

УПРАВЛЯЮЩИЕ ФУНКЦИИ И АРГУМЕНТ ПРОИЗВОДНОЙ

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда Президента РФ для молодых российских ученых, грант № МК – 2409.2003.01

В работе продолжается исследование связи уравнения Левнера и функционала, представляющего собой аргумент производной голоморфных однолистных в круге функций, имеющих p -кратную симметрию вращения относительно нуля.

1. Пусть S_p – класс голоморфных однолистных в единичном круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функций, нормированных условиями $f(0) = 0, f'(0) = 1$, имеющих p -кратную ($p = 2, 3, \dots$) симметрию вращения относительно нуля. Пусть S'_p – плотный подкласс класса S_p функций

$$f_p(z) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^\tau f(z, \tau), \quad (1)$$

где $f(z, \tau) = e^\tau z + \dots$, $0 \leq \tau < \infty$, решение уравнения Левнера

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\zeta \frac{\mu^p(\tau) + \zeta^p}{\mu^p(\tau) - \zeta^p}, \quad \zeta(z, 0) = z \in E,$$

в котором $\mu(\tau), |\mu(\tau)| = 1$, – непрерывная или кусочно-непрерывная функция на $[0, \infty)$.

Рассмотрим функционал

$$I(f_p, z_0) = \arg f'_p(z_0),$$

где $f_p \in S_p$, z_0 – фиксированная точка в $E \setminus \{0\}$. Этот функционал дает значение угла поворота касательной к некоторой кривой, проходящей через точку z_0 , в точке z_0 при отображении f_p . Известно, что экстремальные функции задачи о максимуме функционала $I(f_p, z_0)$ принадлежат классу S'_p . Также известно, что функцию класса S_p можно аппроксимировать функциями класса S'_p . Таким образом, задачу достаточно решать для подкласса S'_p . Сузим $I(f_p, z)$ на подкласс S'_p . Так как оценки функционала на S_p не зависят от $\arg z_0$, то ограничимся рассмотрением $I(f_p, r) = \arg f'_p(r)$, $r = |z_0|$.

2. Параметризуем функционал $I(f_p, r)$.

Из уравнения Левнера имеем

$$\frac{d \ln e^\tau f}{d\tau} = -\frac{2f^p}{\mu^p - f^p}. \quad (2)$$

Продифференцировав соотношение (1) по z , получим

$$\frac{d}{d\tau} \ln \frac{f'}{f} = -\frac{2p\mu^p f^p}{(\mu^p - f^p)^2}, \quad (3)$$

где f' – производная функции $f(z, \tau)$ по z . Проинтегрировав равенства (2) и (3) по τ , используя (1) и

условие $f(z, 0) = z$, будем иметь

$$\ln \frac{f_p(z)}{z} = -2 \int_0^\infty \frac{f^p(z, \tau)}{\mu^p(\tau) - f^p(z, \tau)} d\tau$$

и

$$\ln \frac{zf'_p(z)}{f_p(z)} = -2p \int_0^\infty \frac{\mu^p(\tau) f^p(z, \tau)}{[\mu^p(\tau) - f^p(z, \tau)]^2} d\tau.$$

Отсюда при $z = \tau$ получаем

$$\ln f'_p(r) = -2 \int_0^\infty \left[\frac{f^p(r, \tau)}{\mu^p(\tau) - f^p(r, \tau)} + \frac{p\mu^p(\tau) f^p(r, \tau)}{[\mu^p(\tau) - f^p(r, \tau)]^2} \right] d\tau. \quad (4)$$

Обозначим

$$|f(r, \tau)| = \rho(r, \tau) = \rho(\tau), \quad (5)$$

$$f(r, \tau) \bar{\mu}(\tau) = \rho(r, \tau) y(r, \tau) = \rho(\tau) y(\tau)$$

и сделаем в равенстве (4) замену переменной τ на ρ . Получим

$$\ln f'_p(r) = -2 \int_0^r \left[y^p + \frac{p(y^p - \rho^p)}{1 - \rho^{2p} y^p} \right] \frac{\rho^{p-1} d\rho}{1 - \rho^{2p}} + 2 \int_0^r \frac{\rho^{2p-1} d\rho}{1 - \rho^{2p}}.$$

