УДК 519.2.

Я.В. Галайко, А.А. Назаров

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСЛА ЛИЦ, ЗАСТРАХОВАННЫХ В ПЕНСИОННОМ ФОНДЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ВХОДЯЩЕМ ПОТОКЕ

Строится и рассматривается математическая модель Пенсионного фонда Российской Федерации. С помощью данной модели находится ожидаемое число застрахованных лиц. Модель проверяется на реальных статистических данных. Строятся асимптотическое и диффузионное приближения для данной модели. Анализируется адекватность модели.

15 декабря 2001 года был принят новый Федеральный закон «Об обязательном пенсионном страховании в Российской Федерации» [1], который предполагает новую систему начисления и выплаты пенсии [2]. На каждого работника в Пенсионном фонде открывается личный счёт, отчисления на который осуществляет работодатель в размере 28 % от заработной платы работника.

Пенсия каждого застрахованного [3] состоит из трёх частей: базовая, страховая и накопительная.

Базовая часть – 14 % (из 28 %) от заработной платы. Выплачивается в обязательном порядке, независимо от того, сколько денег было перечислено на счёт застрахованного лица.

Страховая часть составляет 8 % (из оставшихся 14 %) от заработной платы.

Накопительная часть составляет оставшиеся 6 %. Деньги из накопительной части вкладывают в ликвидные ценные бумаги, проценты по которым выше инфляции. Таким образом, государство пытается сохранить реальную ценность денег, составляющих накопительную часть. К сожалению, до пенсии в России доживают не все, поэтому если застрахованное лицо не доживёт до пенсии, то денежные средства из накопительной части выплачиваются наследникам.

После выхода на пенсию застрахованное лицо начинает получать денежные выплаты из Пенсионного фонда РФ – пенсию.

Таким образом, можно выделить две фазы в отношениях между застрахованным лицом и Пенсионным фондом: АКТИВНУЮ – выплата денег в Пенсионный фонд и ПАССИВНУЮ – получение пенсии.

Основной целью данной работы является построение математической модели Пенсионного фонда Российской Федерации и исследование с помощью данной модели числа лиц, находящихся на активной и пассивной фазах.

За основу при построении модели берется теория массового обслуживания [4 – 6]. Основными инструментами при исследовании модели являются теория случайных процессов [7, 8] и теория дифференциальных уравнений [9]. В работе, после построения математических оценок, полученный результат проверяется на реальных статистических данных [10, 11]. На основе этих данных находится ожидаемое число людей, за которых будут перечисляться деньги в пенсионный фонд и которым нужно будет платить пенсию. Оценки строятся с прогнозом на 20 и 60 лет соответственно.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

В качестве математической модели для исследования числа лиц, застрахованных в Пенсионном фонде Российской Федерации или его региональном органе, можно рассматривать бесконечно линейную двухфазную систему массового обслуживания. На её вход поступает нестационарный пуассоновский поток заявок с интенсивностью $\lambda(t)$. За единицу времени берем календарный год. Каждый застрахованный в Пенсионном фонде проходит две фазы: активную и пассивную. Первая фаза по продолжительности равна рабочему стажу перед выходом на пенсию. Вторая, пассивная фаза, соответствует периоду получения пенсии застрахованным лицом.

Будем полагать, что продолжительность пребывания застрахованного лица на каждой фазе случайная величина и имеет экспоненциальное распределение с параметрами μ_1 и μ_2 соответственно.

После пребывания на первой фазе застрахованное лицо переходит на вторую с вероятностью ($r < 1$), а с вероятностью $(1 - r)$ покидает систему. Смысл r достаточно очевиден – это вероятность того, что человек, начав работать, доживёт до пенсии.

Состояние рассматриваемой системы обозначим $(i(t), j(t))$, где $i(t)$ – число активных клиентов, $j(t)$ – число пассивных клиентов, $(i(t), j(t))$ – двумерный марковский случайный процесс. Обозначим $P(i, j, t)$ его распределение вероятностей, т.е. $P(i, j, t) = P(i(t) = i, j(t) = j)$.

Рассмотрим два момента времени: t и $t + \Delta t$. За про-межуток Δt в системе может произойти одно изменение, либо не произойти вовсе. Вероятность того, что в системе за Δt произойдет два события, имеет порядок малости выше первого.

