

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 517.977

С.А. Вековцева, Н.С. Дёмин

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОДНОСЕКТОРНОЙ ЭКОНОМИКОЙ ПРИ НАЛИЧИИ ВНЕШНИХ ИНВЕСТИЦИЙ. МОДЕЛЬ РАМСЕЯ

Проводится исследование задачи оптимального управления односекторной экономикой на конечном интервале времени при наличии внешних инвестиций, когда управлением является норма накопления, а максимизируемым функционалом – интегральное потребление с дисконтированием (модель Рамсея).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть

1) $k = K/L$, $c = C/L$, $y = Y/L$, $g = G/L$ – удельные относительно трудовых ресурсов L основные фонды (фондовооружённость), потребление, произведённый продукт и скорость поступления внешних инвестиций;

2) $\mu > 0$ – коэффициент амортизации основных фондов, $\delta > 0$ – коэффициент дисконтирования, λ – коэффициент экспоненциального изменения трудовых ресурсов и скорости поступления внешних инвестиций;

3) $f(k) = F(K, L)/L = F(k, 1)$, где $F(K, L)$ – линейно-однородная производственная функция, удовлетворяющая неоклассическим условиям;

4) s – норма накопления.

Тогда задача максимизации удельного интегрального потребления на конечном интервале времени $[0, T]$ аналогично [2] является задачей оптимального управления [4] следующего вида:

$$J = \int_0^T [1 - s(t)] f(k(t)) \exp\{-\delta t\} dt \rightarrow \max_{\{0 \leq s(t) \leq 1\}}; \quad (1.1)$$

$$\dot{k}(t) = s(t)f(k(t)) - \tilde{\mu}k(t) + g, \quad \tilde{\mu} = \mu + \lambda; \quad (1.2)$$

$$k(0) = k_0 > 0, \quad k(T) \geq k_T > 0. \quad (1.3)$$

При доказательствах утверждений существенным образом используется неоклассическое условие, которые относительно $f(k)$ имеют вид [1]

$$f(k) \geq 0, \quad k \geq 0; \quad f(0) = 0, \quad f(\infty) = \infty, \quad f'(k) > 0, \quad f''(k) < 0, \\ \lim_{k \downarrow 0} f'(k) = \infty, \quad \lim_{k \uparrow \infty} f'(k) = 0. \quad (1.4)$$

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Соотношения принципа максимума Понтрягина для задачи (1.1) – (1.3) имеют вид [4]

$$H[k(t), s, \psi(t)] = \psi[sf(k) - \tilde{\mu}k + g] + \\ + \psi_0(1 - s)f(k)e^{-\delta t}; \quad (2.1)$$

$$s(t) = \text{Arg} \max_{0 \leq s(t) \leq 1} H[k(t), s, \psi(t)]; \quad (2.2)$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial k} = -\psi[sf'(k) - \tilde{\mu}] - \psi_0(1 - s)e^{-\delta t}f'(k); \quad (2.3)$$

$$\psi(T) \geq 0, \quad \psi(T)[k(T) - k_T] = 0; \quad (2.4)$$

$$\bar{\psi}(t) = [\psi_0; \psi(t)] \neq [0; 0], \quad t \in [0, T], \quad (2.5)$$

где $\psi_0 = \{0; 1\}$, т.е. константа ψ_0 равна либо нулю, либо единице.

Лемма 1. Если $s(t)$ – оптимальное управление, то

$$s(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } q(t) > 1, \\ 0, & \text{если } q(t) < 1, \\ [0; 1], & \text{если } q(t) = 1. \end{cases} \quad (2.6)$$

При этом переменная состояния $k(t)$ и сопряжённая переменная $q(t) = e^{\delta t}\psi(t)$ на интервале $t \in [0, T]$ подчиняются двухточечной краевой задаче

$$\dot{k} = sf(k) - \tilde{\mu}k + g, \quad (2.7)$$

$$\dot{q} = (\delta + \tilde{\mu})q - (1 - s + sq)f'(k), \quad (2.8)$$

$$k(0) = k_0 > 0, \quad k(T) \geq k_T > 0, \quad (2.9)$$

$$q(T) \geq 0, \quad q(T)[k(T) - k_T] = 0, \quad (2.10)$$

причём исключается ситуация, когда $s(t) \equiv 1$ на всём интервале $t \in [0, T]$.

