

О ВАРИАЦИОННОМ И ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ МЕТОДАХ В ТЕОРИИ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрены взаимосвязи вариационного и параметрического методов, выведены вариационные формулы в различных классах однолистных функций, приведены случаи интегрирования уравнения Левнера – Куфарева.

Метод внутренних вариаций Шиффера – Голузина и метод параметрических представлений Левнера играют значительную роль в геометрической теории функций комплексного переменного. Они занимают видное место в литературе [1 – 6] и составляют содержание многочисленных статей с исследованием и решением экстремальных задач теории однолистных отображений. Были предложены различные варианты объединения этих методов, существенно обогатившие практику решения экстремальных задач.

Данная работа касается взаимосвязей рассматриваемых методов с подходом к затрагиваемым вопросам по возможности с наиболее простых позиций. Известные теоремы получают новые варианты доказательств, а известные формулы – новые выводы. Вниманию читателя предоставляются на этом фоне отдельные оригинальные факты как научного, так и научно-методического характера. Используемая система обозначений позволяет воспринимать весь материал как единое целое, хотя и не всегда повторяет обозначения оригинальных источников.

В §1 приведена теорема Г.М. Голузина с доказательством К. Поммеренке [7]. Как следствие, представлена вариационная формула Шиффера – Голузина в классе S голоморфных однолистных в круге $E = \{z: |z| < 1\}$ функций $f(z)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, дан новый вывод вариационной формулы в подклассе S^* класса S звездообразных функций $f(z)$ (т.е. таких, что $f(E)$ является областью, звездообразной относительно нуля), а также получена одна вариационная формула в классе S .

В §2 представлено уравнение Левнера – Куфарева, доказана теорема о существовании и свойствах его решения.

В §3 приведены различные случаи интегрирования уравнения Левнера – Куфарева: как классические (формула Базилевича [8], интегральное представление класса S^*), так и оригинальные (при некоторых частных видах уравнения Левнера – Куфарева).

В §4 посредством уравнения Левнера – Куфарева получены вариационные формулы в плотном подклассе класса S функций, предельных для решений этого уравнения.

В §5 приведены варианты объединения рассматриваемых методов, предложенные Н.А. Лебедевым [9] и П.П. Куфаревым [10], а также одна вариационная формула М. Шиффера [11].

§1. ВАРИАЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ В КЛАССЕ S

Метод внутренних вариаций был предложен М. Шиффером в 1943 году. Позднее Г.М. Голузин представил свой вариант этого метода, получив вариационные формулы при меньших предположениях об отображениях. Представленная ниже вариационная формула является основной в методе Г.М. Голузина. К. Поммеренке упростил доказательство теоремы 1.

Пусть $D \subset \mathbb{C}$, $0 \in D$, – односвязная область в w -плоскости, и $w = f(z)$, $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$, – функция, однолистно и конформно отображающая круг E на D . Пусть $D(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, – семейство областей, сходящееся к D как к ядру относительно точки $w = 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Функции $w = f_\varepsilon(z)$, $f_\varepsilon(0) = 0$, $f'_\varepsilon(0) > 0$, однолистно и

конформно отображающие E на $D(\varepsilon)$, согласно теореме Каратеодори о ядре, равномерно внутри E сходятся к $f(z)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Обозначим через $K(r, R)$, $0 < r < R$, кольцо $\{z: r < |z| < R\}$. Предположим, что функция $w = g(z, \varepsilon)$ при каждом фиксированном ε голоморфна и однолистная по z в кольце $K(r, 1)$, во-первых, отображает это кольцо на двусвязную область $\Delta(\varepsilon)$, которая при объединении с ограниченной компонентой дополнения совпадает с $D(\varepsilon)$, и, во-вторых, имеет разложение по степеням ε вида

$$g(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon z f'(z) q(z) + \gamma(z, \varepsilon),$$

где $\gamma(z, \varepsilon)/\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно внутри $K(r, 1)$ и $q(z)$ – голоморфная в $K(r, 1)$ функция, имеющая разложение в ряд Лорана вида $q(z) = T(z) + S(z)$, где

$$T(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}, \quad S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Теорема 1. В классе S имеет место вариационная формула

$$f(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon z f'(z) \left[q(z) - T(z) + \overline{T\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} + \frac{\bar{c}_0 - c_0}{2} - \frac{f(z)}{z f'(z)} \frac{c_0 + \bar{c}_0}{2} \right] + o(z, \varepsilon). \quad (1)$$

Доказательство. Функция $\varphi(z, \varepsilon)$, неявно определяемая при фиксированном ε уравнением

$$g(z, \varepsilon) = f_\varepsilon(\varphi(z, \varepsilon)), \quad z \in K(r, 1),$$

голоморфна и однолистка. При каждом ε она продолжается на окружность $\{z: |z| = 1\}$ и переводит ее в единичную же окружность. По принципу симметрии Римана – Шварца $\varphi(z, \varepsilon)$ голоморфно продолжается в кольцо $K(r, 1/r)$. В этом кольце при соответствующем выборе ветви логарифма функция

$$\psi(z, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{\varphi(z, \varepsilon)}{z}$$

голоморфна и раскладывается в ряд Лорана

$$\psi(z, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{-n}(\varepsilon)}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\varepsilon) z^n.$$

Так как $\operatorname{Re} \psi(z, \varepsilon) = 0$ на единичной окружности, то

$$\operatorname{Re} b_0(\varepsilon) = 0, \quad b_n(\varepsilon) = \overline{-b_{-n}(\varepsilon)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Введем функции

$$p(z, \varepsilon) = \frac{f_\varepsilon(z) - f(z)}{\varepsilon z f'(z)},$$

$$q(z, \varepsilon) = \frac{g(z, \varepsilon) - f(z)}{\varepsilon z f'(z)},$$

голоморфные по z соответственно в E , $K(r, 1)$ при

фиксированном ε , и функцию

$$h(z, \varepsilon) = \frac{\varepsilon z \psi(z, \varepsilon) f'(z)}{g(z, \varepsilon) - f_\varepsilon(z)} - 1,$$

голоморфную в $K(r, 1)$ при фиксированном ε . Нетрудно проверить, что введенные функции связаны между собой равенством

$$\psi(z, \varepsilon) = [q(z, \varepsilon) - p(z, \varepsilon)][1 + h(z, \varepsilon)]$$

и что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(z, \varepsilon) = 0$ равномерно внутри $K(r, 1)$. Очевидно,

$$p(z, \varepsilon) = q(z, \varepsilon) - \psi(z, \varepsilon) + [q(z, \varepsilon) - p(z, \varepsilon)]h(z, \varepsilon).$$

Найдем предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ каждого слагаемого в сумме, стоящей в правой части равенства.

Легко увидеть, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} q(z, \varepsilon) = q(z)$ равномерно внутри $K(r, 1)$.

Фиксируем $\rho^2 \in (r, 1)$. Тогда $r < \rho^2 < \rho < 1$. Умножим почленно последнее равенство на $z^{n-1}/2\pi i$, $n = 0, 1, \dots$ и, переставив слагаемые, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \frac{\psi(z, \varepsilon)}{z^{1-n}} + \frac{1}{2\pi i} \frac{p(z, \varepsilon)}{z^{1-n}} - \frac{1}{2\pi i} \frac{q(z, \varepsilon)}{z^{1-n}} = \\ = \frac{1}{2\pi i} \frac{q(z, \varepsilon) - p(z, \varepsilon)}{z^{1-n}} h(z, \varepsilon). \end{aligned}$$

Интегрируя полученное равенство по окружности $\gamma = \{z: |z| = \rho^2\}$ и оценивая модуль левой части, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\psi(z, \varepsilon)}{z^{1-n}} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{p(z, \varepsilon)}{z^{1-n}} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{q(z, \varepsilon)}{z^{1-n}} dz \right| \leq \\ \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|q(z, \varepsilon) - p(z, \varepsilon)|}{|z|^{1-n}} |h(z, \varepsilon)| ds \leq M(\varepsilon) \rho^{2n} \lambda_1(\varepsilon), \end{aligned}$$

где $M(\varepsilon) = \max_{\rho^2 \leq |z| \leq \rho} |q(z, \varepsilon) - p(z, \varepsilon)|$,

$$\lambda_1(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h(\rho^2 e^{i\theta}, \varepsilon)| d\theta,$$

причем $\lambda_1(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Пользуясь интегральной теоремой Коши ($n = 1, 2, \dots$) и интегральной формулой Коши ($n = 0$), находим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{p(z, \varepsilon)}{z^{1-n}} dz = \begin{cases} 0, & n = 1, 2, \dots, \\ A(\varepsilon), & n = 0, \end{cases}$$

где $A(\varepsilon) = \lim_{z \rightarrow 0} p(z, \varepsilon) = \frac{f'(0, \varepsilon) - f'(0)}{\varepsilon f'(0)}$

и вещественно.

