УДК 519.865.5

В.А. Гальперин, В.В. Домбровский

ДИНАМИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ ИНВЕСТИЦИОННЫМ ПОРТФЕЛЕМ С УЧЕТОМ СКАЧКООБРАЗНОГО ИЗМЕНЕНИЯ ЦЕН ФИНАНСОВЫХ АКТИВОВ

Задача управления портфелем ценных бумаг, состоящим из рисковых и безрискового вложений, формулируется как динамическая задача слежения за эталонным (гипотетическим) портфелем, имеющим заданную желаемую эффективность. Предполагается, что динамика цен рисковых финансовых активов описывается стохастическими уравнениями с гауссовскими и импульсными пуассоновскими возмущениями. Предлагается подход к определению оптимальной стратегии управления с обратной связью по квадратичному критерию.

Одной из основных задач финансового менеджмента является проблема выбора инвестиционного портфеля (ИП) [1 – 8]. Основой существующей классической теории оптимального управления портфелем является однопериодный «mean-variance» подход, предложенный Марковицем [3] и модель ИП Мертона [4] в непрерывном времени.

В настоящее время существует множество моделей и подходов к решению задачи управления ИП, но большинство из них являются усложнениями и расширениями подхода Марковица и Мертона на различные варианты стохастических моделей цен рисковых и безрисковых ценных бумаг и функций полезности. В своей основе они также либо минимизируют риск портфеля (обычно дисперсию портфеля или связанные с ней меры риска) при заданном среднем конечном доходе [2, 4 – 7], либо достаточно условно выбираемую интегральную функцию полезности [4].

В работах [8, 9] предложена динамическая сетевая модель управления инвестиционным портфелем. Задача управления портфелем формулируется как динамическая задача слежения по квадратичному критерию за капиталом некоторого гипотетического эталонного портфеля, имеющего заданную желаемую доходность. Состояние портфеля описывается вектором, компоненты которого равны объемам инвестиций в рисковые и безрисковый активы, а управлениями являются суммы перераспределяемого капитала, переводимого с банковского счета в рисковые вложения и наоборот. В [8-9] эволюция цен рисковых активов описывается классической моделью геометрического (экономического) броуновского движения Блэка – Шоулса [4]. Обобщение сетевой модели на случай учета скачкобразных изменений цен рисковых активов рассматривается в [10].

В отличие от [8, 9] в работах [11 – 13] динамика инвестиционного портфеля описывается в агрегированном виде. Состояние портфеля определяется суммарным капиталом всех вкладов в рисковые и безрисковый активы, а управлениями являются объемы этих вкладов. Данная формулировка упрощает анализ и численную реализацию полученных решений.

В данной работе, аналогично [10], предполагается, что цены рисковых активов описываются стохастическими уравнениями, содержащими также и импульсные пуассоновские возмущения, описывающие скачкообразные изменения цен вследствие воздействия редких экстремальных событий или ожиданий (модель Мертона). Получены уравнения, определяющие оптимальную стратегию управления (формирования) портфеля по квадратичному критерию в непрерывном и дискретном времени. Приводятся результаты численного моделирования.

Результаты данной работы являются развитием и обобщением [12, 13] на случай учета скачкообразных изменений цен рисковых активов.

1. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ В НЕПРЕРЫВНОМ ВРЕМЕНИ

Рассмотрим ИП, состоящий из n видов рисковых вложений (под рисковыми будем понимать инвестиции, доходность которых – случайная величина) и безрискового вклада с неслучайной доходностью. Капитал, помещенный в i-й рисковый актив в момент времени t, равен $u_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$; в безрисковый – $u_0(t)$. Тогда общий объем вложений (портфель) в момент времени t будет равен

$$V(t) = \sum_{i=1}^{n} u_i(t) + u_0(t) . \qquad (1)$$

Динамика портфеля определяется уравнением

$$dV(t) = \sum_{i=1}^{n} d\xi_i(t) u_i(t) + r(t) u_0(t) dt , \qquad (2)$$

где $\xi_i(t)$ – ставка доходности i-го рискового вложения на промежутке [t; t+dt], случайная величина, $r(t)$ – неслучайная доходность безрисковых вложений. При $u_0(t) < 0$ происходит заем капитала по безрисковой ставке $r(t)$ на сумму $|u_0(t)|$, а при $u_i(t) < 0$ – продажа без покрытия i-й ценной бумаги на сумму $|u_i(t)|$ (так называемая операция "short-sale")[1, 4].