Доказательство. Последнее утверждение леммы вытекает из того, что при $s(t) \equiv 1$ на всём интервале $t \in [0, T]$ критерий оптимальности $J \equiv 0$, и задача теряет смысл. Значение $\psi_0 = 0$ отвергается, так как непосредственный анализ показывает, что при этом либо нарушаются условия (2.4), (2.5), либо $s(t) \equiv 1$, $t \in [0, T]$. Тогда все соотношения леммы следуют из (1.2), (1.3), (2.2) – (2.5) с учётом того, что $\psi_0 = 1$ и $q(t) = e^{\delta t}\psi(t)$.

Дальнейшее решение задачи связано с анализом свойств траекторий $k(t)$ и $q(t)$. Выделим на плоскости $\{k, q\}$ области знакопостоянства $\dot{k}$ и $\dot{q}$. Результат сформулируем в виде леммы.

Лемма 2. 1) Пусть $\tilde{\mu}k > g$. Тогда, если $q > 1$, чему соответствует $s(t) = 1$, то области знакопостоянства $\dot{k}$ и $\dot{q}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{k} > 0, \quad 0 < k < \tilde{k}; \quad \dot{q} < 0, \quad 0 < k < k^*; \\ \dot{k} = 0, \quad k = \tilde{k}; \quad \dot{q} = 0, \quad k = k^*; \\ \dot{k} < 0, \quad k > \tilde{k}; \quad \dot{q} > 0, \quad k > k^*. \end{aligned} \quad (2.11)$$

При этом $k^* < \tilde{k}$ и являются единственными корнями соответственно уравнений

$$k^*: f'(k) = \delta + \tilde{\mu}; \quad (2.12)$$

$$\tilde{k}: f(k) = \tilde{\mu}k - g. \quad (2.13)$$

2) Если $q < 1$, чему соответствует $s(t) = 0$, то области знакопостоянства $\dot{k}$ и $\dot{q}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{k} < 0, \quad \tilde{\mu}k > g; \quad \dot{q} < 0, \quad q < q^*(k); \\ \dot{k} = 0, \quad \tilde{\mu}k = g; \quad \dot{q} = 0, \quad q = q^*(k); \\ \dot{k} > 0, \quad \tilde{\mu}k < g; \quad \dot{q} > 0, \quad q > q^*(k). \end{aligned} \quad (2.14)$$

При этом кривая q^* определяется соотношением

$$q^*(k) = f'(k)/(\delta + \tilde{\mu}) \quad (2.15)$$

и является монотонно убывающей функцией для $k \geq k^*$, причём $q(k^*) = 1$.

3) Если $\tilde{\mu}k < g$, то при $q > 1$ имеет место свойство $\dot{k} > 0$, т.е. постоянный рост фондовооружённости $k(t)$.

Доказательство. Пусть $q > 1$. Тогда свойства (2.11) следуют, с учётом того, что $s = 1$, из (2.7), (2.8). Единственность решений уравнений (2.12), (2.13) и утверждение три леммы следуют из неоклассических условий (1.4). Так как $f(k)$ – монотонно убывающая функция (см. (1.4)) и, согласно доказанному, $f'(k) > \delta + \tilde{\mu}$ при $0 < k < k^*$, то

$$\begin{aligned} f(k^*) &= \int_0^{k^*} f'(k) dk > \int_0^{k^*} (\delta + \tilde{\mu}) dk = \\ &= (\delta + \tilde{\mu})k^* > \tilde{\mu}k^* > \tilde{\mu}k^* - g. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Так как $f'(k) < 0$ (см. (1.4)), т.е. $f(k)$ – выпуклая вверх функция, и, согласно доказанному, $f(k) > \tilde{\mu}k - g$ при $0 < k < k^*$, то свойство $k^* < \tilde{k}$ следует из (2.16).