Заменим функцию $y(r, \rho)$, $|y(r, \rho)| = 1$, на вещественнозначную функцию $t(r, \rho)$ по формуле

$$y = \left(\frac{i+t}{i-t} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Заменим также переменную ρ на s , положив

$$\rho = \left(\frac{1-s}{1+s} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Будем иметь

$$-2 \int_0^r \left[y^p + \frac{p(y^p - \rho^p)}{1 - \rho^{2p} y^p} \right] \frac{\rho^{p-1} d\rho}{1 - \rho^{2p}} = i \int_\sigma^1 \left(\frac{1}{p} \frac{2t}{1+t^2} + \frac{2st}{s^2+t^2} \right) \frac{ds}{s},$$

$$\text{где } \sigma = \frac{1-r^p}{1+r^p}.$$

Таким образом,

$$I(f_p, r) = \int_\sigma^1 g(s, t) ds,$$

где

$$g(s, t) = \frac{1}{ps} \frac{2t}{t^2+1} + \frac{2t}{t^2+s^2}. \quad (6)$$

Очевидно, что некоторое решение $t = t(s)$, $\sigma \leq s < 1$, уравнения

$$g'_t = \frac{1}{ps} \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} + \frac{2(s^2-t^2)}{(s^2+t^2)^2} = 0 \quad (7)$$

доставит максимум функционалу $I(f_p, r)$.

3. Перепишем уравнение (7) в виде

$$x^3 + x^2 \frac{-1+2ps+2s^2-ps^3}{1+ps} + x \frac{ps-2s^2-2ps^3+s^4}{1+ps} - \frac{ps^3+s^4}{1+ps} = 0, \quad (8)$$

где $x = t^2$.

Поскольку здесь коэффициенты при x^3 и свободный член имеют противоположные знаки при $0 < s < 1$, то данное уравнение имеет хотя бы один положительный корень. Условием существования одного вещественного положительного корня $x = x(s)$ уравнения (8) является неравенство

$$-p^2(s^{12}+1) + (8p^3+8p)(s^{10}+1)s - 74p^2(s^8+1)s^2 + (8p^3+8p)(s^6+1)s^3 + 433p^2(s^4+1)s^4 - (16p^3+16p)(s^2+1)s^5 - 716p^2s^6 > 0.$$

При выполнении этого условия соответствующие корни $t_{0,1}(s) = \pm \sqrt{x(s)}$ уравнения (7) доставят минимальное и максимальное значения функционалу $I(f_p, r)$.

4. Для того, чтобы составить представление о графике кривой (7), перейдем к более простой кривой третьего порядка

$$\frac{1}{p} \frac{v}{v^2+1} + \frac{u}{u^2+1} = 0,$$

$$\text{где } u = \frac{t^2-s^2}{2ts}, \quad v = \frac{t^2-1}{2t}. \quad (9)$$

Зададим эту кривую параметрически, положив

$$\frac{1}{p} \frac{v}{v^2+1} = -\frac{h}{2}.$$

Будем иметь

$$u = u_m(h) = \frac{1+(-1)^m \sqrt{1-h^2}}{h}, \quad m = 0, 1,$$

$$v = v_n(h) = \frac{-1+(-1)^n \sqrt{1-p^2h^2}}{ph}, \quad n = 0, 1.$$

Исследовав расположение ветвей этой кривой, отбрасываем ветви, лежащие в четверти плоскости $-\infty < u < 0$, $0 < v < +\infty$, так как их прообразы при отображении (9) расположены в полуполосе $0 < s < 1$, $-\infty < t < 0$. Из (6) легко видеть, что верхнюю оценку функционалу $I(f_p, r)$ доставляют только функции $t = t(s)$, у которых $t > 0$.

Таким образом, мы будем рассматривать ветви кривой третьего порядка, расположенные в четверти плоскости $0 < u < +\infty$, $-\infty < v < 0$, которой при отображении (9) соответствует треугольник Δ , определяемый неравенствами $0 < t < 1$, $0 < s < 1$, $t > s$.