Известно, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\psi(z, \varepsilon)}{z^{1-n}} dz = b_{-n}(\varepsilon) = \overline{b_n(\varepsilon)}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{q(z, \varepsilon)}{z^{1-n}} dz = c_{-n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Значит при $n = 1, 2, \dots$

$$\left| \overline{b_n(\varepsilon)} + c_{-n} \right| \leq M(\varepsilon) \rho^{2n} \lambda_1(\varepsilon),$$

а при $n = 0$

$$\left| \overline{b_0(\varepsilon)} - A(\varepsilon) + c_0 \right| \leq M(\varepsilon) \lambda_1(\varepsilon).$$

Поскольку $\operatorname{Re} b_0(\varepsilon) = \operatorname{Im} A(\varepsilon) = 0$, то

$$\left| \overline{b_0(\varepsilon)} + A(\varepsilon) - \overline{c_0} \right| \leq M(\varepsilon) \lambda_1(\varepsilon).$$

Легко увидеть, что

$$\left| \overline{b_0(\varepsilon)} + \frac{c_0 - \overline{c_0}}{2} \right| \leq M(\varepsilon) \lambda_1(\varepsilon).$$

Переходим к оценке разности

$$\begin{aligned} R(z, \varepsilon) = \psi(z, \varepsilon) - \left[T(z) + \frac{c_0 - \overline{c_0}}{2} - T\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) \right] = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n(\varepsilon) + \overline{c_{-n}}) z^n + b_0(\varepsilon) - \frac{c_0 - \overline{c_0}}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\overline{b_n(\varepsilon)} + c_{-n})}{z^n} \end{aligned}$$

на окружности $\{z: |z| = \rho\}$. Имеем

$$\begin{aligned} |R(z, \varepsilon)| \leq M(\varepsilon) \lambda_1(\varepsilon) \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{2n} (\rho^n + \rho^{-n}) \right] < \\ < \frac{1+\rho}{1-\rho} M(\varepsilon) \lambda_1(\varepsilon). \end{aligned}$$

Эта оценка позволяет найти предел $R(z, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Используя неравенство

$$\begin{aligned} \max_{\rho^2 \leq |z| \leq \rho} |q(z, \varepsilon) - p(z, \varepsilon)| \leq \max_{\rho^2 \leq |z| \leq \rho} |\psi(z, \varepsilon)| + \\ + \max_{\rho^2 \leq |z| \leq \rho} |q(z, \varepsilon) - p(z, \varepsilon)| \max_{\rho^2 \leq |z| \leq \rho} |h(z, \varepsilon)|, \end{aligned}$$

находим, что

$$M(\varepsilon) \leq K(\varepsilon) + M(\varepsilon) \lambda_2(\varepsilon),$$

где

$$\begin{aligned} K(\varepsilon) &= \max_{\rho^2 \leq |z| \leq \rho} |\psi(z, \varepsilon)| < \infty, \\ \lambda_2(\varepsilon) &= \max_{\rho^2 \leq |z| \leq \rho} |h(z, \varepsilon)|, \end{aligned}$$

и $\lambda_2(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно на γ . Таким образом, $M(\varepsilon)$ ограничена при $\varepsilon \rightarrow 0$. Значит $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R(z, \varepsilon) = 0$ равномерно внутри $K(r, 1)$, то есть

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi(z, \varepsilon) = T(z) + \frac{c_0 - \overline{c_0}}{2} - T\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)$$

равномерно внутри $K(r, 1)$.

В итоге получаем

$$\begin{aligned} p(z) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p(z, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} q(z, \varepsilon) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi(z, \varepsilon) + \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [q(z, \varepsilon) - p(z, \varepsilon)] h(z, \varepsilon) = \\ &= q(z) - T(z) + \frac{\overline{c_0} - c_0}{2} + T\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) \end{aligned}$$

равномерно внутри E . Таким образом,

$$f_\varepsilon(z) = f(z) + \varepsilon f'(z) \left[S(z) + \frac{\overline{c_0} - c_0}{2} + T\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) \right] + o(z, \varepsilon).$$

Легко увидеть, что

$$f'_\varepsilon(0) = 1 + \varepsilon \frac{c_0 + \overline{c_0}}{2} + o(\varepsilon).$$

Функция

$$f(z, \varepsilon) = \frac{f_\varepsilon(z)}{f'_\varepsilon(0)}$$

принадлежит классу S . Подсчет дает формулу (1), что и требовалось.

Приведем примеры использования теоремы 1. Представим вывод вариационной формулы, предложенной М. Шиффером [12] и полученной позднее Г.М. Голузиным [13] как следствие теоремы 1.

Теорема 2. В классе S имеет место вариационная формула

$$f(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon f(z) \sum_{k=1}^m \left\{ A_k H^2(z_k) \frac{f(z)}{f(z) - f(z_k)} - \frac{A_k}{2} L(z, z_k) - \frac{\bar{A}_k}{2} L\left(z, \frac{1}{\bar{z}_k}\right) \right\} + o(z, \varepsilon),$$

где $z_k, k = 1, 2, \dots, m, m \in \mathbb{N}$, – различные точки из E , A_k – произвольные комплексные постоянные,

$$H(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)}, \quad L(z, a) = H(z) \frac{z+a}{z-a} + 1.$$

Доказательство. Напишем вариационную формулу (1) для

$$q(z) = \sum_{k=1}^m A_k \frac{H^2(z_k) f^2(z)}{zf'(z)(f(z) - f(z_k))}, \quad f(z) \in S.$$

Выделяя главную часть $T(z)$ разложения функции $q(z)$ в ряд Лорана в кольце $K(r, 1)$, где $r = \max_{1 \leq k \leq m} |z_k|$, находим

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=p} q(z) z^{n-1} dz = \sum_{k=1}^m \operatorname{res}_{z=z_k} (q(z) z^{n-1}) = \sum_{k=1}^m A_k z_k^n,$$

и для $T(z)$ имеем

$$T(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} = \sum_{k=1}^m A_k \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z_k}{z} \right)^n = \sum_{k=1}^m A_k \frac{z_k}{z - z_k}.$$

Свободный член правильной части разложения $q(z)$ равен

$$c_0 = \lim_{z \rightarrow 0} [q(z) - T(z)] = \sum_{k=1}^m A_k.$$

Для завершения доказательства остается записать формулу (1) с указанными $q(z)$, $T(z)$, c_0 .

Приведем ещё один пример применения теоремы Голузина для получения вариационной формулы в классе S .

Теорема 3. В классе S имеет место вариационная формула

$$\begin{aligned} f(z, \varepsilon) = & f(z) + \\ & + \varepsilon f(z) \sum_{k=1}^m \left\{ A_k H^3(z_k) \frac{3f(z_k)f(z) - 2f^2(z)}{(f(z) - f(z_k))^2} - \right. \\ & - A_k [M(z, z_k) - (1 + N(z_k))L(z, z_k)] + \\ & + \bar{A}_k \left[M\left(z, \frac{1}{\bar{z}_k}\right) + (1 + \overline{N(z_k)})L\left(z, \frac{1}{\bar{z}_k}\right) \right] \left. \right\} + o(z, \varepsilon), \end{aligned}$$

где $z_k, k = 1, 2, \dots, m, m \in \mathbb{N}$, – различные точки из E , A_k – произвольные комплексные постоянные,

$$H(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)}, \quad L(z, a) = H(z) \frac{z+a}{z-a} + 1,$$

$$N(z) = \frac{zf''(z)}{f'(z)}, \quad M(z, a) = H(z) \frac{az}{(z-a)^2}.$$

Доказательство. Запишем вариационную формулу (1) для

$$q(z) = \sum_{k=1}^m A_k H^3(z_k) \frac{3f(z_k)f(z) - 2f^2(z)}{H(z)(f(z) - f(z_k))^2}, \quad f(z) \in S.$$

Это можно сделать, поскольку функция $g(z, \varepsilon)$, соответствующая выбранной $q(z)$, удовлетворяет условиям теоремы 1. Для этого достаточно показать, что функция

$$\omega(w) = w + \varepsilon \sum_{k=1}^m A_k \frac{w^2(3w_k - 2w)}{(w - w_k)^2},$$

голоморфная в $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{k=1}^m \overline{U(w_k, \rho)}$, $\rho = \frac{1}{2} \min_{k \neq l} |w_k - w_l|$, одностолостна в этой области при достаточно малых ε .

Пусть w', w'' – различные точки указанной области. Тогда имеет место равенство

$$\omega(w') - \omega(w'') = (w' - w'') \times$$

$$\times \left\{ 1 - \varepsilon \sum_{k=1}^m A_k \left[2 + w_k^3 \frac{w' + w'' - 2w_k}{(w' - w_k)^2 (w'' - w_k)^2} \right] \right\}$$

и следующие неравенства

$$\begin{aligned} & \left| 2 + w_k^3 \frac{w' + w'' - 2w_k}{(w' - w_k)^2 (w'' - w_k)^2} \right| \leq \\ & \leq 2 + \frac{|w_k|^3}{|w' - w_k| |w'' - w_k|} \left(\frac{1}{|w' - w_k|} + \frac{1}{|w'' - w_k|} \right) \leq \\ & \leq 2 + \frac{2|w_k|^3}{\rho^3} \leq M_k, \end{aligned}$$

$$|\omega(w') - \omega(w'')| \geq |w' - w''| \left| 1 - \varepsilon \sum_{k=1}^m |A_k| M_k \right| \geq K |w' - w''|,$$

последнее из которых влечет однолистность $\omega(w)$.

Выделяя главную часть разложения функции $q(z)$ в ряд Лорана в кольце $K(r, 1)$, где $r = \max_{1 \leq k \leq m} |z_k|$, находим

$$T(z) = \sum_{k=1}^m A_k \frac{z_k z}{(z - z_k)^2} - 2 \sum_{k=1}^m A_k (1 + N(z_k)) \frac{z_k}{z - z_k}.$$

Свободный член правильной части разложения равен

$$c_0 = -2 \sum_{k=1}^m A_k (1 + N(z_k)).$$

Для завершения доказательства теоремы остается записать формулу (1) с указанными $q(z)$, $T(z)$, c_0 .

