

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ В СЕБЯ С «ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ» НОРМИРОВКОЙ

Разработан численный метод построения конформного отображения $f: \Pi_z \rightarrow B$ полуплоскости $\Pi_z = \{z: \text{Im } z > 0\}$ на неограниченную односвязную область B , $B \subset \Pi_w$, при условии гидродинамической нормировки: $(f(z) - z) \rightarrow 0$, если $z \rightarrow \infty, \text{Im } z > 0$. Метод основан на предварительном построении конформного отображения $B_m \rightarrow \Pi_z$ полигональной области B_m , аппроксимирующей B , с определением констант в интеграле Шварца – Кристоффеля.

Конформные отображения широко используются при решении разнообразных задач естествознания (электростатики, гидравлики, гидро- и аэродинамики, теории упругости и др.).

Особое место в теории и практике конформных отображений занимают отображения с «гидродинамической» нормировкой, при которой нормировочные условия предписывают отображению в окрестности бесконечно удалённой точки быть близким к тождественному отображению. Так, в задачах теории упругости, гидро- и аэродинамики естественным требованием к комплексному потенциалу $z = \varphi(w)$ в неограниченной области течения, во внешности обтекаемого профиля, является условие $(\varphi(w) - w) \rightarrow 0$ при $w \rightarrow \infty$, выражающее тот факт, что на бесконечном удалении от обтекаемого профиля поток остаётся неискажённым.

Данная работа посвящена разработке нового численного метода построения конформного отображения неограниченной односвязной области, принадлежащей верхней полуплоскости, на верхнюю полуплоскость с гидродинамической нормировкой.

На основе предлагаемого метода созданы две программы (*HalfPlan.pas*, *HPChrGauss.pas*). Первая программа позволяет находить конформный образ данной неограниченной односвязной области, расположенной в верхней полуплоскости, на верхнюю полуплоскость. Результатом работы этой программы служат, в частности, значения параметров в формуле Шварца – Кристоффеля, используемых второй программой для нахождения гидродинамически нормированного обратного отображения – полуплоскости на данную область в полуплоскости. Опробование программ расчётами различных моделей областей свидетельствует об эффективности метода.

1. ПОСТРОЕНИЕ ПРЯМОГО ОТОБРАЖЕНИЯ $B \rightarrow \Pi_z$

1.1. Пусть B – неограниченная односвязная область, принадлежащая верхней полуплоскости $\Pi_w = \{w: \text{Im } w > 0\}$ и получающаяся удалением из Π_w ограниченного замкнутого множества (см. рис.1). Будем считать, что всякая ограниченная часть границы Γ области B представляет собой кусочно-гладкую жорданову кривую без точек возврата.

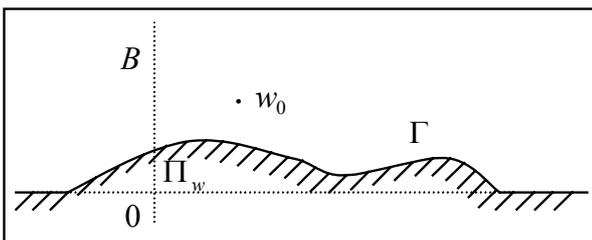


Рис. 1. Исходная область B в верхней полуплоскости

Пусть $w = f(z)$ – аналитическая в полуплоскости $\Pi_z = \{z: \text{Im } z > 0\}$ функция, осуществляющая (однолистное) конформное отображение Π_z на область B с гидродинамической нормировкой

$$\lim_{z \rightarrow \infty, \text{Im } z > 0} (f(z) - z) = 0. \quad (1)$$

Пусть $z = \varphi(w)$ – аналитическая в области B функция, обратная к $w = f(z)$, нормированная соответственно условию (1).

1.2. Отображение $\varphi: B \rightarrow \Pi_z$ получим как результат следующих последовательно осуществлённых отображений:

- области B на область B_ω внутри единичного круга $E_\omega = \{\omega: |\omega| < 1\}$ с помощью дробно-линейного отображения $\Pi_w \rightarrow E_\omega$ по формуле

$$\omega = \frac{w - w_0}{w - \bar{w}_0}, \quad (2)$$

- где w_0 – произвольно фиксированная точка области B ;
- специально нормированного отображения $\zeta = \zeta(\omega)$ области B_ω на единичный круг $E_1 = \{\zeta: |\zeta| < 1\}$;

- специально нормированного дробно-линейного отображения круга E_1 на полуплоскость Π_z .

