УДК 517.54

*Т.В. Касаткина*

# ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работе рассматриваются системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, которые при некоторых заданных начальных условиях сыграли ключевую роль в доказательстве теоремы де Бранжа о коэффициентах. Представлено решение этих систем при любых заданных начальных условиях и сформулированы достаточные условия для монотонного убывания соответствующих интегральных кривых этих систем.

В доказательстве теоремы о коэффициентах голоморфных однолистных в единичном круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функций

$$f(z) = z + C_2(f)\, z^2 + \ldots + C_n(f)\, z^n + \ldots ,$$

выполненном Луи де Бранжем [1] и рассмотренном в [2], используются системы дифференциальных уравнений

$$y_1' = (n-1)y_1, \qquad (1)$$

$$y_s' = 2\sum_{j=1}^{s-1}(-1)^{s+j+1}(n-j)y_j - (n-s)y_s$$

($s = 2, \ldots, n-1$), удовлетворяющие начальным условиям $y_{s,n}(0) = \dfrac{s}{n-s}$, $t \in [0, +\infty)$ (в ней $n = 2, 3, \ldots$ фиксировано).

Решение этой задачи Коши дается системой функций

$$Y_{s,n}(t) = \sum_{r=1}^{s} \frac{(-1)^{s-r}}{n-r}\binom{2n-2r}{s-r}\binom{2n-r}{r-1}e^{-(n-r)t}.$$

Их называют многочленами Бранжа. Эти многочлены являются монотонно убывающими до нуля на положительной части вещественной полуоси. Этот факт и позволил Луи де Бранжу решить задачу о коэффициентах. Таким образом, решение системы при фиксированном $n$ (на самом деле, совокупности систем, так как при фиксированном $n = 2, 3, \ldots$ возникает конкретная система обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами) при любых заданных начальных условиях и установление необходимых и достаточных условий, которым должны удовлетворять начальные значения, чтобы соответствующие интегральные кривые системы были заведомо монотонными, заслуживают особого изучения в рамках геометрической теории аналитических функций средствами теории дифференциальных уравнений и теории специальных функций.

Найдем решение системы (1) с произвольными начальными условиями и укажем достаточные условия, которым должны удовлетворять эти константы, чтобы производные соответствующих решений были отрицательными при $t \in [0, +\infty)$.

Обозначим через $Y_n(t) = \{Y_{1,n}(t), \ldots, Y_{s,n}(t), \ldots, Y_{n-1,n}(t)\}$ решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию $Y_n(0) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s, \ldots, \lambda_{n-1}\}$, где $\lambda_s$ – произвольные числа. Функцию $Y_{s,n}(t)$, являющуюся $s$-й компонентой решения $Y_n(t)$, представим в явной форме. Для этого сначала найдем общее решение системы (1). Числовая матрица, составленная из коэффициентов при $y_{s,n}$ в правых частях уравнений системы, является нижней левой треугольной матрицей. Ее характеристические значения $\gamma_r$ легко находятся: $\gamma_r = -(n-r)$ ($r = 1, \ldots, n-1$). Частное решение системы (1), соответствующее каждому $\gamma_r$ ($r = 1, \ldots, n-1$), будем искать в виде

$$y^{(r)}(t) = \left\{\alpha 1, re^{(nr)t}, \ldots, \alpha n1, re^{(nr)t}\right\},$$

где $\alpha_s$ ($s = 1, \ldots, n-1$) – некоторые постоянные числа. Найдем их.

Для этого построим систему линейных однородных алгебраических уравнений:

$$(1-r)\,\alpha_{1,r} = 0,$$

$$2\sum_{j=1}^{s-1}(-1)^{s+j+1}(n-j)\,\alpha_{j,r} + (s-r)\,\alpha_{s,r} = 0$$

$$(s = 2, \ldots, n-1).$$

Решая эту систему, получим:

если $s < r$, то $\alpha_{s,r} = 0$,

если $s = r$, то, не умаляя общности, будем считать $\alpha_{r,r} = 1$,

если $r + 1 \le s \le n-1$, то

$$\alpha_{s,r} = (-1)^{s-r}\frac{(2n-2r)!}{(s-r)!(2n-s-r)!} = (-1)^{s-r}\binom{2n-2r}{s-r}.$$

Тогда частное решение системы (1), соответствующее $\gamma_r = -(n-r)$, $r = 1, \ldots, n-1$, будет иметь вид: $y^{(r)}(t) = \left\{y_1^{(r)}, \ldots, y_{n-1}^{(r)}\right\}$, где

$$y_s^{(r)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } s = 1, \ldots, r-1, \\ e^{-(n-r)t} & \text{при } s = r, \\ (-1)^{s-r}\dbinom{2n-r}{s-r}e^{-(n-r)t} & \text{при } s = r+1, \ldots, n-1. \end{cases}$$

