

Б.П. Куфарев

ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВИДА $y = f(x, y')$

Вводится понятие обобщенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно неизвестной функции. Указаны условия существования такого решения.

Обозначим через I промежуток $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$. Пусть множество $D \subset \mathbb{R}^1$ открыто и $C \in D$ – произвольная постоянная.

1. Уравнение Клеро

$$y = xy' + \psi(y'), x \in I, \quad (1)$$

где ψ – функция, определенная на D .

Как известно, это уравнение решается в курсах дифференциальных уравнений методом введения параметра $p = y'(x)$. В таком случае приходится предполагать существование производной $p'(x)$ на I (если решение ищется в явной форме: $y = xp + \psi(p(x))$) или считать, что вторая производная функции $\psi(p)$ непрерывна на D (если ограничиться решением в параметрической форме: $x = -\psi'(p)$, $y = xp + \psi(p)$). Оба эти предположения выглядят, вообще говоря, излишними: например, существование второй производной решения $y''(x) = p'(x)$.

В связи с этим мы введем следующее понятие «обобщенного решения».

Определение. Обобщенным решением уравнения (1) назовем всякую функцию $y(x)$ вида

$$y = \int_a^x p(t)dt + aC + \psi(C), \quad x \in I = [a, b], \quad (2)$$

где $p(x)$ – любое интегрируемое по Лебегу решение интегрального уравнения

$$\int_a^x p(t)dt = xp(x) + \psi(p(x)) - aC - \psi(C) \text{ п.в. на } I, \quad (3)$$

удовлетворяющее условиям: $p(a) = C$, $p(I) \subset D$ (п.в. – почти всюду).

Легко видеть, что функция (2) почти всюду на I удовлетворяет уравнению (1). Действительно, подстановка ее в правую часть уравнения дает $xp(x) + \psi(p(x))$ почти всюду, что, в силу (3), равно (2).

В случае, когда $\psi \in C^1(D)$ и $p(x)$ имеет производную почти всюду, дифференцирование равенства (3) дает для п.в. $x \in I$:

$$xp'(x) + \psi'_p[p(x)] \cdot p'(x) = 0,$$

то есть «классическое» уравнение для $p(x)$.

Возникает вопрос об общих условиях на $p(x)$ или $\psi(p)$, при которых функция (2) заведомо не содержится в классическом линейном общем решении $y = xC + \psi(C)$ и является, в этом смысле, особым решением уравнения (1).

В связи с этим приведем следующие утверждения.

1.1. Если высказывание « $p(x) = C$ почти всюду на I » ложно $\forall C \in D$, то функция (2) не является линейной. Это немедленно проверяется «от противного».

1.2. Замечание связано с существованием решения интегрального уравнения (3). Пусть $\psi \in C^1(D)$ и ψ'_p строго монотонна на D . По теореме об обратной функции [1. С. 108–109] существует строго монотонное непрерывное решение уравнения $x = -\psi'_p(p)$, причем $p'(x)$ существует п.в. на $-\psi'_p(D)$ [2. С. 186]. Введем обозначение $a = p^{-1}(C)$, и пусть $I = [a, b]$, причем $p(I) \subset D$. Покажем, что если $\psi(p)$ такова, что $p'(x)$ существует всюду на I и конечна (хотя может быть и разрывной), то $p(x)$ является решением уравнения (3). Действительно, $p'(x)$ суммируема на I [2. С. 187]. Поэтому функция

$$\frac{d}{dx} \psi[p(x)] = \psi'_p(p) \cdot p'(x) = -xp'(x) = p - (xp)'_x$$

существует всюду, конечна и суммируема. А тогда [2. С. 234]

$$\psi[p(x)] - \psi[p(a)] = \int_a^x p(t)dt - xp(x) + ap(a),$$

то есть $p(x)$ – решение уравнения (3).

1.3. Так же доказывается более общее утверждение. Если ψ'_p существует всюду на D и конечна, а $p(x)$ – определенное на I решение уравнения $x = -\psi'_p(p)$, причем $p'(x)$ существует всюду, конечна и суммируема на I , то $p(x)$ – решение уравнения (3).

2. Рассмотрим теперь уравнение Лагранжа

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'), \quad x \in I, \quad (4)$$

где φ и ψ – пока произвольные функции, определенные на открытом множестве $D \subset \mathbb{R}^1$, и $C \in D$ – произвольная постоянная.

Введем понятие «обобщенное решение уравнения Лагранжа».

Определение. Обобщенным решением уравнения (4) назовем всякую функцию $y(x)$ вида

$$y = \int_a^x p(t)dt + a\varphi(C) + \psi(C), \quad x \in I, \quad (5)$$

где $p(x)$ – любое определенное всюду на I интегрируемое по Лебегу решение интегрального уравнения

$$\int_a^x p(t)dt = x\varphi[p(x)] + \psi[p(x)] - a\varphi(C) - \psi(C) \text{ п.в. на } I, \quad (6)$$

удовлетворяющее условиям: $p(a) = C$, $p(I) \subset D$.

Легко видеть, что функция (5) почти всюду на I удовлетворяет уравнению (4). Действительно, подстановка ее в правую часть уравнения дает $x\varphi[p(x)] + \psi[p(x)]$ почти всюду, что, в силу (6), равно (5). Очевидно, если C – корень уравнения $p = \varphi(p)$, то функция $p(x) \equiv C$ есть решение уравнения (6).

2.1. Относительно существования решения интегрального уравнения (6) заметим следующее.