Пусть в момент $t + \Delta t$ система находится в состоянии (i, j). Рассмотрим состояния, в которых система могла быть в момент t:

1) (i, j) – за Δt в системе не произошло никаких изменений;

2) $(i - 1, j)$ – на первой фазе за Δt появился новый клиент, т.е. работодатель начал осуществлять отчисления в Пенсионный фонд ещё за одного человека;

3) $(i, j + 1)$ – за Δt систему со второй фазы покинул один застрахованный человек, говоря попросту, умер один пенсионер;

4) $(i + 1, j)$ – за Δt на первой фазе стало на одного человека меньше, т.е. умер работающий человек, не дожив до пенсии;

5) $(i + 1, j - 1)$ – за Δt застрахованное лицо перешло с первой фазы на вторую, значит, один из работающих людей благополучно стал пенсионером;

Применяя Δt-метод можно записать равенство

$$P(i,j,t+\Delta t)=(1-\lambda(t)\Delta t)(1-i\mu_1\Delta t)(1-j\mu_2\Delta t)\times$$
$$\times P(i,j,t)+\lambda(t)P(i-1,j,t)\Delta t+(j+1)\mu_2 P(i,j+1,t)\Delta t+$$
$$+(i+1)(1-r)\mu_1 P(i+1,j,t)\Delta t+(i+1)r\mu_1 P(i+1,j,t)\Delta t,$$

из которого после несложных преобразований получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P(i,j,t)}{\partial t}&=-(\lambda(t)+i\mu_1+j\mu_2)P(i,j,t)+\\&+\lambda(t)P(i-1,j,t)+(j+1)\mu_2 P(i,j+1,t)+\\&+(i+1)(1-r)\mu_1 P(i+1,j,t)+\\&+(i+1)r\mu_1 P(i+1,j-1,t),\end{aligned}\qquad(1)$$

где $i\in[0,\infty)$; $j\in[0,\infty)$.

Чтобы решить данную систему дифференциальных уравнений, воспользуемся методом производящих функций. Определим производящую функцию:

$$G\left(x, y, t\right) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} x^i y^j P\left(i, j, t\right). \qquad (2)$$

Начальное условие:

$$G(x, y, t_0) = g(x, y, t_0) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} x^i y^j P(i, j, t_0).$$

Помножим уравнение (1) на $x^i y^j$ и просуммируем по i и j. В итоге получим дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \mu_1(x-1-r(y-1))\frac{\partial G}{\partial x} +$$

$$+\mu_2(y-1)\frac{\partial G}{\partial y} = \lambda\left(t\right)(x-1)G. \qquad (3)$$

Система характеристических уравнений имеет вид

$$dt = \frac{d\,x}{\mu_1(x-1-r(y-1))} =$$

$$= \frac{d\,y}{\mu_2(y-1)} = \frac{d\,G}{\lambda(t)\,(x-1)G}. \qquad (4)$$

1) Для нахождения первого интеграла рассмотрим уравнение $\mu_2 dt = \frac{dy}{y-1}$, из которого получим $\ln(y-1) =$ $= \mu_2(t-t_0) + \ln C_1$. Первый интеграл равен

$$C_1 = (y-1)\,e^{-\mu_2(t-t_0)}.$$

2) Чтобы найти второй интеграл, рассмотрим уравнение $\mu_1 dt = \frac{d\,x}{x-1-r\,C_1\,e^{\mu_2(t-t_0)}}$. Неоднородное дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = \mu_1(x-1) - r\mu_1 C_1 e^{\mu_2(t-t_0)}.$$

Решим однородное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = \mu_1(x-1),\ x-1 = C_2(t)e^{\mu_1(t-t_0)},$$

$$\frac{dC_2(t)}{dt}e^{\mu_1(t-t_0)} = -r\mu_1 C_1 e^{\mu_2(t-t_0)},$$

$$\frac{dC_2(t)}{dt} = -r\mu_1 C_1 e^{(\mu_2-\mu_2)(t-t_0)},$$

$$C_2(t) = -\frac{r}{\mu_2-\mu_1}\mu_1 C_1(e^{(\mu_2-\mu_2)(t-t_0)}-1) + C_2,$$

из чего следует

$$x-1 = -\frac{r}{\mu_2-\mu_1}\mu_1 C_1(e^{(\mu_2-\mu_2)(t-t_0)} - e^{\mu_1(t-t_0)}) +$$

$$+C_2 e^{\mu_1(t-t_0)}.$$

Второй интеграл равен

$$C_2 = [x-1+\frac{r\mu_1 C_1}{\mu_2-\mu_1}(e^{\mu_2(t-t_0)} - e^{\mu_1(t-t_0)})]e^{-\mu_1(t-t_0)}.$$

3) Для нахождения третьего интеграла рассмотрим уравнение $dt = \frac{dG}{\lambda(t)(x-1)G}$, для которого нетрудно показать:

$$C_3 = G\exp[\frac{r\mu_1 C_1}{\mu_2-\mu_1}(\int_{t_0}^{t}\lambda(s)e^{\mu_2(s-t_0)}ds -$$

$$-\int_{t_0}^{t}\lambda(s)e^{\mu_1(s-t_0)}) - C_2\int_{t_0}^{t}\lambda(s)e^{\mu_1(s-t_0)}ds].$$

