УДК 519.48

А.И. Забарина, Г.Г. Пестов

ОБ *n*-МЕРНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУППАХ

В статье введены понятия *n*-упорядоченной и *n*-циклически упорядоченной группы, обобщающие на *n*-мерный случай классические определения линейно и циклически упорядоченных групп. Рассмотрены примеры *n*-упорядоченной и *n*-циклически упорядоченных групп, изучены некоторые их свойства. Каждая локально-конечная *n*-упорядоченная группа с нетривиальным порядком является *n*-циклически упорядоченной. Группа всех корней из единицы является максимальной локально конечной двумерно упорядочиваемой группой с невырожденным порядком.

Различные обобщения понятия порядка в алгебраических системах для *n*-мерного случая рассматривались в ряде работ, в том числе в [1, 2]. В настоящей заметке вводятся определения, рассматриваются примеры и свойства *n*-упорядоченных и *n*-циклически упорядоченных групп. Определения 1-упорядоченной и 2-циклически упорядоченной группы эквивалентны обычным определениям линейно упорядоченной и циклически упорядоченной группы соответственно [3, 4].

1. *n*-МЕРНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ И *n*-МЕРНО ЦИКЛИЧЕСКИ УПОРЯДОЧЕННЫЕ ГРУППЫ. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРИМЕРЫ

Всюду в этой статье через X_k обозначается множество, состоящее из *k* элементов.

Определение 1.1. *n*-упорядоченное множество $\langle X,\zeta\rangle$ [5] называется *n*-циклически упорядоченным, если из того, что ζ не обращается тождественно в нуль на $X_{n+2}\subset X$, следует, что каждый элемент из X_{n+2} является внешним в $\langle X_{n+2},\zeta\rangle$.

Определение 1.2. Система $<G,\cdot,\xi>$ называется *n-упорядоченной* (*n-циклически упорядоченной*) группой, если $<G,\xi>$ есть *n*-упорядоченное (*n*-циклически упорядоченное) множество, $<G,\cdot>$ есть группа, и функция порядка ξ согласована с алгебраической структурой группы G, то есть для каждого множества $X_{n+1}\subset G, |X_{n+1}|=n+1$ выполнено: $\xi(X_{n+1})=\xi(aX_{n+1}b)$.

Рассмотрим примеры *n*-упорядоченных и *n*-циклически упорядоченных групп,

1) Пусть *C* есть мультипликативная группа всех комплексных чисел. Зададим на *C* ориентацию: если $z_k\in C,\ z_k=a_{1k}+ia_{2k}$, где $0\le k\le 2$, то положим

$$b_{lk}=a_{lk}-a_{0k}\,, \tag{1}$$

где $1\le k,l\le 2,\ \zeta(z_1,z_2,z_3)=\operatorname{sgn}\det(b_{lk})$.

Поскольку для каждого $a\in C$ при отображении $z\to az$ ориентация плоскости остаётся неизменной, то порядок ζ согласован с операцией умножения в *C*. Итак, $<C,\zeta>$ есть двумерно упорядоченная мультипликативная группа.

2) Пусть $<G,\omega(x,y,z)>$ – циклически упорядоченная группа [3], где $\omega(x,y,z)$ есть функция порядка [6]. Тогда группа $<G,\omega(x,y,z)>$ двумерно циклически упорядочена.

3) Пусть $<\Re^n,+>$ – аддитивная группа с покоординатной операцией суммирования. Если $\eta(x,y,z)$ – ориентация в $\Re^n$, заданная аналогично тому, как это сделано в примере 1) , то $<\Re^n,\eta>$ есть *n*-мерно упорядоченная группа.

2. ОБ ОТДЕЛИМЫХ ЭЛЕМЕНТАХ

Пусть $<C,\zeta>$ есть *n*-упорядоченное множество, $a\in G, Y\subset G.$ Элемент *a* называется *точкой, отделимой от множества Y,* если существует грань $X_n\subset G$, такая, что для каждого $y\in Y$ выполнено $\zeta(X_n,y)\le 0$ и $\zeta(X_n,a)=1$, или для каждого $y\in Y$ выполнено $\zeta(X_n,y)\ge 0$ и $\zeta(X_n,a)=-1$. Если $Y=G\setminus\{a\}$, то будем говорить, что точка *a отделима* в $<C,\zeta>$ [7].

Лемма 2.1. Пусть $<C,\zeta>$ есть *n*-упорядоченное множество, $a\in X_{n+2}\subset G.$ Если *a* не является внешней точкой в $<,X_{n+2},\zeta>$, то *a* не является и отделимой в $<,X_{n+2},\zeta>$.