Используя (1), уравнение (2) преобразуем к виду

$$dV(t) = r(t)V(t)dt + b(t)u(t) ,$$

где $$u(t) = \left[u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)\right]^T ,$$

$$b(t) = \left[d\xi_1(t) - r(t)dt,\, d\xi_2(t) - r(t)dt, \ldots, d\xi_n(t) - r(t)dt\right],$$

T – знак транспонирования; капитал, вкладываемый в безрисковый актив,

$$u_0(t) = V(t) - \sum_{i=1}^{n} u_i(t) .$$

Стратегия управления портфелем путем перераспределения капитала между различными видами инвестиций определяется таким образом, чтобы капитал реального портфеля с минимально возможными отклонениями (с минимально возможным риском) следовал капиталу $V^0(t)$ некоторого определяемого инвестором эталонного портфеля с доходностью $\mu_0(t) > r(t)$, эволюция которого описывается уравнением

$$dV^0(t) = \mu_0(t) V^0(t) dt,\ V^0(0) = V(0) .$$

В качестве меры риска выберем квадратичный функционал

$$J = \mathrm{M}\left\{ \int_0^T \left([V(t) - V^0(t)]^2 + u^T(t) R(t) u(t) \right) dt + [V(T) - V^0(T)]^2 \right\}, \qquad (3)$$

где $R(t)$ – симметричная положительно определенная матрица весовых коэффициентов. Второе слагаемое под интегралом в функционале (3) учитывает ограничения, связанные с управлением портфелем.

Для описания эволюции цен рисковых активов используем модель

$$dS_i(t) = S_i(t)\left[\mu_i(t)dt + \sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}(t)dw_j(t) + \sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}(t)d\pi_j(t)\right], \tag{4}$$

где $S_i(t)$ – цена i-го рискового вложения в момент времени t; $\mu_i(t) > 0$ – ожидаемая доходность i-го вложения, которая характеризует среднюю норму возврата за период $[t;\ t+dt]$; $\sigma_{ij}(t)$ – элементы матрицы волатильности $\sigma(t)$, $\sigma(t)\sigma^T(t) \geq 0$, $\delta_{ij}(t)$ – элементы матрицы $\delta(t)$, определяющие влияния скачков цены j-го рискового вложения на цену i-го, $w(t) = \left[w_1(t), w_2(t), \ldots, w_n(t)\right]^T$ – стандартный винеровский процесс размерности n; $\pi_j(t)$ – независимые между собой пуассоновские процессы с функциями интенсивности $\lambda_j(t) > 0$ и непрерывными функциями распределения скачков $F_j(t, dz_j)$,

$$\int_{\Omega_j} z_j F_j(t, dz_j) = 0, \quad \int_{\Omega_j} z_j^2 F_j(t, dz_j) = \theta_j(t),$$

$$\mathrm{M}\left\{dw_i(t)d\pi_j(t)\right\} = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

При отсутствии импульсной составляющей уравнения (4) представляют собой геометрическое (экономическое) броуновское движение, модели которого обычно используются в финансовой математике [4, 14]. За счет дополнительных слагаемых с импульсными пуассоновскими возмущениями учитываются резкие скачкообразные изменения цен, связанные с редкими экстремально отрицательными или положительными событиями на рынке ценных бумаг, подобные модели цен рассматривались в [4].

Определим вектор-столбец $x(t) = \left[V(t), V^0(t)\right]^T$, и с учетом (4) представим уравнения динамики управляемого и эталонного портфелей в виде

$$dx(t) = A(t)x(t)dt + B_0(t)u(t)dt + \sum_{j=1}^{n}B_j(t)u(t)dw_j(t) + \sum_{j=1}^{n}D_j(t)u(t)d\pi_j(t), \tag{5}$$

где
$$A(t) = \begin{bmatrix} r(t) & 0 \\ 0 & \mu_0(t) \end{bmatrix},$$

$$B_j(t) = \begin{bmatrix} \sigma_{1j}(t) & \sigma_{2j}(t) & \ldots\sigma_{nj}(t) \\ 0 & 0 & \ldots\ 0 \end{bmatrix},$$

$$D_j(t) = \begin{bmatrix} \delta_{1j}(t) & \delta_{2j}(t) & \ldots\delta_{nj}(t) \\ 0 & 0 & \ldots\ 0 \end{bmatrix},$$

$$B_0(t) = \begin{bmatrix} \mu_1(t) - r(t) & \mu_2(t) - r(t) & \ldots & \mu_n(t) - r(t) \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

Функционал (3) запишем следующим образом:

$$J = \mathrm{M}\left\{\int_0^T [x^T(t)h^T hx(t) + u^T(t)R(t)u(t)]\,dt + x^T(T)h^T hx(T)\right\}, \tag{6}$$

где $h = [1,\ -1]$.

Система (5) содержит мультипликативные гауссовские и пуассоновские возмущения. Закон управления с обратной связью определим в классе линейных

$$u(t) = K_1(t)V(t) + K_2(t)V^0(t) = K(t)x(t), \tag{7}$$

где $K(t) = [K_1(t), K_2(t)]$ – матрица коэффициентов обратной связи, выбирается из условия минимума функционала (6).