1.3. Опишем способ построения второго из упомянутых отображений. Пусть Γ_ω – граница области B_ω (рис.2). Часть границы Γ_ω в окрестности точки $\omega = 1$ представляет собой дугу окружности $\{\omega: |\omega| = 1\}$. Обозначим эту дугу λ_1 .

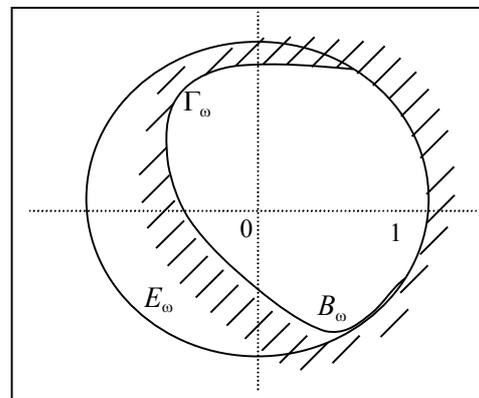


Рис. 2. Образ области B при дробно-линейном отображении

Пусть $\zeta = \psi(\omega)$ – какая-либо аналитическая функция, отображающая B_ω на круг E_1 с условием $\psi(1) = 1$. Согласно принципу симметрии Шварца [1. Гл. 2], функция $\zeta = \psi(\omega)$ допускает аналитическое продолжение через дугу λ_1 в область B_ω^* во внешности круга E_1 , симметричную B_ω относительно окружности $\{\omega : |\omega| = 1\}$. Продолженная таким образом функция, которую будем обозначать так же $\psi(\omega)$, регулярна в окрестности точки $\omega = 1$. Поскольку $\psi(1) = 1$ и дуга окружности λ_1 отображается функцией $\zeta = \psi(\omega)$ на некоторую дугу окружности $\{\zeta : |\zeta| = 1\}$ с внутренней точкой $\zeta = 1$ этой дуги, то линейный элемент в точке $\omega = 1$ сохраняет при отображении своё направление и, следовательно, $\arg \psi'(1) = 0$, т.е. $\psi'(1) > 0$.

Для нахождения $\psi(\omega)$ достаточно найти аналитическую функцию $\zeta_1 = \Phi(\omega)$, отображающую B_ω на круг $E_R = \{\zeta_1 : |\zeta_1| < R\}$ некоторого радиуса $R > 0$ с условиями $\Phi(0) = 0$, $\Phi'(0) = 1$. Действительно, совершив преобразование подобия $\zeta_1 \rightarrow \zeta_1 / R$ и поворота плоскости вокруг начала на угол $\arg \Phi(1)$, получим функцию $\psi(\omega) = e^{-i \arg \Phi(1)} \Phi(\omega) / R$, отображающую B_ω на круг E_1 с условиями $\psi(1) = 1$, $\psi'(1) > 0$.

Для построения нормированного указанными выше условиями отображения $\Phi : B_\omega \rightarrow E_R$ применяется итерационный алгоритм, аналогичный [2,3], основанный (см.[4]) на минимизации функционала $I(\Phi_n) = \int_{\Gamma_\omega} |\Phi'_n(\eta)| ds$, выражающего длину образа границы области B_ω при отображении функцией $\zeta_1 = \Phi_n(\omega)$ вида

$$\Phi_n(\omega) = \int_0^\omega F_n^2(t) dt, \quad (3)$$

где
$$F_n(\omega) = 1 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k + i\beta_k) \omega^k, \quad (4)$$

с достаточно большим номером n .

Решая задачу на экстремум $\int_{\Gamma_\omega} |F_n(\eta)|^2 ds \rightarrow \min$, приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно действительных коэффициентов $\alpha_k, \beta_k (k = 1, 2, \dots, n)$:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n (\alpha_k g_{km} + \beta_k g_{km}^*) &= -g_{m0}, \\ \sum_{k=1}^n (\alpha_k g_{km}^* - \beta_k g_{km}) &= -g_{m0}^* \end{aligned} \right\} (m = 1, \dots, n). \quad (5)$$

Здесь обозначено:

$$\begin{aligned} g_{km} &= \oint_{\Gamma_\omega} r^{m+k} \cos(m-k)\theta ds, \\ g_{km}^* &= \oint_{\Gamma_\omega} r^{m+k} \sin(m-k)\theta ds, \\ r &= |\omega|, \quad \theta = \text{Arg } \omega, \quad \omega \in \Gamma_\omega. \end{aligned} \quad (6)$$

Система уравнений (5) имеет единственное решение [5].

