УДК 519.2

О.А. Змеев

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ФОНДА СОЦИАЛЬНОГО СТРАХОВАНИЯ ПРИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СТРАХОВЫХ ВЫПЛАТАХ

Исследуются основные характеристики деятельности фонда социального страхования при экспоненциально распределённых страховых выплатах.

Фонды социального страхования РФ созданы на основании постановления Совета Министров РФ и фонда независимых профсоюзов. В отличие от обычных страховых компаний, в задачу фонда входит не только оплата страховых случаев (временная нетрудоспособность, пособия по беременности и родам и т.д.), но и систематические выплаты по реализации региональных и отраслевых программ по охране здоровья работников, санаторно-курортному лечению, обслуживанию детей и т.д.

Поэтому, в отличие от обычных страховых компаний, фонд не ставит своей задачей накопление капитала, а его целью является рациональное его использование.

Все это требует изменения классической модели работы страховой компании и решения задач оптимального в каком-то смысле управления капиталом такого фонда.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ФОНДА

Основной характеристикой состояния фонда является его капитал $S(t)$ в момент времени t. С этим капиталом происходят следующие изменения:

1. В фонд поступают средства от предприятий и организаций. Будем считать, что они поступают непрерывно во времени со скоростью c_0.

2. Фонд выделяет часть своих средств на социальные программы. Будем считать, что эти средства также выделяются непрерывно во времени, однако скорость их выделения $c^*(S)$ зависит от величины капитала S в данный момент времени.

Величину $c_0 - c^*(S)$ в дальнейшем будем обозначать как $c(S)$. Таким образом, $c(S)$ есть скорость изменения капитала за счет детерминированных расходов и она зависит от величины капитала S. Именно в наличии слагаемого $c^*(S)$ и зависимости $c(S)$ от S и заключается отличие данной модели от классической [1].

3. Происходят страховые выплаты. Будем считать, что поток страховых выплат является пуассоновским потоком постоянной интенсивности λ, и сами страховые выплаты ξ являются независимыми, одинаково распределенными случайными величинами с экспоненциальным распределением

$$p_\xi(x) = \frac{1}{a}\exp\left(-\frac{x}{a}\right),\ x \geq 0. \qquad (1)$$

Кроме того, будем считать, что достижение порога $S(t) = 0$ не приводит к разорению фонда, и даже при $S(t) < 0$ он продолжает функционировать, только происходят задержки по страховым выплатам.

ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ВЕЛИЧИНЫ КАПИТАЛА

Рассмотрим случай следующего управления капиталом фонда:

- при $S < S_0$ выплаты на социальные нужды не производятся, так что $c(S) = c_0$;

- при $S \geq S_0$ производятся выплаты на социальные нужды, причем их размер зависит от капитала фонда. В этом случае $c = c(S)$ и выплаты на социальные нужды идут со скоростью $c_0 - c(S)$.

Таким образом, S_0 – это величина резервного капитала, ниже которого производятся только страховые выплаты.

Отметим, что в этом случае капитал фонда не может превышать некоторой величины S_m, где S_m определяется из условия $c(S_m) = 0$; если при любых S величина $c(S) > 0$, то $S_m = +\infty$.

Найдем плотность вероятностей $p(S)$ капитала фонда S в стационарном режиме. Она будет иметь различный вид в областях $S < S_0$ и $S \geq S_0$.

Начнем с области $S < S_0$. Плотность вероятностей $p(S)$ в этой области будем обозначать как $p_1(S)$.

Выведем явное выражение $p_1(S)$. Пусть мы имеем некоторый момент времени t. Тогда получить значение капитала, равное S, можно двумя путями.

1. В момент времени $t - \Delta t$ значение капитала было равно $S - c_0\Delta t$ и за интервал времени Δt не было страховых выплат. Вероятность этой ситуации равна $1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)$.

2. С вероятностью $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ за интервал времени Δt пришлось сделать страховую выплату, равную x, так что в момент времени $t - \Delta$ значение капитала было равно $S - c_0\Delta t + x$.

Используя идеологию вывода обратных уравнений Колмогорова для марковских процессов [2], можем записать

$$p_1(S) = p_1(S - c_0\Delta t)(1 - \lambda\Delta t) + \lambda\Delta t\int_0^\infty p_1(S - c_0\Delta t + x)\,p_\xi(x)dx + o(\Delta t). \qquad (2)$$

Разлагая $p_1(S - c_0\Delta t)$ в ряд Тейлора, получим

$$p_1(S) = (1 - \lambda\Delta t)\left[p_1(S) - p_1'(S)c_0\Delta t\right] + \lambda\Delta t\int_0^\infty p_1(S - c_0\Delta t + x)p_\xi(x)dx + o(\Delta t).$$

Сокращая $p_1(S)$, деля на Δt и переходя к пределу $\Delta t \to 0$, получим интегродифференциальное уравнение для $p_1(S)$:

$$c_0 p_1'(S) = -\lambda p_1(S) + \lambda\int_0^\infty p_1(S + x)p_\xi(x)dx. \qquad (3)$$

Воспользуемся теперь тем, что $p_\xi(x)$ имеет экспоненциальный вид. Тогда

$$\int_0^\infty p_1(S + x)p_\xi(x)dx = \frac{1}{a}\int_0^\infty p_1(S + x)\exp\left(-\frac{x}{a}\right)dx = \frac{1}{a}\int_S^\infty p_1(y)\exp\left(-\frac{y}{a}\right)dy\cdot\exp\left(\frac{S}{a}\right).$$