Функционал (6) можно записать в виде

$$J = \mathrm{tr}\left\{\int_0^T [h^T hP(t) + R(t)K(t)P(t)K^T(t)] + h^T hP(T)\right\}, \tag{8}$$

где матрица вторых моментов $P(t) = \mathrm{M}[x(t)x^T(t)]$ с учетом (7) удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= [A(t) + B_0(t)K(t)]P(t) + \\ &+ P(t)[A(t) + B_0(t)K(t)]^T + \\ &+ \sum_{j=1}^{n}B_j(t)K(t)P(t)K^T(t)B_j^T(t) + \\ &+ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j(t)\theta_j(t)D_j(t)K(t)P(t)K^T(t)D_j^T(t). \end{aligned} \tag{9}$$

Следуя методике получения оптимальной стратегии управления линейными системами с мультипликативными шумами, предложенной в [15, 16], переформулируем данную задачу управления стохастической системой в виде эквивалентной задачи управления детерминированной системой, описываемой матричным уравнением динамики вторых моментов состояний (9), матрицей $K(t)$ в качестве управляющих воздействий и критерием качества (8). Применяя принцип максимума в матричной формулировке [17], получим следующие уравнения, определяющие оптимальную стратегию управления:

$$K(t) = -\left[R(t) + \sum_{j=1}^{n}B_j^T(t)Q(t)B_j(t) + \sum_{j=1}^{n}\lambda_j(t)\theta_j(t)D_j^T(k+1)Q(k+1)D_j(k+1)\right]^{-1}B_0^T(t)Q(t),$$

$$\dot{Q}(t) = Q(t)B_0(t)\left[R(t) + \sum_{j=1}^{n}B_j^T(t)Q(t)B_j(t) + \sum_{j=1}^{n}\lambda_j(t)\theta_j(t)D_j^T(k+1)Q(k+1)D_j(k+1)\right]^{-1}B_0^T(t)Q(t) - Q(t)A(t) - A^T(t)Q(t) - h^T h,$$

$$Q(T) = h^T h.$$

Блоки матрицы $K(t)$ и элементы матрицы $Q(t)$ определяются уравнениями

$$K_1(t) = -\left[R(t) + Q_{11}(t)\left(\sigma(t)\sigma^T(t) + \delta(t)\Lambda(t)\delta^T(t)\right)\right]^{-1} \times \times[\mu(t) - \overline{1}r(t)]Q_{11}(t),$$

$$K_2(t) = -\left[R(t) + Q_{11}(t)\left(\sigma(t)\sigma^T(t) + \delta(t)\Lambda(t)\delta^T(t)\right)\right]^{-1} \times \times[\mu(t) - \overline{1}r(t)]Q_{12}(t),$$

$$\dot{Q}_{11}(t) = [\mu(t) - \overline{1}r(t)]^T \left[R(t) + Q_{11}(t)\left(\sigma(t)\sigma^T(t) + \right.\right.$$
$$\left.\left. +\delta(t)\Lambda(t)\delta^T(t)\right)\right]^{-1} [\mu(t) - \overline{1}r(t)]Q_{11}^2(t) - 2r(t)Q_{11}(t) - 1,$$

$$\dot{Q}_{12}(t) = [\mu(t) - \overline{1}r(t)]^T \left[R(t) + Q_{11}(t)\left(\sigma(t)\sigma^T(t) + \right.\right.$$
$$\left.\left. +\delta(t)\Lambda(t)\delta^T(t)\right)\right]^{-1} [\mu(t) - \overline{1}r(t)]Q_{11}(t)Q_{12}(t) -$$
$$-\left[r(t) + \mu_0(t)\right]Q_{12}(t) + 1,$$

$$Q_{21}(t) = Q_{12}(t),\ Q_{11}(T) = 1,\ Q_{12}(T) = -1,$$

где

$$\Lambda(t) = \mathrm{diag}\left\{\lambda_1(t)\theta_1(t),\ \lambda_2(t)\theta_2(t),\ \ldots,\ \lambda_n(t)\theta_n(t)\right\},$$

$$\mu(t) = [\mu_1(t),\ \mu_2(t),\ldots,\ \mu_n(t)]^T,$$

вектор $\overline{1} = \left[1,\ 1,\ \ldots,\ 1\right]^T$ размерности n,

Заметим, что решение задачи не зависит от Q_{22}.

2. АНАЛИЗ ЧАСТНОГО СЛУЧАЯ

Рассмотрим оптимальное управление при $R(t) \equiv O$, где O – нулевая матрица соответствующей размерности, и критерии вида

$$J = \mathrm{M}\left\{ \left[V(T) - V^0(T)\right]^2 \right\} = \mathrm{tr}\left\{h^T hP(T)\right\}. \quad (10)$$

