УДК 681.142.2

И.Р. Гарайшина, А.А. Назаров

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ИЗМЕНЕНИЯ СТРАХОВОГО КАПИТАЛА ПЕНСИОННОГО ФОНДА

Предлагается модель изменения страхового капитала Пенсионного фонда Российской Федерации в зависимости от суммы поступивших страховых взносов и суммы выплаченной страховой части пенсии застрахованным лицам. Изучаются основные характеристики капитала фонда.

Проводимая с начала 2002 г. пенсионная реформа внесла кардинальные изменения в принципы работы пенсионной системы. В соответствии с реформой трудовые пенсии будут складываться из трех составляющих: базовой, страховой и накопительной. Базовая пенсия будет являться минимальным размером трудовой пенсии, неким гарантированным минимумом и будет выплачиваться из федерального бюджета за счет средств от уплаты единого социального налога (ЕСН). Страховая часть пенсий зависит от результатов работы конкретного работника и будет равна сумме взносов, которые будут перечисляться работодателем в его пользу. Все взносы, поступающие на индивидуальный счет застрахованного, будут суммироваться и к достижению им пенсионного возраста составят определенный страховой капитал. Таким образом, размер страховой части трудовой пенсии определяется исключительно величиной страхового капитала, образуемого из взносов по обязательному пенсионному страхованию, перечисленных за застрахованных лиц. Данная часть пенсионных выплат будет осуществляться из Пенсионного фонда РФ. Размер накопительной части также будет зависеть от объема поступивших взносов, но только уже с учетом его увеличения за счет инвестирования этих средств.

Целью данного исследования является рассмотрение статистических характеристик процесса изменения капитала Пенсионного фонда.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим модель, в которой величина капитала Пенсионного фонда зависит от двух факторов: суммы поступивших страховых взносов и суммы выплаченной страховой части пенсии застрахованным лицам.

Представим Пенсионный фонд Российской Федерации как некоторый объект, который в момент времени t характеризуется двумя случайными процессами: числом застрахованных пенсионеров $j(t)$ и капиталом компании $S(t)$. Таким образом, в качестве математической модели Пенсионного фонда рассмотрим двумерный случайный процесс $\{j(t),\ S(t)\}$.

Отметим важную особенность капитала $S(t)$. Страховой капитал не является реально накопленной суммой средств, а составляет внутренний долг государства по обязательствам перед пенсионерами.

Будем считать, что с выходом застрахованного лица на пенсию страховой капитал фонда увеличивается на величину, равную сумме поступивших страховых взносов, являющейся случайной величиной с функцией распределения $A(x)$. Полагаем, что поток заявок на назначение трудовой пенсии по старости является простейшим с параметром λr (λ – интенсивность поступления заявок на страхование, r – вероятность достижения пенсионного возраста), имеющим смысл среднего числа лиц, достигших пенсионного возраста за единицу времени.

Считаем также, что каждому пенсионеру регулярно выплачивается страховая часть пенсии, которая является случайной величиной с функцией распределения $B(x)$. Будем полагать, что суммарный поток выплат пенсий всем застрахованным пенсионерам является марковским с интенсивностью $12j$, где j – число пенсионеров, а множитель 12 получен в результате того, что пенсия выплачивается 12 раз в год. Продолжительность получения является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону с параметром μ_2.

Обозначим

$$P(j(t)=j,\quad S\le S(t)\le S+dS)=P(j,S,t)dS\ .$$

Распределение вероятностей $P(j,s,t)$ удовлетворяет уравнению

$$P(j,S,t+\Delta t)=\lambda r\Delta t\int\limits_0^S P(j-1,S-u,t)dA(u)+$$

$$+12j\Delta t\int\limits_0^\infty P(j,S+u,t)dB(u)+(j+1)\mu_2\Delta tP(j+1,S,t)+$$

$$+\left(1-\left(\lambda r+\mu_2 j+12j\right)\Delta t\right)P(j,S,t)+o(\Delta t). \qquad (1)$$

В результате несложных преобразований получим уравнение

$$\frac{\partial P(j,S,t)}{\partial t}+\left(\lambda r+(\mu_2+12)j\right)P(j,S,t)=$$

$$=\lambda r\int\limits_0^S P(j-1,S-u,t)dA(u)+12j\int\limits_0^\infty P(j,S+u,t)dB(u)+$$

$$+(j+1)\mu_2P(j+1,S,t). \qquad (2)$$

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Напомним, что параметр λ имеет смысл среднего числа лиц, застрахованных за единицу времени, и в условиях страхования в Российской Федерации принимает значения порядка нескольких сотен тысяч, что позволяет применить в нашем исследовании методы асимптотического анализа.