Пусть $q < 1$. Тогда свойства (2.14) следуют, с учётом того, что $s = 0$, из (2.7), (2.8). Монотонное убывание $q^*(k)$ следует из (1.4), а свойство $q(k^*) = 1$ – из (2.12).

Лемма 3. Сопряжённая переменная $q(t)$ является неотрицательной на всём интервале $t \in [0, T]$.

Доказательство. Доказательство построим на том, что предположение $q(t) < 0$ будет противоречить одному из условий трансверсальности, а именно: условию $q(T) \geq 0$ (см. (2.10)). Поскольку, согласно (2.6), $s = 0$ при $q < 0$, то $q(t)$ подчиняется дифференциальному уравнению $\dot{q} = (\delta + \tilde{\mu})q - f'(k)$, общее решение которого имеет вид $q(t) = [f'(k)/(\delta + \tilde{\mu})] + D \exp\{(\delta + \tilde{\mu})t\}$, где D – константа интегрирования. Отсюда следует, что $q(t)$ может быть отрицательной лишь при $D < 0$, когда

$$q(t) = [f'(k)/(\delta + \tilde{\mu})] - |D| \exp\{(\delta + \tilde{\mu})t\}. \quad (2.17)$$

Согласно (2.17) и учитывая предположение $q < 0$, функция $q(t)$ является монотонно убывающей, оставаясь при этом отрицательной, что противоречит первому условию трансверсальности (2.10). Данное противоречие и доказывает теорему.

Определение. Точку $X^* = (k^*; 1)$ фазовой плоскости $(k; q)$ назовём *особой*.

Лемма 4. При условии $\tilde{\mu}k > g$ особая точка $X^* = (k^*; 1)$ является стационарным решением системы (2.7), (2.8). Соответствующее значение $s = s^*$ определяется эквивалентными формулами

$$s^* = \frac{\tilde{\mu}k^* - g}{f(k^*)}; \quad (2.18)$$

$$s^* = \frac{k^* f'(k^*)}{f(k^*)} - \frac{\delta k^* + g}{f(k^*)}, \quad (2.19)$$

причём $0 < s^* < 1$.

Доказательство. Условием существования стационарного решения системы (2.7), (2.8) является условие $\dot{k} = 0$, $\dot{q} = 0$. Вместе с (2.7), (2.8) это условие даёт нам соотношения $s f(k) - \tilde{\mu}k + g = 0$, $(\delta + \tilde{\mu})q - (1 - s + s q) f'(k) = 0$, которые в точке X^* принимают вид

$$s^* f(k^*) - \tilde{\mu}k^* + g = 0; \quad (2.20)$$

$$(\delta + \tilde{\mu}) - f'(k^*) = 0. \quad (2.21)$$

Согласно (2.12), соотношение (2.21) является тождеством. Тогда (2.18) следует из (2.20), а (2.19) – из (2.12), (2.18). Свойство $s^* > 0$ очевидно, а свойство $s^* < 1$ следует из (2.16), (2.18).

Замечание 1. Особая точка характеризуется тем, что если траектория $\{k(t); q(t)\}$ в момент времени $t = t^*$ попадает в неё и если в этот момент управлению s присвоить значение s^* , т.е. положить $s(t^*) = s^*$, то она не выйдет из X^* . Состояние $\{s^*; k^*\}$ может быть определено как стационарное состояние экономики, и достигается оно, согласно лемме 4, только если $\tilde{\mu}k^* > g$, т.е. если темп амортизации основных фондов при $k = k^*$ превышает темп внешних инвестиций.

Проведённое исследование позволяет полностью определить структуру оптимального управления.