Будем предполагать, что $\sigma(t)\sigma^T(t) > 0$. В данном случае уравнения, определяющие оптимальное управление, запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} &K_1(t) = -\gamma(t)[\mu(t) - \overline{1}r(t)],\\ &K_2(t) = -\gamma(t)[\mu(t) - \overline{1}r(t)]\frac{Q_{12}(t)}{Q_{11}(t)},\\ &\dot{Q}_{11}(t) = \left[\rho(t) - 2r(t)\right]Q_{11}(t),\\ &\dot{Q}_{12}(t) = \left[\rho(t) - r(t) - \mu_0(t)\right]Q_{12}(t),\\ &Q_{11}(T) = 1,\ Q_{12}(T) = -1, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\rho(t) = [\mu(t) - \overline{1}r(t)]^T \gamma(t)[\mu(t) - \overline{1}r(t)]$,

$$\gamma(t) = [\sigma(t)\sigma^T(t) + \delta(t)\Lambda(t)\delta^T(t)]^{-1}.$$

Решения дифференциальных уравнений (11) имеют вид

$$Q_{11}(t) = e^{\int_t^T\{2r(\tau)-\rho(\tau)\}d\tau},$$

$$Q_{12}(t) = -e^{\int_t^T\{\mu_0(\tau)+r(\tau)-\rho(\tau)\}d\tau}.$$

С учетом этого оптимальные коэффициенты $K_1(t)$ и $K_2(t)$ определяются по формулам

$$K_1(t) = -\gamma(t)[\mu(t) - \overline{1}r(t)],$$

$$K_2(t) = \gamma(t)[\mu(t) - \overline{1}r(t)]e^{\int_t^T\{\mu_0(\tau)-r(\tau)\}d\tau}.$$

Уравнения для элементов матрицы вторых моментов (9) при оптимальных $K_1(t)$ и $K_2(t)$ имеют вид

$$\dot{P}_{11}(t)=\left[2r(t)-\rho(t)\right]P_{11}(t)+\rho(t)P_{22}(t)e^{\int_t^T 2\{\mu_0(\tau)-r(\tau)\}d\tau},$$

$$\dot{P}_{12}(t)=\left[r(t)+\mu_0(t)-\rho(t)\right]P_{12}(t)+\rho(t)P_{22}(t)e^{\int_t^T\{\mu_0(\tau)-r(\tau)\}d\tau},$$

$$\dot{P}_{22}(t)=2\mu_0(t)P_{22}(t).$$

Так как $P_{22}(t) = (V^0(T))^2 e^{-\int_t^T 2\mu_0(\tau)d\tau}$, то

$$\dot{P}_{11}(t) = \left[2r(t) - \rho(t)\right]P_{11}(t) + \rho(t)(V^0(T))^2 e^{-\int_t^T 2r(\tau)d\tau},$$

$$\dot{P}_{12}(t) = \left[r(t) + \mu_0(t) - \rho(t)\right]P_{12}(t) + +\rho(t)(V^0(T))^2 e^{-\int_t^T\{\mu_0(\tau)+r(\tau)\}d\tau}.$$

Решение данных уравнений в конечный момент времени имеет вид

$$P_{11}(T) = (V^0(0))^2 e^{\int_0^T\{2r(t)-\rho(t)\}dt} + +(V^0(T))^2[1 - e^{-\int_0^T\rho(t)dt}], \quad (12)$$

$$P_{12}(T) = (V^0(0))^2 e^{\int_0^T\{r(t)+\mu_0(t)-\rho(t)\}dt} + +(V^0(T))^2[1 - e^{-\int_0^T\rho(t)dt}]. \quad (13)$$

Подставляя (12), (13) в (10), запишем выражение для оптимального значения критерия

$$J = e^{-\int_0^T\rho(t)dt}[V^0(0)e^{\int_0^T r(t)dt} - V^0(T)]^2. \quad (14)$$

Получим уравнение для дисперсии оптимального портфеля в момент времени T. Рассмотрим уравнение динамики портфеля при оптимальном управлении

$$dV(t)=\left([r(t)-\rho(t)]dt-\sum_{j=1}^n\sigma_j(t)\gamma(t)[\mu(t)-\overline{1}r(t)]dw_j(t)- \right.$$
$$\left. -\sum_{j=1}^n\lambda_j(t)\theta_j(t)\delta_j(t)\gamma(t)[\mu(t)-\overline{1}r(t)]d\pi_j(t) \right)V(t)+$$
$$+\left(\rho(t)dt+\sum_{j=1}^n\sigma_j(t)\gamma(t)[\mu(t)-\overline{1}r(t)]dw_j(t)+ \right.$$
$$\left. +\sum_{j=1}^n\lambda_j(t)\theta_j(t)\delta_j(t)\gamma(t)[\mu(t)-\overline{1}r(t)]d\pi_j(t) \right)\times$$
$$\times e^{\int_t^T\{\mu_0(\tau)-r(\tau)\}d\tau}V^0(t),$$

где $\sigma_j(t) = \left[\sigma_{1j}(t),\ \sigma_{2j}(t),\ \ldots,\ \sigma_{nj}(t)\right]$,

$$\delta_j(t) = \left[\delta_{1j}(t),\ \delta_{2j}(t),\ \ldots,\ \delta_{nj}(t)\right].$$

Очевидно, что

$$\mathrm{M}\left\{dV(t)\right\} = [r(t) - \rho(t)]M\left\{V(t)\right\}dt + +\rho(t)e^{\int_t^T(\mu_0(\tau)-r(\tau))d\tau}V^0(t)dt.$$

