УДК 517.54

А.Н. Малютина, Б.В. Соколов

О РАВНОСТЕПЕННОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ КЛАССА ОТОБРАЖЕНИЙ С (*s*, α)-УСРЕДНЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Для отображений с (s,α)-усредненной характеристикой доказывается оценка искажения евклидова расстояния в шаре и равностепенная непрерывность класса этих отображений.

Пусть R^n – евклидово n-мерное пространство, $n = 3, 4, 5, \ldots$, $x \in R^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $|x| = \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$, B^n – шар $|x| < 1$. Если $D \subset R^n$ – область, то через ∂D и $\bar{D}$ обозначим соответственно границу и замыкание области D в R^n. Пусть $S_r(y) = \{x \in D : |x - y| = r\}$. Через $\omega(f, E) = \sup\limits_{x,y\in E} |f(x) - f(y)|$ обозначим колебание отображения $f : D \to R^n$ на множестве $E \subset D$.

Определение 1. Будем говорить, что отображение $f : D \to R^n$ принадлежит классу $f \in Q_K^{s,\alpha}(D)$, если

$f \in W_{n,\mathrm{loc}}^1(D)$ – непрерывное, открытое, изолированное отображение, якобиан отображения $J(x, f) > 0$ почти всюду в D;

существует постоянная $K > 0$, такая, что при фиксированных s, α, $\frac{1}{n-1} < s < \infty$, $\alpha \in R$, интеграл

$$I_{s,\alpha}(f, D) = \left(\int_D \lambda^s(x, f)\, r^\alpha(x, \partial D) \frac{dx}{\left(1+|x|^2\right)^n}\right)^{\frac{1}{s}} \le K,$$

где $\lambda(x, f) = \dfrac{|\nabla f|^n}{J(x, f)}$, $r(x, \partial D)$ – евклидово расстояние от точки x до границы ∂D области D.

Назовем отображение $f : D \to R^n$ отображением с (s,α)-усредненной характеристикой ($f \in Q^{s,\alpha}(D)$), если $f \in Q_K^{s,\alpha}(D)$ при каком-либо конечном $K > 1$

Известно [1], что $Q^{s,\alpha} \not\subset BL^{p,\alpha}$ при $p < n$, $s < \dfrac{p}{n-p}$.

Определение 2. Функцию

$$k(t) : (0, +\infty) \to [0, +\infty)$$

будем называть ядром, если она удовлетворяет следующим условиям:

$k(t)$ непрерывна, не возрастает и $\lim\limits_{t\to 0+} k(t) = \infty$;

$$\int_0 k(t)\, t^{n-1} dt < \infty.$$

Определение 3. Будем говорить, что отображение $f : D \to R^n$ принадлежит классу $f \in Q_K^{s,\alpha}(k, D)$, если существует постоянная $K > 1$, такая, что при фиксированных s, α, $1 < s < \infty$, $\alpha \in R$, интеграл

$$I_{s,\alpha}(f, k, D) = \left(\int_D \lambda^s(x, f)\, r^\alpha(x, \partial D)\, k(|x - y|) \frac{dx}{\left(1+|x|^2\right)^n}\right)^{\frac{1}{s}} \le K$$

для всех $y \in \bar{D}$, где ядро $k(t)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty \left(k(t)\right)^{\frac{1}{s+1}} t^{\frac{n}{s+1}+\bar{\alpha}-1} dt = +\infty, \quad \bar{\alpha} = \begin{cases} \alpha, & \alpha \ge 0. \\ 0, & \alpha < 0. \end{cases}$$

Будем говорить, что отображение $f : D \to R^n$ принадлежит классу $f \in Q^{s,\alpha}(k, D)$, если $f \in Q_K^{s,\alpha}(k, D)$ при каком-либо конечном K.

Различные соотношения между классами $Q_K^{s,\alpha}(k, D)$ и классами отображений с ограниченными интегралами Дирихле и с ограниченным потенциалом градиента см. в [1].

Мы опираемся на следующее утверждение, представляющее собой модификацию хорошо известного неравенства [2].

Теорема 1. Пусть

$$f \in Q^{s,\alpha}(k, B^n),\ s > (n-1)\left(1 + \frac{\bar{\alpha}}{\gamma}\right),\ 0 < \gamma < 1,$$

и пусть $\{S_r\}$ – семейство концентрических сфер с центром в точке $x_0 \in B^n$ и радиусом r, $0 \le r_1 \le r \le r_2 < \frac{1}{2}$. Тогда выполняется неравенство

$$\int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{\omega^{ns}(f, S_r)\, k(r)}{r^{s+1-n+\bar{\alpha}}}\right)^{\frac{1}{s+1}} dr \le$$

$$\le C \cdot \int_{B_{r_2}} |\nabla f|^s \cdot r^\alpha(x, \partial B^n)\, k(|x - x_0|)\, dx,$$

где $\omega(f, S'_r)$ – колебание отображения f на множестве $S'_r = S_r \cap B^n$, C – постоянная, не зависящая от f.

