифференциалов $\Omega^1_{A/k}$ которой является проективным A-модулем конечного типа. Будем далее обозначать через $D = \mathrm{Der}_k(A, A)$ модуль дифференцирований k-алгебры A и через $D(M)$ – модуль дифференцирований проективного A-модуля M [6]. Для всякого $l \geq 0$ через $J_l(M)$ обозначим A-модуль l-струй A-модуля M, $J_0(M) = M$.

Имеет место следующая точная последовательность A-модулей и их гомоморфизмов:

$$0 \to S^l\left(\Omega^1_{A/k}\right) \otimes M \xrightarrow{\varepsilon} J_l(M) \xrightarrow{\pi^l_{l-1}} J_{l-1}(M) \to 0. \qquad (1)$$

Еще одна полезная последовательность A-модулей и их гомоморфизмов также точна

$$0 \to \mathrm{End}(M) \to D(M) \xrightarrow{\ p\ } D \to 0. \qquad (2)$$

Расщеплением точных последовательностей (1) и (2) называются отображения σ, $\sigma : M \to J_1(M)$ со свойством $\pi^1_0 \circ \sigma = 1_M$ и $s : D \to D(M)$ со свойством $p \circ s = 1_D$.

Всякая связность $\nabla : M \to \Omega^1_{A/k} \otimes M$ на A-модуле M порождает расщепления точных последовательностей (1) и (2). Мы будем их обозначать σ_∇ и s_∇ соответственно.

Если задан некоторый алгеброид Ли [6], тогда можно построить аналоги перечисленных выше конструкций. Это сделано в [6], и мы только приведем нужные нам определения и результаты.

Алгеброидом Ли будем называть всякую k-алгебру Ли L, снабженную структурой A-модуля и A-линейного гомоморфизма k-алгебр Ли, так, что все структуры согласованы в следующем смысле: $\forall x, y \in L$, $\forall a \in A$, выполняется соотношение

$$[x, ay] = \rho(x)(a)\,y + a[x, y].$$

По аналогии с точными последовательностями (1) и (2) имеют место точные последовательности

$$0 \to S^l\left(L^*\right) \otimes_A M \xrightarrow{\varepsilon} J^L_l(M) \xrightarrow{\pi^l_{l-1}} J^L_{l-1}(M) \to 0, \qquad (3)$$

$$0 \to \mathrm{End}_A(M) \to D^L(M) \xrightarrow{\ p\ } D \to 0. \qquad (4)$$

Теорема 1. *Если определить структуру* $D^L(M)$-*модулей на* End (M) *и* D^L, *тогда последовательность* (4) *является точной последовательностью* $D^L(M)$-*модулей.*

Теорема 2. *Пусть на M и L заданы связности* ∇^L *и* ∇ *соответственно. Тогда для всех* $j \geq 0$ *на* $J^L_j(M)$ *определены L-связности так, что точные последовательности* (3) *и* (4) *являются гомоморфизмами модулей со связностями.*

Для доказательства достаточно определить L-связность на тензорном произведении A-модулей, если заданы L-связности на его сомножителях и связность на прямой сумме A-модулей, снабженных L-связностями. Осталось заметить, что всякая связность определяет расщепление точных последовательностей (4) и (3) в случае $l = 1$.

Всякая L-связность $\nabla : M \to L^* \otimes M$ порождает дифференциальный оператор первого порядка [3, 6] $\nabla^\Lambda : \Lambda L \otimes M \to \Lambda L \otimes M$, который можно трактовать как ΛL-связность. Связность ∇ плоская, если $\nabla^\Lambda \circ \nabla^\Lambda = 0$

Теорема 3. *Пусть на* A-*модуле* M *задана некоторая L-связность. Тогда условием* $\Omega(\partial) = \varepsilon^{-1}\left(\partial - p(\partial) \otimes 1 \circ \nabla\right)$, $\partial \in D(M)$, *определена*

$\mathrm{End}(M)$*-значная дифференциальная* 1*-форма* Ω, *а условиями*

$$[\Omega,\Omega](\partial,\delta)=[\Omega(\partial),\Omega(\delta)]$$

и

$$K(\partial,\delta)=p([\partial,\delta])\otimes 1\circ\nabla-[p(\partial)\otimes 1\circ\nabla, p(\delta)\otimes 1\circ\nabla]$$