Учитывая граничное условие: $\mathrm{M}\{V(0)\}=V^0(0)$, получим решение данного уравнения:

$$\mathrm{M}\{V(T)\}=e^{\int_0^T\{r(t)-\rho(t)\}\mathrm{d}t}V^0(0)+\left[1-e^{-\int_0^T\rho(t)\mathrm{d}t}\right]V^0(T). \quad (15)$$

С учетом (12) дисперсия оптимального управляемого портфеля

$$\mathrm{D}\{V(T)\}=\frac{1-\beta(T)}{\beta(T)}\left[\mathrm{M}\{V(T)\}-V^0(0)e^{\int_0^T r(t)dt}\right]^2, \quad (16)$$

где $\beta(T)=1-e^{-\int_0^T\rho(t)dt}$.

Используя (15), уравнение (16) запишем в виде

$$\mathrm{D}\{V(T)\}=\beta(T)e^{-\int_0^T\rho(t)dt}[V^0(0)e^{\int_0^T r(t)dt}-V^0(T)]^2. \quad (17)$$

Сравнивая уравнение (17) с (14), получим

$$\mathrm{D}\{V(T)\}=\beta(T)J.$$

Уравнение, аналогичное (16), было получено в работе [7] при решении классической "mean-variance" задачи оптимизации ИП с использованием в качестве критерия взвешенной суммы математического ожидания и дисперсии портфеля (так называемой бикритериальной задачи) в условиях изменения цен рисковых активов по закону (4) без импульсной составляющей. Согласно [7], уравнение (16) определяет эффективную границу бикритериальной задачи (минимальную дисперсию портфеля при заданном математическом ожидании капитала в конечный момент времени). Таким образом, решение, полученное в [7], является частным случаем для рассматриваемой задачи, причем при минимизации критерия (10) также минимизируется и дисперсия портфеля.

3. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ В ДИСКРЕТНОМ ВРЕМЕНИ

Уравнения управляемого и эталонного портфелей в дискретном времени выглядят следующим образом:

$$V(k+1)=[1+r(k+1)]V(k)+b(k+1)u(k),$$
$$V^0(k+1)=[1+\mu_0(k+1)]V^0(k),$$

где $b(k)=\left[\xi_1(k)-r(k),\ \xi_2(k)-r(k),\ \ldots,\ \xi_n(k)-r(k)\right]$, $r(k+1)$ – неслучайная доходность безрискового вклада; $\xi_i(k+1)$ – ставка доходности i-го рискового вложения на интервале $[k;\ k+1]$, случайная величина, $u(k)=\left[u_1(k),u_2(k),\ldots,u_n(k)\right]^T$, капитал, вкладываемый в безрисковый актив,

$$u_0(k)=V(k)-\sum_{i=1}^n u_i(k).$$

Квадратичный функционал (3) в дискретном случае представим в следующем виде:

$$J=\mathrm{M}\left\{\sum_{k=0}^{T-1}\left(\rightleftarrows[V(k)-V^0(k)]^2+u^T(k)R(k)u(k)\right)+\right.$$
$$\left.+[V(T)-V^0(T)]^2\right\}. \quad (18)$$

Для описания эволюции цен рисковых финансовых активов используем модель

$$S_i(k+1)=S_i(k)\left[1+\mu_i(k+1)+\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^n\sigma_{i,j}(k+1)w_j(k+1)+\sum_{j=1}^n\delta_{i,j}(k+1)\pi_j(k+1)\right], \quad (19)$$

где $w_i(k+1)>0$ – ожидаемая доходность i-го рискового вложения, которая характеризует среднюю норму возврата за период $[k;\ k+1]$; $\sigma_{ij}(k)$ – элементы матрицы волатильности $\sigma(k)$, $\sigma(k)\sigma^T(k)\ge 0$; $\delta_{ij}(k)$ – элементы матрицы $\delta(k)$, определяющие влияния скачков цены j-го рискового вложения на цену i-го; $w(k)=\left[w_1(k),w_2(k),\ldots,w_n(k)\right]^T$ – дискретный белый шум размерности n с единичной ковариационной матрицей; $\pi_j(k+1)$ – случайная величина, в момент времени $k+1$ с вероятностью $1-\lambda_j$ сохраняющая прежнее значение $\pi_j(k)$ и с вероятностью λ_j принимающая новое значение $z_j(k+1)$. Функция распределения скачков $F_j(k,dz_j)$, характеристики скачков

$$\int_{\Omega_j} z_j^2F_j(k,dz_j)=\theta_j(k),$$

$$\int_{\Omega_j} z_jF_j(k,dz_j)=0,\ \mathrm{M}\{w_i(k)\pi_j(k)\}=0,$$

$$i,j=1,2,\ldots,n.$$

Определим вектор-столбец $x(k)=[V(k),V^0(k)]^T$ и с учетом (19) представим уравнения динамики управляемого и эталонного портфелей в виде

$$x(k+1)=A(k+1)x(k)+B_0(k+1)u(k)+$$
$$+\sum_{j=1}^n B_j(k+1)u(k)w_j(k+1)+\sum_{j=1}^n D_j(k+1)u(k)\pi_j(k+1),$$