Обозначая через $X_{r,n}$ произвольные постоянные, запишем общее решение системы (1):

$$y_{s,n}(t) = \sum_{r=1}^{s}(-1)^{s-r}\binom{2n-r}{s-r}X_{r,n}e^{-(n-r)t}$$

$$(s = 1, \ldots, n-1). \qquad (2)$$

Как обычно,

$$\binom{a}{m} = \begin{cases} \dfrac{a(a-1)\ldots(a-m+1)}{m!} & \text{при } m > 0, \\ 1 & \text{при } m = 0, \\ 0 & \text{при } m < 0 \ – \end{cases}$$

биномиальные коэффициенты, $m$ – целое, $a$ – комплексное число.

Построим частные решения системы (1) $y_{s,n}^{(k)}(t)$ ($k = 1, \ldots, n-1$, $s = r+1, \ldots, n-1$), удовлетворяющие начальным условиям

$$y_{1,n}^{(k)}(0)=0,\ \ldots,\ y_{k,n}^{(k)}(0)=1,$$

$$y_{k+1,n}^{(k)}(0)=0,\ \ldots,\ y_{n-1,n}^{(k)}(0)=0.$$

Из совокупности систем линейных неоднородных алгебраических уравнений

$$y_{s,n}^{(k)}(0)=\sum_{r=1}^{s}(-1)^{s-r}\binom{2n-r}{s-r}X_{r,n}^{(k)} \qquad (3)$$

$$(k=1,\ldots,n-1,\ s=r+1,\ \ldots,\ n-1),$$

последовательно решая каждую, получим, что при фиксированном $k = 1, \ldots, n-1$ решение $X_{1,n}^{(k)}, \ldots, X_{r,n}^{(k)}$ соответствующей системы будет иметь вид:

при $k = 1$ $(r = 2, \ldots, n-1)$

$$X_{1,n}^{(1)}=1,\ \ X_{r,n}^{(1)}=\frac{(2n-2)(2n-r-1)!}{(r-1)!(2n-r-1)(2n-2r)!}=$$

$$=\frac{2n-2}{2n-r-1}\binom{2n-r-1}{r-1},$$

при $k = 2$ $(r = 3, \ldots, n-1)$

$$X_{1,n}^{(2)}=0,\ X_{2,n}^{(2)}=1,$$

$$X_{r,n}^{(2)}=\frac{(2n-4)}{(r-2)!}\frac{(2n-(r+2))!}{(2n-(r+2))(2n-2r)!}=$$

$$=\frac{2n-4}{2n-r-2}\binom{2n-r-2}{r-2},$$

при $k = 3$ $(r = 4, \ldots, n-1)$

$$X_{1,n}^{(3)}=0,\ X_{2,n}^{(3)}=0,\ X_{3,n}^{(3)}=1,$$

$$X_{r,n}^{(3)}=\frac{(2n-6)}{(r-3)!}\frac{(2n-(r+3))!}{(2n-(r+3))(2n-2r)!}=$$

$$=\frac{2n-6}{2n-r-3}\binom{2n-r-3}{r-3},$$

Нетрудно заметить, что первые $(k-1)$ решения уравнений каждой системы (3) равны нулю. Предположим, что при любом $k$ $(k = 4, \ldots, n-1)$ решение системы (3) имеет вид:

если $r < k$, то $\qquad X_{r,n}^{(k)}=0,$

если $r = k$, то $\qquad X_{k,n}^{(k)}=1,$

если $k+1 \le r \le n-1$, то

$$X_{r,n}^{(k)}=\frac{2n-2k}{2n-r-k}\binom{2n-r-k}{r-k}.$$

Тогда частные решения системы (1), соответствующие начальным условиям $y_{1,n}^{(k)}(0)=0, \ldots, y_{k,n}^{(k)}(0)=1,\quad y_{k+1,n}^{(k)}(0)=0, \ldots, y_{n-1,n}^{(k)}(0)=0,$ будут иметь вид

$$y_{s,n}^{(k)}(t)=\sum_{r=1}^{s}(-1)^{s-r}\binom{2n-r}{s-r}e^{-(n-r)t}$$

$$\left(2nrk, rk\right)\ \ (s=1,\ \ldots,\ n-1). \qquad (4)$$

Линейная комбинация

$$X_{r,n}=\sum_{k=1}^{r}\lambda_k X_{r,n}^{(k)}=\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\frac{2n-2k}{2n-r-k}\binom{2n-r-k}{r-k}$$