Представим новый вывод вариационной формулы в классе звездообразных функций, впервые полученной И.А. Александровым [14].

Теорема 4. В классе S^* имеет место вариационная формула

$$f(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon f'(z) \sum_{k=1}^m \left\{ A_k \left[H(z_k) K(z, z_k) - L(z, z_k) \right] - \bar{A}_k \left[\overline{H(z_k)} K\left(z, \frac{1}{\bar{z}_k}\right) + L\left(z, \frac{1}{\bar{z}_k}\right) \right] \right\} + o(\varepsilon),$$

где $z_k, k = 1, 2, \dots, m, m \in \mathbb{N}$, – различные точки из E , A_k – произвольные комплексные постоянные и

$$H(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)}, \quad K(z, a) = H(z) + \frac{z+a}{z-a},$$

$$L(z, a) = H(z) \frac{z+a}{z-a} + 1.$$

Доказательство. Образует функцию

$$g(z, \varepsilon) = f(z) \exp(\varepsilon \varphi(z)), \quad f(z) \in S^*,$$

где

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^m \left(B_k \frac{z+z_k}{z-z_k} + \bar{B}_k \frac{1+\bar{z}_k z}{1-\bar{z}_k z} \right), \quad z \in E,$$

и $B_k, k = 1, 2, \dots, m$, – комплексные постоянные. Она при каждом фиксированном ε голоморфна по z в $K(r, 1)$, $r = \max_{1 \leq k \leq m} |z_k|$. Поскольку $g(z, \varepsilon)$ дифференцируема по ε при $\varepsilon = 0$ равномерно внутри кольца $K(r, 1)$, то в этом кольце имеет место разложение

$$g(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon f'(z) \varphi(z) + \gamma(z, \varepsilon),$$

где $\gamma(z, \varepsilon)/\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно внутри $K(r, 1)$.

Пусть z', z'' – различные точки из $K(r, 1)$. В силу однолистности $f(z)$ при достаточно малых ε справедливы следующие неравенства:

$$|g(z', \varepsilon) - g(z'', \varepsilon)| \geq$$

$$\geq |f(z') - f(z'')| - \varepsilon |f'(z') \varphi(z') - f'(z'') \varphi(z'')| \geq$$

$$\geq K - \varepsilon |f'(z') \varphi(z') - f'(z'') \varphi(z'')| > 0,$$

откуда следует однолистность $g(z, \varepsilon)$.

Покажем, что внешняя граничная компонента образа кольца $K(r, 1)$ при отображении $w = g(z, \varepsilon)$ ограничивает звездообразную относительно нуля область. Тогда образ круга E при отображении $w = f(z, \varepsilon)$ будет звездообразной относительно нуля областью, и функция $f(z, \varepsilon)$ попадет в класс S^* . Имеем

$$\operatorname{Re} \frac{zg'(z, \varepsilon)}{g(z, \varepsilon)} = \operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} + \varepsilon \operatorname{Re}(z\varphi'(z)) =$$

$$= \operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} - 2\varepsilon \operatorname{Re} \sum_{k=1}^m \left[B_k \frac{z_k z}{(z-z_k)^2} - \bar{B}_k \frac{\bar{z}_k z}{(1-\bar{z}_k z)^2} \right].$$

Рассмотрим это равенство при $z = re^{i\theta}$. Поскольку первое слагаемое в правой части равенства положительно при любых r и θ , в силу звездообразности функции $f(z)$, и поскольку

$$\lim_{r \rightarrow 1} \operatorname{Re} [re^{i\theta} \varphi'(re^{i\theta})] = -4 \operatorname{Re} \left[i \operatorname{Im} \sum_{k=1}^m B_k \frac{z_k e^{i\theta}}{(e^{i\theta} - z_k)^2} \right] = 0,$$

то при достаточно малых ε и при r , близких к единице, сумма в правой части рассматриваемого равенства положительна. Значит действительно образ кольца

$K(r, 1)$ при объединении с ограниченной компонентой дополнения является звездообразной относительно $w = 0$ областью.

Применим теорему 1 к функции $g(z, \varepsilon)$. Имеем $q(z) = \varphi(z)/H(z)$ и находим, что

$$T(z) = \sum_{k=1}^m \frac{2B_k z_k}{H(z_k)(z-z_k)},$$

$$c_0 = \lim_{z \rightarrow 0} [q(z) - T(z)] = \sum_{k=1}^m \left(\bar{B}_k - B_k + \frac{2B_k}{H(z_k)} \right).$$

Для завершения доказательства теоремы остается записать формулу (1) при указанных $q(z)$, $T(z)$, c_0 и заменить B_k на $A_k H(z_k)$.

§2. УРАВНЕНИЕ ЛЕВНЕРА – КУФЕРЕВА

В теории однолистных функций важную роль играет уравнение Левнера – Куфарева

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\zeta p(\zeta, \tau), \quad 0 \leq \tau < \tau^0, \quad 0 < \tau^0 \leq \infty, \quad (2)$$

где $p(\zeta, \tau)$ – заданная в $E \times T$, $T = [0, \tau^0]$, функция, при каждом фиксированном τ принадлежащая классу C (классу Каратеодори) голоморфных в E функций $p(z)$, $p(0) = 1$, $\operatorname{Re} p(z) > 0$, и непрерывная по совокупности переменных в цилиндре $E \times T$. Множество всех таких функций $p(\zeta, \tau)$ обозначим через $P(C, T)$.

Решения уравнения (2), обращающиеся при $\tau = t$, $0 \leq t < \tau^0$, в z , обозначим через $\zeta = \zeta(\tau, t, z)$. В случае, если $t = 0$, вместо $\zeta(\tau, 0, z)$ будем писать $\zeta(\tau, z)$. Очевидно, $\zeta(\tau, t, 0) = 0$.

Теорема 5. Какова бы ни была фиксированная точка $t, t \in T$, уравнение Левнера – Куфарева (2)

а) на интервале $T \cap (t - \ln[(1+|z|)^2/4|z|], \tau^0)$ имеет, и притом единственное, решение $\zeta(\tau, t, z), z \in E$;

б) если $\tau_1, t \leq \tau_1 \leq \tau^0$, конечно, то $\zeta(\tau_1, t, z)$ осуществляет однолистное конформное отображение круга E на некоторую область $B(\tau_1, t) \subset E$, причем $\zeta(\tau_1, t, 0) = 0, \zeta'(\tau_1, t, 0) = e^{t-\tau_1}$;

в) если $\tau^0 = \infty$, то функция

$$f(z) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau-t} \zeta(\tau, t, z) = z + \dots$$

голоморфна и однолистка в E .

Доказательство. а) Уравнение (2) вместе с начальным условием $\zeta|_{\tau=t} = z, z \in E \setminus \{0\}$ равносильно интегральному уравнению

$$\zeta = z \exp \left\{ - \int_t^\tau p(\zeta, \tau) d\tau \right\}, \quad (3)$$

решение которого будем искать методом последовательных приближений. Для этого рассмотрим последовательность голоморфных в E при фиксированном $\tau, \tau > t$, функций

$$\zeta_0 = 0,$$

$$\zeta_n = \zeta_n(\tau, t, z) = z \exp \left\{ - \int_t^\tau p(\zeta_{n-1}(\tau, t, z), \tau) d\tau \right\},$$

$$n = 1, 2, \dots,$$

и уравнение

$$\frac{dv}{d\tau} = -vP(-v), \quad v|_{\tau=t} = |z|, \quad (4)$$

где $P(x) = \frac{1+x}{1-x}$.

Решение уравнения (4)

$$v(\tau) = 1 + A - A\sqrt{1 + \frac{2}{A}}, \quad t < \tau < \infty,$$

где
$$A = \frac{(1-|z|)^2}{2|z|} e^{\tau-t},$$

положительно, монотонно убывает с ростом τ и строго меньше единицы на (t, ∞) .