определены еще две $\mathrm{End}(M)$*-значных* 2*-формы* $[\Omega,\Omega]$ *и* K. *При этом* $d\Omega=[\Omega,\Omega]+K$, *где* 2*-форма* $d\Omega$ *определена из*

$$d\Omega(\partial,\delta)=[\partial,\Omega(\delta)]-[\delta,\Omega(\partial)]-\Omega([\partial,\delta]).$$

Доказательство. Следует проверить соотношения $p(\Omega(\partial))=0$ и $\Omega(a\partial)=a\Omega(\partial)$ для всех $\partial\in D(M)$. Из определения связности следует, что $p(p(\partial)\otimes 1\circ\nabla)=p(\partial)$, откуда на основании точности последовательности (4) справедливо $\partial-p(\partial)\otimes 1\circ\nabla\in\mathrm{Im}(\varepsilon)$, так что определение 1-формы Ω корректно. Прямой проверкой устанавливается, что билинейные отображения $[\Omega,\Omega](\partial,\delta)$, $d\Omega(\partial,\delta)$ и K кососимметрические и *A*-линейны по каждому аргументу. Соотношение $d\Omega=[\Omega,\Omega]+K$ проверяется непосредственно, и мы его опускаем.

Теорема 4. *Рассмотрим на A-модуле M связность* ∇, *и пусть* $J_l^L(\nabla)$ *– ее продолжение на модуль l-струй. Пусть на A-модуле M заданы две дифференциальные системы* R_l *и* R_{l-1} *порядков* l *и* $l-1$ *соответственно, согласованные с продолжениями связности* ∇. *Предположим, что естественная проекция* π_{l-1}^l *является изоморфизмом A-модулей. Тогда* $D^L(J_{l-1}^L M)$ *естественно вкладывается в* $D^L(J_l^L(M))$ *и образ* $s_\nabla^{J_1}-\left(\pi_{l-1}^l\right)^{-1}\circ s_\nabla^{l-1}\circ\pi_{l-1}^l$ *лежит в* $\varepsilon(\mathrm{End}(R_l))$

ПОДМОДУЛИ ФРОБЕНИУСА И ИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ

Определение 1. *Подмодуль* E *в* D, *являющийся в нем прямым слагаемым и замкнутый относительно скобки, будем называть подмодулем Фробениуса.*

Всякий подмодуль Фробениуса можно рассматривать как алгеброид Ли относительно естественного вложения в *D*. Пусть L_0 – подалгеброид в *L*, равный $\left\{\partial\in\rho^{-1}(E)\,\middle|\,\nabla_\partial^0(\rho^{-1}(E))\subseteq\rho^{-1}(E)\right\}$. Тогда на *D/E* определена L_0-связность условием $\nabla_\partial(v \bmod E)=[p(\partial),v]\bmod E$, $\partial\in L_0$, $v\in D$. Это позволяет для всякого $l\geq 1$ снабдить модуль струй $J_l^{L_0}(D/E)$ естественной L_0-связностью на основании теоремы 1.

Рассмотрим линейное отображение $\delta: E\to L_0^*\otimes(D/E)$ вида $\delta(v)=(1\otimes p)(\nabla(v))$, где $v\in E$, а $p:D\to D/E$ – каноническая проекция. Полагаем $E_1=\left\{v\in D\,\middle|\,p(v)=p(\nabla_\partial^0(e)),\partial\in L_0, e\in E\right\}$. Пусть $R_1=\mathrm{Im}(\delta)\oplus\sigma_\nabla(E_1)$. Ясно, что R_1 можно рассматривать как A-подмодуль из $J_1^{L_0}(D/E)$, то есть как дифференциальную систему первого порядка. Пусть $R_1^0=\left\{x\in R_1\,\middle|\,\nabla_\partial^1(x)\in R_1, \forall\partial\in L_0\right\}$, где ∇^1 – продолжение связности ∇ на модуль 1-струй. Полагаем $R_2=\left(R_1^0\right)_{+1}$ – первое продолжение R_1^0 [7]. Как и выше, полагаем

$$R_2^0=\left\{x\in R_2\,\middle|\,\nabla_\partial^2(x)\in R_2, \forall\partial\in L_0\right\},$$

где ∇^2 – продолжение связности ∇ на модуль 2-струй. По построению $R_2^0\subseteq\left(R_1^0\right)_{+1}$.

