УДК 517.982

Е.Г. Лазарева

О МНОЖЕСТВЕ РЯДОВ, СОХРАНЯЮЩИХ СХОДИМОСТЬ ПОСЛЕ ДАННОЙ ПЕРЕСТАНОВКИ

Известно, что множество безусловно сходящихся рядов является всюду плотным множеством первой категории в пространстве сходящихся рядов с супремум-нормой. Доказывается, что этим же свойством обладает множество рядов, сходимость которых не меняется после фиксированной перестановки, если только эта перестановка меняет сходимость. Результат справедлив для пространства рядов над любым банаховым пространством.

Введение. Пусть $(E,\|*\|)$ – банахово пространство. Рассмотрим *пространство сходящихся рядов над пространством E:*

$$S_C(E)=\left\{X=\left(x_k\right)_{k=1}^{\infty}:\sum_{k=1}^{\infty}x_k \ \ \textit{сходится}\right\},$$

$$|X|=\sup\left\{\|\sum_{k=1}^{n}x_k\|,\ n\in N\right\}.$$

Нетрудно убедиться, что $(S_C(E),|*|)$ – банахово пространство. В работе [1] было показано, что множество

$$S_{US}\left(E\right)=\left\{X\in S_C\left(E\right):\sum_{k=1}^{\infty}x_k \ \ \textit{сходится безусловно}\right\}$$

является всюду плотным множеством первой категории в пространстве $S_C\left(E\right)$. В данной работе мы значительно расширим множество $S_{UC}\left(E\right)$ с сохранением указанного свойства. Для этого введем следующее понятие. Будем говорить, что перестановка π *меняет сходимость* (является *существенной*), если найдется числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=a\in R$, такой, что $\sum_{k=1}^{\infty}a_{\pi(k)}$ расходится. Зафиксируем перестановку π, меняющую сходимость, и рассмотрим множество

$$S_{C,\pi}\left(E\right)=\left\{X\in S_C\left(E\right):\sum_{k=1}^{\infty}x_{\pi(k)} \ \ \textit{сходится}\right\}.$$

Очевидно,что $S_{UC}\left(E\right)\subset S_{C,\pi}\left(E\right)$. Цель работы – доказать **теорему** : *Множество* $S_{C,\pi}\left(E\right)$ *есть всюду плотное множество первой категории в пространстве* $S_C\left(E\right)$ *для любой существенной перестановки* π.

Доказательство основной теоремы. Для доказательства нам понадобится следующая

Лемма. *Пусть перестановка π меняет сходимость, E – банахово пространство. Тогда найдется сходящийся ряд* $\sum_{k=1}^{\infty}y_k$ *в пространстве E, такой, что*

$$\sup\left\{\left\|\sum_{k=1}^{n}y_{\pi(k)}\right\|,\ n\in N\right\}=\infty.$$

Доказательство. Так как π меняет сходимость, то найдется числовой ряд $\sum_{i=1}^{\infty}a_i=0$, такой, что $\sum_{i=1}^{\infty}a_{\pi(i)}$ расходится. Построим числовой ряд $\sum_{i=1}^{\infty}b_i=0$, такой, что $\sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n}b_{\pi(i)}\right\|,\ n\in N\right\}=\infty$. Тогда для любого элемента $e\in E$, $e\neq 0$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty}y_k$, $y_k=eb_k$, будет искомым. Введем обозначения:

$$s(I,n)=\sum_{i=1}^{n}a_i\ ,\ s(\pi,n)=\sum_{i=1}^{n}a_{\pi(i)}\ .$$

Так как $s(\pi,n)$ не сходится к нулю, то найдется последовательность $\left\{n_j\right\}_{j=1}^{\infty}, n_1<n_2<...,\ n_j\in N\ \ \forall j\in N$, такая, что для некоторого $C>0$ выполнено: $\forall j\in N\ \ s(\pi,n_j)\geq C>0$. Положим $M_1=n_1$ и найдем натуральное N_1, такое, что $\forall n>N_1\ \ |s(I,n)|<\frac{C}{2}$ и $\pi\left\{1,...,M_1\right\}\subset\left\{1,...,N_1-1\right\}$.

Теперь для каждого $k\in N$ найдем натуральные числа

$$M_{k+1}=\min\left\{n_j:\{1,...,N_k+1\}\subset\pi\left\{1,...,n_j\right\}\right\},$$

$$N_{k+1}=\min\left\{N:\pi\left\{1,...,M_{k+1}\right\}\subset\left\{1,...,N-1\right\}\right\}.$$

Выпишем в естественном порядке натуральные числа, образующие множество

$$\Pi_k=\pi\left\{1,...,M_{k+1}\right\}\backslash\left\{1,...,N_k+1\right\}:$$

$$N_k+l_1^k, N_k+l_1^k+1,...,N_k+l_1^k+m_1^k,$$

$$\ldots$$

$$N_k+l_{r(k)}^k\ \ ,N_k+l_{r(k)}^k+1,....N_k+l_{r(k)}^k+m_{r(k)}^k\ .$$

Здесь $r(k)$ – количество блоков подряд идущих натуральных чисел во множестве Π_k. Заметим, что $r(k)\to\infty$ при $k\to\infty$, так как сумма элементов ряда $\sum\left\{a_i, i\in\{N_k+l_j^k,...,N_k+l_j^k+m_j^k\}\ \right\}$ для каждого $j\in\left\{1,...,r\left(k\right)\right\}$ стремится к нулю по критерию Коши при $k\to\infty$, а сумма

$$|\sum\left\{a_i,\ i\in\Pi_k\right\}|=|\,s(\pi,M_{k+1})-s(I,N_k+1)\,|\geq$$

$$\geq C-\frac{C}{2}=\frac{C}{2}>0$$

для всех натуральных k.