5. Из уравнения вспомогательной кривой получаем

$$u^l = -\frac{p}{2} \frac{v^2+1}{v} + (-1)^l \sqrt{\frac{p^2(v^2+1)^2}{4v^2}} - 1, \quad l = 0, 1.$$

Это уравнение при $u > 0$, $v < 0$ представляет собой уравнения интересующих нас ветвей. Заменим здесь переменные u и v на s и t . Будем иметь

$$s = \frac{p(t^2+1)^2}{4(t^2-1)} \pm \sqrt{\frac{p^2(t^2+1)^4}{16(t^2-1)^2} - t^2} \pm \sqrt{\frac{p(t^2+1)^2}{2(t^2-1)} \left(\frac{p(t^2+1)^2}{4(t^2-1)} \pm \sqrt{\frac{p^2(t^2+1)^4}{16(t^2-1)^2} - t^2} \right)}.$$

Это уравнение задает все ветви кривой (7). Выбирая и анализируя те из них, которые проходят через треугольник Δ , и вводя обозначения

$$a(t) = \frac{p(t^2+1)^2}{4(t^2-1)}, \quad b^+(t) = a(t) + \sqrt{a^2(t) - t^2},$$

$$b^-(t) = a(t) - \sqrt{a^2(t) - t^2},$$

получаем, что максимум функционалу $I(f_p, r)$ при $0 < s \leq s_{(0)}$,

$$s_{(0)} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{\left(p + \sqrt{p^2-1}\right)^2 + 1 + p + \sqrt{p^2-1}}},$$

доставляет решение уравнения (7), задаваемое формулой

$$s_0(t) = b^-(t) + \sqrt{2a(t)b^-(t)}, \quad (10)$$

а при $s_{(0)} < s < 1$ – решение уравнения (7), представленное формулой

$$s_1(t) = b^+(t) + \sqrt{2a(t)b^+(t)}. \quad (11)$$

6. Из формул (5) получаем $\mu = \bar{y}e^{i\varphi}$, где $\varphi = \arg f$.

Итак, имеет место

Теорема. Управляющие функции в уравнении Левнера

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\zeta \frac{\mu^p(\tau) + \zeta^p}{\mu^p(\tau) - \zeta^p}, \quad \zeta(z, 0) = z,$$

доставляющие максимум функционалу

$$I(f_p, z) = \arg f'_p(z), \quad f_p \in S_p \quad (p = 2, 3, \dots),$$

при фиксированном значении $z, |z| < 1$, определяются формулой

$$\mu_k = \bar{y}_k e^{i\varphi_k}, \quad k = 0, 1,$$

где $y_k(s) = \left(\frac{i+t_k(s)}{i-t_k(s)} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < s < 1,$

функции $t_0 = t_0(s)$ и $t_1 = t_1(s)$ неявно задаются соответственно равенствами (10) и (11), а $\varphi_k = \varphi_k(s)$, учитывая связь переменных s и ρ

$$\rho = \left(\frac{1-s}{1+s} \right)^{\frac{1}{p}},$$

находятся из уравнений

$$\frac{d \ln \rho}{d\tau} = -\frac{1-\rho^{2p}}{|1-\rho^p y_k^p|^2}, \quad i \frac{d\varphi_k}{d\tau} = -\frac{\rho^p (y_k^p - \bar{y}_k^p)}{|1-\rho^p y_k^p|^2}.$$

При этом $k=0$, если $0 < s \leq s_{(0)}$, то есть $\rho_{(0)} \leq \rho < 1$,

$$\rho_{(0)} = \left(\frac{\sqrt{\left(p + \sqrt{p^2 - 1} \right)^2 + 1} + p + \sqrt{p^2 - 1} - \sqrt{2} + 1}{\sqrt{\left(p + \sqrt{p^2 - 1} \right)^2 + 1} + p + \sqrt{p^2 - 1} + \sqrt{2} - 1} \right)^{\frac{1}{p}},$$

и $k=1$, если $s_{(0)} < s < 1$, то есть $0 < \rho < \rho_{(0)}$.

Случай $p=1$ исследован И.А. Александровым и А.И. Александровым в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров И.А., Александров А.И. Экстремальные управляющие функции в уравнении Левнера в теореме вращения // ДРАН. 2000. Т.371. №1. С.7-9.
2. Александров И.А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976.
3. Попов В.И. Исследование некоторых функционалов и свойств линий уровня на классах однолистных функций: Автореф. дис.... канд. физ.-мат. наук. Томск, 1965.

Статья представлена кафедрой математического анализа механико-математического факультета Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 24 мая 2003 г.