Пусть φ – произвольная функция, тогда общее решение уравнения (2) можно записать следующим образом: $C_3 = \varphi\,(C_1, C_2)$, где C_1 и C_2 получены ранее. В явном виде это выглядит так:

$$G\ \exp\ [\frac{r\,\mu_1(y-1)}{\mu_2-\mu_1}\ e^{-\mu_2(t-t_0)}(\int_{t_0}^{t}\lambda(s)e^{\mu_2(s-t_0)}ds\ -$$

$$-\int_{t_0}^{t}\lambda(s)e^{\mu_1(s-t_0)}ds)\ -\ (x\ -\ 1\ +\ \frac{r\,\mu_1(y-1)}{\mu_2-\mu_1}\ \times$$

$$\times\,(1 - e^{(\mu_1-\mu_2)(t-t_0)}))e^{-\mu_1(t-t_0)}\int_{t_0}^{t}\lambda(s)e^{\mu_1(s-t_0)}ds]\ =$$

$$= \varphi((y-1)\,e^{-\mu_2(t-t_0)};$$

$$(x-1+\frac{r\mu_1(y-1)}{\mu_2-\mu_1}(1-e^{(\mu_1-\mu_2)(t-t_0)}))e^{-\mu_1(t-t_0)}).$$

Положим $t = t_0$. Тогда $G\ (x,\ y,\ t_0) = g\ (x,\ y)$, откуда находим φ: $\varphi(x, y) = g(y+1, x+1)$. Следовательно:

$$G(x, y, t) =$$

$$= \exp[-\frac{r\mu_1(y-1)}{\mu_2-\mu_1}e^{-\mu_2(s-t_0)}\int_{t_0}^{t}\lambda(s)e^{\mu_2(s-t_0)}ds +$$

$$+(x-1+\frac{r\mu_1(y-1)}{\mu_2-\mu_1})e^{-\mu_1(t-t_0)}\int_{t_0}^{t}\lambda(s)e^{\mu_1(s-t_0)}ds +$$

$$+(x-1)e^{-\mu_2(s-t_0)}\int_{t_0}^{t}\lambda(s)e^{\mu_2(s-t_0)}ds]\times \qquad (5)$$

$$\times g((x-1+\frac{r\mu_1(y-1)}{\mu_2-\mu_1})e^{-\mu_1(t-t_0)} - \frac{r\mu_1(y-1)}{\mu_2-\mu_1})\times$$

$$\times e^{-\mu_2(t-t_0)} + 1; (y-1)e^{-\mu_2(t-t_0)} + 1; t).$$

При $t_0 \to -\infty$ по формуле полной вероятности получим $g = g(1, 1, t_0) = \sum_i \sum_j P(i, j, t_0) = 1$. Сгруппировав слагаемые, получаем

$$G\left(x, y, t\right) = e^{xa1(t)}e^{ya2(t)}, \qquad (5')$$

где

$$a1\left(t\right) = e^{-\mu_1 t}\int_{-\infty}^{t}\lambda\left(s\right)e^{\mu_1 s}ds. \qquad (6)$$

$$a2\left(t\right) = \frac{r\mu_1}{\mu_2-\mu_1}\int_{-\infty}^{t}\lambda\left(s\right)\left[e^{-\mu_1(t-s)} - e^{-\mu_2(t-s)}\right]ds. \qquad (7)$$

С другой стороны, $G(x, y, t) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} x^i y^j P(i, j, t)$.

Разложив exp в формуле (5) в ряд Тейлора и сравнив с равенством (4), получим

$$P\left(i, j, t\right) = \frac{a1^i\left(t\right)}{i!}e^{-a1(t)}\,\frac{a2^j\left(t\right)}{j!}e^{-a2(t)}. \qquad (8)$$

В итоге получили, что распределение вероятностей числа лиц, застрахованных в Пенсионном фонде, является произведением двух пуассоновских распределений с параметрами $a1(t)$ и $a2(t)$ – среднее число лиц, находящихся на первой и второй фазах соответственно. В любой момент времени число лиц, застрахованных на первой и второй фазах, стохастически независимо.

ОЦЕНКА ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ С ПОМОЩЬЮ РЕАЛЬНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ

Нахождение интенсивности нестационарного входящего потока $\lambda(t)$ заявок в Пенсионный фонд Российской Федерации

Для нахождения интенсивности нестационарного входящего потока одними из главных критериев являются уровень рождаемости и смертности в Российской Федерации. Рассмотрим рождаемость в России начиная с 1940 г.

Для построения входящего потока необходимо учесть несколько важных факторов:

1) Одними из главных критериев при построении входящего потока являются уровни рождаемости и смертности в Российской Федерации.

2) Мужчины в России рождаются с вероятностью 0,52, соответственно женщины рождаются с вероятностью 0,48.