Дальнейшее продолжение этого процесса приводит к семейству *A*-модулей R_p^0, $p=1,2,\ldots$, связанных соотношениями $R_{p+1}^0\subseteq\left(R_p^0\right)_{+1}$. По терминологии из [7], это семейство называется цепочкой дифференциальных систем на *A*-модуле D/E. Если эта цепочка удовлетворяет предпосылкам теоремы о продолжении [7], тогда найдется такое p_0, что $R_{p+1}^0=\left(R_p^0\right)_{+1}$, начиная с этого номера. Более точно скажем, что цепочка дифференциальных систем $R^0=\left(R_p^0\right)_{p\in\mathbb{N}}$ является четкой, если *A*-модули $J_p(D/E)/R_p^0$ не имеют кручения в смысле Х. Басса [4], и безупречно четкой, если *A*-модули не имеют кручения $J_p(D/E)/\pi_p^{p+q}\left(R_p^0\right)$ для всех $p,q\in\mathbb{N}$.

Теорема 5 [7]. *Если кольцо дифференциальных операторов гладкой* k*-алгебры* A *является нетеровым, а цепочка дифференциальных систем* $R^0=\left(R_p^0\right)_{p\in\mathbb{N}}$ *является четкой, тогда существует такое* p_0, *что* $R_{p+1}^0=\left(R_p^0\right)_{+1}$, *для всех* $p\geq p_0$. *В частности, убывающее семейство подалгеброидов Ли* L_p, $p=1,2,\ldots$, *где* $L_p=\left\{\partial\in L_{p-1}\,\middle|\,\nabla_\partial^{p-1}\left(R_{p-1}^0\right)\subseteq R_{p-1}^0\right\}$ *стабилизируется.*

АЛГЕБРА НЕГОЛОНОМНЫХ ПОЛИВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ, АССОЦИИРОВАННАЯ С ВНЕШНЕЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ

Рассмотрим некоторый однородный идеал I (внешнюю дифференциальную систему) в алгебре внешних дифференциальных форм $\Omega_{A/k}^\bullet$, все однородные компоненты которого являются прямыми слагаемыми *A*-модулей $\Omega_{A/k}^p$, $p=1,\ldots$, и пусть $F(I)$– флаг его производных (идеалов) систем [6,7]. Если *E*(*I*) – подмодуль Картана идеала $\overline{F}(I)=\oplus_{i=0}^\infty F_i(I)t^i$, где $F_i(I)$– *i*-я производная система *I*, тогда его однородные компоненты первой степени образуют флаг подмодулей E_i в *D*, подчиненный условиям [8]:

$E_i \subset E_{i+1}$, $\left[E_i, E_j\right] \subset E_{i+j}$. Эти свойства вытекают из замкнутости $E(I)$ относительно «петлевой» скобки в алгебре Ли $D[t] = k[t] \otimes D$ [6].

Внешняя алгебра $\Lambda^{\bullet}(D)$, снабженная скобкой Схоутена [6], называется далее алгеброй поливекторных полей $\Theta^{\bullet}_{A/k}$. Относительно обозначений и основных свойств скобки Схоутена см. [6]. Заметим, что A-модуль $N^{+}_{\Lambda}(I) = \oplus_{i=1}^{\infty} \Lambda^{i+1} E_i$ замкнут относительно скобки Схоутена, индуцированной из $\Theta^{\bullet}_{A/k}$. Если выделить некоторый A-подмодуль E_0 в E_1, замкнутый относительно скобки, и положить $E_{-1} = A$, тогда прямая сумма $N^{\bullet}_{\Lambda}(I) = \oplus_{i=-1}^{\infty} \Lambda^{i+1} E_i$ будет замкнута относительно скобки Схоутена, индуцированной из $\Theta^{\bullet}_{A/k}$.