Поскольку $P(-v(\tau)) \leq 1$, то с учетом (4) имеем

$$|\zeta_1| = |z| \exp \left\{ -\int_t^\tau d\tau \right\} \leq |z| \exp \left\{ -\int_t^\tau P(-v(\tau)) d\tau \right\} = v(\tau).$$

Далее, используя (4) и известное неравенство для функций $p(z)$ класса C

$$P(-|z|) \leq \operatorname{Re} p(z) \leq P(|z|),$$

по индукции получаем

$$\begin{aligned} |\zeta_n| &= |z| \exp \left\{ -\operatorname{Re} \int_t^\tau p(\zeta_{n-1}, \tau) d\tau \right\} \leq \\ &\leq |z| \exp \left\{ -\int_t^\tau P(-|\zeta_{n-1}|) d\tau \right\} \leq \\ &\leq |z| \exp \left\{ -\int_t^\tau P(-v(\tau)) d\tau \right\} = v(\tau). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} |\zeta_n| &\geq |z| \exp \left\{ -\int_t^\tau P(|\zeta_{n-1}|) d\tau \right\} \geq |z| \exp \left\{ -\int_t^\tau P(v(\tau)) d\tau \right\} = \\ &= v(\tau) \exp \left\{ -\int_t^\tau [P(v(\tau)) - P(-v(\tau))] d\tau \right\} = \\ &= v(\tau) \exp \left\{ -\int_t^\tau \frac{4v(\tau)}{1-v^2(\tau)} d\tau \right\} = v(\tau) \exp \{ 2(x(\tau) - a) \}, \end{aligned}$$

где $x(\tau) = P(v(\tau))$, $a = x(t) = P(|z|)$. Таким образом, имеем оценки

$$v(\tau) \exp \{ 2(x(\tau) - a) \} \leq |\zeta_n(\tau, t, z)| \leq v(\tau), \quad (5)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Установим теперь оценку сверху для модуля функции

$$\delta_n = \delta_n(\tau, t, z) = 1 - \frac{\zeta_n(\tau, t, z)}{\zeta_{n+1}(\tau, t, z)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Представим δ_n в виде

$$\begin{aligned} \delta_n &= -\int_t^\tau \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\zeta_n}{\zeta_{n+1}} \right) d\tau = \\ &= -\int_t^\tau \frac{\zeta_n^2}{\zeta_{n+1}} \delta_{n-1} \frac{p(\zeta_n, \tau) - p(\zeta_{n-1}, \tau)}{\zeta_n - \zeta_{n-1}} d\tau, \end{aligned}$$

откуда, используя (5) и известное неравенство для функций класса C

$$|p(z_1) - p(z_2)| \leq \frac{2|z_1 - z_2|}{(1-|z_1|)(1-|z_2|)}, \quad (6)$$

получаем

$$|\delta_n(\tau, t, z)| \leq \int_t^\tau |\delta_{n-1}| \exp \{ -2(x(\tau) - a) \} \frac{2v(\tau)}{(1-v(\tau))^2} d\tau. \quad (7)$$

При возрастании τ от t до τ^0 величина x убывает от a до $x(\tau^0)$. В неравенстве (7) произведем замену переменного τ на x . Будем иметь

$$|\delta_n| \leq -\int_a^x |\delta_{n-1}| \exp \{ -2(x-a) \} x dx,$$

где $\delta_n = \delta_n(x, a, z) = \delta_n(\tau(x), \tau(a), z)$. Выполнив в последнем неравенстве замену по формуле

$$\rho = \rho(x) = \int_x^a e^{-2(y-a)} y dy,$$

получим искомую равномерную внутри E оценку

$$|\delta_n| \leq \int_0^\rho |\delta_{n-1}| d\rho \leq \frac{\rho^n}{n!},$$

откуда, используя (5), заключаем, что

$$|\zeta_{n+1}(\tau, t, z) - \zeta_n(\tau, t, z)| \leq v(\tau) \frac{\rho^n}{n!} < \frac{\rho^n(x(\tau^0))}{n!},$$

где $\rho(x(\tau^0))$ зависит только от z .

Таким образом, последовательность $(\zeta_n(\tau, t, z))_{n \in \mathbb{N}}$ голоморфных функций равномерно внутри E сходится. Ее предельная функция $\zeta = \zeta(\tau, t, z)$ по теореме Вейерштрасса голоморфна в E при фиксированном τ , $\tau > t$, и, как легко показать, удовлетворяет уравнению (3).

При $\tau < t$ решение уравнения (3) также будет предельной функцией для рассмотренной последовательности $(\zeta_n(\tau, t, z))_{n \in \mathbb{N}}$. Это можно доказать повторением проведенных рассуждений, взяв вместо $v(\tau)$ решение $u(\tau)$ уравнения

$$\frac{du}{d\tau} = -uP(u), \quad u|_{\tau=t} = |z|,$$

существующее при $\tau \in (t - \ln[(1+|z|)^2/4|z|], t)$, и вместо неравенства (5) использовав оценки

$$u(\tau) \exp \{ 2(y(\tau) - b) \} \leq |\zeta_n(\tau, t, z)| \leq u(\tau),$$

где $y(\tau) = P(-u(\tau))$, $b = y(t) = P(-|z|)$. Тогда, соответственно, получим неравенство

$$|\delta_n| \leq \int_0^\chi |\delta_{n-1}| d\chi,$$

где
$$\chi(y) = \int_y^b e^{-2(\lambda-b)} \frac{d\lambda}{\lambda},$$

опираясь на которое, легко завершить доказательство сходимости последовательности $(\zeta_n(\tau, t, z))_{n \in \mathbb{N}}$ при $\tau \in T \cap (t - \ln[(1+|z|)^2/4|z|], t)$.

Обычным образом устанавливается единственность решения уравнения (3).

б) Пусть при некотором τ_1 , $0 \leq t < \tau_1 < \tau^0$, в E нашлись точки z_1, z_2 , $z_1 \neq z_2$, в которых

$\zeta(\tau_1, t, z_1) = \zeta(\tau_1, t, z_2)$. Тогда, в силу единственности решения, имеем $\zeta(\tau, t, z_1) = \zeta(\tau, t, z_2)$ при $\tau \in T \cap (t - \ln[(1+s)^2/4s], \tau^0)$, $s = \max(|z_1|, |z_2|)$, откуда при $\tau = t$ получаем $z_1 = z_2$, что противоречит предположению. Следовательно, $\zeta(\tau, t, z)$ однолистка в E и конформно отображает E на односвязную область $B(\tau, t)$. Равенства в утверждении б) непосредственно следуют из (3).

в) Из (3) находим

$$e^{\tau-t}\zeta = z \exp \int_t^\tau (1 - p(\zeta, \tau)) d\tau.$$

Если $\tau^0 = \infty$, то при $\tau \rightarrow \infty$ интеграл справа равномерно относительно z внутри E сходится, поскольку, в силу (6), оценки $|\zeta| \leq \nu(\tau)$ и явного представления $\nu(\tau)$, справедливо

$$|1 - p(\zeta, \tau)| \leq \frac{2\nu(\tau)}{1 - \nu(\tau)} = \sqrt{1 + \frac{2}{A}} < \frac{1}{A}.$$

Следовательно, существует предел

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau-t}\zeta(\tau, t, z) = f(z), 0 \leq t < \infty,$$

и функция $f(z) = z + \dots$ как отличный от постоянной равномерный предел голоморфных однолистных функций голоморфна и однолистка в E . Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть функция $p(\zeta, t)$ непрерывна по совокупности переменных в $E \times T$, голоморфна по ζ в E при каждом t , $0 \leq t < \infty$, и имеет в E положительную вещественную часть. Тогда решение $\zeta = \zeta(t, z)$ уравнения

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\zeta p(\zeta, t), \quad \zeta|_{t=0} = z \in E, \quad (8)$$

голоморфно и однолистно в E при любом t .

Доказательство. Положим $p(0, t) = a(t) + ib(t)$, имеем $a(t) > 0$ и

$$p(\zeta, t) = ib(t) + a(t)p^*(\zeta, t),$$

где $p^*(\zeta, t) \in P(C, T)$. При этом уравнение (8) примет вид

$$\frac{1}{a(t)} \left[\frac{d \ln \zeta}{dt} + ib(t) \right] = -p^*(\zeta, t).$$

Выполнив замену переменного по формулам

$$\tau = \tau(t) = \int_0^t a(t) dt, \zeta_1 = \zeta \exp \left\{ i \int_0^t b(t) dt \right\},$$

придем к уравнению Левнера – Куфарева

$$\frac{d \ln \zeta_1}{d\tau} = -p^* \left(\zeta_1 \exp \left\{ -i \int_0^\tau \frac{b(t(\tau))}{a(t(\tau))} d\tau \right\}, t(\tau) \right), \zeta_1|_{\tau=0} = z,$$

решение которого по теореме 5 голоморфно и однолистно в E . Значит этими же свойствами обладает решение

$$\zeta(t, z) = \zeta_1(\tau(t), z) \exp \left\{ -i \int_0^t b(t) dt \right\}$$

уравнения (8), что и требовалось доказать.

§3. НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛЕВНЕРА – КУФАРЕВА

1. Автономное уравнение Левнера – Куфарева

Пользуясь тем, что наряду с функцией $p(z)$ из класса C этому же классу принадлежит и функция $1/p(z)$, рассмотрим уравнение Левнера – Куфарева в виде

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\frac{\zeta}{p(\zeta)}, \quad \zeta|_{\tau=0} = z \in E. \quad (9)$$

Согласно теореме 5, решение $\zeta = \zeta(\tau, z)$ задачи (9) при каждом фиксированном τ , $0 < \tau < \infty$, голоморфно и однолистно в E . Правая часть рассматриваемого уравнения не зависит от τ , и, следовательно, оно равносильно некоторой автономной (динамической) системе двух дифференциальных уравнений для двух функций вещественного переменного. Нетрудно увидеть, что решение $\zeta(\tau, z)$ задачи (9) дается в неявном виде формулой

$$\ln \frac{\zeta(\tau, z)}{z} + \int_z^{\zeta(\tau, z)} \frac{p(\zeta) - 1}{\zeta} d\zeta + \tau = 0.$$

Функция $e^{\tau}\zeta(\tau, z) \in S$. Этому же классу принадлежит функция

$$f(z) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\tau}\zeta(\tau, z) = z \exp \left\{ \int_0^z \frac{p(\zeta) - 1}{\zeta} d\zeta \right\}.$$

Для нее $\frac{zf'(z)}{f(z)} = p(z)$, и значит $f(z)$ отображает

круг E на звездообразную относительно нуля область. Множество получаемых указанным способом функций $f(z)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, составляет весь класс S^* .

