УДК 512.541

С.Я. Гриншпон, Т.А. Ельцова

ГОМОМОРФНО УСТОЙЧИВЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ

В работе вводится понятие гомоморфно устойчивой абелевой группы и выделяются некоторые классы гомоморфно устойчивых групп.

При изучении группы гомоморфизмов абелевых групп и исследовании вполне характеристических подгрупп интерес представляет следующий вопрос: в каких случаях объединение (теоретико-множественное) гомоморфных образов абелевой группы A в абелевой группе B является подгруппой группы B.

Введем следующее определение.

Абелеву группу A назовем *гомоморфно устойчивой относительно группы* B, если объединение гомоморфных образов группы A в группе B является подгруппой группы B, то есть если $\bigcup\limits_{\alpha\in \mathrm{Hom}(A,B)} \mathrm{Im}\,\alpha$ – подгруппа группы B.

Покажем, что класс гомоморфно устойчивых групп замкнут относительно прямых сумм.

Теорема 1. Пусть $\{A_i\}_{i\in I}$ – семейство абелевых групп, каждая из которых гомоморфно устойчива относительно группы B. Тогда группа $\bigoplus\limits_{i\in I} A_i$ также гомоморфно устойчива относительно группы B.

Доказательство. Пусть $A=\bigoplus\limits_{i\in I} A_i$, где A_i – гомоморфно устойчива относительно группы B для любого $i\in I$. Надо доказать, что для группы B объединение $\bigcup \mathrm{Im}\ \alpha$, где α пробегает всю группу $\mathrm{Hom}(A,B)$, является подгруппой группы B. Рассмотрим гомоморфизмы из группы $\mathrm{Hom}(A,B)$. Любой гомоморфизм из этой группы представляется в виде: $\alpha=(...,\alpha_i,...)$, где α_i – это ограничение гомоморфизма α на подгруппе A_i для всякого $i\in I$ [1, теорема 43.1]. Для любого элемента a из группы A, где $a=a_{i_1}+\ldots+a_{i_k}$ ($a_{i_j}\in A_{i_j}$; $j=\overline{1,k}$), имеем $\alpha a=\alpha_{i_1}a_{i_1}+\ldots+\alpha_{i_k}a_{i_k}$. Пусть элементы c,d принадлежат множеству $\bigcup\limits_{\alpha\in \mathrm{Hom}(A,B)} \mathrm{Im}\,\alpha$, тогда существуют такие гомоморфизмы β и γ из $\mathrm{Hom}(A,B)$, что $c=\beta a$, $d=\gamma b$, для некоторых элементов a,b из группы A. Представим элементы a и b в виде суммы своих координат (добавляя, если нужно, нулевые элементы; можно считать, что эти координаты берутся для a и b в одних и тех же группах A_i): $a=a_{i_1}+\ldots+a_{i_k}$, $b=b_{i_1}+\ldots+b_{i_k}$.

Чтобы доказать, что множество $\bigcup\limits_{\alpha\in \mathrm{Hom}(A,B)} \mathrm{Im}\,\alpha$ является подгруппой группы B, надо показать, что элемент $c-d$ принадлежит этому множеству. Имеем $c=\beta a=\beta_{i_1}a_{i_1}+\ldots+\beta_{i_k}a_{i_k}$ и $d=\gamma b=\gamma_{i_1}b_{i_1}+\ldots+\gamma_{i_k}b_{i_k}$, и значит

$$c-d=\beta a-\gamma b=\left(\beta_{i_1}a_{i_1}-\gamma_{i_1}b_{i_1}\right)+\ldots+\left(\beta_{i_k}a_{i_k}-\gamma_{i_k}b_{i_k}\right).$$

