

ДИНАМИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ ИНВЕСТИЦИОННЫМ ПОРТФЕЛЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЫНОЧНОЙ МОДЕЛИ

Рассматривается задача динамического управления инвестиционным портфелем (ИП), состоящим из рискованных вложений (обыкновенных акций) и безрискового вклада (банковского счета или надежных облигаций). Задача управления ИП формулируется как динамическая задача слежения по квадратичному критерию в пространстве состояний. Для описания доходностей рискованных финансовых вложений используется однофакторная рыночная модель. Получены уравнения для определения оптимальной стратегии управления. Приведены результаты численного моделирования.

Проблема управления ИП является одной из основных в управлении финансами и представляет как теоретический, так и практический интерес. Можно выделить два основных подхода к ее решению. Классический подход, предложенный в [1,2], и последующие его модификации исходят из предположения о том, что при формировании своего портфеля инвестор, с одной стороны, хотел бы минимизировать риск портфеля (обычно дисперсию портфеля или связанные с ней меры риска), с другой стороны – получать желаемую доходность (либо в двойственной постановке – максимизировать доходность при ограниченном риске). При этом задача оптимизации структуры портфеля (определения оптимальных долей вложений в различные виды активов) решается в статической постановке (однопериодные модели) и в зависимости от выбора функции риска и способов учета неопределенности сводится к решению задач квадратичного, стохастического или линейного программирования [1 – 5]. Возможно распространение этого подхода на многопериодный случай, однако это приводит к значительным вычислительным затратам [6].

Второй подход основан на построении динамических моделей ИП в непрерывном времени и использовании для выбора оптимальной структуры портфеля методов теории стохастического управления. При этом эволюция портфеля описывается стохастическим дифференциальным уравнением в агрегированном виде, т. е. уравнением для капитала портфеля в целом, а в качестве управляющих воздействий также берутся доли вложений общего капитала в тот или иной актив. Классическая оптимизационная проблема в динамической постановке заключается в определении стратегии управления ИП, максимизирующей некоторую интегральную функцию полезности, зависящую от уровня текущего потребления и конечного богатства, которая имеет достаточно условный характер и обычно подбирается из класса функций, для которых можно получить приемлемое аналитическое решение [7]. За исключением весьма ограниченного набора функций полезности, такой подход приводит к трудной проблеме численного решения уравнений динамического программирования [8]. Используются также и другие критерии оптимизации портфеля, в частности, в [9] критерий, чувствительный к риску (risk-sensitive criterion). Достаточно полный обзор методов оптимизации ИП в динамической постановке с использованием различных критериев дан в [10].

В работах [11 – 13] предложена динамическая модель управления ИП в пространстве состояний, в которой структура портфеля описывается в виде динамической стохастической сети, узлы которой представляют собой капитал, помещенный в данный рискованный (акции) или безрисковый (надежные облигации или банковский счет) актив, а дуги – направления и объем капитала, перемещаемого между активами. Задача управления ИП формулируется как динамическая задача слежения за капиталом некоторого гипотетического эталонного портфеля, имеющего задаваемую инвестором желаемую доходность. В качестве моделей эволюции цен акций в [11, 12] рассматривалась классическая модель геометрического (экономического) броуновского движения (модель Блэка – Шоулса) и ее аналог в дискретном

времени, в [13] модель Мертона, учитывающая скачкообразные изменения цен вследствие воздействия редких экстремальных событий или ожиданий.

В данной работе в рамках подхода [11 – 13] для описания доходностей цен рискованных финансовых активов используется так называемая однофакторная рыночная модель [14], которая связывает доходность отдельной акции с доходностью рыночного индекса (рыночного портфеля, включающего в определенных долях акции ведущих корпораций; в США, например, это индекс Доу – Джонса, Standard and Poor's 500 Stock Index, в России – индекс РТС). Такая модель показывает достаточно хорошее соответствие реальным данным и широко используется на практике [14]. Получены уравнения для определения оптимальной стратегии управления с обратной связью. Приводятся результаты численного моделирования.