Теорема 6. Если $p(z, \varepsilon) = p(z) + \varepsilon T(z) + \gamma(z, \varepsilon)$ – вариационная формула в классе C , где $\gamma(z, \varepsilon)/\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно внутри E , $\gamma(z, \varepsilon)/z$ и $T(z)/z$ голоморфны в E , то

$$f(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon f(z) \int_0^z T(u) \frac{du}{u} + o(z, \varepsilon) -$$

вариационная формула в классе S^* .

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(z, \varepsilon) \in S^*$, соответствующую функции $p(z, \varepsilon) \in C$, то есть

$$\frac{zf'(z, \varepsilon)}{f(z, \varepsilon)} = p(z, \varepsilon). \text{ Имеет место тождество}$$

$$\frac{zf'(z, \varepsilon)}{f(z, \varepsilon)} = \frac{zf'(z)}{f(z)} + \varepsilon T(z) + \gamma(z, \varepsilon),$$

где $f(z) \in S^*$. Разделив обе его части на z и проинтегрировав полученное по z от z_0 , $z_0 \neq 0$, до z вдоль пути, не содержащего нуля, приходим к равенству

$$\frac{f(z, \varepsilon)}{f(z_0, \varepsilon)} = \frac{f(z)}{f(z_0)} \exp \left\{ \varepsilon \int_{z_0}^z \frac{T(u)}{u} du + \gamma_1(z, \varepsilon) \right\},$$

где $\gamma_1(z, \varepsilon)/\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно внутри E . Умножив обе части этого равенства на z_0 и перейдя к пределу при $z_0 \rightarrow 0$, получим

$$f(z, \varepsilon) = f(z) \exp \left\{ \varepsilon \int_0^z \frac{T(u)}{u} du + \gamma_2(z, \varepsilon) \right\},$$

где $\gamma_2(z, \varepsilon)/\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно внутри E . Для доказательства теоремы остается разложить последнее тождество по степеням ε .

Следствие 2. В классе S^* имеет место вариационная формула

$$\begin{aligned} f(z, \varepsilon) = f(z) + \\ + \varepsilon f(z) \sum_{k=1}^m \left\{ A_k \left[\frac{z+z_k}{z-z_k} H(z) + 1 - H(z_k) \frac{2z}{z-z_k} \right] - \right. \\ \left. - \bar{A}_k \left[\frac{1+\bar{z}_k z}{1-\bar{z}_k z} H(z) - 1 + \overline{H(z_k)} \frac{2\bar{z}_k z}{1-\bar{z}_k z} \right] \right\} + \\ + i\varepsilon A \{ z f'(z) - f(z) \} + o(z, \varepsilon), \end{aligned}$$

где $z_k, k = 1, 2, \dots, m, m \in \mathbb{N}$, – различные точки из E , A_k – произвольные комплексные постоянные, A – произвольная вещественная постоянная, $H(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)}$.

Для доказательства следствия достаточно применить теорему 6 для вариационной формулы

$$\begin{aligned} p(z, \varepsilon) = p(z) + \varepsilon z \frac{d}{dz} \left\{ \sum_{k=1}^m \left[A_k \frac{z+z_k}{z-z_k} (p(z) - p(z_k)) - \right. \right. \\ \left. \left. - \bar{A}_k \frac{1+\bar{z}_k z}{1-\bar{z}_k z} (p(z) + \overline{p(z_k)}) \right] + iA p(z) \right\} + o(z, \varepsilon) \end{aligned}$$

в классе C .

Следствие 3. В классе S^* имеет место вариационная формула

$$f(z, \varepsilon) = f(z) - \varepsilon(a + ib)(zf'(z) - f(z)) + o(z, \varepsilon),$$

где $a \in (0, 1), b \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть $f(z) \in S^*$ и $p(z) = zf'(z)/f(z)$ – соответствующая функция класса C . Легко увидеть, что при $\varepsilon > 0$ классу C принадлежит функция

$$\begin{aligned} p(z, \varepsilon) = p((1 - i\varepsilon a)e^{-ib\varepsilon} z) = \\ = p(z) - \varepsilon(a + ib)zp'(z) + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Применив к этой вариационной формуле теорему 6, получим требуемое.

2. Уравнение, приводящееся к однородному

Теорема 7. Пусть $p(z) \in C$, и $\alpha, \alpha \geq 0$, – произвольная постоянная. Тогда классу S^* принадлежит функция

$$f(z) = z \exp \left\{ \int_0^z \frac{p(t) - 1}{\alpha p(t) + 1} \frac{dt}{t} \right\}.$$

Доказательство. Согласно теореме 5, решение $\zeta = \zeta(\tau, z)$ задачи

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\frac{\zeta}{p(e^{-\alpha\tau}\zeta)}, \quad \zeta|_{\tau=0} = z \in E, \quad (10)$$

однолистно и голоморфно в круге E при каждом фиксированном τ . При $\alpha = 0$ уравнение (10) примет вид (9), рассмотренный в предыдущем пункте. Пусть $\alpha > 0$. Произведя в (10) замену переменного $x = e^{\alpha\tau}$, получим однородное уравнение

$$\frac{d\zeta}{dx} = -\frac{\frac{\zeta}{x}}{\alpha p\left(\frac{\zeta}{x}\right)}, \quad \zeta|_{x=1} = z,$$

в котором, в свою очередь, замена $t(x, z) = \zeta(x, z)/x$ дает

$$\frac{dx}{x} = -\frac{\alpha p(t)}{\alpha p(t) + 1} \frac{dt}{t}, \quad t|_{x=1} = z.$$

Интегрируя последнее равенство и возвращаясь к переменному τ , имеем

$$\alpha\tau = \int_{e^{-\alpha\tau}\zeta(\tau, z)}^z \frac{\alpha p(t)}{\alpha p(t) + 1} \frac{dt}{t}. \quad (11)$$

Перепишем (11) в виде

$$\ln z - \ln \zeta(\tau, z) - \int_{e^{-\alpha\tau}\zeta(\tau, z)}^z \frac{dt}{(1 + \alpha p(t))t} = 0,$$

или после потенцирования в виде

$$\frac{e^\tau \zeta(\tau, z)}{z} = \exp \left\{ \tau - \int_{e^{-\alpha\tau}\zeta(\tau, z)}^z \frac{dt}{(1 + \alpha p(t))t} \right\}.$$

Из последнего выражения и (11) получаем

$$e^\tau \zeta(\tau, z) = z \exp \left\{ \int_{e^{-\alpha\tau}\zeta(\tau, z)}^z \frac{p(t) - 1}{\alpha p(t) + 1} \frac{dt}{t} \right\},$$

где функция $e^\tau \zeta(\tau, z) \in S$. Переходя к пределу при $\tau \rightarrow \infty$, получим требуемое. Легко увидеть, что $\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0$.

3. Формула Базилевича

Теорема 8. Пусть $p_0(\zeta), p_1(\zeta)$ – голоморфные в E функции с положительными вещественными частями. Тогда классу S принадлежит функция

$$f(z) = \left\{ \frac{p_0(0)}{p_1(0)} \int_0^z p_1(v) v^{p_0(0)-1} e^{\int_0^v \frac{p_0(u)-p_0(0)}{u} du} dv \right\}^{\frac{1}{p_0(0)}}.$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение (8) с функцией

$$p(\zeta, t) = \frac{1}{(1 - e^{-t})p_0(\zeta) + e^{-t}p_1(\zeta)}, \quad 0 \leq t \leq \infty,$$

После замены переменного $x = e^t$ уравнение примет вид

$$\frac{dx}{d\zeta} = -(x-1) \frac{p_0(\zeta)}{\zeta} - \frac{p_1(\zeta)}{\zeta}, \quad \zeta|_{x=1} = z \in E.$$

Проинтегрировав его, получим формулу

$$x = 1 - \int_z^\zeta \frac{p_1(v)}{v} e^{-\int_v^\zeta \frac{p_0(u)}{u} du} dv, \quad (12)$$

неявно задающую решение $\zeta = g(x, z) = c_1(x)z + \dots$. Коэффициент $c_1(x)$ находим из уравнения

$$dx = -[(x-1)p_0(0) + p_1(0)] d \ln c_1(x).$$

Легко увидеть, что

$$c_1(x) = \left[\frac{p_1(0)}{p_0(0)x + p_1(0) - p_0(0)} \right]^{\frac{1}{p_0(0)}}.$$

Ветвь обобщенной степенной функции выбираем из условия $c_1(1) = 1$. Поскольку $\operatorname{Re} p_0(0) > 0$, то $c_1(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Из (12) следует

$$xg(x, z)^{p_0(0)} = g(x, z)^{p_0(0)} + \int_0^z \frac{p_1(v)}{v^{1-p_0(0)}} e^{\int_{g(x,z)}^v \frac{p_0(u)-p_0(0)}{u} du} dv.$$

Разделив обе части последнего равенства на $xc_1(x)^{p_0(0)}$ и перейдя к пределу при $x \rightarrow \infty$, получим искомую формулу Базилевича.