Рассмотрим предельный, при $\lambda\to\infty$, процесс для последовательности $\left\{\frac{1}{\lambda}j(t),\frac{1}{\lambda}S(t)\right\}$.

Теорема 1. При $\lambda\to\infty$ предельный процесс $\{\alpha(t),\beta(t)\}$ для последовательности процессов $\left\{\frac{1}{\lambda}j(t),\frac{1}{\lambda}S(t)\right\}$ является детерминированной двумерной вектор-функцией вида

$$\alpha(t)=\frac{r}{\mu_2}\left(1-e^{-\mu_2(t-t_0)}\right)+\alpha_0 e^{-\mu_2(t-t_0)},$$

$$\beta(t)=\frac{12b_1}{\mu_2^2}\left(e^{-\mu_2(t-t_0)}-1\right)\left(r+\mu_2\alpha_0\right)+$$

$$+\left(ra_1-\frac{12b_1 r}{\mu_2}\right)\left(t-t_0\right)+\beta_0, \qquad (3)$$

где a_1, b_1 – первые начальные моменты случайных величин, определяемых функциями распределения $A(x)$ и $B(x)$; $\alpha(t_0)=\alpha_0$, $\beta(t_0)=\beta_0$.

Доказательство. Обозначим $\frac{1}{\lambda}=\varepsilon$ и выполним в (2) замену $j\varepsilon=y$, $S\varepsilon=z$, $\frac{1}{\varepsilon^2}P(j,S,t)=\pi(y,z,t,\varepsilon)$, тогда уравнение (2) примет вид

$$\frac{\partial\pi(y,z,t,\varepsilon)}{\partial t}+(\lambda r+\lambda(\mu_2+12)y)\pi(y,z,t,\varepsilon)=$$

$$=\lambda r\int\limits_0^{z/\varepsilon}\pi(y-\varepsilon,z-\varepsilon u,t,\varepsilon)dA(u)+$$

$$+12\lambda y\int\limits_0^{\infty}\pi(y,z+\varepsilon u,t,\varepsilon)dB(u)+$$

$$+\mu_2\lambda(y+\varepsilon)\pi(y+\varepsilon,z,t,\varepsilon).$$

Раскладывая функции $\pi(y\pm\varepsilon,z\pm\varepsilon u,t,\varepsilon)$ в ряд по приращениям аргументов с точностью до $o(\varepsilon)$ и выполнив элементарные преобразования, получим уравнение

$$\frac{\partial\pi}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial y}\left\{(r-\mu_2 y)\pi\right\}-\frac{\partial}{\partial z}\left\{(ra_1-12b_1 y)\pi\right\},$$

которое является вырожденным уравнением Фоккера – Планка для плотности $\pi(y,z,t)$ распределения вероятностей значений двумерного диффузионного процесса с коэффициентами переноса $(r-\mu_2 y)$ и $(ra_1-12b_1 y)$ и коэффициентами диффузии, равными нулю. Следовательно, рассматриваемый процесс является детерминированным.

В силу полученных результатов можно утверждать, что процессы $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\alpha'(t)=r-\mu_2\alpha(t),\\ \beta'(t)=ra_1-12b_1\alpha(t),\end{cases}$$

решение которой имеет вид (3). Теорема доказана.

Отметим, что в стационарном режиме $\alpha=\frac{r}{\mu_2}$, а первые начальные моменты связаны отношением $b_1=\frac{\mu_2}{12}a_1$.