МОДЕЛЬ ПОРТФЕЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

Рассмотрим ИП, состоящий из $n - 1$ видов рискованных вложений (под рискованными будем понимать инвестиции, доходность которых – случайная величина) и банковского счета с неслучайной, но, возможно, переменной доходностью. Управление портфелем осуществляется путем перераспределения капитала между различными видами инвестиций посредством банковского счета. Рассматривается самофинансируемый портфель, т.е. деньги извне на банковский счет могут поступать только в виде займа, который погашается из капитала портфеля, а со счета снимаются только с целью вложения в ценные бумаги, формирующие ИП. Предполагается, что масштаб инвестиций инвестора не влияет на цены акций, т.е. рассматривается так называемый "маленький" инвестор и не учитываются транзакционные издержки и налоги.

Пусть $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$ – вектор-столбец, компоненты которого равны объему инвестиций в i -й актив, $i=1, 2, \dots, n$; компонента $x_n(t)$ описывает состояние банковского счета, верхний индекс T означает транспонирование.

Тогда динамика портфеля в дискретном времени описывается следующими уравнениями:

для рискованных активов

$$x_i(k+1) = [1 + v_i(k+1)][x_i(k) + u_i(k)], \quad (1)$$

$$i = \overline{1, n-1},$$

для безрискового вклада

$$x_n(k+1) = [1 + r(k+1)] \left[x_n(k) - \sum_{i=1}^{n-1} u_i(k) \right], \quad (2)$$

где $u_i(k)$ – сумма капитала, перераспределяемого в

момент времени k , $v_i(k+1)$, $r(k+1)$ – ставки доходностей соответственно рискованных и безрискового вложений на интервале $[k, k+1]$; $v_i(k+1)$ – случайная величина. Если $u_i(k) > 0$, то – покупку акций вида i – на сумму $u_i(k)$, снятую с банковского счета, а если $u_i(k) < 0$, то это означает продажу акций вида i на сумму $|u_i(k)|$ и помещение этой суммы на банковский счет. В векторно-матричной форме уравнения (1), (2) имеют вид

$$x(k+1) = A(k+1)[x(k) + Bu(k)], \quad (3)$$

где матрицы

$$A(k+1) = \text{diag}\{1+v_1(k+1), 1+v_2(k+1), \dots, 1+v_{n-1}(k+1), 1+r(k+1)\},$$

$$B = \begin{bmatrix} I_{n-1} \\ -E \end{bmatrix}, \quad E = [1, 1, \dots, 1],$$

I_{n-1} – единичная матрица размера $(n-1)$. Необходимо определить стратегию управления ИП путем перераспределения капитала между различными инвестициями так, чтобы капитал реального портфеля с наименьшими отклонениями (с минимально возможным риском) следовал капиталу некоторого определяемого инвестором эталонного портфеля, эволюция которого описывается уравнением

$$V^0(k+1) = [1 + \mu^0(k+1)]V^0(k), \quad (4)$$

где $\mu^0(k) > r(k)$ – заданная желаемая доходность портфеля.

В качестве меры риска выберем квадратичный функционал вида

$$Y = M \left\{ \sum_{k=0}^{T-1} ([V(k) - V^0(k)]^2 + u^T(k) R(k) u(k)) + [V(T) - V^0(T)]^2 \right\}, \quad (5)$$

где общий капитал портфеля $V(k) = Cx(k)$, $C = [E, 1]$, матрица $R(k) > 0$, начальный капитал $V(0) = V^0(0)$. Второе слагаемое в функционале (5) накладывает ограничения на "мощность" управляющих воздействий. Отрицательное значение переменной $x_n(k)$ означает заем капитала в размере $|x_n(k)|$, отрицательное значение какой-либо из переменных x_i , $i = 1, 2, \dots, n-1$, означает рекомендацию участвовать в операции «shot sale» (продажа без покрытия) [14].

Для описания эволюции доходностей рискованных финансовых активов используем однофакторную рыночную модель [14]

$$v_i(k) = \alpha_i + \beta_i R_m(k) + \sigma_i \omega_i(k), \quad (6)$$

где $\omega_i(k)$ – последовательность некоррелированных случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией; α_i – коэффициент смещения; β_i – коэффициент наклона (в рыночной модели он носит название «коэффициент "бета" ценной бумаги вида j »), $\sigma_i > 0$ – волатильность (изменчивость) ценной бумаги; R_m – эффективность рынка (доходность рыночного индекса). Для описания динамики изменения доходности рыночного индекса используем модель вида [10]

$$R_m(k) = \mu_m + \sigma_m \omega_m(k), \quad (7)$$

где μ_m – ожидаемая доходность; $\sigma_m > 0$ – волатильность рыночного индекса; $\omega_m(k)$ – последовательность некоррелированных случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией. Последовательности $\omega_i(k)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, и $\omega_m(k)$ некоррелированы между собой.