4. Уравнение, приводящееся к уравнению Бернулли

Теорема 9. Пусть $p_0(\zeta)$, $p_1(\zeta)$ – голоморфные в E функции с положительными вещественными частями и α , $0 \leq \alpha < 1$, – произвольная постоянная. Тогда классу S принадлежит функция

$$f(z) = \left[\frac{p_0(0)}{p_0(0) + p_1(0)} \left(z^{(1-\alpha)p_0(0)} e^{\int_0^z \frac{p_0(u)-p_0(0)}{u} du} + (1-\alpha) \int_0^z p_1(v) v^{(1-\alpha)p_0(0)-1} e^{\int_0^v \frac{p_0(u)-p_0(0)}{u} du} dv \right) \right]^\mu,$$

где $\mu = 1/((1-\alpha)p_0(0))$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение (8) с функцией

$$p(\zeta, t) = \frac{1}{p_0(\zeta) + e^{(\alpha-1)t} p_1(\zeta)}, \quad 0 \leq t \leq \infty,$$

После замены переменного $y = e^t$ уравнение примет вид

$$\frac{dy}{d\zeta} = -\frac{p_0(\zeta)}{\zeta} y - \frac{p_1(\zeta)}{\zeta} y^\alpha, \quad y|_{\zeta=z} = 1,$$

и является относительно y уравнением Бернулли. Заменой $x = y^{1-\alpha}$ приведем его к линейному неоднородному уравнению

$$\frac{dx}{d\zeta} = -(1-\alpha) \frac{p_0(\zeta)}{\zeta} x - (1-\alpha) \frac{p_1(\zeta)}{\zeta}, \quad x|_{\zeta=z} = 1,$$

проинтегрировав которое, получим формулу

$$x = e^{-\int_z^\zeta \frac{p_0(u)}{u} du} - (1-\alpha) \int_z^\zeta \frac{p_1(v)}{v} e^{-\int_z^v \frac{p_0(u)}{u} du} dv, \quad (13)$$

неявно задающую решение $\zeta = g(x, z) = c_1(x)z + \dots$. Коэффициент $c_1(x)$ находим из уравнения

$$dx = -(1-\alpha)[p_0(0)x + p_1(0)]d \ln c_1(x).$$

Он имеет вид

$$c_1(x) = \left[\frac{p_0(0) + p_1(0)}{p_0(0)x + p_1(0)} \right]^{\frac{1}{(1-\alpha)p_0(0)}}.$$

Ветвь обобщенной степенной функции выбираем из условия $c_1(1) = 1$. Поскольку $\operatorname{Re} p_0(0) > 0$, то $c_1(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Из (13) следует

$$xg(x, z)^{(1-\alpha)p_0(0)} = z^{(1-\alpha)p_0(0)} e^{\int_{g(x,z)}^z \frac{p_0(u)-p_0(0)}{u} du} + (1-\alpha) \int_{g(x,z)}^z p_1(v) v^{(1-\alpha)p_0(0)-1} e^{\int_{g(x,z)}^v \frac{p_0(u)-p_0(0)}{u} du} dv.$$

Разделив последнее равенство на $xc_1(x)^{(1-\alpha)p_0(0)}$ и перейдя к пределу при $x \rightarrow \infty$, получим требуемое.

Заметим, что из выведенной интегральной формулы можно получить формулу Базилевича, положив $\alpha = 0$ и $p_2(z) = p_0(z) + p_1(z)$.

§4. ВАРИАЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ В КЛАССЕ $S(C, T)$

Уравнение Левнера – Куфарева порождает некоторый подкласс функций класса S , являющихся предельными для решений этого уравнения.

Пусть для $f(z) \in S$ найдется такая функция $p(\zeta, \tau) \in P(C, T)$, что $f(z) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^\tau \zeta(\tau, z)$, где $\zeta(\tau, z)$ – решение уравнения Левнера – Куфарева

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\zeta p(\zeta, \tau), \quad \zeta|_{\tau=0} = z \in E. \quad (14)$$

Множество всех таких функций $f(z)$ обозначим через $S(C, T)$. Оно содержит подкласс S' функций класса S , отображающих круг E на области, полученные из плоскости проведением разреза по обобщенно жордановой кривой, и является плотным подклассом класса S .

Теорема 10. Пусть $f(z) \in S(C, T)$. Тогда при достаточно малых ε классу S принадлежит функция

$$f(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon \int_0^\infty \left\{ \omega_1(\tau) \left[f(z) - f'(z) \frac{\zeta(\tau, z)}{\zeta'_z(\tau, z)} p(\zeta(\tau, z), \tau) \right] - i\omega_2(\tau) f'(z) \frac{\zeta^2(\tau, z)}{\zeta'_z(\tau, z)} p'_\zeta(\zeta(\tau, z), \tau) \right\} d\tau + o(z, \varepsilon),$$

где вещественные функции $\omega_1(\tau)$, $\omega_2(\tau)$, $\tau \in T$, непрерывны за исключением конечного числа точек разрыва первого рода, $|e^t \omega_1(\tau)|$, $|\omega_2(\tau)|$ ограничены на T , и $\zeta(\tau, z)$ – решение уравнения (14).

Доказательство. Согласно следствию 1, решение $\zeta = \zeta(\tau, z, \varepsilon)$ дифференциального уравнения

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -(1 + \varepsilon \omega_1(\tau)) \zeta p(\zeta e^{i\omega_2(\tau)\varepsilon}, \tau), \quad \zeta|_{\tau=0} = z,$$

голоморфно по z . Это уравнение равносильно системе двух дифференциальных уравнений для двух функций вещественного переменного. Правая часть этого уравнения непрерывно дифференцируема по ε , и ее производная, как легко увидеть, ограничена. Следовательно, по теореме о зависимости решений от параметра [15. С. 121] $\zeta = \zeta(\tau, z, \varepsilon)$ непрерывно дифференцируема по ε . Запишем разложение $\zeta = \zeta(\tau, z, \varepsilon)$ по степеням ε :

$$\zeta(\tau, z, \varepsilon) = \zeta(\tau, z) + \varepsilon Q(\tau, z) + \alpha(\tau, z, \varepsilon),$$

где $\alpha(\tau, z, \varepsilon)/\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно внутри $E \times T$, и $\alpha(\tau, z, \varepsilon)$ ограничено внутри $E \times T \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$; $Q(0, z) = 0$. Разложим по степеням ε левую и правую части тождества:

$$\frac{d \ln \zeta(\tau, z, \varepsilon)}{d\tau} = -(1 + \varepsilon \omega_1(\tau)) p(\zeta(\tau, z, \varepsilon) e^{i\omega_2(\tau)\varepsilon}, \tau).$$

Получим

$$\begin{aligned} \frac{d \ln \zeta(\tau, z)}{d\tau} + \varepsilon \frac{d Q(\tau, z)}{d\tau \zeta(\tau, z)} = \\ = -(1 + \varepsilon \omega_1(\tau)) \{ p(\zeta(\tau, z), \tau) + \\ + \varepsilon p'_\zeta(\zeta(\tau, z), \tau) [Q(\tau, z) + i\omega_2(\tau) \zeta(\tau, z)] \} + o(z, \varepsilon). \end{aligned}$$

Сравнивая теперь коэффициенты при ε , приходим к равенству

$$\frac{d Q(\tau, z)}{d\tau \zeta(\tau, z)} = -p'_\zeta(\zeta(\tau, z), \tau) Q(\tau, z) - R(\tau, z),$$

где
$$R(\tau, z) = \omega_1(\tau) p(\zeta(\tau, z), \tau) + i\omega_2(\tau) \zeta(\tau, z) p'_\zeta(\zeta(\tau, z), \tau).$$

Оно показывает, что отношение $Q(\tau, z) / \zeta(\tau, z)$ является решением обыкновенного линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dy}{d\tau} + \zeta(\tau, z) p'_\zeta(\zeta(\tau, z), \tau) y = -R(\tau, z), \quad y(0) = 0.$$

Дифференцируя тождество

$$\frac{d}{d\tau} \ln \zeta(\tau, z) = -p(\zeta(\tau, z), \tau)$$

по z , получаем формулу

$$p'_\zeta(\zeta(\tau, z), \tau) \zeta'_z(\tau, z) = -\frac{d \zeta'_z(\tau, z)}{d\tau \zeta(\tau, z)},$$

позволяющую записать рассматриваемое уравнение в виде

$$\frac{dy}{d\tau} - \frac{d}{d\tau} \left(\ln \frac{\zeta'_z(\tau, z)}{\zeta(\tau, z)} \right) y = -R(\tau, z), \quad y(0) = 0.$$

Решив его, находим $Q(\tau, z)$ и, следовательно,

$$\zeta(\tau, z, \varepsilon) = \zeta(\tau, z) - \varepsilon \zeta'_z(\tau, z) \int_0^\tau \frac{\zeta(t, z)}{\zeta'_z(t, z)} R(t, z) dt + \alpha(\tau, z, \varepsilon).$$

Функция $\zeta = \zeta(\tau, z, \varepsilon)$, $\zeta'(\tau, 0, \varepsilon) = 0$, однолистно и конформно отображает круг E в себя. Легко найти, что

$$\zeta'_z(\tau, 0, \varepsilon) = e^{-\tau} \left(1 - \varepsilon \int_0^\tau \omega_1(t) dt \right) + o(\varepsilon).$$

Классу S принадлежат функция

$$\begin{aligned} f(z, \tau, \varepsilon) = \frac{\zeta(\tau, z, \varepsilon)}{\zeta'_z(\tau, 0, \varepsilon)} = e^\tau \zeta(\tau, z) + \\ + \varepsilon \left\{ e^\tau \zeta(\tau, z) \int_0^\tau \omega_1(t) dt - \right. \\ \left. - e^\tau \zeta'_z(\tau, z) \int_0^\tau \frac{\zeta(t, z)}{\zeta'_z(t, z)} R(t, z) dt \right\} + o(z, \varepsilon) \end{aligned}$$

и функции

$$f(z, \varepsilon) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} f(z, \tau, \varepsilon), \quad f(z) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^\tau \zeta(\tau, z).$$

Перейдя в последнем равенстве к пределу при $\tau \rightarrow \infty$, получим искомую вариационную формулу.