Так как каждая группа A_{i_j} является гомоморфно устойчивой относительно группы B, то для всякого $j=\overline{1,k}$ разность $\beta_{i_j}a_{i_j}-\gamma_{i_j}b_{i_j}$ принадлежит объединению $\bigcup\limits_{\alpha\in \mathrm{Hom}\left(A_{i_j},B\right)} \mathrm{Im}\,\alpha$. Следовательно, для каждого $j=\overline{1,k}$ существуют элемент $g_{i_j}\in A_{i_j}$ и гомоморфизм $\delta_{i_j}\in \mathrm{Hom}(A_{i_j},B)$, такие, что $\delta_{i_j}g_{i_j}=\beta_{i_j}a_{i_j}-\gamma_{i_j}b_{i_j}$. Следовательно, имеем $c-d=\beta a-\gamma b=\delta_{i_1}g_{i_1}+\ldots+\delta_{i_k}g_{i_k}$. Пусть π_i – проекция прямого произведения $\prod\limits_{i\in I}\mathrm{Hom}(A_i,B)$ на группу $\mathrm{Hom}(A_i,B)$. Выберем δ из $\prod\limits_{i\in I}\mathrm{Hom}(A_i,B)$ так, что $\pi_{i_j}\delta=\delta_{i_j}$, если $j=\overline{1,k}$, а для всех остальных i $\pi_i\delta=0$. По теореме 43.1 [1. С. 213] элементу δ в силу изоморфизма $\mathrm{Hom}\left(\bigoplus\limits_{i\in I}A_i,B\right)\cong\prod\limits_{i\in I}\mathrm{Hom}(A_i,B)$, соответствует гомоморфизм из группы $\mathrm{Hom}\left(\bigoplus\limits_{i\in I}A_i,B\right)$, который отождествим с δ. Пусть $g=g_{i_1}+\ldots+g_{i_k}$. Имеем $g\in A$ и $c-d=\delta g$. δg является элементом множества $\bigcup\limits_{\alpha\in \mathrm{Hom}(A,B)} \mathrm{Im}\,\alpha$. Следовательно, группа $A=\bigoplus\limits_{i\in I}A_i$ является гомоморфно устойчивой относительно группы B.

Рассмотрим прямое произведение абелевых групп. Введем следующее определение.

Абелеву группу A назовем *гомоморфно связанной с семейством групп* $\{B_i\}_{i\in I}$, если для любого семейства гомоморфизмов $\{\alpha_i\}_{i\in I}$, где $\alpha_i\in \mathrm{Hom}(A,B_i)$, и любого семейства $\{g_i\}_{i\in I}$ элементов группы A существуют такие элемент $g\in A$ и семейство гомоморфизмов $\{\delta_i\}_{i\in I}$ ($\delta_i\in \mathrm{Hom}(A,B_i)$), что $\alpha_i g_i=\delta_i g$ для всякого $i\in I$.

Заметим, что всякая циклическая группа гомоморфно связана с любым семейством абелевых групп.

Теорема 2. Пусть A – абелева группа, гомоморфно связанная с семейством групп $\{B_i\}_{i\in I}$. Группа A гомоморфно устойчива относительно группы $\prod\limits_{i\in I}B_i$, если A гомоморфно устойчива относительно каждой группы семейства $\{B_i\}_{i\in I}$.

Доказательство. Пусть A – абелева группа, гомоморфно связанная с семейством групп $\{B_i\}_{i\in I}$, и A гомоморфно устойчива относительно каждой группы B_i.

Рассмотрим гомоморфизмы из группы $\mathrm{Hom}\left(A,\prod_{i\in I}B_i\right)$.

Пусть $\alpha\in\mathrm{Hom}\left(A,\prod_{i\in I}B_i\right)$. Обозначим через π_i i-ю координатную проекцию $\prod_{i\in I}B_i\to B_i$. Тогда, в силу изоморфизма $\mathrm{Hom}\left(A,\prod_{i\in I}B_i\right)\cong\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}(A,B_i)$ [1, теорема 43.2], гомоморфизм α можно отождествить с элементом $(...,\alpha_i,...)$ группы $\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}(A,B_i)$, где $\alpha_i=\pi_i\alpha$ ($\alpha_i\in\mathrm{Hom}(A,B_i)$). Для всякого элемента $a\in A$ имеем $\pi_i(\alpha\ \ a)=\alpha_i a$, то есть $\alpha a=(...,\alpha_i a,...)$.

Пусть элементы a,b принадлежат множеству $\bigcup_{\alpha\in\mathrm{Hom}\left(A,\prod_{i\in I}B_i\right)}\mathrm{Im}\,\alpha$, тогда существуют такие гомоморфизмы β и γ из $\mathrm{Hom}\left(A,\prod_{i\in I}B_i\right)$, что $a=\beta c$, $b=\gamma d$ для некоторых элементов c,d из группы A.

Чтобы доказать, что множество $\bigcup_{\alpha\in\mathrm{Hom}\left(A,\prod_{i\in I}B_i\right)}\mathrm{Im}\,\alpha$ является подгруппой группы $\prod_{i\in I}B_i$, надо показать, что элемент $a-b$ принадлежит этому множеству.