С учетом (7) уравнение (6) примет вид

$$v_i(k) = \alpha_i + \beta_i \mu_m + \beta_i \sigma_m \omega_m(k) + \sigma_i \omega_i(k). \quad (8)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ СТРАТЕГИИ УПРАВЛЕНИЯ

Используя модель доходностей рискованных активов (8), уравнение портфеля (3) преобразуем к виду

$$x(k+1) = A_0(k+1)x(k) + B_0(k+1)u(k) + \left[\sum_{i=1}^{n-1} A_i(k+1)\omega_i(k+1) \right] x(k) + \left[\sum_{i=1}^{n-1} B_i(k+1)\omega_i(k+1) \right] u(k) + S\omega_m(k+1)x(k) + L\omega_m(k+1)u(k), \quad (9)$$

где $A_0 = \text{diag}\{1 + \alpha_1 + \beta_1 \mu_m, 1 + \alpha_2 + \beta_2 \mu_m, \dots,$

$$\dots, 1 + \alpha_{n-1} + \beta_{n-1} \mu_m, 1 + r\};$$

$$A_i = \text{diag}\{0, \dots, 0, \sigma_i, 0, \dots, 0\};$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 + \alpha_1 + \beta_1 \mu_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 + \alpha_2 + \beta_2 \mu_m & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 + \alpha_{n-1} + \beta_{n-1} \mu_m \\ -(1+r) & -(1+r) & \dots & -(1+r) \end{bmatrix}$$

$$B_i = \begin{bmatrix} b_i \\ 0_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$b_i = \text{diag}\{0, \dots, 0, \sigma_i, 0, \dots, 0\},$$

$$S = \begin{bmatrix} \beta_1 \sigma_m & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \beta_{n-1} \sigma_m & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$L = \begin{bmatrix} \beta_1 \sigma_m & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \beta_{n-1} \sigma_m \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Введем расширенный вектор-столбец

$$z(k) = [x^T(k), V^0(k)]^T$$

и, объединяя уравнения (9) и (4), запишем

$$z(k+1) = \bar{A}_0(k+1)z(k) + \bar{B}_0(k+1)u(k) + \left[\sum_{i=1}^{n-1} \bar{A}_i(k+1)\omega_i(k+1) \right] z(k) + \left[\sum_{i=1}^{n-1} \bar{B}_i(k+1)\omega_i(k+1) \right] u(k) + \bar{S}\omega_m(k+1)z(k) + \bar{L}\omega_m(k+1)u(k), \quad (10)$$

где $\bar{A}_0 = \begin{bmatrix} A_0 & 0_n^T \\ 0_n & 1 + \mu^0 \end{bmatrix}$; $\bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & 0_n^T \\ 0_n & 0 \end{bmatrix}$;

$\bar{B}_0 = \begin{bmatrix} B_0 \\ 0_{n-1} \end{bmatrix}$; $\bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ 0_{n-1} \end{bmatrix}$; $\bar{S} = \begin{bmatrix} S & 0_n^T \\ 0_n & 0 \end{bmatrix}$; $\bar{L} = \begin{bmatrix} L \\ 0_{n-1} \end{bmatrix}$.

Система (10) относится к классу систем с мультипликативными шумами. Определим оптимальную стратегию управления с обратной связью вида

$$u(k) = K(k)z(k),$$

где $K(k)$ – матрица коэффициентов обратной связи, выбирается из условия минимума функционала (5).

Функционал (5) можно записать в виде

$$Y = \text{tr} \left\{ \sum_{k=0}^{T-1} \left[\bar{C}^T \bar{C} P(k) + K^T(k) R(k) K(k) P(k) \right] + \bar{C}^T \bar{C} P(T) \right\}, \quad (11)$$

где $\text{tr}\{\bullet\}$ – след матрицы; $\bar{C} = [C, -1]$;

$$P(k) = M \{ z(k) z^T(k) \}$$

– матрица вторых моментов. Получим разностное матричное уравнение для определения этой матрицы. Используя уравнение (10), будем иметь

$$\begin{aligned} P(k+1) = & \left[\bar{A}_0(k+1) + \bar{B}_0(k+1)K(k) \right] \times \\ & \times P(k) \left[\bar{A}_0(k+1) + \bar{B}_0(k+1)K(k) \right]^T + \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \left[\bar{A}_i(k+1) + \bar{B}_i(k+1)K(k) \right] P(k) \times \\ & \times \left[\bar{A}_i(k+1) + \bar{B}_i(k+1)K(k) \right]^T + \\ & + \left[\bar{S} + \bar{L} K(k) \right] P(k) \left[\bar{S} + \bar{L} K(k) \right]^T. \end{aligned} \quad (12)$$