Приведем две вариационные формулы, полученные посредством уравнения Левнера – Куфарева.

Теорема 11. Пусть функция $p(\zeta, \tau, \varepsilon)$ при каждом фиксированном ε , $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 > 0$, принадлежит классу $P(C, T)$, непрерывно дифференцируема по ε в $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ и имеет разложение в окрестности $\varepsilon = 0$ вида

$$p(\zeta, \tau, \varepsilon) = p(\zeta, \tau) + \varepsilon T(\zeta, \tau) + \gamma(\zeta, \tau, \varepsilon),$$

где $\gamma(\zeta, \tau, \varepsilon)/\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно внутри $E \times T$. Тогда в классе $S(C, T)$ имеет место вариационная формула

$$f(z, \varepsilon) = f(z) - \varepsilon f'(z) \int_0^\infty \frac{\zeta(\tau, z)}{\zeta'_z(\tau, z)} T(\zeta(\tau, z), \tau) d\tau + o(\varepsilon),$$

где $\zeta(\tau, z)$ – решение уравнения (14).

Доказательство. Пусть $\zeta(\tau, z, \varepsilon)$ – решение задачи

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\zeta p(\zeta, \tau, \varepsilon), \quad \zeta|_{\tau=0} = z \in E,$$

которая равносильна системе двух уравнений для двух функций вещественного переменного. По теореме о зависимости решений от параметра [15. С. 121] $\zeta = \zeta(\tau, z, \varepsilon)$ непрерывно дифференцируемо по ε . В круге E для него имеет место разложение по степеням ε вида,

$$\zeta(\tau, z, \varepsilon) = \zeta(\tau, z) + \varepsilon Q(\tau, z) + \alpha(\tau, z, \varepsilon),$$

где $\alpha(\tau, z, \varepsilon)$ ограничено внутри $E \times T \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, и $\alpha(\tau, z, \varepsilon)/\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно внутри $E \times T$. Раскладывая левую и правую части тождества

$$\zeta'_\tau(\tau, z, \varepsilon) = -\zeta(\tau, z, \varepsilon) p(\zeta(\tau, z, \varepsilon), \tau, \varepsilon)$$

по степеням ε и сравнивая коэффициенты при ε , получим

$$\begin{aligned} Q'_\tau(\tau, z) + [p(\zeta(\tau, z), \tau) + \zeta(\tau, z) p'_\zeta(\zeta(\tau, z), \tau)] Q(\tau, z) = \\ = -\zeta(\tau, z) T(\zeta(\tau, z), \tau). \end{aligned}$$

Пользуясь тождеством

$$\zeta'_\tau(\tau, z) = -\zeta(\tau, z) p(\zeta(\tau, z), \tau),$$

находим, что

$$-\left[p(\zeta(\tau, z), \tau) + \zeta(\tau, z) p'_\zeta(\zeta(\tau, z), \tau) \right] = \frac{d \ln \zeta'_z(\tau, z)}{d\tau}.$$

Видим, что $Q(\tau, z)$ является решением линейного неоднородного уравнения

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{d \ln \zeta'_z(\tau, z)}{d\tau} y - \zeta(\tau, z) T(\zeta(\tau, z), \tau), \quad y(0) = 0.$$

Решив это уравнение, находим $Q(\tau, z)$, и, следовательно,

$$\begin{aligned} \zeta(\tau, z, \varepsilon) = \zeta(\tau, z) - \\ - \varepsilon \zeta'_\tau(\tau, z) \int_0^\tau \frac{\zeta(t, z)}{\zeta'_z(t, z)} T(\zeta(t, z), t) dt + \alpha(\tau, z, \varepsilon). \end{aligned}$$

Классу S принадлежат функции $e^\tau \zeta(\tau, z, \varepsilon)$ при любом фиксированном τ и $f(z, \varepsilon) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^\tau \zeta(\tau, z, \varepsilon)$. Та-

ким образом, умножив обе части последнего равенства на e^τ и перейдя к пределу при $\tau \rightarrow \infty$, получим искомую вариационную формулу.

Теорема 12. Пусть функция $p(\zeta, \tau, \varepsilon)$ при каждом фиксированном ε , $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 > 0$, принадлежит классу $P(C, T)$, непрерывно дифференцируема по ε в $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ и имеет разложение в окрестности $\varepsilon = 0$ вида

$$p(\zeta, \tau, \varepsilon) = p(\zeta, \tau) + \varepsilon T(\zeta, \tau) + \gamma(\zeta, \tau, \varepsilon),$$

где $\gamma(\zeta, \tau, \varepsilon)/\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно внутри $E \times T$. Тогда в классе $S(C, T)$ имеет место вариационная формула

$$f(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon f(z) \int_0^\infty \left(\frac{\zeta'_\tau(\tau, z)}{\zeta(\tau, z)} \right)^2 T(\zeta(\tau, z), \tau) d\tau + o(z, \varepsilon),$$

где $\zeta(\tau, z)$ – решение уравнения

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\frac{\zeta}{p(\zeta, \tau)}, \quad \zeta|_{\tau=0} = z \in E. \quad (15)$$

Доказательство. Поскольку наряду с функцией $p(\zeta, \tau)$ классу $P(C, T)$ принадлежит и функция $1/p(\zeta, \tau)$, для любой $f(z) \in S(C, T)$ найдется такая функция $p(\zeta, \tau) \in P(C, T)$, что $f(z) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^\tau \zeta(\tau, z)$,

где $\zeta(\tau, z)$ – решение уравнения (15).

Пусть $\zeta(\tau, z, \varepsilon)$ является решением задачи

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\frac{\zeta}{p(\zeta, \tau, \varepsilon)}, \quad \zeta|_{\tau=0} = z \in E.$$

и имеет в E , как и при доказательстве предыдущей теоремы, разложение по степеням ε вида

$$\zeta(\tau, z, \varepsilon) = \zeta(\tau, z) + \varepsilon Q(\tau, z) + \alpha(\tau, z, \varepsilon).$$

Раскладывая левую и правую части тождества

$$p(\zeta(\tau, z, \varepsilon), \tau, \varepsilon) \zeta'_\tau(\tau, z, \varepsilon) = -\zeta(\tau, z, \varepsilon)$$

по степеням ε и сравнивая коэффициенты при ε , получим равенство

$$p(\zeta(\tau, z), \tau) Q'_\tau(\tau, z) + [1 + \zeta'_\tau(\tau, z) p'_\zeta(\zeta(\tau, z), \tau)] Q(\tau, z) = -\zeta'_\tau(\tau, z) T(\zeta(\tau, z), \tau).$$

Пользуясь тождеством

$$p(\zeta(\tau, z), \tau) \zeta'_\tau(\tau, z) = -\zeta(\tau, z),$$

находим, что

$$\begin{aligned} [1 + \zeta'_\tau(\tau, z) p'_\zeta(\zeta(\tau, z), \tau)] &= \\ &= -\frac{(p(\zeta(\tau, z), \tau) \zeta'_\tau(\tau, z))'_\tau}{\zeta'_\tau(\tau, z)} = 1, \\ p(\zeta(\tau, z), \tau) &= -\frac{\zeta(\tau, z)}{\zeta'_\tau(\tau, z)}. \end{aligned}$$

Видим, что $Q(\tau, z)$ является решением линейного неоднородного уравнения

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{\zeta'_\tau(\tau, z)}{\zeta(\tau, z)} y + \frac{\zeta'_\tau(\tau, z)^2}{\zeta(\tau, z)} T(\zeta(\tau, z), \tau), \quad y(0) = 0.$$

Решив это уравнение, находим $Q(\tau, z)$, и, следовательно,

$$\begin{aligned} \zeta(\tau, z, \varepsilon) &= \zeta(\tau, z) + \\ &+ \varepsilon \zeta(\tau, z) \int_0^\tau \left(\frac{\zeta'_t(t, z)}{\zeta(t, z)} \right)^2 T(\zeta(t, z), t) dt + \alpha(\tau, z, \varepsilon). \end{aligned}$$

Классу S принадлежит функция $e^\tau \zeta(\tau, z, \varepsilon)$ при любом фиксированном τ и $f(z, \varepsilon) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^\tau \zeta(\tau, z, \varepsilon)$. Та-

ким образом, умножив обе части последнего равенства на e^τ и перейдя к пределу при $\tau \rightarrow \infty$, получим искомую вариационную формулу.

§5. ОБЪЕДИНЕННЫЕ МЕТОДЫ

Метод внутренних вариаций при решении экстремальных задач приводит к некоторым дифференциально-функциональным уравнениям для экстремальных функций. Качественный анализ уравнений показывает, что часто эти функции отображают единичный круг на плоскость, разрезанную по кусочно-аналитической кривой. Для таких функций $f(z)$ всегда найдется $p(\zeta, \tau) \in P(C, T)$, такая, что

$$f(z) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^\tau \zeta(\tau, z),$$

где $\zeta(\tau, z)$ – решение уравнения Левнера – Куфарева. Это привело к мысли комбинировать вариационный и параметрический методы. Разные способы объединения методов были предложены Н.А. Лебедевым [10] и П.П. Куфаревым [11]. Теорема 13 представляет содержание метода Н.А. Лебедева, а теорема 14 – П.П. Куфарева. Теорема 15, предложенная М. Шиффером [12] для такого же типа функций, приведена в новой редакции в терминах параметрического метода.