В монографии [6. Гл. 4] доказано, что для случая областей типа Смирнова, в частности в нашем случае (граница Γ_ω области B_ω – кусочно-гладкая кривая без нулевых углов), последовательность $\{F_n(\omega)\}_{n=1}^\infty$ сходится к $F(\omega)$ равномерно на замкнутом множестве $\overline{(B_\omega \cup B_\omega^*)}$. Поэтому последовательность функций $\Phi_n(\omega)$ сходится равномерно на $\overline{(B_\omega \cup B_\omega^*)}$ к $\Phi(\omega)$. Следовательно, функция $\zeta_1 = \Phi_n(\omega)$ при большом номере n отображает Γ_ω в кривую C_n , близкую к некоторой окружности $C_0^{(n)} = \{\zeta_1 : |\zeta_1| = R_n\}$. Радиус R_n этой окружности подлежит определению.

Для нахождения R_n предлагается следующая процедура. Решив СЛАУ (5) при фиксированном n , вычисляем затем по найденным $\alpha_k, \beta_k (k = 1, \dots, n)$ коэффициенты многочлена

$$\Phi_n(\omega) = \omega + \sum_{k=2}^{2n+1} (\xi_k + i\eta_k) \omega^k \quad (7)$$

по формулам

$$\xi_m = \frac{1}{m} \sum_{l=\max\{0, m-1-n\}}^{\min\{m-1, n\}} (\alpha_l \alpha_{m-1-l} - \beta_l \beta_{m-1-l}),$$

$$\eta_m = \frac{1}{m} \sum_{l=\max\{0, m-1-n\}}^{\min\{m-1, n\}} (\alpha_l \beta_{m-1-l} + \beta_l \alpha_{m-1-l}).$$

В качестве R_n возьмём величину

$$R_n = (r_{\min}^{(n)} + r_{\max}^{(n)}) / 2,$$

где $r_{\min}^{(n)} = \min_{\omega \in \Gamma_\omega} |\Phi_n(\omega)|$, $r_{\max}^{(n)} = \max_{\omega \in \Gamma_\omega} |\Phi_n(\omega)|$.

Ввиду равномерной сходимости $\Phi_n(\omega) \rightarrow \Phi(\omega)$ заключаем, что $R_n \rightarrow R$ при $n \rightarrow \infty$. Значит, последовательность функций $\chi_n(\omega) = e^{-i \arg \Phi_n(1)} \cdot \Phi_n(\omega) / R_n$ сходится равномерно на $\overline{(B_\omega \cup B_\omega^*)}$ к искомой функции $\psi(\omega)$, отображающей B_ω на единичный круг с условиями $\psi(1) = 1$, $\psi'(1) > 0$. Отметим, что в качестве приближённого значения $\psi'(1)$ можно взять величину $\chi'_n(1)$ при большом номере n .

Точность построенного приближения $\chi_n(\omega)$ определяется тем, насколько кривая $\gamma_n = \chi_n(\Gamma_\omega)$ близка к окружности $\{\zeta : |\zeta| = 1\}$. Если ширина $\delta_n = r_{\max}^{(n)} - r_{\min}^{(n)}$ кольца $\{\zeta : r_{\min}^{(n)} \leq |\zeta| \leq r_{\max}^{(n)}\}$, покрывающего кривую $C_0^{(n)}$, мала, то максимальное удаление точек кривой γ_n от $\{\zeta : |\zeta| = 1\}$ мало и составляет величину не более $\varepsilon_n = \delta_n / (2R_n)$. Поскольку $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то, задавая произвольно $\varepsilon > 0$, можно выбрать номер n так, чтобы кривая γ_n принадлежала кольцу $\{\zeta : 1 - \varepsilon \leq |\zeta| \leq 1 + \varepsilon\}$.

1.4. Улучшение отображения $B_\omega \rightarrow E_1$ возможно повторением в итерационном режиме процедуры минимизации (с тем или иным значением n) применительно к новой области $B_{k+1} = \chi_n(B_k)$ ($k = 1, 2, \dots$), $B_1 = B_\omega$. Этот способ позволяет получать конформное отображение области B_ω на область, близкую к E_1 , как композицию отображений $B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow \dots \rightarrow B_k$ с достаточно большим номером k .