Оптимальную стратегию управления получим, решив задачу оптимизации детерминированной системы, описываемой матричным уравнением динамики вторых моментов состояний (12), матрицей $K(k)$ в качестве управляющих воздействий и критерием оптимальности (11). Для решения этой задачи используем принцип максимума в матричной формулировке [15]. Определим Гамильтониан системы

$$\begin{aligned} H = & \text{tr} \left\{ \bar{C}^T \bar{C} P(k) + K^T(k) R(k) K(k) P(k) \right\} + \\ & + \text{tr} \left\{ \left[\bar{A}_0(k+1) + \bar{B}_0(k+1)K(k) \right] P(k) \times \right. \\ & \times \left[\bar{A}_0(k+1) + \bar{B}_0(k+1)K(k) \right]^T + \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \left[\bar{A}_i(k+1) + \bar{B}_i(k+1)K(k) \right] P(k) \times \\ & \times \left[\bar{A}_i(k+1) + \bar{B}_i(k+1)K(k) \right]^T \left. \right\} Q(k+1) + \\ & + \text{tr} \left\{ \left[\bar{S} + \bar{L} K(k) \right] P(k) \left[\bar{S} + \bar{L} K(k) \right]^T Q(k+1) \right\}, \end{aligned}$$

где $Q(k)$ – матричный множитель Лагранжа. Необходимые условия минимума имеют вид

$$Q(k) = \frac{\partial H}{\partial P(k)} \Big|_*, \quad \frac{\partial H}{\partial K(k)} \Big|_* = 0.$$

Взяв производные, получим уравнения, дающие решение задачи слежения за эталонным портфелем:

$$\begin{aligned} K(k) = & - \left[R(k) + \sum_{i=1}^{n-1} \bar{B}_i^T(k+1) Q(k+1) \bar{B}_i(k+1) + \right. \\ & + \bar{B}_0^T(k+1) Q(k+1) \bar{B}_0(k+1) + \bar{L}^T Q(k+1) \bar{L} \left. \right]^{-1} \times \\ & \times \left[\bar{B}_0^T(k+1) Q(k+1) \bar{A}_0(k+1) + \right. \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \bar{B}_i^T(k+1) Q(k+1) \bar{A}_i(k+1) + \bar{L}^T Q(k+1) \bar{S} \left. \right], \\ Q(k) = & \left(\bar{A}_0(k+1) + \bar{B}_0(k+1) K(k) \right)^T \times \\ & \times Q(k+1) \left(\bar{A}_0(k+1) + \bar{B}_0(k+1) K(k) \right) + \\ & + \left(\bar{S} + \bar{L} K(k) \right)^T Q(k+1) \left(\bar{S} + \bar{L} K(k) \right) + \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \left[\bar{A}_i(k+1) + \bar{B}_i(k+1) K(k) \right]^T \times \\ & \times Q(k+1) \left[\bar{A}_i(k+1) + \bar{B}_i(k+1) K(k) \right] + \\ & + K^T(k) R(k) K(k) + \bar{C}^T \bar{C}, \quad Q(T) = \bar{C}^T \bar{C}. \end{aligned}$$

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Пример 1. Определим стратегию управления портфелем, состоящим из банковского счета доходностью $r = 0,002$ и одного вида акций, с параметрами $\alpha_1 = 0,01$, $\beta_1 = 1,3$, $\sigma_1 = 0,02$. Параметры рыночного индекса: $\mu_m = 0,007$ и $\sigma_m = 0,01$. Доходность эталонного портфеля $\mu^0 = 0,01$. Весовой коэффициент $R = 0,01$. Результаты численного моделирования ИП представлены на рис. 1, где на оси абсцисс указаны номера интервалов, а по оси ординат – суммы вложений. На рис. 2 и 3 показаны поведения доходностей акции и рыночного индекса соответственно.