3) Предполагаем, что средний возраст выхода на работу составляет 20 лет.

4) По статистическим данным в наши дни лишь 95 % мужчин и 96 % женщин доживают до 20 лет.

5) Уровень смертности в 1940–1960 гг. был гораздо выше настоящего.

Таким образом, $\lambda(t)$ – интенсивность входящего потока числа лиц, застрахованных в Пенсионном фонде, строится отдельно для мужчин и для женщин.

Данные интенсивности с учётом рождаемости и смертности можно построить с прогнозом до 2020 г.

На рис. 1 приведён график интенсивности входящего потока (кривая *1* соответствует интенсивности входящего потока мужчин, застрахованных в Пенсионном фонде Российской Федерации, а кривая *2* –интенсивности входящего потока женщин).

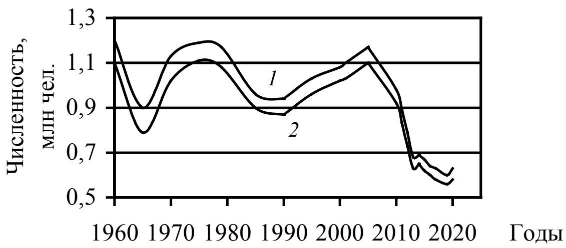

Рис. 1

Нахождение среднего числа застрахованных лиц, находящихся на первой $a1(t)$ и второй фазах $a2(t)$

Напомним выражения для $a1(t)$ и $a2(t)$:

$$a1(t) = e^{-\mu_1 t} \int_{-\infty}^{t} \lambda(s) e^{\mu_1 s} ds ,$$

$$a2(t) = \frac{r\mu_1}{\mu_2 - \mu_1} \int_{-\infty}^{t} \lambda(s) \left[e^{-\mu_1 (t-s)} - e^{-\mu_2 (t-s)} \right] ds .$$

Чтобы найти конкретные значения, необходимо учесть следующие положения:

1) Продолжительность пребывания застрахованного лица на каждой фазе – случайная величина и имеет экспоненциальное распределение с параметрами μ_1 и μ_2 соответственно.

1.1. Мужчины: продолжительность пребывания на первой фазе равна 40 годам, т.е. $\mu_1 = 1/40$.

Исходя из статистических данных, в среднем мужчины на пенсии находятся 15 лет, то есть $\mu_2 = 1/15$.

1.2. Женщины: продолжительность пребывания на первой фазе равна 35 годам, т.е. $\mu_1 = 1/35$.

Исходя из статистических данных, в среднем женщины на пенсии находятся 22 года, т.е. $\mu_2 = 1/22$.

2) 2.1. Вероятность того, что мужчина, начав работать, доживёт до пенсии, равна 0,69, т.е. $r = 0{,}69$.

2.2. Вероятность того, что женщина, начав работать, доживёт до пенсии, равна 0,91, т.е. $r = 0{,}91$.

Используя прикладные программы можно вычислить конкретные значения $a1(t)$ и $a2(t)$.

На рис. 2 представлен график, на котором показано общее ожидаемое число «активных» клиентов (численность трудоспособного населения) Пенсионного фонда Российской Федерации с прогнозом на 20 лет.

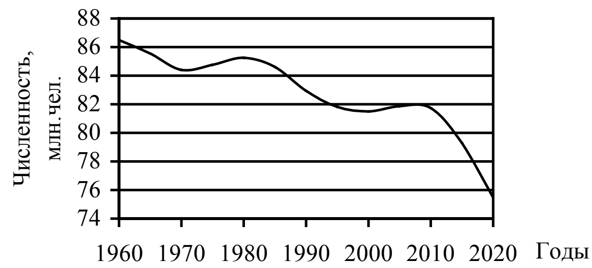

Рис. 2

На рис. 3 показано среднее число пенсионеров в Российской Федерации с прогнозом до 2055 г.

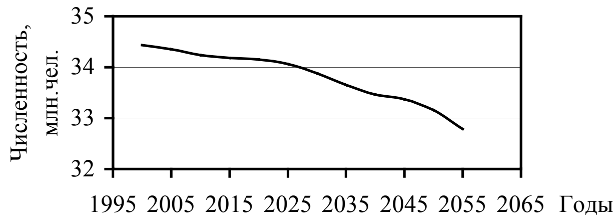

Рис. 3

Краткий анализ полученных результатов

Проанализировав полученные данные, приходится признать, что построенная марковская модель не совсем адекватна реальной жизни. Необходимо усложнять полученную модель.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Так как суммарная для мужчин и женщин интенсивность $\lambda(t)$ по нашим оценкам от 1 до 2,5 млн, то функцию $\lambda(t)$ представим в виде $\lambda(t) = \lambda\rho(t)$, где