В случае, когда $\varphi, \psi \in C^1(D)$ и $p(x)$ имеет производную почти всюду, дифференцирование равенства (6) дает для п.в. $x \in I$:

$$p(x) = \varphi[p(x)] + x\varphi'_p[p(x)] \cdot p'(x) + \psi'_p[p(x)] \cdot p'(x), \quad (7)$$

то есть «классическое» уравнение для $p(x)$. Если $p(x)$ удовлетворяет $\forall x \in I$ уравнению (7) и условию $p(a) = C$, причем $p'(x)$ существует *всюду* на I , конечна и не меняет знак (например, неотрицательна), то $p(x)$ является решением уравнения (6). Действительно, $p(x)$ монотонна на I . Значит $p'(x)$ суммируема на I [2. С. 187]. Поэтому функция

$$\frac{d}{dx}\psi[p(x)] = \psi'_p \cdot p'_x \quad (8)$$

существует *всюду*, конечна и суммируема. А тогда, в силу тождества (7), функция

$$\frac{d}{dx}(x\varphi[p(x)]) = p - \psi'_p \cdot p'_x \quad (9)$$

существует *всюду* на I , конечна и суммируема. Поэтому из (8) и (9) следует [2. С. 234], что

$$\psi[p(x)] - \psi[p(a)] = \int_a^x (p(t)dt - x\varphi[p(x)] + a\varphi[p(a)]),$$

то есть $p(x)$ – решение уравнения (6).

2.2. Так же доказывается более общее утверждение. Если φ'_p, ψ'_p существуют *всюду* на D и конечны, а $p(x)$ *всюду* на I удовлетворяет уравнению (7) и условию $p(a) = C$, причем производная функции $\psi[p(x)]$ существует *всюду*, конечна и суммируема на I , то $p(x)$ – решение уравнения (6).

Данное понятие обобщенного решения заслуживает внимания еще и потому, что множество решений уравнения (6) может быть шире множества решений $p(x)$ уравнения (7).

2.3. Этот абзац имеет методическую цель. Чтобы найти решение уравнения (7), рассмотрим на D уравнение

$$[p - \varphi(p)] \frac{dx}{dp} = \varphi'(p)x + \psi'(p), \quad (10)$$

предполагая, что $\varphi(p) \neq p$ на D . Как известно, для любого сегмента $S \subset D$ общее решение $x(p, C)$ уравнения (10) выписывается явно. И если в дальнейшем ограничиться лишь такими решениями $x(p)$ уравнения (10), что $x'(p) \neq 0$ *всюду* на D , то, согласно известной теореме Дарбу [3. С. 224], производная $p'(x)$ со-

храняет знак на D , то есть либо *всюду* положительна, либо *всюду* отрицательна. Обратная для $x(p)$ функция $p(x)$ тогда строго монотонна и удовлетворяет уравнению (7). Ясно, что при этом можно записать решение уравнения Лагранжа в параметрической форме

$$x = x(p, C), \quad y = p\varphi(p) + \psi(p). \quad (11)$$

Заметим еще, что для записи в параметрической форме решения уравнения Клеро нужна еще непрерывность $\psi''(p)$. Это не требуется в (11).

3. Уравнение $y = f(x, y')$, $x \in I$.

Пусть $f(x, p)$ — функция, определенная на $I \times D$, и $C \in D$ — произвольная постоянная.

Определение. Обобщенным решением уравнения $y = f(x, y')$ назовем *всякую* функцию $y(x)$ вида

$$y = \int_a^x p(t)dt + f(a, C),$$

где $p(x)$ – *любое* определенное *всюду* на I интегрируемое по Лебегу решение интегрального уравнения

$$\int_a^x p(t)dt = f(x, p(x)) - f(a, C) \text{ п.в. на } I, \quad (12)$$

удовлетворяющее условиям: $p(a) = C, p(I) \subset D$.

Для того, чтобы существовало определенное *всюду* на I решение $p(x)$ интегрального уравнения (12), необходимо, чтобы $p(x)$ почти *всюду* удовлетворяло обыкновенному дифференциальному уравнению

$$p(x) = \frac{d}{dx}[f(x, p(x))], \quad (13)$$

и достаточно, чтобы существовало суммируемое на I решение $p(x)$ уравнения (13), определенное *всюду* на I .

4. Замечание

К другому понятию обобщенного решения уравнения Клеро приводят следующие соображения. Если функцию $p(x)$ удалось подобрать так, что она еще и дифференцируема почти *всюду* на I , непрерывна и $x \equiv -\psi'_p(p(x))$, то функция

$$y = xp(x) + \psi[p(x)] \quad (14)$$

удовлетворяет в точках существования $p'(x)$ уравнению Клеро: это проверяется просто подстановкой ее в уравнение (1). А это значит, что пару функций

$$x = -\psi'(p), \quad y = xp + \psi(p) \quad (15)$$

можно считать его «обобщенным решением в параметрической форме», если не требовать в (15) дифференцируемость функции $\psi'(p)$. Целесообразность такого понимания решения состоит в том, что при этом нет нужды выражать p через x . Однако отказ от требования дифференцируемости функции $x = -\psi'(p)$ не вполне естествен для понятия решения в параметрической форме дифференциального уравнения, [4. С. 97].

Если же из уравнения $x = -\psi'(p)$ удастся явно выразить функцию $p(x)$, обладающую всюду на I конечной производной, то решению (15) соответствует явная форма (14). При этом нельзя, видимо, дока-

зать, что функция (14) является обобщенным решением в смысле определения из пункта 1, например, если $p'(x)$ существует всюду и конечна на I , но не суммируема на I .

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никольский С.М.* Курс математического анализа. Т. 1. М.: Наука, 1973.
2. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. М.: ГИТТЛ, 1950.
3. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Наука, 1966.
4. *Богданов Ю.С., Мазанник С.А., Сыроид Ю.Б.* Курс дифференциальных уравнений. Минск: Універсітэцкае, 1996.

Статья поступила в научную редакцию «Математика» 10 июня 2003 г.