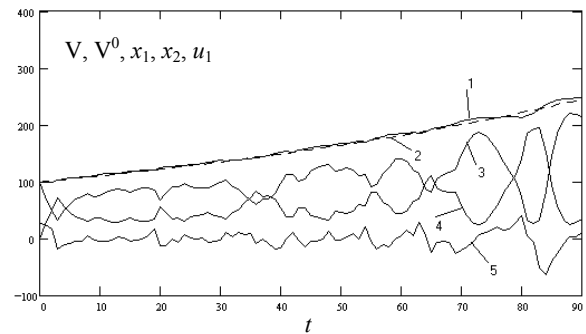


Рис. 1. Динамика портфеля, состоящего из акции и банковского счета: кр. 1 – построенный портфель; кр. 2 – эталонный портфель; кр. 3 – банковский счет; кр. 4 – акция; кр. 5 – управление

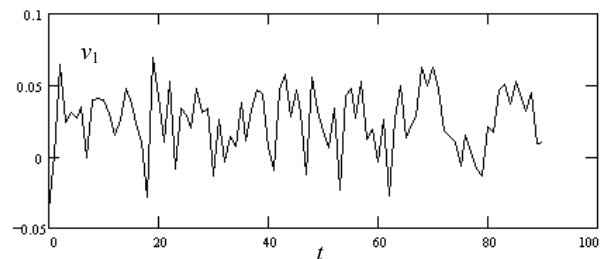


Рис. 2. Динамика поведения доходности акции (пример 1)

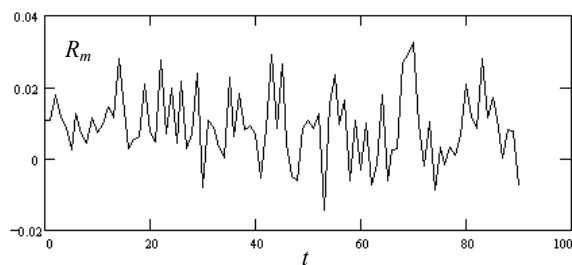


Рис. 3. Динамика поведения рыночного индекса (пример 1)

Пример 2. Рассмотрим портфель, состоящий из трех видов акций и банковского счета. Параметры рисков ценных бумаг для данного ИП следующие: $\sigma_1 = 0,03$, $\alpha_1 = 0,01$, $\beta_1 = 1,5$, $\sigma_2 = 0,025$, $\alpha_2 = 0,015$, $\beta_2 = 0,9$, $\sigma_3 = 0,03$, $\alpha_3 = 0,012$, $\beta_3 = 0,7$. Параметры рыночного индекса: $\mu_m = 0,012$, $\sigma_m = 0,02$. Доходность банковского счета $r = 0,0025$. Доходность эталонного портфеля $\mu_0 = 0,02$. Весовая матрица $R = \text{diag}\{1,1,1\}$. Рис. 4 иллюстрирует динамику распределения финансовых ресурсов между различными видами активов, на рис. 5 показано поведение управляющих воздействий, на рис. 6 и 7 изображено поведение рыночного индекса и доходности 3-й акции.

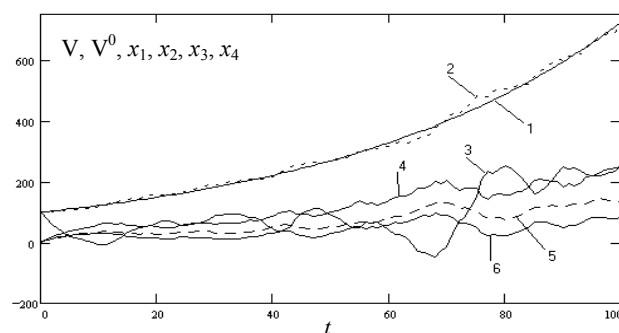


Рис. 4. Динамика портфеля, состоящего из трех акций и банковского счета: кр. 1 – эталонный портфель; кр. 2 – построенный портфель; кр. 3 – банковский счет; кр. 4, 5, 6 – рискованные активы

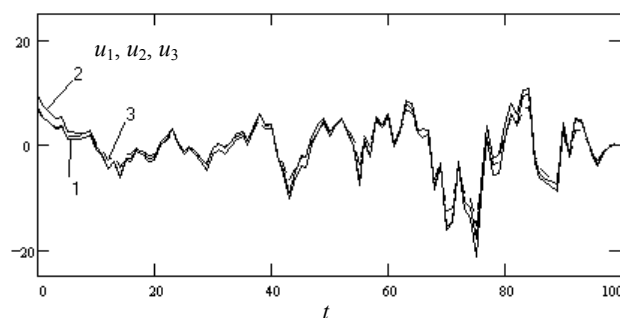


Рис. 5. Динамика поведения управляющих воздействий (кр. 1, 2, 3 – u_1, u_2, u_3)