$$(r=1,\ldots,n-1),$$

где $\lambda_s$ – произвольные числа, будет являться решением алгебраической системы (2) с начальными условиями $y_{s,n}(0) = \lambda_s$, тогда $s$-я компонента $Y_{s,n}(t)$ решения $Y_n(t)$ $t \in [0; +\infty)$ дифференциальной системы (1) с начальными условиями $Y_{s,n}(0) = \lambda_s$ будет иметь вид

$$Y_{s,n}=\sum_{r=1}^{s}\sum_{k=1}^{r}(-1)^{s-r}\binom{2n-2r}{s-r}\frac{2n-2k}{2n-r-k}\binom{2n-r-k}{r-k}\times$$

$$\times\lambda_k\,\mathrm{e}^{-(n-r)t}\qquad(s=1,\ \ldots,\ n-1). \qquad (5)$$

Распишем систему (5) и сгруппируем коэффициенты при $\lambda_r$, получим

$$Y_{s,n}=\lambda_1\sum_{l=1}^{s}(-1)^{s-l}\binom{2n-2l}{s-l}\frac{2n-2}{2n-l-1}\binom{2n-l-1}{l-1}e^{-(n-l)t}+$$

$$+\ldots+\lambda_r\sum_{l=r}^{s}(-1)^{s-l}\binom{2n-2l}{s-l}\frac{2n-2l}{2n-l-r}\binom{2n-l-r}{l-r}e^{-(n-l)t}+$$

$$+\ldots+\lambda_s e^{-(n-l)t}\qquad(s=1,\ \ldots,\ n-1).$$

Обозначим коэффициенты при $\lambda_r$ через $P_{s,n}^{(r)}$ и запишем их через гипергеометрическую функцию ${}_2F_1\ (a,b;c;e^{-t})$.

Так как

$$\frac{(2n-2l)!}{(s-l)!(2n-l-s)!}=\frac{(2n-l-s+1)_{s-l}}{(s-l)!}$$

и

$$\frac{(2n-l-1)!}{(l-1)!(2n-2l)!}=\frac{(2n-2l+1)_{l-1}}{(l-1)!},$$

то коэффициент при $\lambda_1$ запишется в виде

$$P_{s,n}^{(1)}=\sum_{l=1}^{s}(-1)^{s-l}\binom{2n-2l}{s-l}\frac{2n-2}{2n-l-1}\binom{2n-l-1}{l-1}e^{-(n-l)t}=$$

$$=$$

$$(2n-2)\sum_{l=1}^{s}(-1)^{s-l}\frac{(2n-2l+1)_{l-1}(2n-l-s+1)_{s-l}}{(2n-l-1)(l-1)!(s-l)!}e^{-(n-l)t}.$$

Заменим индекс суммирования $l$ на $j$ по формуле $s-l=j$ и пусть $s-1=k$, $n-k=m$, тогда $j = 0, \ldots, k$, $k = 0, \ldots, n-2$, и сумма примет вид

$$P_{s,n}^{(1)}=(2n-2)\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j}{(k-j)!}\frac{(2m+j-1)_j(2m+2j-1)_{k-j}}{(2m+k+j-2)j!}e^{-(m+j-1)t}.$$

Воспользуемся формулами [2. С. 13]

$$\frac{(-1)^j}{(k-j)!}=\frac{(-k)_j}{k!},\ (2m+j-1)_j=\frac{(2m-1)_{2j}}{(2m-1)_j},$$

$$(2m+2j-1)_{k-j}=\frac{(2m-1)_{k+j}}{(2m-1)_{2j}}$$

и представим

$$\frac{1}{2m+k+j-2}=\frac{(2m+k-2)_j}{(2m+k-1)_j(2m+k-2)}.$$

Тогда

$$P_{s,n}^{(1)}=\sum_{j=0}^{k}\frac{(-k)^j}{k!}\frac{(2m-1)_k(2m-2+k)_j(2n-2)}{(2m-1)_j(2m+k-2)}\frac{e^{-(m+j-1)t}}{j!}=$$

$$=\frac{(2m-1)_k(2n-2)}{k!(2m+k-2)}e^{-(m-1)t}\sum_{j=0}^{k}\frac{(-k)^j(2m-2+k)_j}{(2m-1)_j}\frac{e^{-jt}}{j!}=$$
$$=\frac{(2m-1)_k(2n-2)}{k!(2m+k-2)}e^{-(m-1)t}\,{}_2F_1(-k,2m+k-2;2m-1;e^{-t})$$
$$(k=0,\dots,n-2)$$