Доказательство. Используя лемму 2 [3] и включение $Q^{p/(n-p)} \subset BL^p$, $p < n$, будем иметь

$$I = \int_{r_1}^{r_2} \omega^{ns/(s+1)}(f, S_r)\, r^q k^{1/(s+1)}(r)\, dr \le$$

$$\le C \int_{B_{r_2}^n} \frac{|\nabla f|^{\frac{ns}{s+1}}}{J^{s(s+1)}(x, f)} r^\alpha(x, \partial B^n)\, k^{\frac{1}{s+1}}(|x - x_0|)\, J^{\frac{s}{s+1}}(x, f)\, d\sigma_x,$$

где $q = 1 + \overline{\alpha} - n/(s+1)$, C – постоянная, не зависящая от f. Применяя к интегралу, стоящему в правой части этого неравенства, неравенство Гельдера с показателями $p = \dfrac{1}{s+1}$, $q = \dfrac{s}{s+1}$, получим

$$I \le C \cdot V_{r_2}^{k}(f, x_0),$$

где

$$V_{r_2}^{k}(f, x_0) = \int\limits_{B_{r_2}^{n}(x_0)} |\nabla f|^{s} \cdot r^{\alpha}(x, \partial B^{n}) \cdot k^{\frac{1}{s+1}}(|x - x_0|)\, d\sigma_x .$$

Следствие 1. В условиях и обозначениях теоремы 1 для любого $\varepsilon > 0$ существует $\overline{r} \in [r_1, r_2]$, такое, что

$$\omega^{\frac{ns}{s+1}}\left(f, S_{\overline{r}}'\right) \cdot \int\limits_{r_1}^{r_2} k^{1/(s+1)}(r) r^{q} dr \le (C + \varepsilon) \cdot V_{r_2}^{k}(f, x_0),$$

где $q = 1 - \dfrac{n}{s+1} + \overline{\alpha}$.

Определение 3. Непрерывное отображение $f : D \to R^{n}$ называется монотонным, если для всякой подобласти D', $D' \subset D$, имеет место равенство $\omega(f, D') = \omega(f, \partial D')$.

Тогда имеем следующую оценку искажения евклидова расстояния внутри шара B^{n} для монотонных отображений класса $Q^{s,\alpha}(k, B^{n})$.

Теорема 2. Пусть f – монотонное отображение класса $Q^{s,\alpha}(k, B^{n})$, $s > (n-1)\left(1 + \dfrac{\overline{\alpha}}{\gamma}\right)$, $0 < \gamma < 1$ и пусть F – произвольный континуум, $F \subset B^{n}$. Тогда для любых точек $x', x'' \in F$, таких, что $|x' - x''| < \sigma$, $0 < \sigma < r(F, \partial B^{n})$, справедливо неравенство

$$|f(x') - f(x'')| \le \left(\frac{C \int\limits_{B^{n}} |\nabla f|^{s} r^{\alpha}(x, \partial B^{n}) k(|x - x'|) d\sigma_x}{\int\limits_{|x'-x''|}^{\sigma} k^{1/s+1}(t) t^{n+\overline{\alpha}-s-1} dt} \right)^{\frac{s+1}{ns}},$$

где C – постоянная, не зависящая от f.

Доказательство. Пусть точки $x', x'' \in F$ таковы, что $|x' - x''| = r_1 < \sigma$. Рассмотрим семейство концентрических сфер $\{S_r\}$ с центром в точке $x' \in F$ и радиусом r, $r \in [r_1, \sigma]$. Так как каждая сфера семейства $\{S_r\}$ содержится в шаре B^{n} и отделяет точки x', x'' от границы шара B^{n}, то, в силу следствия 1, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\overline{r} \in [r_1, \sigma]$, такое, что

$$\omega(f, S_{\overline{r}}) \le \left(\frac{(C+\varepsilon) \int\limits_{B^{n}} |\nabla f|^{s} r^{\alpha}(x, \partial B^{n}) k(|x - x'|) d\sigma_x}{\int\limits_{|x'-x''|}^{\sigma} k^{1/s+1}(t) t^{n+\overline{\alpha}-s-1} dt} \right)^{\frac{s+1}{ns}}. \quad (1)$$

Отсюда, в силу монотонности f и неравенства (1), получаем

$$|f(x') - f(x'')| \le d\left(f\left(B_{\overline{r}}^{n}(x')\right)\right) = \omega\left(f, B_{\overline{r}}^{n}(x')\right) \le$$

$$\le \omega(f, S_{\overline{r}}) \le \left(\frac{(C+\varepsilon) \int\limits_{B^{n}} |\nabla f|^{s} r^{\alpha}(x, \partial B^{n}) k(|x - x'|) d\sigma_x}{\int\limits_{|x'-x''|}^{\sigma} k^{1/s+1}(t) t^{n+\overline{\alpha}-s-1} dt} \right)^{\frac{s+1}{ns}},$$

так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то утверждение теоремы доказано.