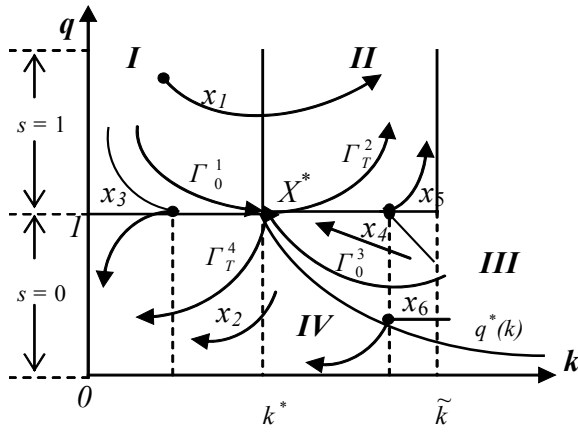
Теорема 1. Если $\tilde{\mu}k > g$, то

$$s(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } q(t) > 1, \\ 0, & \text{если } q(t) < 1, \\ 0 < s^* < 1, & \text{если } q(t) = 1, \end{cases} \quad (2.22)$$

причём $s = s^*$ только когда $k = k^*$.

3. АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ

На рисунке на плоскости $\{0 \leq k \leq \tilde{k}; q \geq 0\}$ в соответствии с доказанными результатами изображены четыре области с номерами I, II, III, IV и типовые траектории $\{k(t); q(t)\}$. В соответствии с леммой 2 свойства знакоопределённости $\dot{k}$ и $\dot{q}$ в указанных областях имеют следующий вид. Область I: $\dot{k} > 0$, $\dot{q} < 0$; область II: $\dot{k} > 0$, $\dot{q} > 0$; область III: $\dot{k} < 0$, $\dot{q} > 0$; область IV: $\dot{k} < 0$, $\dot{q} < 0$. При этом траектории, по которым можно попасть в особую точку X^* , обозначены Γ_0^1 (с управлением $s = 1$) и Γ_0^3 (с управлением $s = 0$), а по которым можно выйти из X^* – соответственно Γ_T^2 (с управлением $s = 1$) и Γ_T^4 (с управлением $s = 0$). Остальные типы траекторий обозначены как $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$.



Замечание 2. Условие трансверсальности (2.10) с учётом (1.3) означает следующее: $q(t) \geq 0$, если $k(T) = k_T$; $q(t) = 0$, если $k(T) > k_T$. Поскольку для произвольно выбранного момента T обеспечение условия $q(T) = 0$, означающего выход траектории $\{k(t); q(t)\}$ в момент времени $t = T$ на границу $q = 0$, представляется маловероятным, то дальнейший анализ проводится при условии $k(T) = k_T$.

Сформулируем алгоритм управления, когда соотношения между k_0, k_T, k^* на интервале $k \in (0, \tilde{k})$ могут быть произвольными. Из рисунка следует, что в такой общей ситуации нельзя реализовать цель управления движением по траекториям $x_1 - x_6$, а возможно лишь движениями по траекториям $\Gamma_0^1, \Gamma_0^3, \Gamma_T^2, \Gamma_T^4$ с попаданием в особую точку $X^*(k^*, 1)$. Единственным условием является достаточно большое время функционирования экономики T .