Доказательство. Если $\zeta\equiv 0$ на X_{n+2}, то утверждение очевидно. Пусть теперь множество X_{n+2} является невырожденным в $<C,\zeta>$. Тогда в $<,X_{n+2},\zeta>$ существует, по крайней мере, две внешних грани G_1,G_2. Пусть *a* не является внешней точкой в $<,X_{n+2},\zeta>$. Отсюда $|G_1\cap G_2|=n-1.$ Не нарушая общности, можно считать, что $G_1=(g_1,\dots,g_{n-1},b),\quad G_2=(g_1,\dots,g_{n-1},c).$ По определению внешней грани имеем

$$\zeta(G_1,a)=\zeta(G_1,c)\ne 0,\zeta(G_2,a)=\zeta(G_2,b)\ne 0. \tag{2}$$

Заметим, что из равенства $\zeta(G_1,a)=\zeta(G_2,a)$ следовало бы, что *a* является внешней точкой в $<,X_{n+2},\zeta>$. Таким образом, $\zeta(G_1,a)\ne\zeta(G_2,a)$. Положим для определённости

$$\zeta(G_1,a)=1,\zeta(G_2,a)=-1\,. \tag{3}$$

Предположим, что точка *a* отделима в $<,X_{n+2},\zeta>$, то есть существует грань *P*, такая, что $\zeta(P,a)=1,\zeta(P,x)\le 0$ для каждого $x\in X_{n+2}\setminus\{a\}$. Из (2) следует, что $P\ne G_1,\ P\ne G_2.$ Возможны 2 случая: a) *P* получается из G_1 заменой некоторого элемента g_i элементом *c*, b) *P* получается из G_2 заменой некоторого элемента g_j элементом *b*. Рассмотрим эти случаи.

а) Имеем

$$\zeta(P,a)=\zeta(({}^{g_i}_{c})G_1,a)\,.$$

Отсюда

$$\zeta((^{g_i}_{a})G_1, c) = -1.$$

Согласно (3), $\zeta((^{g_i}_{a})G_1, g_i) = -1$, то есть a – внешняя точка в $<, X_{n+2}, \zeta>$, что противоречит условию.

b) По определению отделимой точки,

$$\zeta(P, g_i) = \zeta((^{g_j}_{b})G_2, g_j) \le 0,$$

следовательно, $\zeta(G_2, b) \ge 0$. Однако из (2) и (3) вытекает, что $\zeta(G_2, b) = -1$. Получили противоречие. Итак, элемент a не является отделимой точкой в $<, X_{n+2}, \zeta>$, что и требовалось.

Лемма 2.2. Пусть $<C, \zeta>$ есть n-упорядоченное множество, X_{n+2} – его невырожденное подмножество, $a \in X_{n+2}$. Если a не является отделимой точкой в $<, X_{n+2}, \zeta>$, то a не является отделимой и в $<C, \zeta>$.

Доказательство. Пусть a является отделимой точкой в $<C, \zeta>$. Покажем, что a отделима в каждом невырожденном подмножестве $X_{n+2} \subset G$, таком, что $a \in X_{n+2}$. Согласно условию, существует грань $P \subset G$, для которой $\zeta(P, a) = 1$, $\zeta(P, y) \le 0$ для всех $y \in G \setminus \{a\}$. В силу невырожденности X_{n+2} существует множество $Y_n \subset X_{n+2}$, для которого $\zeta(Y_n, a) \ne 0$. Так как P отделяет точку a от множества $X_{n+2} \setminus \{a\}$, то существует грань $P' \subset X_{n+2}$, которая отделяет a в $<, X_{n+2}, \zeta>$ (3). Лемма доказана.

Следствие 2.3. Пусть $<G, \zeta>$ есть n-упорядоченное множество, X_{n+2} – его невырожденное подмножество, $a \in X_{n+2}$. Если a является отделимой точкой в $<G, \zeta>$, то a является внешней точкой в X_{n+2}.

Предложение 2.4. В каждом конечном невырожденном n-упорядоченном множестве $<C, \zeta>$ существует хотя бы одна отделимая точка.