где
$$A(k)=\begin{bmatrix}1+r(k) & 0\\ 0 & 1+\mu_0(k)\end{bmatrix},$$

$$B_0(k)=\begin{bmatrix}\mu_1(k)-r(k) & \mu_2(k)-r(k) & \ldots & \mu_n(k)-r(k)\\ 0 & 0 & \ldots & 0\end{bmatrix},$$

$$B_j(k)=\begin{bmatrix}\sigma_{1j}(k) & \sigma_{2j}(k) & \ldots\sigma_{nj}(k)\\ 0 & 0 & \ldots\ 0\end{bmatrix},$$

$$D_j(k)=\begin{bmatrix}\delta_{1j}(k) & \delta_{2j}(k) & \ldots\delta_{nj}(k)\\ 0 & 0 & \ldots\ 0\end{bmatrix}.$$

Функционал (18) запишем следующим образом

$$J=\mathrm{M}\left\{\sum_{k=1}^{T-1}[x^T(k)h^Thx(k)+u^T(k)R(k)u(k)]+\right.$$
$$\left.+x^T(T)h^Thx(T)\right\}, \quad (20)$$

где $h=[1,\ -1]$.

Оптимальный закон управления определим в виде

$$u(k)=K_1(k)V(k)+K_2(k)V^0(k)=K(k)x(k), \quad (21)$$

где $K(k)=\left[K_1(k),\ K_2(k)\right]$ – матрица коэффициентов обратной связи выбирается из условия минимума функционала (20), который можно записать в виде

$$J = tr\left\{ \sum_{k=0}^{T-1} [h^T h P(k) + R(k) K(k) P(k) K^T(k)] + \right. \\ \left. + h^T h P(T) \right\}, \qquad (22)$$

где матрица вторых моментов $P(k) = \mathrm{M}\left\{ x(k) x^T(k) \right\}$ с учетом (21) удовлетворяет уравнению

$$P(k+1) = [A(k+1) + B_0(k+1) K(k)] P(k) \times \\ \times [A(k+1) + B_0(k+1) K(k)]^T + \\ + \sum_{j=1}^{n} B_j(k+1) K(k) P(k) K^T(k) B_j^T(k+1) + \qquad (23) \\ + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \theta_j(k+1) D_j(k+1) K(k) P(k) K^T(k) D_j^T(k+1).$$

Применяя принцип максимума в матричной формулировке [17], получим решение задачи минимизации функционала (22) на траекториях системы (23)

$$K(k) = -[R(k) + B_0^T(k+1) Q(k+1) B_0(k+1) + \\ + \sum_{j=1}^{n} B_j^T(k+1) Q(k+1) B_j(k+1) + \\ + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \theta_j(k+1) D_j^T(k+1) Q(k+1) D_j(k+1)]^{-1} \times \\ \times B_0^T(k+1) Q(k+1) A(k+1), \qquad (24)$$

$$Q(k) = A^T(k+1) Q(k+1) A(k+1) - A^T(k+1) Q(k+1) \times \\ \times B_0(k+1) [R(k) + B_0^T(k+1) Q(k+1) B_0(k+1) + \\ + \sum_{j=1}^{n} B_j^T(k+1) Q(k+1) B_j(k+1) + \\ + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \theta_j(k+1) D_j^T(k+1) Q(k+1) D_j(k+1)]^{-1} \times \\ \times B_0^T(k+1) Q(k+1) A(k+1) + h^T h, \\ Q(T) = h^T h.$$

Блоки матрицы $K(k)$ и элементы матрицы $Q(k)$ определяются уравнениями

$$K_1(k) = -\Big[R(k) + Q_{11}(k+1) \big([\mu(k+1) - \bar{1} r(k+1)] \times \\ \times [\mu(k+1) - \bar{1} r(k+1)]^T + \sigma(k+1) \sigma^T(k+1) + \\ + \delta(k+1) \Lambda(k+1) \delta^T(k+1) \big) \Big]^{-1} \times \\ \times [\mu(k+1) - \bar{1} r(k+1)] Q_{11}(k+1) [1 + r(k+1)],$$

$$K_2(k) = -\Big[R(k) + Q_{11}(k+1) \big([\mu(k+1) - \bar{1} r(k+1)] \times \\ \times [\mu(k+1) - \bar{1} r(k+1)]^T + \sigma(k+1) \sigma^T(k+1) + \\ + \delta(k+1) \Lambda(k+1) \delta^T(k+1) \big) \Big]^{-1} \times \\ \times [\mu(k+1) - \bar{1} r(k+1)] Q_{12}(k+1) [1 + \mu_0(k+1)],$$