Теорема 13. Пусть $f(z) \in S(C, T)$. Тогда при достаточно малых ε классу S принадлежит функция

$$\begin{aligned} f(z, \varepsilon) &= f(z) + \\ &+ \varepsilon f(z) \sum_{k=1}^m \left\{ A_k H^2(\zeta(\tau, z_k)) \frac{f(z)}{f(z) - f(z_k)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{A_k}{2} L(\zeta(\tau, z), \zeta(\tau, z_k)) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\bar{A}_k}{2} L\left(\zeta(\tau, z), \frac{1}{\zeta(\tau, z_k)}\right) \right\} + o(z, \varepsilon), \end{aligned}$$

где z_k , $k = 1, 2, \dots, m$, $m \in \mathbb{N}$, – различные точки из E , A_k – произвольные комплексные постоянные, $\zeta(\tau, z)$ – решение уравнения (14),

$$H(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)}, \quad L(z, a) = H(z) \frac{z+a}{z-a} + 1.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $w = f_0(\zeta) \in S$. Фиксируем в круге E точки $\zeta_k = \zeta(\tau, z_k)$, $k = 1, 2, \dots, m$. В силу однолиственности решения уравнения Левнера – Куфарева, все они различны. Согласно теореме 2, классу S принадлежит функция

$$\begin{aligned} f(\zeta, \varepsilon) &= f_0(\zeta) + \varepsilon f_0(\zeta) \sum_{k=1}^m \left\{ A_k H^2(\zeta_k) \frac{f_0(\zeta)}{f_0(\zeta) - f_0(\zeta_k)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{A_k}{2} L(\zeta, \zeta_k) - \frac{\bar{A}_k}{2} L\left(\zeta, \frac{1}{\bar{\zeta}_k}\right) \right\} + o(\zeta, \varepsilon). \end{aligned}$$

Сделаем здесь замену $\zeta = \zeta(\tau, z)$ и $f(z) = f_0(\zeta(\tau, z))$, получим искомую вариационную формулу.

Пусть $f(z) = z + c_2 z^2 + \dots \in S$ отображает круг E на область $B_0 = \mathbb{C}L$, где L – кусочно-гладкая кривая, с параметрическим уравнением $w = \varphi(t)$, $0 \leq t \leq \infty$. Функция $\varphi(t)$ такова, что область B_τ , полученная из плоскости проведением разреза $w = \varphi(t)$, $\tau \leq t \leq \infty$, односвязна. Будем считать параметризацию семейства областей B_τ стандартной, то есть функция $w = \Psi(z, \tau)$, $\Psi(z, 0) = f(z)$, однолистно и конформно отображающая E на B_τ , нормирована разложением

$$\Psi(z, \tau) = e^\tau (z + c_2(\tau)z^2 + \dots).$$

Обратную к $\Psi(z, \tau)$ функцию обозначим через $F(w, \tau)$. Очевидно, $F(0, \tau) = 0$, $F'(0, \tau) = e^{-\tau}$.

Теорема 14. В классе S имеет место вариационная формула

$$f(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon \sum_{k=1}^m \left\{ A_k H^2(z_k, \tau) \frac{f^2(z)}{f(z) - f(z_k)} - \frac{A_k}{2} Q(z, z_k, \tau) - \frac{\bar{A}_k}{2} Q\left(z, \frac{1}{\bar{z}_k}, \tau\right) \right\} + o(z, \varepsilon),$$

где z_k , $k = 1, 2, \dots, m$, $m \in \mathbb{N}$, – различные точки из E , A_k – произвольные комплексные постоянные,

$$H(z, \tau) = \frac{z \Psi'_z(z, \tau)}{\Psi(z, \tau)} = \frac{F(f(z), \tau)}{f(z) F'_w(f(z), \tau)},$$

$$Q(z, a, \tau) = \frac{1}{2} \frac{F(f(z), \tau)}{F'_w(f(z), \tau)} \frac{a + F(f(z), \tau)}{a - F(f(z), \tau)} - \frac{f(z)}{2}.$$

Доказательство. Согласно теореме 2, отображение круга E на некоторую близкую к B_τ область $B_{\tau'}$ имеет вид

$$\Psi^*(z, \tau) = \Psi(z, \tau) + \varepsilon \sum_{k=1}^m \left\{ A_k H^2(z_k, \tau) \frac{\Psi^2(z, \tau)}{\Psi(z, \tau) - \Psi(z_k, \tau)} + A_k K(z, z_k, \tau) + \bar{A}_k K\left(z, \frac{1}{\bar{z}_k}, \tau\right) \right\} + o(z, \varepsilon),$$

$$\text{где } K(z, a, \tau) = \frac{1}{2} \left[z \Psi'_z(z, \tau) \frac{a + z}{a - z} - \Psi(z, \tau) \right].$$

Функция $w^*(w, \tau) = \Psi^*(F(w, \tau), \tau)$, с одной стороны, отображает область B_τ на $B_{\tau'}^*$, с другой – B_0 на область B_0^* , близкую к B_0 . Разложение $w^*(w, \tau)$ по степеням ε имеет вид

$$w^*(w, \tau) = w + \varepsilon \sum_{k=1}^m \left\{ A_k \left[\frac{F(w_k, \tau)}{w_k F'_w(w_k, \tau)} \right]^2 \frac{w^2}{w - w_k} + \frac{A_k}{2} \left[\frac{F(w, \tau)}{F'_w(w, \tau)} \frac{z_k + F(w, \tau)}{z_k - F(w, \tau)} - w \right] + \frac{\bar{A}_k}{2} \left[\frac{F(w, \tau)}{F'_w(w, \tau)} \frac{1 + \bar{z}_k F(w, \tau)}{1 - \bar{z}_k F(w, \tau)} - w \right] \right\} + o(\varepsilon).$$

Заменив в этой формуле w на $f(z)$, получим искомую формулу.

Теорема 15. В классе S имеет место вариационная формула

$$f^*(z) = f(z) + e^{-\tau} \left[2e^{i\theta} - c_2(\tau) \right] f^2(z) + e^{-2\tau} \left[3e^{2i\theta} - 4e^{i\theta} c_2(\tau) + 2c_2^2(\tau) - c_3(\tau) \right] f^3(z) + o(z, e^{-2\tau}),$$

где $0 \leq \theta < 2\pi$, $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[e^{2\tau} o(e^{-2\tau}) \right] = 0$, и $c_k(\tau)$, $k = 2, 3$, – коэффициенты тейлоровского разложения производящей для $f(z)$ функции $\Psi(z, \tau)$.

Доказательство. Пусть

$$\Phi(z, \tau', \tau'') = F(\Psi(z, \tau'), \tau''), \tau' < \tau''.$$

Запишем функцию

$$g(z) = \frac{e^\tau \Phi(z, 0, \tau)}{\left[1 - e^{i\theta} \Phi(z, 0, \tau) \right]^2}.$$

Она голоморфна и однолистка в E как композиция голоморфных и однолистных функций. Легко увидеть, что $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$. Таким образом, $g(z) \in S$. Вычисления показывают, что

$$\Phi(z, 0, \tau) = e^{-\tau} \left[f(z) - e^{-\tau} c_2(\tau) f^2(z) + e^{-2\tau} \left(2c_2^2(\tau) - c_3(\tau) \right) f^3(z) + \dots \right].$$

Подставляя это выражение в разложение функции $g(z)$ по степеням $\Phi(z, 0, \tau)$, получим искомую вариационную формулу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966. 628 с.
2. Александров И.А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976. 344 с.
3. Хейман В.К. Многолистные функции. М.: ИЛ, 1960. 182 с.
4. Бабенко К.И. К теории экстремальных задач для однолистных функций класса S // Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1972. Т. 101. С. 1–318.
5. Pommerenke Ch. Univalent Functions. Göttingen, 1975.
6. Александров И.А. Методы геометрической теории аналитических функций. Томск: ТГУ, 2001. 220 с.
7. Pommerenke Ch. On a variational method for univalent functions // Michigan Math. J. 1970. V. 17. P. 1–3.
8. Базилевич И.Е. Обобщение одной интегральной формулы для подкласса однолистных функций // Матем. сб. 1964. Т. 100. С. 628–630.
9. Лебедев Н.А. Метод вариаций в конформном отображении // ДАН СССР. 1951. Т. 76. № 1. С. 25–27.
10. Куфарев П.П. Об одном методе исследования экстремальных задач теории однолистных функций // ДАН СССР. 1956. Т. 107. № 5. С. 633–635.
11. Schiffer M. On the coefficient problem for schlicht functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 134. No. 1. P. 95–101.
12. Schiffer M. Variation of the Green function and theory of the p -valued functions // Amer. Journ. Math. 1943. V. 65. P. 341–360.
13. Голузин Г.М. Метод вариаций в конформном отображении // Матем. сб. 1946. Т. 19. С. 203–236.
14. Александров И.А. Вариация звездообразных функций // Вопросы математики. Тр. Том. ун-та. 1961. Т. 155. С. 61–71.
15. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970. 280 с.

Статья представлена кафедрой математического анализа механико-математического факультета Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Математика» 15 октября 2003 г.