$\lambda = 10^6$. Определим положительный малый параметр: $\varepsilon = 1/\lambda$. Выполним замены:

$$\alpha = \varepsilon i\,,\ \beta = \varepsilon j\,,\ \frac{1}{\varepsilon^2}P(i,j,t) = \Pi(\alpha,\beta,t,\varepsilon)\,. \qquad (9)$$

Здесь функция $\Pi(\alpha,\beta,t,\varepsilon)$ удовлетворяет условию нормировки

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \Pi(\alpha,\beta,t,\varepsilon)d\alpha d\beta = \sum_{i,j}\frac{1}{\varepsilon^2}P(x_i,y_j,t)\Delta\alpha_i\Delta\beta_j = 1,$$

если полагать $x_i = i$, $y_j = j$, $\Delta\alpha_i = \Delta\beta_j = \varepsilon$, и имеет смысл асимптотической двумерной плотности распределения вероятностей асимптотических значений вектора $\{\varepsilon i(t), \varepsilon j(t)\}$.

Выполнив замены (9) в системе (1), получим равенство

$$\frac{\partial\Pi(\alpha,\beta,t,\varepsilon)}{\partial t} = -\lambda(\rho(t)+\mu_1\alpha+\mu_2\beta)\Pi(\alpha,\beta,t,\varepsilon)+$$
$$+\lambda\rho(t)\Pi(\alpha-\varepsilon,\beta,t,\varepsilon)+\lambda\mu_2(\beta+\varepsilon)\Pi(\alpha,\beta+\varepsilon,t,\varepsilon)+$$
$$+(1-r)\mu(\alpha+\varepsilon)_1\Pi(\alpha+\varepsilon,\beta,t,\varepsilon)+$$
$$+r\mu_1(\alpha+\varepsilon)_1\Pi(\alpha+\varepsilon,\beta-\varepsilon,t,\varepsilon). \qquad (10)$$

Разложив функции в правой части по приращениям аргументов с точностью до $o(\varepsilon)$, выполнив несложные преобразования, обозначив

$$\Pi(\alpha,\beta,t,\varepsilon) = \Pi(\alpha,\beta,t)\,,$$

получим уравнение

$$\frac{\partial\Pi(\alpha,\beta,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\{\rho(t)-\mu_1\alpha)\Pi(\alpha,\beta,t)\} -$$
$$-\frac{\partial}{\partial\beta}\{(\mu_1 r\alpha-\mu_2\beta)\Pi(\alpha,\beta,t)\}. \qquad (11)$$

которое совпадает с вырожденным уравнением Фоккера – Планка. Общий вид уравнения Фоккера – Планка

$$\frac{\partial\Pi(\alpha,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\{a(\alpha,t)\Pi(\alpha,t)\}+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\{b(\alpha,t)\Pi(\alpha,t)\}. \qquad (12)$$

Для нашего уравнения коэффициенты диффузии нулевые:

$$b(\alpha,t) = 0 \text{ и } b(\beta,t) = 0\,,$$

а коэффициенты переноса имеют вид

$$a(\alpha,t) = \rho(t)-\mu_1\alpha\,,$$

$$a(\beta,t) = \mu_1 r\alpha-\mu_2\beta\,,$$

которые определяют двумерную функцию $(\alpha(t),\beta(t))$ следующей неоднородной системой двух линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{d\alpha(t)}{dt} = \rho(t)-\mu_1\alpha(t),\\ \dfrac{d\beta(t)}{dt} = \mu_1 r\alpha(t)-\mu_2\beta(t).\end{cases} \qquad (13)$$

1. Решим первое уравнение:

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = \rho(t)-\mu_1\alpha(t),$$

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = -\mu_1\alpha(t),$$

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = -\mu_1 dt\,,$$

$$\alpha = Ce^{-\mu_1 t}\,,$$

$$dC = \rho(t)e^{\mu_1 t}dt\,,$$

$$C = \int_{-\infty}^{t}\rho(s)e^{\mu_1 s}ds\,;$$

$$\alpha(t) = e^{-\mu_1 t}\int_{-\infty}^{t}\rho(s)e^{\mu_1 s}ds\,. \qquad (14)$$

Получили $\alpha(t)$ – асимптотически среднее число работающих, т.е., сколько у Пенсионного фонда активных клиентов в любой момент времени.