Алгоритм. 1) Заданному значению k_0 подбирается такое значение q_0 , чтобы $\{k_0; q_0\} \in \Gamma_0 = \Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^3$; 2) если $k_0 < k^*$, то с управлением $s = 1$ точка $\{k(t); q(t)\}$ переводится по траектории Γ_0^1 на интервале $t \in [0, t^*)$ в точку $X^*(k^*, 1)$; 3) если $k_0 > k^*$, то с управлением $s = 0$ точка $\{k(t); q(t)\}$ переводится по траектории Γ_0^3 на интервале $t \in [0, t^*)$ в точку $X^*(k^*, 1)$; 4) в момент времени t^* , когда $k(t^*) = k^*$, управлению присваивается значение $s = s^*$, которое сохраняется в течение интервала $t \in [t^*, t^{**}]$; 5) если $k_T < k^*$, то с управлением $s = 0$ точка $\{k(t); q(t)\}$ переводится по траектории Γ_T^4 на интервале $t \in (t^{**}, T]$ в точку X_T , в которой $k(T) = k_T$; 6) если $k_T > k^*$, то с управлением $s = 1$ точка $\{k(t); q(t)\}$ переводится по траектории Γ_T^2 на интервале $t \in (t^{**}, T]$ в точку X_T , в которой $k(T) = k_T$; 7) выбор момента времени t^{**} осуществляется таким образом, чтобы время движения $\tilde{t}$ по траекториям Γ_T^2 и Γ_T^4 удовлетворяло условию $t^{**} + \tilde{t} = T$.

Поскольку подобные движения, согласно принятой терминологии, являются движениями по магистрали, то сформулируем окончательный результат по решению поставленной задачи в форме магистральной теоремы [1 – 3].

4. МАГИСТРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

Введём следующие обозначения ($k_1 < k_2$; $\tau_1 < \tau_2$; $t^* < t^{**}$):

$$T_1(k_1, k_2) = \frac{1}{\tilde{\mu}} \ln \left(\frac{\tilde{\mu} k_2 - g}{\tilde{\mu} k_1 - g} \right); \quad (4.1)$$

$$T_2(k_1, k_2) = \int_{k_1}^{k_2} \frac{dk}{f(k) - \tilde{\mu}k + g}; \quad (4.2)$$

$$J^0(\tau_1, \tau_2) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(k(t)) e^{-\delta t} dt; \quad (4.3)$$

$$J^*(t^*, t^{**}) = \frac{f(k^*)}{\delta} (e^{-\delta t^*} - e^{-\delta t^{**}}). \quad (4.4)$$

Теорема 2. При достаточно большом времени управления T решение задачи (1.1) – (1.3) имеет следующий вид:

1) Интервал $[0, T]$ разбивается на три интервала времени, т.е. $[0, T] = [0, t^*) \cup [t^*, t^{**}] \cup (t^{**}, T]$.

2) Управление $s(t)$ является кусочно-постоянным с тремя возможными значениями, а именно: $s(t) \in \{0; s^*; 1\}$, где $0 < s^* < 1$ и s^* определяется эквивалентными формулами (2.18), (2.19), а k^* является единственным корнем уравнения (2.12).

3) На внутреннем интервале времени $t \in [t^*, t^{**}]$ всегда $s(t) \equiv s^*$, $k(t) \equiv k^*$, т.е. интервал $[t^*, t^{**}]$ является интервалом *стационарного состояния экономики*.

4) На начальном интервале $t \in [0, t^*)$ $s(t) = 1$, если $k_0 < k^*$, $s(t) = 0$, если $k_0 > k^*$, и происходит соответственно возрастание либо убывание $k(t)$ от k_0 до k^* .

5) На конечном интервале $t \in (t^{**}, T]$ $s(t) = 1$, если $k_T > k^*$, и $s(t) = 0$, если $k_T < k^*$, и происходит соответственно возрастание либо убывание $k(t)$ от k^* до k_T .

6) Значения t^*, t^{**} и критерия качества J определяются следующими формулами:

$$\text{если } k_0 < k^*, k_T < k^* \text{ (магистраль I), то} \\ t^* = T_2(k_0, k^*), \quad t^{**} = T - T_1(k_T, k^*); \quad (4.5)$$

$$J = (1 - s^*)J^*(t^*, t^{**}) + J^0(t^{**}, T); \quad (4.6)$$

$$\text{если } k_0 < k^*, k_T > k^* \text{ (магистраль II), то} \\ t^* = T_2(k_0, k^*), \quad t^{**} = T - T_2(k^*, k_T); \quad (4.7)$$