1.5. На завершающем этапе построения отображения $B_\omega \rightarrow E_1$, когда в качестве образа области B_ω уже получена область, близкая к единичному кругу, и последующие шаги итерации не приводят к повышению точности отображения, бывает полезно использовать приём улучшения отображения, основанный на вариационном методе М.А. Лаврентьева [1. Гл. 4]. Согласно этому методу, для функции $\chi: \text{int}(\gamma) \rightarrow E_1$ (γ – «звёздный» относительно начала контур, близкий к ∂E_1) выполняется

$$\chi(\zeta) \cong (1 + \lambda_0 / 2) \cdot \zeta + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - i\mu_k) \zeta^{k+1}, \quad (8)$$

где

$$\lambda_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 - |\zeta(\theta)|) \cos k\theta d\theta,$$

$$\mu_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 - |\zeta(\theta)|) \sin k\theta d\theta, \quad (9)$$

$\zeta(\theta)$ – аффикс точки на контуре γ , имеющей аргумент, равный θ .

1.6. Получив с достаточной точностью приближённое нормированное отображение $\psi^*(\omega): B_\omega \rightarrow E_1$, совершим в заключение дробно-линейное отображение $z = z(\zeta)$ единичного круга E_1 на полуплоскость Π_z (с соответствием граничных точек $z(1) = \infty$) по формуле

$$z = \tau \cdot \frac{\zeta \cdot \bar{z}_0 - z_0}{\zeta - 1},$$

где z_0 – произвольно фиксированная точка в Π_z . Действительную постоянную τ подберём так, чтобы функция

$$\varphi_1^*(w) = \tau \cdot \frac{\psi((w - w_0)/(w - \bar{w}_0)) \cdot \bar{z}_0 - z_0}{\psi((w - w_0)/(w - \bar{w}_0)) - 1}$$

удовлетворяла условиям

$$\varphi_1^*(\infty) = \infty, \quad \lim_{w \rightarrow \infty, w \in B} \frac{d}{dw} \varphi_1^*(w) = 1. \quad (10)$$

Получаем $\tau = (\text{Im } w_0 / \text{Im } z_0) \cdot \psi'(1)$.

Таким образом, в качестве приближения для отображения $B \rightarrow \Pi_z$, нормированного условиями (10), можно взять

$$\varphi_1^*(w) = \frac{\text{Im } w_0}{\text{Im } z_0} \cdot \frac{d\psi^*(1)}{d\omega} \cdot \frac{\psi^*((w - w_0)/(w - \bar{w}_0)) \cdot \bar{z}_0 - z_0}{\psi^*((w - w_0)/(w - \bar{w}_0)) - 1}.$$

Эта функция отличается, быть может, от искомой функции $B \rightarrow \Pi_z$, нормированной условием

$\lim_{w \rightarrow \infty, w \in B} (\varphi^*(w) - w) = 0$, лишь действительным постоянным слагаемым.

2. ПОСТРОЕНИЕ ОБРАТНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ $\Pi_z \rightarrow B$

2.1. Аппроксимируем (если это требуется) область B (неограниченным) полигоном B_m , $w_0 \in B_m$, одна из вершин которого A_∞ – бесконечно удалённая точка с углом в этой вершине, равным π , и с остальными вершинами A_1, A_2, \dots, A_m , лежащими в конечной части плоскости на границе области B . Пусть Γ_m – граница полигона B_m . Считаем, что стороны $A_\infty A_1$ и $A_m A_\infty$ полигона B_m лежат на действительной прямой комплексной плоскости и вершины A_1, A_2, \dots, A_m пронумерованы в порядке положительного обхода границы Γ_m (т.е. так, что точки области B_m остаются при обходе слева).

Выбирая вершины A_1, A_2, \dots, A_m подходящим образом и в достаточном количестве, можно добиться, чтобы аналитическая функция $f_m(z)$, $f_m: \Pi_z \rightarrow B_m$, нормированная условием (1), аппроксимировала $f(z)$ сколь угодно точно внутри Π_z . Последнее означает, что для $\forall \varepsilon > 0$ существует номер m , вершины A_1, A_2, \dots, A_m и функция $f_m(z)$, такие, что

$$\max_{z \in F} |f(z) - f_m(z)| < \varepsilon / 2. \quad (11)$$

Здесь F – произвольное замкнутое подмножество полуплоскости Π_z .