Определение 2. *Назовем A-модуль $N^{+}_{\Lambda}(I)$ супералгеброй Ли неголономных поливекторных полей, ассоциированной с внешней дифференциальной системой I, если $E_1 \neq E_2$. Будем называть соответственно $N^{\bullet}_{\Lambda}(I)$ флаговой алгеброй поливекторных полей, ассоциированной с внешней дифференциальной системой I.*

Будем предполагать, что на D задана связность ∇^0, сохраняющая флаг $E_{\bullet} = (E_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $E_0 = \{0\}$. Связность ∇^0 естественно появляется в следующей ситуации. На градуированном A-модуле $\overset{\infty}{\underset{i=0}{\oplus}} E_{i+1}/E_i$ определена каноническая структура градуированной алгебры Ли [6]. Если каждый E_i является дополняемым подмодулем в E_{i+1}, тогда алгебра Ли является, кроме того, нильпотентной. Обозначим ее в этом случае через $\mathrm{Nil}(E_{\bullet})$. Пусть на $\mathrm{Nil}(E_{\bullet})$ задана связность $\nabla^{\sim}$, относительно которой скобка является ковариантно постоянной, то есть имеет место соотношение $\nabla^{\sim}_{\partial}[u,v] = \left[\nabla^{\sim}_{\partial} u, v\right] + \left[u, \nabla^{\sim}_{\partial} v\right]$ для любых $\partial \in D$ $u, v \in \mathrm{Nil}(E_{\bullet})$. Задавая дополнительные к E_i подмодули $F_i \subset E_{i+1}$, можно перенести связность $\nabla^{\sim}$ на D, полагая $(\nabla^0_{\partial} x) \bmod E_i = \nabla^{\sim}_{\partial}(x \bmod E_i)$, $x \in E_{i+1}$. Так определенная связность ∇^0 сохраняет флаг $E_{\bullet}$. Семейство (F_i) имеет смысл оснащения флага неголономного расширения [9].

Приведем пример, в котором определены флаг $E_{\bullet}$ и связность $\nabla^{\sim}$. Пусть $k = \mathbb{R}$, $A = C^{\infty}(N)$, где N – связная односвязная нильпотентная группа Ли, алгебра Ли n которой является положительно градуированной $n = \overset{s}{\underset{i=1}{\oplus}} n_i$.

Пусть $\omega : TN \to n$ – форма Маурера – Картана. Полагаем $F_i = \omega^{-1}(n_i)$, $E_i = \sum_{l \le i} F_l$. Связность ∇^0 индуцирована левыми сдвигами на группе в предположении, что алгебра Ли n отождествлена с алгеброй Ли левоинвариантных векторных полей.

Связность ∇^0 позволяет задать на $\Theta^{\bullet}_{A/k}$ градуированный аналог связности. Полагаем

$$\nabla_{\xi} \eta = \sum (-1)^{i+j} \nabla^{\sim}_{u_i} v_j \wedge \xi_i \wedge \eta_j ,$$

где $$\xi_i = u_1 \wedge \ldots \wedge u_{i-1} \wedge u_{i+1} \wedge \ldots \wedge u_p ,$$

$$\eta_j = v_1 \wedge \ldots \wedge v_{j-1} \wedge v_{j+1} \wedge \ldots \wedge v_q .$$

Из определения связности и свойств флага $E_{\bullet}$ вытекает, что ∇ индуцирует на $N^{+}_{\Lambda}(I)$ и на $\Theta^{\bullet}_{A/k} / N^{+}_{\Lambda}(I)$ градуированную связность такого же вида. Кроме того, определен аналог связности Ботта [10],

$$\nabla^{B} : N^{+}_{\Lambda}(I) \times \Xi(I) \to \Xi(I),$$

где $\Xi(I) = \Theta^{\bullet}_{A/k} / N^{+}_{\Lambda}(I)$. Для этого полагаем

$$\nabla^{B}_{\xi} \eta \left(\bmod N^{+}_{\Lambda}(I)\right) = [\xi, \eta] \bmod N^{+}_{\Lambda}(I),$$

$$\xi \in N^{+}_{\Lambda}(I), \ \eta \in \Theta^{\bullet}_{A/k} .$$

Тогда условием $\nu_0(\xi \otimes \eta) = \left(\nabla_{\xi} - \nabla^{B}_{\xi}\right)\left(\eta \bmod N^{+}_{\Lambda}(I)\right)$ определен гомоморфизм A-модулей

$$\nu_0 : N^{+}_{\Lambda}(I) \to \mathrm{End}_A\left(\Xi(I)\right).$$

На A-модуле 1-струй $J_1(D)$ определена скобка, аналогичная скобке Схоутена, следующим условием: $\left[a j_1(\partial), b j_1(\delta)\right] = ab j_1\left([\partial, \delta]\right) + \partial(a) j_1(\delta) - \delta(b) j_1(\partial)$, $a, b \in A$, $\partial, \delta \in D$. Она продолжается до скобки типа скобки Схоутена на $J_1^{\sim}\left(\Theta^{\bullet}_{A/k}\right) = \Theta^{\bullet}_{A/k} \otimes_A J_1\left(\Theta^{\bullet}_{A/k}\right)$. Повторение вышеприведенной конструкции приводит к отображению $\nu_1 : N^{+}_{\Lambda}(I) \to \mathrm{End}_A\left(\Xi_1(I)\right)$ и т.д.