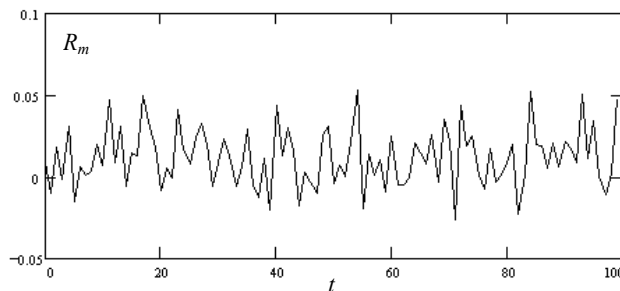


Рис. 6. Динамика поведения рыночного индекса (пример 2)

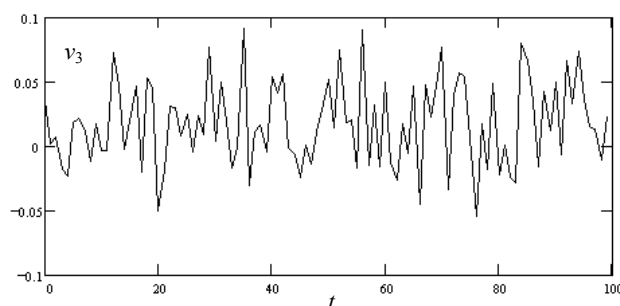


Рис. 7. Динамика поведения доходности 3-й акции (пример 2)

ЛИТЕРАТУРА

1. Markowitz H.M. Portfolio selection // J. of Finance. 1952. V. 7. No. 1. P. 77–91.
2. Tobin J. Liquidity preference as behavior towards risk // Review of Economic Studies. 1958. V. 26. No. 1. P. 65–86.
3. Young M. R. A minimax portfolio selection rule with linear programming solution // Management Science. 1998. V.44. No. 5. P. 673–683.
4. Golub B., Holmer M., McKendall R., et al. A stochastic programming model for money management // European Journal of Operational Research. 1995. V.85. P. 282–296.
5. Dupacova J. Portfolio optimization via stochastic programming: Methods of output analysis // Mathematical Methods of Operational Research. 1999. V.50. P. 245–270.
6. Zenios S. A. High-performance computing in finance: the last 10 years and the next // Parallel Computing. 1999. V.25. P. 2149–2175.
7. Merton R. C. Continuous-time finance. Cambr. Ma. Blackwell, 1990.
8. Kushner H. J. Consistency issues for numerical methods for variance control with applications to optimization in finance // IEEE Transaction on Automatic Control. 1999. V.44. No. 12. P. 2283–2296.
9. Bielecki T.R., Pliska S.R. Risk-sensitive dynamic asset management // Applied Mathematics and Optimization. 1999. No. 39. P. 337–360.
10. Runggaldier W.J. On stochastic control in finance. Mathematical Systems Theory in Biology, Communication, Computation and Finance / Eds. D. Gilliam and J. Rosenthal. IMA Book Series (MTNS-2002). Springer Verlag, 2002.
11. Dombrovsky V.V., Gerasimov E.S. Dynamic network model of control investment portfolio in continuous time // Proceeding of 5th Russian-Korean Symposium on Science and Technology (KORUS-2001). Tomsk, 2001. P. 304–308.
12. Герасимов Е.С., Домбровский В.В. Динамическая сетевая модель управления инвестициями при квадратичной функции риска // Автоматика и телемеханика. 2002. № 2. С. 119–127.
13. Dombrovsky V.V., Fedosov E.N. State space model of portfolio selection in non-stationary jump-diffusion market // Automatic Control and Computer Sciences. 2002. V. 36. No. 6. P.13–24.
14. Шарп У., Александер Г., Бейли Дж. Инвестиции. М.: ИНФРА-М, 1997.
15. Athans M. The matrix minimum principle // Information and Control. 1968. V.11. P.592–606.

Статья представлена кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики и кафедрой математических методов и информационных технологий в экономике экономического факультета Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 21 мая 2003 г.