В свою очередь, для приближённого нахождения $f_m(z)$ достаточно найти функцию $w = f_m^*(z)$, осуществляющую нормированное отображение Π_z на некоторую область B_m^* , $w_0 \in B_m^*$, близкую к B_m . Близость B_m^* и B_m понимается в следующем смысле: граница области B_m^* покрывается объединением круговых окрестностей достаточно малого радиуса $\delta > 0$ с центрами в точках границы области B_m . При этом условимся считать, что область B_m^* «приближает B_m с точностью δ ».

Согласно теории К. Каратеодори о последовательностях областей, сходящихся к ядру [7. Гл. 2], для $\forall \varepsilon > 0$ можно выбрать $\delta > 0$ так, чтобы для функции $f_m^*: \Pi_z \rightarrow B_m^*$, где область B_m^* приближает B_m с точностью δ , было выполнено условие

$$\max_{z \in F} |f_m(z) - f_m^*(z)| < \varepsilon / 2.$$

Но тогда, с учётом (11), будет выполняться

$$\begin{aligned} \max_{z \in F} |f(z) - f_m^*(z)| &\leq \max_{z \in F} |f(z) - f_m(z)| + \\ &+ \max_{z \in F} |f_m(z) - f_m^*(z)| < \varepsilon / 2 + \varepsilon / 2 = \varepsilon, \end{aligned}$$

т.е. функция $f_m^*(z)$ аппроксимирует $f(z)$ равномерно внутри Π_z с точностью ε .

Согласно теории Шварца – Кристоффеля [1. Гл. 2], для функции $f_m(z)$ имеем

$$f'_m(z) = C_1 \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{a_k}{z}\right)^{\lambda_k - 1}, \quad (12)$$

где a_k , $\text{Im } a_k = 0$, – прообраз вершины A_k полигона B_m при отображении $w = f_m(z)$, $\lambda_k \pi$ – внутренний угол полигона B_m при вершине A_k , C_1 – некоторая постоянная. Определяя значение C_1 в соответствии с условием нормировки $f'_m(\infty) = 1$, получаем $C_1 = 1$. Аффиксы всех точек a_k ($k = 1, 2, \dots, m$) можно считать известными приближённо по результатам прямого отображения $B_m \rightarrow \Pi_z$.

2.2. Укажем способ вычисления $f_m(z)$ для точек z вне круга $K_0 = \{z : |z - c_0| \leq R_0\}$, $c_0 = (a_1 + a_m)/2$, $R_0 = |a_m - a_1|/2$. Все особые точки функции $f'_m(z)$ принадлежат K_0 , и во внешности K_0 функция $f_m(z)$ мероморфна с простым полюсом в бесконечности. Следовательно, $f_m(z)$ допускает вне K_0 представление

$$f_m(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - c_0)^n}. \quad (13)$$

Коэффициенты b_n ($n = 1, 2, \dots$) найдём из следующего равенства, вытекающего из (12):

$$f_m''(z) = f'_m(z) \cdot G(z). \quad (14)$$

Здесь

$$G(z) = \sum_{k=1}^m \frac{\lambda_k - 1}{z - a_k}$$

– регулярная функция во внешности круга K_0 . Её разложение по обратным степеням $(z - c_0)$ имеет вид

$$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{(z - c_0)^n}, \quad (15)$$

где $g_n = \sum_{k=1}^m (\lambda_k - 1)(a_k - c_0)^{n-1}$.

Подставляя в (14) функцию $G(z)$ из (15) и $f_m(z)$ из (13) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $(z - c_0)$ в левой и правой частях получившегося тождества, приходим к следующим соотношениям:

$$g_1 = 0; \quad g_2 = 0;$$

$$(n-1)(n-2)b_{n-2} = g_n - \sum_{l=3}^{n-2} (n-l-1) \cdot b_{n-l-1} \cdot g_l \quad (16)$$

$$(n = 3, 4, \dots).$$

(Равенство $g_1 = 0$, равносильное $\sum_{k=1}^m (\lambda_k - 1) = 0$, выражает очевидный геометрический факт; равенство $g_2 = 0$ может быть использовано для контроля точности полученных приближённо значений a_k .) Из (16) рекурсивно находим все коэффициенты ряда (13):

$$b_1 = g_3 / 2; \quad b_2 = g_4 / 6;$$

$$b_n = \frac{1}{n(n+1)} \left(g_{n+2} - \sum_{l=1}^{n-2} l \cdot b_l \cdot g_{n-l+1} \right) \quad (n = 3, 4, \dots).$$