Имеем $\beta c=(...,\beta_i c,...)$, $\gamma d=(..,\gamma_i d,...)$, где $\beta_i=\pi_i\beta$, $\gamma_i=\pi_i\gamma$.

Значит $a-b=\beta c-\gamma d=(\ldots,\ \beta_i c-\gamma_i d,\ \ldots)$. Так как A является гомоморфно устойчивой относительно каждой группы B_i, то $\beta_i c-\gamma_i d\in\bigcup_{\alpha\in\mathrm{Hom}(A,B_i)}\mathrm{Im}\,\alpha$. Следовательно, для любого индекса $i\in I$ существуют гомоморфизм $\alpha_i\in\mathrm{Hom}(A,B_i)$ и элемент $g_i\in A$, такие, что $\beta_i c-\gamma_i d=\alpha_i g_i$.

Учитывая, что группа A гомоморфно связана с семейством групп $\{B_i\}_{i\in I}$, получаем, что существуют такие элемент $g\in A$ и семейство гомоморфизмов $\{\delta_i\}_{i\in I}$ ($\delta_i\in\mathrm{Hom}(A,B_i)$), для которых $\alpha_i g_i=\delta_i g$.

Рассмотрим гомоморфизм δ из группы $\mathrm{Hom}\left(A,\prod_{i\in I}B_i\right)$, такой, что $\pi_i\delta=\delta_i$. Тогда

$$a-b=(...,\beta_i c-\gamma_i d,...)=(...,\alpha_i g_i,...)=(...,\delta_i g,...)=\delta g.$$

Так как $\delta\in\mathrm{Hom}\left(A,\prod_{i\in I}B_i\right)$, $g\in A$, то $\delta g\in\bigcup_{\alpha\in\mathrm{Hom}\left(A,\prod_{i\in I}B_i\right)}\mathrm{Im}\,\alpha$. Следовательно, $\bigcup_{\alpha\in\mathrm{Hom}\left(A,\prod_{i\in I}B_i\right)}\mathrm{Im}\,\alpha$ – подгруппа группы $\prod_{i\in I}B_i$. Значит группа A является гомоморфно устойчивой относительно группы $\prod_{i\in I}B_i$.

В [2] известное понятие вполне разложимой группы распространено с абелевых групп без кручения на произвольные абелевы группы.

Абелеву группу назовем *обобщенно вполне разложимой*, если она является прямой суммой групп ранга 1, то есть групп, каждая из которых изоморфна либо ненулевой подгруппе квазициклической группы $Z\left(p^\infty\right)$ для некоторого простого числа p, либо ненулевой подгруппе группы Q всех рациональных чисел.

Теорема 3. Всякая обобщенно вполне разложимая группа гомоморфно устойчива относительно любой абелевой группы.

Доказательство. По теореме 1 нам достаточно доказать, что всякая группа ранга 1 является гомоморфно устойчивой относительно любой абелевой группы.

Пусть A – циклическая p-группа, B – произвольная группа, $a_1,a_2\in\bigcup_{\alpha\in\mathrm{Hom}(A,B)}\mathrm{Im}\,\alpha$. Тогда существуют такие гомоморфизмы $\beta,\gamma\in\mathrm{Hom}(A,B)$, что $a_1=\beta b_1$ и $a_2=\gamma b_2$ для некоторых элементов $b_1,b_2\in A$. Так как элементы b_1,b_2 принадлежат группе A, то их можно представить в виде: $b_1=ka$, $b_2=ma$, где a – образующий элемент группы A. Рассмотрим разность a_1-a_2. Имеем $a_1-a_2=\beta b_1-\gamma b_2=\beta(ka)-\gamma(ma)=(k\beta-m\gamma)(a)$. $\beta,\gamma\in\mathrm{Hom}(A,B)$, поэтому разность $(k\beta-m\gamma)$ также принадлежит группе $\mathrm{Hom}(A,B)$. Обозначим эту разность через η. Тогда имеем $a_1-a_2=\eta a$. Значит $a_1-a_2\in\bigcup_{\alpha\in\mathrm{Hom}(A,B)}\mathrm{Im}\,\alpha$, поэтому A является гомоморфно устойчивой относительно любой абелевой группы.

Если $A\cong Z\left(p^\infty\right)$, то, учитывая локальную цикличность группы A и проводя рассуждения, аналогичные вышеприведенным, получим, что A – гомоморфно устойчива относительно любой абелевой группы.