$$Q_{11}(k) = [1 + r(k+1)]^2 \Big(1 - [\mu(k+1) - \bar{1} r(k+1)]^T \times \\ \times \Big[R(k) + Q_{11}(k+1) \big([\mu(k+1) - \bar{1} r(k+1)] \times \\ \times [\mu(k+1) - \bar{1} r(k+1)]^T + \sigma(k+1) \sigma^T(k+1) + \\ + \delta(k+1) \Lambda(k+1) \delta^T(k+1) \big) \Big]^{-1} \times \\ \times [\mu(k+1) - \bar{1} r(k+1)] Q_{11}(k+1) \Big) Q_{11}(k+1) + 1,$$

$$Q_{12}(k) = [1 + r(k+1)][1 + \mu_0(k+1)] \big(1 - \\ -[\mu(k+1) - \bar{1} r(k+1)]^T \big[R(k) + Q_{11}(k+1) \times \\ \times \big([\mu(k+1) - \bar{1} r(k+1)][\mu(k+1) - \bar{1} r(k+1)]^T + \\ + \sigma(k+1) \sigma^T(k+1) + \delta(k+1) \Lambda(k+1) \delta^T(k+1) \big) \big]^{-1} \times \\ \times [\mu(k+1) - \bar{1} r(k+1)] Q_{11}(k+1) \big) Q_{12}(k+1) - 1, \\ Q_{21}(k) = Q_{12}(k), \; Q_{11}(T) = 1, \; Q_{12}(T) = -1,$$

где $\mu(k) = [\mu_1(k), \; \mu_2(k), \ldots, \; \mu_n(k)]^{\mathrm{T}}$,

$$\Lambda(k) = \mathrm{diag}\left\{ \lambda_1 \theta_1(k), \; \lambda_2 \theta_2(k), \; \ldots, \; \lambda_n \theta_n(k) \right\}.$$

4. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Определим стратегию управления портфелем, состоящим из банковского счета с доходностью $r = 0{,}002$ и двух видов акций, доходность вложений в которые описывается уравнениями (19) с постоянными параметрами: $\mu = [0{,}0058; 0{,}003]$, $\lambda = [0{,}06; 0{,}08]$,

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0{,}0032 & 0{,}000006 \\ 0{,}000006 & 0{,}001 \end{bmatrix}, \; \delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$F_j(dz)$ – равномерно распределены на промежутке $[-5\mu_j; \;\; 5\mu_j]$ ($j = 1, 2$). Доходность эталонного портфеля $\mu_0 = 0{,}004$. Численно была реализована стратегия управления вида (21), (24) с весовой матрицей

$$R = \begin{bmatrix} 0{,}0001 & -0{,}0005 \\ -0{,}00005 & 0{,}0001 \end{bmatrix}.$$

Результаты численного моделирования представлены на рис. 1 и 2. На рис. 3 приводится динамика доходностей акций.

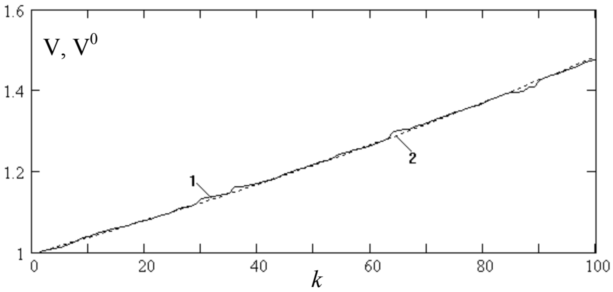

Рис. 1. Динамика капиталов управляемого и эталонного портфелей: кр. *1* – эталонный портфель; кр. *2* – управляемый портфель

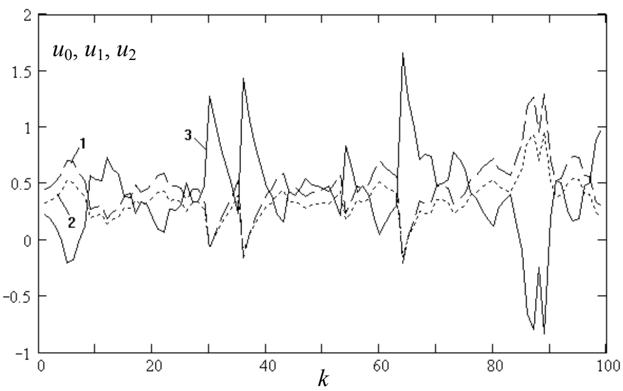

Рис. 2. Динамика управляющих воздействий: кр. *1* – вклад в первую акцию; кр. *2* – вклад в во вторую акцию; кр. *3* – вклад в безрисковый актив