Строим ряд $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$:

$$b_i = \frac{\ln\ r(k)}{r(k)},$$

если $\exists k \in N,\ j \in \{1,2,...,r(k)\}:\ i = N_k + l_j^k$;

$$b_i = -\frac{\ln\ r(k)}{r(k)},$$

если $\exists k \in N,\ j \in \{1,2,...,r(k)\}:\ i = N_k + l_j^k + m_j^k + 1$;

$$b_i = 0$$

в остальных случаях.

Очевидно, что $\lim_{i\to\infty} b_i = 0$ и $\sum_{i=1}^{\infty} b_i = 0$, так как в этом ряде чередуются положительные и отрицательные члены. После перестановки π имеем

$$\sum_{i=1}^{M_{k+1}} b_{\pi(i)} = \sum_{i\in\Pi_k} b_i = \ln r(k),$$

следовательно (так как $r(k)\to\infty$), нужное условие выполнено.□

Теорема. *Множество* $S_{C,\pi}(E)$ *есть всюду плотное множество первой категории в пространстве* $S_C(E)$ *для любой существенной перестановки* π.

Доказательство. Множество $S = S_{C,\pi}(E)$ всюду плотно в $S_C(E)$, так как уже ряды с конечным числом ненулевых членов образуют всюду плотное множество в $S_C(E)$. Представим множество S в виде счетного объединения:

$$S = \bigcup_{n\in N} S_n,$$

где $S_n = \left\{ X \in S\ : \left\| \sum_{k=1}^{m} x_{\pi(k)} \right\| \le n \quad \forall m \in N \right\}.$

Покажем, что множество S_n нигде не плотно в пространстве $S_c(E)$. Зафиксируем сходящийся ряд $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ в пространстве *E*, такой, что

$$\sup\left\{ \left\| \sum_{k=1}^{m} y_{\pi(k)} \right\|, m\in N \right\} = \infty,$$

зафиксируем $n \in N$. Пусть $X \in S_C(E), \varepsilon > 0$. Найдем в открытом шаре *U*(*X*,ε) шар *U*(*Z*,δ), такой, что $u(Z,\delta)\cap S_n = \varnothing$. Если *X* таков, что

$$\sup\left\{ \left\| \sum_{k=1}^{m} x_{\pi(k)} \right\|, m\in N \right\} = +\infty,$$

то *Z*=*X*.

Если же $\sup\left\{ \left\| \sum_{k=1}^{m} x_{\pi(k)} \right\|, m\in N \right\} < \infty$, то положим $Z = X + \frac{\varepsilon}{2|Y|}\cdot Y$, где $Y = (y_k)_{k=1}^{\infty}$. Очевидно, что $\sup\left\{ \left\| \sum_{k=1}^{m} z_{\pi(k)} \right\|, m\in N \right\} = \infty$.

Найдем число $K \in N$, такое, что $\left\| \sum_{k=1}^{K} z_{\pi(k)} \right\| > 2n$.

Положим $\delta = \frac{n}{4K}$.

Пусть $V = (v_k)_{k=1}^{\infty} \in U(Z,\delta)$, тогда *V*=*Z*+*R*, $|R| < \frac{n}{4K}$. Покажем, что $V \notin S_n$. Для этого отметим, что

$$\left\| \sum_{k=1}^{K} r_{\pi(k)} \right\| \le K\cdot \max\left\{ \|r_k\|, k\in\{1,...,K\} \right\} =$$

$$= K\cdot\|r_{k_0}\| \le K\left(\left\| \sum_{k=1}^{k_0} r_k \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{k_0-1} r_k \right\| \right) \le$$

$$\le 2|R|K < \frac{n}{2}.$$

Получаем: $\left\| \sum_{k=1}^{K} v_{\pi(k)} \right\| \ge \left\| \sum_{k=1}^{R} z_{\pi(k)} \right\| - \left\| \sum_{k=1}^{K} r_{\pi(k)} \right\| > \frac{3n}{2}$, то есть $V \notin S_n$. Теорема доказана.

Замечание. Несколько изменив доказательство леммы, легко доказать, что:

a) *Перестановка, меняющая сумму, меняет сходимость;*

b) *Если перестановка меняет сходимость или сумму в пространстве E, то она меняет сходимость.*

Поэтому для таких перестановок утверждение теоремы остается справедливым.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иванова Е.Г.* Пространства векторных рядов // ИНПРИМ-1998: Тез. докл. Ч. I. Новосибирск, 1998. С. 71.

Статья представлена кафедрой общей математики механико-математического факультета Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Математика» 24 мая 2003 г.