Доказательство будем вести индукцией по размерности n. При n=1 справедливость утверждения вытекает из существования во всяком конечном линейно упорядоченном множестве наибольшего и наименьшего элементов. Пусть для (n – 1)-упорядоченных множеств предложение доказано. Покажем, что оно верно и для n-упорядоченных конечных множеств. Пусть $<S, \zeta>$ есть конечное невырожденное n-упорядоченное множество, тогда в $<S, \zeta>$ существует нестрого внешняя грань G, то есть такая грань, что для всех $x \in S$ имеем $\zeta(G, x) \ge 0$. Обозначим через H гиперплоскость, порождаемую гранью G,

$$H = \{x \in S \mid \zeta(G, x) = 0\}.$$

Так как G – грань в $<S, \zeta>$, то для каждого $A \subset H, |A| = n+1$, имеем $\zeta(A) = 0$. Применяя теорему о проекции n-упорядоченного множества [5], получим: функция ζ_a, определяемая равенством $\zeta_a(x_1, \ldots, x_n) = \zeta(x_1, \ldots, x_n, a)$, является функцией ($n$ – 1)-мерного нетривиального порядка в H. По предположению индукции, в $<H, \zeta_a>$ существует отделимая точка b. Пусть грань K в $<H, \zeta_a>$ отделяет точку b, то есть $\zeta_a(K, b) = 1$, $\zeta_a(K, x) \le 0$ для каждого $x \in H \setminus \{b\}$.

Во множестве $S \setminus H$ введём отношение $x \prec y \Leftrightarrow \zeta(K, x, y) \le 0$. Нетрудно показать, используя аксиомы n-порядка [5], что заданное отношение является предпорядком на множестве $S \setminus H$. Поэтому найдётся такой элемент $c \in S \setminus H$, что для всякого $x \in S \setminus H$ имеем $x \prec c$, то есть

$$\zeta(K, x, c) \le 0. \tag{4}$$

Пусть теперь $x \in H$. Так как $\zeta(G, a) = \zeta(G, c)$, то $\zeta_a = \zeta_c$ [5]. Следовательно,

$$\zeta(K, x, c) = \zeta_c(K, x) = \zeta_a(K, x).$$

Отсюда

$$\zeta(K, b, c) = 1,$$

$$\zeta(K, x, c) \le 0 \text{ при } x \in H \setminus \{b\}. \tag{5}$$

Из (4) и (5) получаем $\zeta(K, c, b) = -1, \zeta(K, c, x) \ge 0$ для каждого $x \in S \setminus \{b\}$. Таким образом, элемент b является отделимой точкой в $\langle S, \zeta \rangle$. Предложение доказано.

Следствие 2.5. В конечной n-упорядоченной группе с нетривиальным порядком все элементы являются отделимыми.

Справедливость утверждения вытекает непосредственно из леммы 2.2 и согласованности функции порядка с алгебраической операцией группы.

Теорема 2.6. Каждая конечная n-упорядоченная группа с невырожденным порядком является n-циклически упорядоченной.

Доказательство. Пусть $\langle G, \zeta \rangle$ – конечная n-упорядоченная группа с невырожденным порядком. Покажем, что она является n-циклически упорядоченной. Согласно следствию 2.5, все элементы группы G являются отделимыми в G. По следствию 2.3, каждый элемент G является внешней точкой во всяком невырожденном подмножестве $X_{n+2} \subset G$. Теперь, по определениям 1.1 и 1.2, группа $\{G, \zeta\}$ является n-циклически упорядоченной.

Приведем без доказательства следующую теорему.

Теорема 2.7. Каждая двумерно упорядочиваемая группа G с невырожденным порядком тогда и только тогда вкладывается с сохранением порядка в группу C всех корней из единицы, когда она локально-конечна.

Следствие 2.8. Группа C всех корней из единицы есть максимальная локально-конечная двумерно упорядочиваемая группа с невырожденным порядком.

Следствие 2.9. Каждая локально-конечная двумерно упорядочиваемая группа с невырожденным порядком является локально-циклической.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sperner E.* Die Ordnungfunktionen einer Geometrie // Arch. Math. 1948. B.1. S. 9–12; 1949. B.121. S. 107–130.
2. *Novoa L.G.* On *n*-ordered sets and order completeness // Pacific J. Math. 1965. V.15. No. 4. P. 1337–1345.
3. *Fuch L.* Partially Ordered Algebraic Systems: Pergamon Press, 1963.
4. *Кокорин А.И., Копытов В.М.* Линейно упорядоченные группы. М.: Наука, 1984.
5. *Пестов Г.Г.* *n*-упорядоченные множества // Труды Иркут. гос. ун-та. 1970. Т. 74. Вып. 6.
6. *Забарина А.И., Пестов Г.Г.* К теореме Сверчковского // Сиб. мат. журн. 1984. Т. 25. № 4. С. 46–53.
7. *Терре А.И.* Элементы геометрии *n*-мерного порядка. – Томск, 1982, № 5941-82 Деп.

Статья представлена кафедрой математического анализа, поступила в научную редакцию «Математика» 16 октября 2003 г.