2.3. Для вычисления $f_m(z)$ при $z \in K_0$ зафиксируем произвольно $\mu > 0$ и обозначим

$$z_0^* = c_0 + i(1 + \mu)R_0.$$

Запишем $f_m(z)$ в виде

$$f_m(z) = f_m(z_0^*) - \int_z^{z_0^*} f'_m(\zeta) d\zeta. \quad (17)$$

Значение $f_m(z_0^*)$ можно получить по формуле (17), поскольку $z_0^* \notin K_0$. Вычисляя интеграл в (17) по отрезку прямой, соединяющему точки z и z_0^* , $\zeta = z + t \cdot (z_0^* - z)$, $0 < t < 1$, получаем

$$f_m(z) = f_m(z_0^*) + (z - z_0^*) \int_0^1 R(t, z) \exp(i\vartheta(t, z)) dt. \quad (18)$$

Здесь обозначено:

$$R(t, z) = \exp \left(\sum_{k=1}^m (\lambda_k - 1) \ln \left| 1 - \frac{a_k}{z + t \cdot (z_0^* - z)} \right| \right),$$

$$\vartheta(t, z) = \sum_{k=1}^m (\lambda_k - 1) \cdot \arg \left(1 - \frac{a_k}{z + t \cdot (z_0^* - z)} \right).$$

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ОПРОБОВАНИЯ МЕТОДА

3.1. По описанному методу разработаны две программы *HalfPlan.pas*, *HPChrGauss.pas*. Первая программа предназначена для решения задачи прямого отображения $B \rightarrow \Pi_z$, вторая – обратного отображения $\Pi_z \rightarrow B$. Исходной информацией для *HalfPlan* служит массив прямоугольных координат граничных точек области B (в количестве M_p) в верхней полуплоскости. Интегралы в формулах (6) вычисляются по специальной квадратурной формуле [8], аналогичной известной формуле парабол (Симпсона), но, вообще говоря, с неравномерной системой узлов. Для повышения точности квадратур система узлов на контуре интегрирования (соответствующих заданным вершинам полигона B_m , аппроксимирующего область B) пополняется дополнительными узлами, соответствующими «фиктивным» вершинам полигона, расположенными внутри отрезков прямых, соединяющих смежные вершины, и с углами полигона при этих вершинах, равными π . Фиктивные вершины генерируются программой автоматически в количестве, задаваемом с пульта. Кроме того, после совершения дробно-линейного отображения полигона B_m в плоскость круга по формуле (2) множество граничных точек области, являющихся образами вершин A_1, A_2, \dots, A_m полигона B_m , также пополняется дополнительными точками на единичной окружности из окрестности точки $\omega = 1$. Результаты работы программы *HalfPlan* – аффиксы точек a_1, a_2, \dots, a_m на действительной прямой – служат исходной информацией для второй программы.

Программа *HalfPlan* предусматривает возможность наряду с итерационным режимом минимизации использовать «улучшающие» малые вариации границы по методу Лаврентьева, описанные в п.1.5. Комбинированная тактика, основанная на чередовании двух этих способов, позволяет достичь большей точности результирующего отображения, чем точность, обеспечиваемая каждым из них в отдельности.

В программе *HPChrGauss* величины внутренних углов $\lambda_k \pi$ полигона B_m при вершинах A_k вычисляются автоматически. Действительная и мнимая части интеграла в (18) вычисляются по высокоточной квадратной формуле Гаусса с 96 узлами [9. Гл. 25].

3.2. Опробование программ расчётами для различных моделей областей показало достаточную эффективность предлагаемого метода.

Ниже приведён результат обчёта одной модельной области. Строился образ области B при прямом отображении и находились константы a_k в формуле Шварца – Кристоффеля (12). Затем находился образ полуплоскости Π_z при обратном отображении и сопоставлялся с исходной областью B . Кроме того, полученные приближённые значения $f_m(z)$ сопоставлялись с известными [10] асимптотическими значениями отображающей функции $f: \Pi_z \rightarrow B$ в окрестности бесконечности, даваемыми формулой

$$f(z) = z + c_{-1} / z + o(1/|z|),$$

где $c_{-1} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Im} y(x) dx$, $y = y(x)$ – уравнение границы Γ области B .