Пусть A – группа без кручения ранга 1; B – произвольная группа; $a_1,a_2\in\bigcup_{\alpha\in\mathrm{Hom}(A,B)}\mathrm{Im}\,\alpha$. Тогда существуют такие гомоморфизмы β и γ из $\mathrm{Hom}(A,B)$, что $a_1=\beta b_1$, $a_2=\gamma b_2$, для некоторых элементов b_1,b_2 из группы A. Пусть b – некоторый ненулевой элемент группы A. Так как A – группа ранга 1, то существуют такие взаимно простые целые числа m и n, что $mb=nb_1$, и существуют такие взаимно простые целые числа k и l, что $kb=lb_2$. Элемент b делится на числа n и l, то есть уравнения $nx=b$ и $lx=b$ разрешимы в группе A. Итак, $b_1=m\frac{b}{n}$; $b_2=k\frac{b}{l}$. Не умаляя общности, можно считать, что числа n и l – натуральные. Пусть наименьшее общее кратное чисел n и l равно r и $\frac{r}{n} = n_1$; $\frac{r}{l} = l_1$ ($n_1, l_1 \in N$). Так как элемент b делится на n и на l, то элемент b делится на r. Пусть $c = \frac{b}{r}$. Тогда $b_1 = mn_1c$, $b_2 = kl_1c$. Имеем $a_1 - a_2 = \beta(b_1) - \gamma(b_2) = \beta(mn_1c) - \gamma(kl_2c) = (mn_1\beta - kl_1\gamma)(c)$. Так как гомоморфизмы β и γ принадлежат группе $\mathrm{Hom}(A,B)$, то разность $mn_1\beta - kl_1\gamma$ также принадлежит этой группе. Значит $a_1 - a_2 \in \bigcup_{\alpha\in\mathrm{Hom}(A,B)} \mathrm{Im}\,\alpha$. Следовательно, группа A является гомоморфно устойчивой относительно любой абелевой группы.

Рассмотрим теперь *сепарабельные* группы [3. С.7], то есть группы, в которых каждое конечное подмножество элементов содержится в некотором обобщенно вполне разложимом прямом слагаемом. С помощью теоремы 3 получаем такой результат.

Теорема 4. Всякая сепарабельная группа гомоморфно устойчива относительно любой абелевой группы.

Доказательство. Пусть A – сепарабельная группа, B – произвольная группа и $c, d \in \bigcup_{\alpha\in\mathrm{Hom}(A,B)} \mathrm{Im}\,\alpha$. Существуют такие гомоморфизмы $\beta, \gamma \in \mathrm{Hom}(A,B)$ и элементы $a_1, a_2 \in A$, что $c = \beta a_1$, $d = \gamma a_2$. Вкладываем элементы a_1 и a_2 в обобщенно вполне разложимое прямое слагаемое A_1 группы A ($A = A_1 \oplus A_2$). Пусть β' – ограничение гомоморфизма β на A_1, а γ' – ограничение гомоморфизма γ на A_1. Имеем $c = \beta' a_1$, $d = \gamma' a_2$, $\beta', \gamma' \in \mathrm{Hom}(A_1, B)$, и поэтому $c, d \in \bigcup_{\alpha\in\mathrm{Hom}(A_1,B)} \mathrm{Im}\,\alpha$. Так как по теореме 3 A_1 – гомоморфно устойчива относительно любой абелевой группы, то $c - d \in \bigcup_{\alpha\in\mathrm{Hom}(A_1,B)} \mathrm{Im}\,\alpha$. Следовательно, существуют $\delta \in \mathrm{Hom}(A_1, B)$ и элемент $a_3 \in A_1$, такие, что $c - d = \delta a_3$. Рассмотрим гомоморфизм $\delta' \in \mathrm{Hom}(A,B)$, действующий следующим образом: $\delta' a = \delta\pi a$ для всякого элемента $a \in A$, где π – проекция группы A на прямое слагаемое A_1. Имеем $c - d = \delta' a_3$, и значит $c - d \in \bigcup_{\alpha\in\mathrm{Hom}(A,B)} \mathrm{Im}\,\alpha$. Следовательно, A – гомоморфно устойчива относительно любой абелевой группы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т.1. 335 с.
2. *Megibben Ch.K.* Separable mixed group // Comment. Math. Unit. Carolin. 1980. V.21. P.755–768.
3. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1977. Т.2. 416 с.

Статья представлена кафедрой алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 9 июня 2003 г.