При $t = 0$ имеет место формула (см. [3. С. 489])

$${}_2F_1(-n,b;c;1)=\frac{(c-b)_n}{(c)_n}\quad(\mathrm{Re}(c-b)>-n, c, b\in \boldsymbol{C}). \quad (6)$$

Воспользуемся ею, учитывая обозначения $s - 1 = k$, $n - k = m$, получим

$$P_{s,n}^{(1)}(0)=\frac{(2n-2r)(1-k)_k}{k!(2m+k-2)}=\frac{(2n-2r)(1-s+r)_{s-r}}{(s-r)!(2m-s-r)}.$$

При $s = 1$ $P_{s,n}^{(1)}(0)=1$, при $s = 2, \dots, n-1$ $P_{s,n}^{(1)}(0)=0$.

Рассмотрим $P_{s,n}^{(r)}$, коэффициент при $\lambda_r$,

$$P_{s,n}^{(r)}=\sum_{l=r}^{s}(-1)^{s-l}\binom{2n-2l}{s-l}\frac{2n-2r}{2n-l-r}\binom{2n-l-r}{l-r}e^{-(n-l)t}.$$

Заменим здесь индекс $l$ на $j$, полагая $s - l = j$, и пусть $s-r=k$ ($k = 0, \dots, n-r-1$), $m = n-k-(r-1)$. Учитывая, что

$$\frac{(2n-l-r)!}{(l-r)!(2n-2l)!}=\frac{(2n-2l+1)_{l-r}}{(l-r)!},$$

получим

$$P_{s,n}^{(r)}=(2n-2r)\times$$
$$\times\sum_{l=r}^{s}(-1)^{s-l}\frac{(2n-2l+1)_{l-r}(2n-l-s+1)_{s-l}}{(l-r)!(s-l)!(2n-l-r)}e^{-(n-l)t}=$$
$$=\frac{(2m-1)_k(2n-2r)}{k!(2m+k-2)}e^{-(m-1)t}\,{}_2F_1(-k,2m+k-2;2m-1;e^{-t})$$
$$(r=1,\cdots,s,\ k=0,\dots,n-r-1).$$

Воспользуемся формулой (6), получим

$$P_{s,n}^{(r)}(0)=\frac{(2m-1)_k(2n-2r)}{k!(2m+k-2)}\,{}_2F_1(-k,2m+k-2;2m-1;1)=$$
$$=\frac{(2n-2r)(1-k)_k}{k!(2m+k-2)}.$$

Учитывая обозначения $k=s-r$, $m=n-k-r+1$, имеем $m = n - s + 1$, и тогда

$$P_{s,n}^{(r)}(0)=\frac{(2n-2r)(1-s+r)_{s-r}}{(s-r)!(2n-s-r)}.$$

При любых фиксированных $s$ и $r$, таких, что $s \neq r$, получаем, что $P_{s,n}^{(r)}(0)=0$, а при $s = r$ $P_{s,n}^{(s)}(0)=1$.

Таким образом, $Y_{s,n}(t)$ при $t = 0$ обращается в тождество $Y_{s,n}(0) = \lambda_s$ при любых фиксированных $n \in N\backslash\{1\}$ и $s = 1, \dots, n-1$.

**Замечание**. Если все числа $\lambda_s \geq 0$ ($s = 1, \dots, n-1$) и удовлетворяют условиям

$$(n-s)\lambda_s-2\sum_{j=1}^{s-1}(-1)^{s+j+1}(n-j)\lambda_j\geq 0,$$

то функции $Y_{s,n}(t)$ будут монотонно убывать от значений $Y_{s,n}(0) = \lambda_s$ до нуля при $t \in [0; +\infty)$. При этом производные $Y_{s,n}^{/}(t)$ имеют вид

$$K=\begin{pmatrix}R_1 & M_{12} & \dots & M_{1n}\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0\\ M_{21} & R_2 & \dots & M_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}\oplus\dots$$
$$\dots\oplus\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & R_n\end{pmatrix}.$$

ЛИТЕРАТУРА


1. *De Branges L. A* proof of Bieberbach conjecture / Preprints LOMI. 1984. No. E-5–84. P. 1–33.
2. *Александров И.А.* Доказательство Л. де Бранжа гипотезы И.М. Милина и гипотезы Л. Бибербаха // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28. С. 7–20.
3. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Марычев О.И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986.
4. *Xie Ming-Qin.* A generalization of the de Branges theorem // Amer. Math. Soc. 1997. V. 125. P. 3605–3611.



Статья представлена кафедрой математического анализа Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Математика» 30 апреля 2003 г.