$$J = (1 - s^*)J^*(t^*, t^{**}); \quad (4.8)$$

$$\text{если } k_0 > k^*, k_T < k^* \text{ (магистраль III), то} \\ t^* = T_1(k^*, k_0), \quad t^{**} = T - T_1(k_T, k^*); \quad (4.9)$$

$$J = J^0(0, t^*) + (1 - s^*)J^*(t^*, t^{**}) + J^0(t^{**}, T); \quad (4.10)$$

$$\text{если } k_0 > k^*, k_T > k^* \text{ (магистраль IV), то} \\ t^* = T_1(k^*, k_0), \quad t^{**} = T - T_2(k^*, k_T); \quad (4.11)$$

$$J = J^0(0, t^*) + (1 - s^*)J^*(t^*, t^{**}). \quad (4.12)$$

Формулы для t^*, t^{**} получаются как время движения по траекториям $\Gamma_0^1, \Gamma_0^3, \Gamma_T^2, \Gamma_T^4$ в соответствии с (2.7), (4.1), (4.2) и алгоритмом управления. Формулы для J следуют из (1.1), (4.3), (4.4) в соответствии с алгоритмом управления. Остальные утверждения теоремы следуют из алгоритма управления и из доказанных результатов.

5. ЗОЛОТОЕ ПРАВИЛО НАКОПЛЕНИЯ

Так как в каждый момент времени $y(t) = f(k(t)) = i(t) + c(t) = s(t)f(k(t)) + (1 - s(t))f(k(t))$ (основное производственное соотношение), то $i^* = s^* f(k^*)$ есть удельное накопление на интервале стационарности, а $f'(k^*)k^* -$ удельный доход с капитала. Из (2.19) следует

$$i^* = f'(k^*)k^* - (\delta k^* + g). \quad (5.1)$$

Перейдём к исходным ненормированным переменным F, K, L, G . Формула (5.1) переписывается в виде

$$I^* = [\partial F(K^*, L) / \partial K^*] K^* - (\delta K^* + G). \quad (5.2)$$

Формуле (5.2) дадим интерпретацию в форме «золотого правила накопления» (ЗПН) [2, 3].

Теорема 3 (ЗПН). На интервале стационарности $t \in [t^*, t^{**}]$ накопление равняется доходу с капитала минус величина, равная $\delta K^* + G$.

По теореме Эйлера [2]

$$F = (\partial F / \partial K) K + (\partial F / \partial L) L, \quad (5.3)$$

где $(\partial F / \partial K) K = Y_K$ есть доход с капитала, а $(\partial F / \partial L) L = Y_L$ — доход с трудовых ресурсов.

Потребление на интервале стационарности $C^* = (1 - s^*)F(K^*, L)$. Тогда из (2.19), (5.2), (5.3) следует

$$C^* = [\partial F(K^*, L) / \partial L] L + (\delta K^* + G), \quad (5.4)$$

т.е. пришли к следующему результату.

Следствие. На интервале стационарности потребление равняется доходу с трудовых ресурсов плюс величина, равная $\delta K^* + G$.

Замечание 3. Проведённый анализ интервала стационарности $t \in [t^*, t^{**}]$ показал, что на нём внешние инвестиции G полностью идут на потребление.

6. СЛУЧАЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ КОББА – ДУГЛАСА

Пусть $f(k) = Ak^\alpha$, где $A > 0$, $0 < \alpha < 1$. Тогда имеет место теорема 2, в которой

$$k^* = \left(\frac{A\alpha}{\tilde{\mu} + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}; \quad (6.1)$$

$$s^* = \frac{\alpha \tilde{\mu}}{\tilde{\mu} + \delta} - \frac{g}{A} \left(\frac{A\alpha}{\tilde{\mu} + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}; \quad (6.2)$$

$$T_2(k_1, k_2) = \int_{k_1}^{k_2} \frac{dk}{Ak^\alpha - \tilde{\mu}k + g}; \quad (6.3)$$

$$J^*(t^*, t^{**}) = \frac{A(k^*)^\alpha}{\delta} \left(e^{-\delta t^*} - e^{-\delta t^{**}} \right); \quad (6.4)$$