Следствие 2. Если в условиях и обозначениях теоремы 2 положить

$$k(t) = k_{s}^{\frac{1}{s+1}}(t) = t^{\beta - n}, \quad 0 < \beta < s - \alpha, \ \alpha \ge 0,$$

то для любых точек $x', x'' \in F$, таких, что $|x' - x''| < \dfrac{1}{2} r(F, \partial B^{n})$, выполняется неравенство

$$|f(x') - f(x'')| \le$$

$$\le \left(C \int\limits_{B^{n}} \frac{\lambda^{s}(f, x) r^{\alpha}(x, \partial B^{n}) d\sigma_x}{|x' - x|^{n-s}} \right)^{\frac{s+1}{ns}} |x' - x''|^{\left(1 - \frac{\alpha+\beta}{s}\right)\frac{s+1}{ns}}$$

Следствие 3. Если в условиях и обозначениях теоремы 2 положить $k(t) = k_{s-\alpha}^{\frac{1}{s+1}}(t) = t^{\frac{ns}{s+1} - \overline{\alpha}}$, то для любых точек $x', x'' \in F$, таких, что $|x' - x''| < \dfrac{1}{2} r(F, \partial B^{n})$, выполняется неравенство

$$|f(x') - f(x'')| \le$$

$$\le \left(C \int\limits_{B^{n}} \frac{\lambda^{s}(f, x) r^{\alpha}(x, \partial B^{n}) d\sigma_x}{|x' - x|^{n-s}} \right)^{\frac{s+2}{ns}} \ln^{-\frac{s+1}{ns}} \frac{1}{|x' - x''|}.$$

Из следствия 3 получаем следующий результат о порядке равностепенной непрерывности семейства отображений класса $f \in Q_{K}^{s,\alpha}(k_{\beta}, B^{n})$.

Теорема 3. Пусть $F = \{f\}$ – семейство монотонных отображений,

$$f \in Q_{K}^{s,\alpha}(k_{\beta}, B^{n}),$$

$$s > (n-1)\left(1 + \frac{\alpha}{\gamma}\right), \ \alpha \ge 0, \ 0 < \gamma < 1,$$

$$0 < \beta < \frac{ns}{s+1} - \alpha.$$

Тогда для любых точек $x', x'' \in B^{n}$ имеет место следующая оценка, равностепенная по классу F:

$$|f(x') - f(x'')| \le (C \cdot K)^{\frac{1}{s+1}} \cdot |x' - x''|^{q},$$

где $q = \dfrac{2}{s} - \dfrac{\alpha + \beta}{ns}$, C – некоторая постоянная, не зависящая от отображения f.

Следствие 4. Если в условиях и обозначениях теоремы 3 $f(0)=0$, то для любой точки $x \in B^n$ справедлива следующая оценка роста отображения f:

$$\left|f(x)\right| \le (C \cdot K)^{\frac{1}{s+1}} \cdot |x|^q ,$$

где $q = \frac{2}{s} - \frac{\alpha+\beta}{ns}$, а C – постоянная, не зависящая от f.

Следствие 5. Не существует монотонных отображений

$$f \in Q_K^{s,\alpha}\left(k_\beta, B^n\right),$$

$$s > (n-1)\left(1+\frac{\alpha}{\gamma}\right),\ \alpha \ge 0,\ 0<\gamma<1,\ 0<\beta<\frac{ns}{s+1}-\alpha ,$$

шара B^n на неограниченные области $D \subset R^n$.

Определение 4. Семейство $F=\{f\}$ непрерывных отображений $f: D \to R^n$ называется нормальным в D, если любая последовательность $\{f_n\}$, $f \in F$ содержит в себе равномерно сходящуюся внутри подпоследовательность.

Теорема 4. Если

$$f \in Q_K^{s,\alpha}\left(k_\beta, B^n\right),$$

$$s > (n-1)\left(1+\frac{\alpha}{\gamma}\right),\ \alpha \ge 0,\ 0<\gamma<1 ,$$

то семейство $F=\{f\}$ монотонных отображений f нормально в B^n

Доказательство следует из теоремы 20.4 [4] и следствия 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малютина А.Н.* Классы отображений с ограниченным в среднем искажением // Вестник ТГУ. 2000. № 269. С. 51–55.
2. *Овчинников И.С., Суворов Г.Д.* Преобразования интеграла Дирихле и пространственные отображения // Сиб. мат. журн. 1965. Т. 6. № 6. С. 1292–1314.
3. *Куфарев Б.П., Соколов Б.В.* О граничном соответствии при отображениях областей из R^n // ДАН СССР. 1978. Т. 243. № 3. С. 568–571.
4. *Vaisala J.* Lectures on *n*-dimensional Mappings // Lect. Notes. Berlin: Springer Verlag, 1971. No. 229. 144 p.

Статья представлена кафедрой теории функций и лабораторией математического анализа механико-математического факультета Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 24 мая 2003 г.