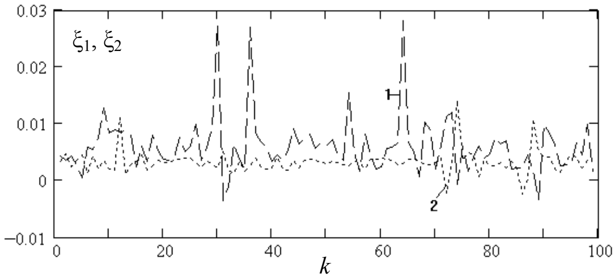

Рис. 3. Динамика изменения доходностей акций: кр. *1* – доходность первой акции; кр. *2* – доходность второй акции

Согласно рис. 1 – 3, при отсутствии резких изменений доходностей акций (обусловленных пуассоновскими скачками) кривые динамики управляемого и эталонного портфеля практически совпадают, так как изменения управлений компенсируют текущие случайные колебания рисковых активов. При возникновении скачка доходностей кривая управляемого портфеля незначительно отклоняется от эталонного, но за несколько шагов возвращается к кривой эталонного портфеля за счет резких изменений управляющих воздействий.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена динамическая стохастическая модель формирования инвестиционного портфеля в агрегированном виде, состоящего из рисковых и безрискового финансовых активов в условиях диффузионно-скачкообразной модели финансового рынка. Задача управления ИП сформулирована как динамическая задача слежения за эталонным портфелем с заданной желаемой эффективностью.

В отличие от традиционных подходов, практическая реализация полученных алгоритмов сводится к решению обыкновенных матричных скалярных дифференциальных (или разностных) уравнений Риккати (а не уравнений в частных производных).

Данный подход позволяет учесть особенности управления различными видами инвестиций посредством выбора весовой матрицы в функции риска.

Проведен анализ полученной стратегии управления и показано, что частным случаем результатов, полученных в работе, является решение бикритериальной задачи [7], т. е. при минимизации квадратичного критерия одновременно минимизируется дисперсия портфеля.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шарп У.*, *Александер Г.*, *Бейли Дж.* Инвестиции. М.: ИНФРА-М, 1997.
2. *Лукашин Ю.П.* Оптимизация структуры портфеля ценных бумаг // Экономика и математические методы. 1995. Т. 31. №1. С. 138–150.
3. *Markowitz H.M.* Portfolio selection // J. of Finance. 1952. V.7. No.1. P. 77–91.
4. *Merton R.C.* Continuous-time Finance. Cambr. Ma. Balckwell, 1990.
5. *Первозванский А.А.* Оптимальный портфель ценных бумаг на нестационарном неравновесном рынке // Экономика и математические методы. 1999. Т. 35. №3. С. 63–68.
6. *Bajeux-Besnainou I.*, *Portait R.* Dynamic asset allocation in a mean-variance framework // Management Science. 1998. V. 44. No. 11. Part 2. P. S79–S95.
7. *Zhou X.Y.*, *Li D.* Continuous-time mean-variance portfolio selection: a stochastic LQ framework // Applied Mathematics and Optimization. 2000. No. 42. P. 19–33.
8. *Dombrovsky V.V.*, *Gerasimov E.S.* Dynamic network model of control investment portfolio in continuous time // Proc. 5th Russian-Korean Symposium on Science and Technology (KORUS-2001). Tomsk, 2001. P. 304–308.
9. *Герасимов Е.С.*, *Домбровский В.В.* Динамическая сетевая модель управления инвестициями при квадратичной функции риска // АиТ. 2002. №2. С. 119–128.
10. *Домбровский В.В.*, *Федосов Е.Н.* Модель управления инвестиционным портфелем в пространстве состояний на нестационарном диффузионно-скачкообразном финансовом рынке // Автоматика и вычислительная техника. 2002. №6. С. 13–24.
11. *Гальперин В.А.*, *Домбровский В.В.* Управление самофинансируемым инвестиционным портфелем при квадратической функции риска // Вестник ТГУ. 2000. №269 (январь).
12. *Гальперин В.А.*, *Домбровский В.В.* Динамическое управление самофинансируемым инвестиционным портфелем при квадратической функции риска в дискретном времени // Вестник ТГУ. Приложение. №1(I). Сентябрь 2002. С. 141-146.
13. *Гальперин В.А.*, *Домбровский В.В.* Управление инвестиционным портфелем в непрерывном времени при квадратической функции риска // Труды десятого юбилейного симп. по непараметрическим и робастным статистическим методам в кибернетике. Томск: ТГУ, 2003. С. 201–207.
14. *Ширяев А.Н.* Вероятностно-статистические модели эволюции финансовых индексов // Обозрение прикладной и промышленной математики. 1995. Т. 2. Вып. 4. С. 527–555.
15. *Пакшин П.В.* Оценивание состояния и синтез управления для дискретных линейных систем с аддитивными и мультипликативными шумами // АиТ. 1978. №2. С. 75–86.
16. *McLane P.J.* Optimal stochastic control of linear systems with state- and control-dependent disturbances // IEEE Transactions on Automatic Control. 1971. V. AC-16. No. 6. P. 793–798.
17. *Athans M.* The Matrix Minimum Principle // Information and Control. 1968. V. 11. P. 592–606.

Статья представлена кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 15 мая 2003 г.