$$J^0(0, t^*) = A \int_0^{t^*} \left[\frac{g}{\tilde{\mu}} - \left(\frac{g}{\tilde{\mu}} - k_0 \right) e^{-\tilde{\mu}t} \right]^\alpha e^{-\delta t} dt; \quad (6.5)$$

$$J^0(t^{**}, T) = A \int_{t^{**}}^T \left[\frac{g}{\tilde{\mu}} - \left(\frac{g}{\tilde{\mu}} - k_T \right) e^{-\tilde{\mu}(T-t)} \right]^\alpha e^{-\delta t} dt. \quad (6.6)$$

На интервале $t \in [0, t^*)$ в случае $k_0 < k^*$ $k(t)$ находится как решение дифференциального уравнения

$$\dot{k} = Ak^\alpha - \tilde{\mu}k + g \quad (6.7)$$

с начальным условием $k(0) = k_0$ либо с конечным условием $k(t^*) = k^*$.

Если $k_0 > k^*$, то $s(t) = 0$ и $k(t)$ находится как решение дифференциального уравнения $\dot{k} = -\tilde{\mu}k + g$ с начальным $k(0) = k_0$ либо конечным $k(t^*) = k^*$ условиями.

Отсюда следуют два эквивалентных решения

$$k(t) = \frac{g}{\tilde{\mu}} - \left(\frac{g}{\tilde{\mu}} - k_0 \right) e^{-\tilde{\mu}t} = \frac{g}{\tilde{\mu}} - \left(\frac{g}{\tilde{\mu}} - k^* \right) e^{-\tilde{\mu}(t-t^*)}. \quad (6.8)$$

На конечном интервале $t \in (t^*, T]$ в случае $k_T < k^*$ аналогичные вычисления дают

$$k(t) = \frac{g}{\tilde{\mu}} - \left(\frac{g}{\tilde{\mu}} - k_T \right) e^{-\tilde{\mu}(T-t)} = \frac{g}{\tilde{\mu}} - \left(\frac{g}{\tilde{\mu}} - k^* \right) e^{-\tilde{\mu}(t^{**}-t)}. \quad (6.9)$$

Замечание 4. Интеграл вида (6.3) можно вычислить при следующих значениях α : $1/2$, $1/4$, $3/4$, $1/3$, $2/3$. Например, при $\alpha = 1/2$

$$\begin{aligned} T_2(k_1, k_2) = & \frac{1}{\tilde{\mu}} \ln \left| \frac{A(k_1)^{1/2} - \tilde{\mu}k_1 + g}{A(k_2)^{1/2} - \tilde{\mu}k_2 + g} \right| + \\ & + \frac{A}{\tilde{\mu}\sqrt{A^2 + 4\tilde{\mu}g}} \left[\ln \left| \frac{A - 2\tilde{\mu}(k_2)^{1/2} - \sqrt{A^2 + 4\tilde{\mu}g}}{A - 2\tilde{\mu}(k_2)^{1/2} + \sqrt{A^2 + 4\tilde{\mu}g}} \right| - \right. \\ & \left. - \ln \left| \frac{A - 2\tilde{\mu}(k_1)^{1/2} - \sqrt{A^2 + 4\tilde{\mu}g}}{A - 2\tilde{\mu}(k_1)^{1/2} + \sqrt{A^2 + 4\tilde{\mu}g}} \right| \right]. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Эрроу К. Применение теории управления к экономическому росту // Математическая экономика. М.: Мир, 1974. С. 7–45.
2. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984.
3. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс, 1975.
4. Понтрягин Л.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1978.
5. Дёмин Н.С., Кулешова Е.В., Решетникова Г.Н. Об эквивалентности решения задачи управления односекторной экономикой в моделях Солоу и Рамсея // Вестник ТГУ. 2002. Сентябрь. С. 150–153.

Статья представлена кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 10 мая 2003 г.