Далее проведем исследование процесса отклонения процессов $\frac{1}{\lambda}j(t)$ и $\frac{1}{\lambda}S(t)$ от найденных средних $\alpha(t)$ и $\beta(t)$. Для этого рассмотрим предельный, при $\lambda\to\infty$, процесс для последовательности

$$\left\{\frac{j(t)-\lambda\alpha(t)}{\sqrt{\lambda}},\frac{S(t)-\lambda\beta(t)}{\sqrt{\lambda}}\right\}. \qquad (4)$$

Теорема 2. При $\lambda\to\infty$ предельный процесс $\{y(t),z(t)\}$ для последовательности (4) является двумерным гауссовским диффузионным процессом с коэффициентами переноса

$$A_1(y,z,t)=-\mu_2 y;\ A_2(y,z,t)=-12yb_1 \qquad (5)$$

и диффузии

$$B_{11}(t)=r+\mu_2\alpha(t),\quad B_{22}(t)=ra_2+12\alpha(t)b_2,$$

$$B_{12}=ra_1, \qquad (6)$$

где a_1, b_1; a_2, b_2 – первые и вторые начальные моменты соответствующих случайных величин.

Доказательство. Обозначим $\frac{1}{\lambda}=\varepsilon^2$ и выполним в (2) замену

$$j\varepsilon^2=\alpha(t)+\varepsilon y,\quad S\varepsilon^2=\beta(t)+\varepsilon z,$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2}P(j,S,t)=H(y,x,t,\varepsilon).$$

Получим уравнение

$$\frac{\partial H(y,z,t,\varepsilon)}{\partial t}-\frac{\alpha'(t)}{\varepsilon}\frac{\partial H(y,z,t,\varepsilon)}{\partial y}-\frac{\beta'(t)}{\varepsilon}\frac{\partial H(y,z,t,\varepsilon)}{\partial z}+$$

$$+(\lambda r+\lambda(\mu_2+12)(\alpha(t)+y)H(y,z,t,\varepsilon)=$$

$$=\lambda r\int\limits_0^{\frac{\beta(t)+\varepsilon z}{\varepsilon^2}}H(y-\varepsilon,z-\varepsilon u,t,\varepsilon)dA(u)+$$

$$+12\lambda(\alpha(t)+\varepsilon y)\int\limits_0^{\infty}H(y,z+\varepsilon u,t,\varepsilon)dB(u)+$$

$$+\mu_2\lambda(\alpha(t)+\varepsilon(y+\varepsilon))H(y+\varepsilon,z,t,\varepsilon).$$

Раскладывая функции $H(y\pm\varepsilon,z\pm\varepsilon u,t,\varepsilon)$ в ряд по приращениям аргументов с точностью до $o(\varepsilon^2)$ и выполнив элементарные преобразования, получим при $\varepsilon\to 0$:

$$\frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial y}\left\{-\mu_2 yH\right\}-\frac{\partial}{\partial z}\left\{-12b_1 yH\right\}+$$

$$+\frac{1}{2}\left\{r+\mu_2\alpha(t)\right\}\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\left\{ra_2-12b_2\alpha(t)\right\}\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}+$$

$$+ra_1\frac{\partial_2 H}{\partial y\partial z}.$$

Данное уравнение является уравнением Фоккера – Планка для плотности $H(y,z,t)$ распределения вероятностей значений двумерного диффузионного процесса $\{y(t),\ z(t)\}$ с коэффициентами переноса (5) и диффузии (6).

В силу того, что коэффициенты диффузии не зависят от пространственных переменных y и z, а коэффициенты переноса зависят от них линейно, диффузионный процесс $\{y(t),\ z(t)\}$ является гауссовским. Покажем это.

Двумерный диффузионный процесс $\{y(t),\ z(t)\}$ определяется системой двух стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} dy(t) = A_1 dt + \sigma_{11} dw_1(t) + \sigma_{12} dw_2(t), \\ dz(t) = A_2 dt + \sigma_{21} dw_1(t) + \sigma_{22} dw_2(t), \end{cases} \tag{7}$$

где $w_1(t)$ и $w_2(t)$ – независимые стандартные винеровские процессы.