2. Решим второе уравнение с учётом найденного $\alpha(t)$:

$$\frac{d\beta(t)}{dt} = \mu_1 re^{-\mu_1 t}\int_{-\infty}^{t}\rho(s)e^{\mu_1 s}ds-\mu_2\beta(t)\,,$$

$$\frac{d\beta(t)}{dt} = -\mu_2\beta(t)\,,$$

$$\beta(t) = Ce^{-\mu_2 t}\,,$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = \mu_1 re^{(\mu_2-\mu_1)t}\int_{-\infty}^{t}\rho(s)e^{\mu_1 s}ds\,,$$

$$dC(t) = (\mu_1 re^{(\mu_2-\mu_1)t}\int_{-\infty}^{t}\rho(s)e^{\mu_1 s}ds)dt\,,$$

$$C(t) = \mu_1 r\int_{-\infty}^{t}\{e^{(\mu_2-\mu_1)k}\int_{-\infty}^{k}\rho(s)e^{\mu_1 s}ds\}dk\,,$$

$$\beta(t) = \mu_1 re^{-\mu_2 t}\int_{-\infty}^{t}\{e^{(\mu_2-\mu_1)k}\int_{-\infty}^{k}\rho(s)e^{\mu_1 s}ds\}dk. \qquad (15)$$

Получившееся значение $\beta(t)$ является асимптотически средним числом пенсионеров.

ДИФФУЗИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (1)

$$\frac{\partial P(i,j,t)}{\partial t} =$$
$$= -(\lambda(t)+i\mu_1+j\mu_2)P(i,j,t)+\lambda(t)P(i-1,j,t)+$$
$$+(j+1)\mu_2 P(i,j+1,t)+(i+1)(1-r)\mu_1 P(i+1,j,t)+$$
$$+(i+1)r\mu_1 P(i+1,j-1,t),$$

где $i\in[0,\infty);\ j\in[0,\infty)$.

Введём новые обозначения:

$$\lambda(t) = \lambda\rho(t)\,,\ \frac{1}{\lambda} = \varepsilon^2\,,$$

$$i\varepsilon^2 = \alpha(t)+\varepsilon x\,,\ j\varepsilon^2 = \beta(t)+\varepsilon y, \qquad (16)$$

где $\lambda = 10^{-6}$, а $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ получены ранее.

Введём функцию $H(x,y,t,\varepsilon)$:

$$P(i,j,t) = \varepsilon^2 H(x,y,t,\varepsilon)\,.$$

После ряда преобразований в системе (1), учитывая замены (16), устремив $\varepsilon \to 0$, получаем

$$\frac{\partial H(x,y,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\{[\sqrt{\lambda}(\frac{d\alpha(t)}{dt} - \rho(t) + \mu_1\alpha(t)) + \mu_1 x(t)]H(x,y,t)\} + \frac{\partial}{\partial y}\{[\sqrt{\lambda}(\frac{d\beta(t)}{dt} + \mu_2\beta(t) + \mu_1 r\alpha(t)) + \mu_2 y(t) - \mu_1 x(t)]H(x,y,t)\} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\{(\rho(t) + \mu_1\alpha(t))H(x,y,t)\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\{(\mu_2\beta(t) + \mu_1 r\alpha(t))H(x,y,t)\} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\{\mu_1 r\alpha(t)H(x,y,t)\}.$$

Учитывая систему (13), получаем уравнение Фоккера – Планка:

$$\frac{\partial H(x,y,t)}{\partial t} = -\frac{\partial H(x,y,t)}{\partial x}\{-\mu_1 x(t)\} - \frac{\partial H(x,y,t)}{\partial y}\{-\mu_2 y(t) + \mu_1 x(t)\} + \frac{\partial^2 H(x,y,t)}{\partial x^2}\{\rho(t) + \mu_1\alpha(t)\} + \frac{\partial^2 H(x,y,t)}{\partial y^2}\{\mu_2\beta(t) + \mu_1 r\alpha(t)\} - \frac{\partial^2 H(x,y,t)}{\partial x \partial y}\{\mu_1 r\alpha(t)\}. \quad (17)$$

Для данного уравнения можно записать следующую систему стохастических дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} dx(t) = -\mu_1 x(t)dt + \sigma_{11}dW_1(t) + \sigma_{12}dW_2(t), \\ dy(t) = (\mu_1 x(t) - \mu_2 y(t))dt + \sigma_{21}dW_1(t) + \\ +\sigma_{22}dW_2(t), \end{cases} \quad (18)$$

где $W_1(t)$ и $W_2(t)$ – винеровские случайные процессы.

Математическое ожидание процессов $x(t)$ и $y(t)$ равняется 0, то есть $M\{x(t)\} = 0$ и $M\{y(t)\} = 0$.