Модель «Бактриан». Часть границы области B , лежащая в верхней полуплоскости, – «двугорбая» гладкая кривая (см. рис. 3, а). Было взято: $w_0 = 8 \cdot i$, $z_0 = 5 \cdot i$, $M_p = 83$, $n = 46$; общее число граничных точек, используемых при прямом отображении, $M = 180$ (остальные 97 граничных точек сгенерированы программой автоматически); $N_0 = 80$.

При прямом отображении совершены 9 шагов итераций по методу минимизации и три раза варьирование границы по Лаврентьеву (с числом членов ряда в (7), равным 60). Достигнутое при этом максималь-

ное отклонение точек образа границы Γ при отображении $B_m \rightarrow E_1$ от единичной окружности не превосходит 0.002. На рис. 3, б показан приближённый образ части границы полуплоскости Π_z при обратном отображении. Максимальное отклонение образов точек из $\bar{\Pi}_z$ при обратном отображении от соответствующих точек из \bar{B} в «ближней» зоне ($|w| < 10$) составляет не более 0.03, в то время как в «дальней» зоне ($|w| \geq 10$) оно ещё на один порядок меньше. При $|z| \geq 10$ отклонения (по модулю) приближённых значений $w = f(z)$ от соответствующих асимптотических значений не превышают 2% от величины $1/|z|$. На рис. 3, в показано совместное изображение части границы области B и образа границы полуплоскости Π_z при обратном отображении.

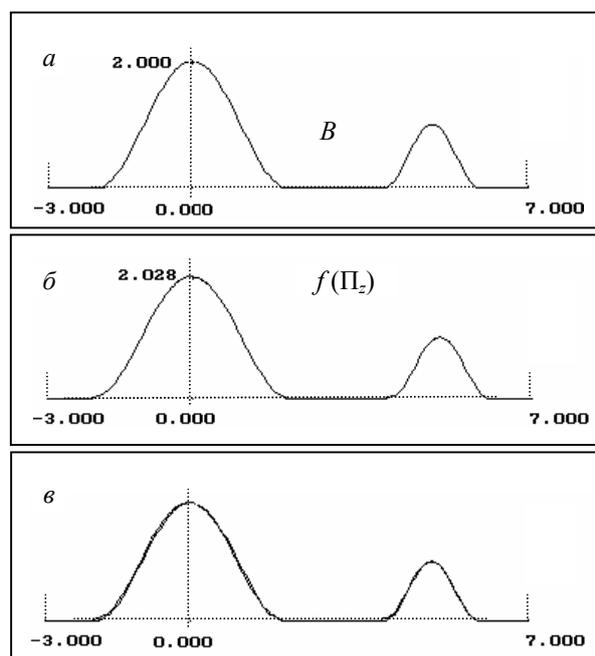


Рис. 3. Образы границ: а – исходная область B в верхней полуплоскости; б – область $f(\Pi_z)$ – образ полуплоскости Π_z при обратном отображении; в – совместное изображение областей B и $f(\Pi_z)$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 716 с.
2. Соболев В.В., Соболева Н.В. Комплексный алгоритм численного построения конформного отображения ограниченной жордановой области на круг и обратного отображения // Научн. труды РИАТМа, вып. 2. Ростов н/Д: РИАТМ, 1995. С. 21–34.
3. Ищенко Н.В., Соболев В.В. Комплексный алгоритм построения конформного отображения неограниченной области на внешность круга и обратного отображения // Исследования по математическому анализу и алгебре. Томск: ТГУ, 1998. С. 10–17.
4. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближённые методы высшего анализа. М.–Л.: ФМЛ, 1962. 708 с.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: ГИТТЛ, 1953. 491 с.
6. Смирнов В.И., Лебедев Н.А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.–Л.: Наука, 1964. 440 с.
7. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966. 628 с.
8. Соболев В. В., Ищенко Н. В. Численное интегрирование. Методические указания к лабораторной работе с использованием ЭВМ. Ростов н/Д: РГАСХМ, 1999. 28 с.
9. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. Абрамовиц М., Стриган И. М.: Наука, 1979. 832 с.
10. Кац И.С., Крейн М.Г. R-функции – аналитические функции, отображающие верхнюю полуплоскость в себя / Атkinson Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи (Дополнение I). М.: Мир, 1968. 750 с.

Статья представлена кафедрой математического анализа механико-математического факультета Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Математика» 30 июня 2003 г.