Исходя из полученных значений коэффициентов диффузии (6), определим параметры σ_{ij} системы (7). Пусть $\sigma_{21} = 0$, тогда

$$\sigma_{22}(t) = \sqrt{B_{22}(t)}, \quad \sigma_{12}(t) = \frac{B_{12}(t)}{\sqrt{B_{22}(t)}},$$

$$\sigma_{11}(t) = \sqrt{B_{11} - \frac{B_{12}^2}{B_{22}}}. \tag{8}$$

В этом случае система (7) принимает вид

$$\begin{cases} dy(t) = -\mu_2 y dt + \sigma_{11}(t) dw_1(t) + \sigma_{12}(t) dw_2(t), \\ dz(t) = -12 b_1 y dt + \sigma_{22}(t) dw_2(t), \end{cases} \tag{9}$$

где коэффициенты σ_{ij} определяются равенствами (8) и не зависят от значений процесса $\{y(t),\ z(t)\}$. Теорема доказана.

Используя формулу Ито, найдем решение системы (7) при нулевых начальных условиях в виде:

$$\begin{cases} y(t) = e^{-\mu_2 t} \left\{ \int\limits_{t_0}^{t} \sigma_{11}(s) e^{\mu_2 s} dw_1(s) + \int\limits_{t_0}^{t} \sigma_{12}(s) e^{\mu_2 s} dw_2(s) \right\}, \\ z(t) = -12 b_1 \int\limits_{t_0}^{t} y(s) ds + \int\limits_{t_0}^{t} \sigma_{22}(s) dw_2(s) \end{cases} \tag{10}$$

Таким образом, мы получили явное выражение процесса $\{y(t),\ z(t)\}$, являющегося двумерным гауссовским процессом.

Найдем корреляционную функцию процесса $z(t)$ $R_z(t_1,t_2) = M\{z(t_1), z(t_2)\}$. Используя формулы (10) и свойства стандартных винеровских процессов, получим

$$R_z(t_1,t_2) = \frac{a_1^2 r}{\mu_2} \Big(e^{-\mu_2(\max(t_1,t_2)-t_0)} - e^{-\mu_2(\min(t_1,t_2)-t_0)} -$$

$$- e^{-\mu_2|t_1-t_2|} + 1 \Big) + \left(r a_2 - \frac{12 b_2 r}{\mu_2} \right) \big(\min(t_1,t_2) - t_0 \big). \tag{11}$$

В силу замены (4) процесс $S(t)$ изменения страхового капитала Пенсионного фонда Российской Федерации (процесс изменения) имеет вид

$$S(t) = \lambda\beta(t) + \sqrt{\lambda} z(t), \tag{12}$$

где детерминированная функция $\beta(t)$ определяется формулой (3), а $z(t)$ – гауссовский случайный процесс, определяемый системой (9) стохастических дифференциальных уравнений, решение которой записано в виде (10). Очевидно, что математическое ожидание процесса $S(t)$ составляет $\lambda\beta(t)$, а его ковариационная функция определяется равенством (11). Так как изменение гауссовского процесса полностью определяется его математическим ожиданием и ковариационной функцией, то для процесса изменения величины страхового капитала $S(t)$ проведено его полное исследование, из которого достаточно просто получаются все его характеристики.

Таким образом, в работе показано, что процесс изменения страхового капитала Пенсионного фонда можно аппроксимировать гауссовским процессом (12) с математическим ожиданием $\lambda\beta(t)$ и ковариационной функцией $\lambda R_z(t_1,t_2)$, где $R_z(t_1,t_2)$ – корреляционная функция процесса $z(t)$, определяемая равенством (11).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гихман И.И.*, *Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова думка, 1968. 354 с.
2. *Гнеденко Б.В.*, *Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1987. 336 с.
3. *Федеральный* закон от 17.12.01 г. № 173-ФЗ «О трудовых пенсиях в Российской Федерации».
4. *Федеральный* закон от 15.12.01 г. № 167-ФЗ «Об обязательном пенсионном страховании в Российской Федерации».

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 30 апреля 2003 г.