Можно записать выражения для приращений данных процессов:

$$\begin{cases} \Delta x(t) = \sigma_{11}\Delta W_1(t) + \sigma_{12}\Delta W_2(t), \\ \Delta y(t) = \sigma_{21}\Delta W_1(t) + \sigma_{22}\Delta W_2(t). \end{cases}$$

Нахождение коэффициентов

Для нахождения коэффициентов $\sigma_{11}(t), \sigma_{12}(t)$, $\sigma_{21}(t), \sigma_{22}(t),$ используя условное математическое ожидание, запишем следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t}M\{[\Delta x(t)]^2 / x(t)y(t)\} = \sigma^2{}_{11} + \sigma^2{}_{12} = \\ = \rho(t) + \mu_1\alpha(t), \\ \frac{1}{\Delta t}M\{[\Delta y(t)]^2 / x(t)y(t)\} = \sigma^2{}_{21} + \sigma^2{}_{22} = \\ = \mu_2\beta(t) + \mu_1 r\alpha(t), \\ \frac{1}{\Delta t}M\{\Delta x(t)\Delta y(t) / x(t)y(t)\} = \sigma_{11}\sigma_{21} + \sigma_{12}\sigma_{22} = \\ = \mu_1 r\alpha(t). \end{cases}$$

Имеем три уравнения для определения четырёх неизвестных. Одну неизвестную задаём сами. Пусть $\sigma_{21} = 0.$

Тогда легко найти и другие коэффициенты:

$$\begin{cases} \sigma_{21} = 0, \\ \sigma_{22} = \sqrt{\mu_2\beta(t) + \mu_1 r\alpha(t)}, \\ \sigma_{12} = \frac{\mu_1 r\alpha(t)}{\sqrt{\mu_2\beta(t) + \mu_1 r\alpha(t)}}, \\ \sigma_{11} = \sqrt{\rho(t) + \mu_1\alpha(t) - \frac{(\mu_1 r\alpha(t))^2}{\mu_2\beta(t) + \mu_1 r\alpha(t)}}. \end{cases} \quad (19)$$

Решение системы (18)

1. Запишем первое уравнение:

$$dx(t) = -\mu_1 x(t)dt + \sigma_{11}dW_1(t) + \sigma_{12}dW_2(t).$$

Это стохастическое дифференциальное уравнение описывает диффузионный процесс авторегрессии. Воспользуемся формулой дифференцирования Ито:

Рассмотрим случайный процесс $\eta(t)$:

$$\eta(t) = f(x(t), t).$$

Зададим функцию $f(x(t), t)$ следующим образом:

$$f(x(t), t) = e^{-\mu_1 t}x(t),$$

тогда

$$\eta(t) = e^{-\mu_1 t}x(t).$$

Продифференцируем данное равенство по t:

$$d\eta(t) = -x(t)\mu_1 e^{-\mu_1 t}dt + e^{-\mu_1 t}(x(t)\mu_1 dt + \sigma_{11}dW_1(t) + \sigma_{12}dW_2(t)).$$

Сократив одинаковые слагаемые, получаем

$$d\eta(t) = \sigma_{11}e^{-\mu_1 t}dW_1(t) + \sigma_{12}e^{-\mu_1 t}dW_2(t).$$

Проинтегрируем данное дифференциальное уравнение в пределах от t_0 до t:

$$\eta(t) = \eta_0(t) + \int_{t_0}^{t}\sigma_{11}e^{-\mu_1 s}dW_1(s) + \int_{t_0}^{t}\sigma_{12}e^{-\mu_1 s}dW_2(s).$$

Запишем $x(t)$:

$$x(t) = e^{\mu_1 t}\eta(t),$$

$$x(t) = e^{\mu_1 t}(\eta_0(t) + \int_{t_0}^{t}\sigma_{11}e^{-\mu_1 s}dW_1(s) + \int_{t_0}^{t}\sigma_{12}e^{-\mu_1 s}dW_2(s)). \quad (20)$$

Начальные условия:

$$x(t_0) = e^{\mu_1 t_0}\eta_0(t),$$

$$\eta_0(t) = e^{-\mu_1 t_0}x(t_0).$$

Таким образом,

$$x(t) = e^{\mu(t-_1 t_0)}x(t_0) + e^{\mu_1 t}\int_{t_0}^{t}\sigma_{11}e^{-\mu_1 s}dW_1(s) + e^{\mu_1 t}\int_{t_0}^{t}\sigma_{12}e^{-\mu_1 s}dW_2(s).$$

Положим начальный момент времени $t_0 = 0$:

$$x(t) = e^{\mu t} x(0) + e^{\mu_1 t} \int_0^t \sigma_{11} e^{-\mu_1 s} dW_1(s) + + e^{\mu_1 t} \int_0^t \sigma_{12} e^{-\mu_1 s} dW_2(s), \quad (21)$$

$$M\{x(t)\} = 0 .$$

Здесь $x(t)$ – гауссовский случайный процесс, который определяет случайное отклонение числа «активных» клиентов Пенсионного фонда России в любой момент времени от асимптотического среднего.

2. Решим второе уравнение, считая $x(t)$ найденным:

$$dy(t) = (\mu_1 x(t) - \mu_2 y(t))dt + \sigma_{22} dW_2(t) .$$

Воспользуемся формулами дифференцирования Ито.

Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$:

$$\xi(t) = g(y(t), t) .$$

Зададим функцию $g(x(t),t)$ следующим образом:

$$g(x(t), t) = e^{\mu_2 t} y(t) ,$$

тогда $\xi(t) = e^{\mu_2 t} y(t)$.

Продифференцируем данное равенство по t:

$$d\xi(t) = y(t)\mu_2 e^{\mu_2 t} dt + + e^{\mu_2 t} (-y(t)\mu_2 dt + \mu_1 x(t)dt + \sigma_{22} dW_2(t)).$$

Сократив одинаковые слагаемые, получаем

$$d\xi(t) = e^{\mu_2 t} \mu_1 x(t)dt + \sigma_{22} e^{\mu_2 t} dW_2(t) .$$

Проинтегрируем данное дифференциальное уравнение в пределах от t_0 до t :

$$\xi(t) = \xi_0(t) + \int_{t_0}^t e^{\mu_2 s} \mu_1 x(s) ds + \int_{t_0}^t \sigma_{22} e^{\mu_2 s} dW_2(s) .$$

Запишем $y(t)$:

$$y(t) = e^{-\mu_2 t} \xi(t) ,$$

$$y(t) = e^{-\mu_2 t} (\xi_0(t) + + \int_{t_0}^t e^{\mu_2 s} \mu_1 x(s) ds + \int_{t_0}^t \sigma_{22} e^{\mu_2 s} dW_2(s)). \quad (22)$$

Начальные условия:

$$y(t_0) = e^{-\mu_2 t l 0} \xi_0(t) ,$$

$$\xi_0(t) = e^{\mu_2 t_0} y(t_0) .$$

Таким образом,

$$y(t) = e^{-\mu_2 (t - t_0)} y(t_0) + + e^{-\mu_2 t} \int_{t_0}^t e^{\mu_2 s} \mu_1 x(s) ds + e^{-\mu_2 t} \int_{t_0}^t \sigma_{22} e^{\mu_2 s} dW_2(s)).$$

Положим начальный момент времени $t_0 = 0$:

$$y(t) = e^{-\mu_2 t} y(0) + e^{-\mu_2 t} \int_0^t e^{\mu_2 s} \mu_1 x(s) ds + + e^{-\mu_2 t} \int_0^t \sigma_{22} e^{\mu_2 s} dW_2(s)), \quad (23)$$

$$M\{y(t)\} = 0 .$$

Здесь $y(t)$ – гауссовский случайный процесс, который определяет случайное отклонение числа пенсионеров в Российской Федерации в любой момент времени от асимптотического среднего.

ВЫВОД

На основе марковской теории построена модель Пенсионного фонда Российской Федерации. С помощью данной модели получено ожидаемое число клиентов Пенсионного фонда. После этого построены и исследованы асимптотическое и диффузионное приближения. Построенная модель, оцененная с помощью реальных статистических данных, не совсем адекватна реальной жизни. Можно выделить несколько причин неадекватности:

1) сложность в построении реального входящего потока $\lambda(t)$.

2) очень трудно найти действительные статистические данные за 1940 – 1960 годы;

3) вероятности, что человек доживёт до 20 лет и, начав работать, доживёт до пенсии, так же, как и $\lambda(t)$, должны зависеть от времени;

4) в жизни государства много форс-мажорных обстоятельств, которые трудно предусмотреть в математической модели.

Следующим этапом работы будет построение более адекватной модели, затем планируется более детальное исследование и моделирование нового пенсионного страхования в целом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новое* законодательство о пенсиях. М.: Федеральные законы, 2002.
2. *Соловьёв А.А.* Пенсионный фонд: новое в уплате страховых взносов. М.: ЮНИТИ, 2002.
3. *Шахов В. В.* Страхование: Учебник для вузов. М.: Страховой полис, ЮНИТИ, 1997.
4. *Гнеденко Б. В.* , *Коваленко И. Н.* Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1987.
5. *Клейнрок Л.* Теория массового обслуживания. М.: Машиностроение, 1982.
6. *Саати Т. Л.* Элементы теории массового обслуживания и её приложения. М.: Сов. радио, 1965.
7. *Вентцель А.Д.* Курс теории случайных процессов. М.: Наука, 1975.
8. *Радюк Л. Е.*, *Терпугов А. Ф.* Теория вероятностей и случайных процессов. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1988.
9. *Матвеев Н. М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1963.
10. *Социальное* положение и уровень жизни населения России: Статистич. сб. М.: Госкомстат России, 2001.
11. *Российский* статистический ежегодник: Статистич. сб. М.: Госкомстат России, 2002.

Статья представлена кафедрой теории вероятности и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета 19 мая 2003 г.