КОЛЬЦО K_0-ИНВАРИАНТОВ НЕГОЛОНОМНОГО МНОГООБРАЗИЯ

Для всякого проективного A-модуля и эндоморфизма $f : M \to M$ A-модулей определен многочлен $\lambda_t(f) = \det(1 + tf) \in A[t]$ [11, 12].

Рассмотрим кольцо $A[\![t]\!]$ формальных степенных рядов от переменной t с коэффициентами в A. Выделим подгруппу формальных рядов с равным единице членом нулевой степени. Определим также умножение «$*$» так, что $\lambda_t(f \otimes g) = \lambda_t(f) * \lambda_t(g)$ для любых двух эндоморфизмов f и g проективных A-модулей. Записывая произведение рядов аддитивно и называя его далее сложением, получим, что новое умножение $*$ оказывается дистрибутивным относительно этого сложения и определяет кольцо, далее обозначаемое $\tilde{A}$. Выделим в нем подкольцо, состоящее из рациональных функций, то есть

$$\tilde{A}_0 = \left\{ \frac{1 + a_1 t + \ldots + a_m t^m}{1 + b_1 t + \ldots + b_n t^n} \middle| a_i, b_j \in A \right\}.$$

В [12] доказана теорема о том, что $K_0\left(\mathrm{End}(P)\right) / K_0(A) \cong \tilde{A}_0$. Это позволяет всякому эндоморфизму проективных A-модулей ставить в соответствие элемент из кольца $\tilde{A}_0$.

Определим подкольцо B в $\tilde{A}_0$, порожденное парами (M, f), где M является одним из прямых слагаемых в разложении модуля струй $\Xi_l(I)$, а f – проекцией на прямое слагаемое эндоморфизмов вида $\nu_l(\xi)$, $\xi \in N_\Lambda^+(I)$, $l = 0,1,\dots$. Оно играет роль кольца дифференциальных инвариантов для «неголономного многообразия» $N_\Lambda^+(I)$.

Справедлива

Теорема 6. Если *кольцо A является нетеровым, тогда B является конечно порожденным подкольцом кольца* $\tilde{A}_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cartan E.* Les Systemes Differentials Exterieurs et Leurs Applications Geometriques. Paris: Hermann, 1945. 238 p.
2. *Васильев А.М.* Теория дифференциально-геометрических структур: Учеб. пособие. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. 190 с.
3. *Mackenzie K.* Lie groupoids and Lie algebroids // Math. Soc. Lect. Notes Ser. London, 1987. 327 p.
4. *Басс Х.* Алгебраическая K-теория. М.: Мир, 1973.
5. *Zeghib.* On Gromov's theory of rigid transformation groups: A dual approach / Preprint, ArXiv.org./9803038G.
6. *Горбатенко Е.М.* Каркасы неголономности и продолжения дифференциальных систем. Скобки Схоутена и внешние дифференциальные системы // Геом. сб. 1993. Вып. 31. С. 3–21.
7. *Горбатенко Е.М.* Каркасы неголономности и продолжения дифференциальных систем // Геом. сб. 1989. Вып. 30. С. 17–34.
8. *Morimoto T.* Geometric structures on filtered manifolds // Hokkaido Math. J. 1993. V. 22. P. 263–347.
9. *Горбатенко Е.М.* Дифференциальная геометрия неголономных многообразий (по В.В. Вагнеру) // Геом. сб. 1985. Вып. 26. С.18–34.
10. *Bott R.* Lectures on characteristic classes and foliations // Lect. Notes Math. 1972. V. 279. 85 p.
11. *Almkvist G.* Endomorphisms of finitely generated projective modules over a commutative ring // Arkiv för Matematik. 1973. V. 11. No. 2. P. 263–301.
12. *Almkvist G.* K-theory of Endomorphisms //Journal of Algebra. 1978. V. 55. No. 2. P. 308–340.

Статья представлена кафедрой геометрии, поступила в научную редакцию «Математика» 15 октября 2003 г.