Умножая (3) на $\exp(-S/a)$, дифференцируя по S, сокращая сомножитель $\exp(-S/a)$, получим уравнение для $p_1(S)$:

$$c_0 p_1''(S) - \left(\frac{c_0}{a} - \lambda\right) p_1'(S) = 0. \qquad (4)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$p_1(S) = C_1 + C_2 \exp\left(\frac{c_0 - \lambda a}{c_0 a} S\right).$$

Мы будем считать, что $c_0 > a_1\lambda$, что означает, что в среднем капитал растёт и поэтому коэффициент при $(S - S_0)$ положителен. Для выполнения условия $\lim\limits_{S\to-\infty} p_1(S) = 0$ следует положить $C_1 = 0$. Беря для удобства C_2 в виде

$$C_2 = \tilde{C} \exp\left(\frac{c_0 - \lambda a}{c_0 a} S_0\right),$$

получаем $p_1(S)$ в виде

$$p_1(S) = \tilde{C} \exp\left(\frac{c_0 - \lambda a}{c_0 a}(S - S_0)\right). \qquad (5)$$

Рассмотрим теперь область $S \geq S_0$. Плотность вероятностей $p(S)$ в этой области будем обозначать как $p_2(S)$. Рассматривая интервал времени Δt, можем записать

$$p_2(S) = (1 - \lambda\Delta t) p_2(S - c(S)\Delta t) +$$
$$+ \lambda\Delta t \int_0^\infty p_2(S + x) p_\xi(x) dx + o(\Delta t). \qquad (6)$$

Разлагая $p_2(S - c(S)\Delta t)$ в ряд Тейлора $p_2(S - c(S)\Delta t = = p_2(S) - c(S)\, p_2'(S)\Delta t + o(\Delta t)$ и подставляя в (6), получим

$$p_2(S) = (1 - \lambda\Delta t)\,(p_2(S) - c(S)p_2'(S)\Delta t) +$$
$$+ \lambda\Delta t \int_0^\infty p_2(S + x) p_\xi(x) dx + o(\Delta t) = p_2(S) +$$
$$+\Delta t\left[- c(S)p_2'(S) + \lambda\int_0^\infty p_2(S + x) p_\xi(x) dx\right] + o(\Delta t).$$

Сокращая $p_2(S)$, деля на Δt и переходя к пределу $\Delta t \to 0$, получим интегродифференциальное уравнение для $p_2(S)$:

$$c(S)p_2'(S) + \lambda p_2(S) = \lambda\int_0^\infty p_2(S + x) p_\xi(x) dx. \qquad (7)$$

Рассмотрим случай экспоненциально распределенных страховых выплат. Тогда (7) принимает вид

$$c(S)p_2'(S) + \lambda p_2(S) = \frac{\lambda}{a}\int_0^\infty p_2(S + x)\exp\left(-\frac{x}{a}\right) dx =$$
$$= \frac{\lambda}{a} e^{S/a} \int_S^\infty p_2(y)\exp\left(-\frac{y}{a}\right) dy.$$

Умножая обе части на $\exp(-S/a)$, дифференцируя по S и сокращая $\exp(-S/a)$, получим для $p_2(S)$ дифференциальное уравнение второго порядка

$$p_2''(S)c(S) + p_2'(S)\left(c'(S) - \frac{c(S)}{a} + \lambda\right) = 0 \qquad (8)$$

или в виде

$$p_2''(S) = \left(\frac{1}{a} - \frac{c'(S)}{c(S)} - \frac{\lambda}{c(S)}\right) p_2'(S). \qquad (9)$$

Решим его. Обозначая $p_2'(S) = \pi(S)$, получим

$$\frac{d\pi(S)}{\pi(S)} = \left(\frac{1}{a} - \frac{c'(S)}{c(S)} - \frac{\lambda}{c(S)}\right) dS.$$

После интегрирования имеем

$$\ln\pi(S) - \ln\pi(S_0) = \int_{S_0}^{S}\left(\frac{1}{a} - \frac{c'(x)}{c(x)} - \frac{\lambda}{c(x)}\right) dx. \qquad (10)$$

Но $\int\limits_{S_0}^{S} \frac{c'(x)}{c(x)} dx = \ln\frac{c(S)}{c(S_0)}$, и поэтому

$$\ln\pi(S) = \ln\pi(S_0) + \frac{S - S_0}{a} + \ln\frac{c(S_0)}{c(S)} - \lambda\int_{S_0}^{S}\frac{dx}{c(x)}.$$

Отсюда получаем

$$p_2'(S) = -C\frac{c(S_0)}{c(S)}\exp\left(\frac{S - S_0}{a} - \lambda\int_{S_0}^{S}\frac{dx}{c(x)}\right), \qquad (11)$$

где знак минус взят для удобства.

В дальнейшем будем использовать обозначение

$$\frac{c(S_0)}{c(S)}\exp\left(\frac{S - S_0}{a} - \lambda\int_{S_0}^{S}\frac{dx}{c(x)}\right) = \varphi(S), \qquad (12)$$

так что $p_2'(S) = -C\varphi(S)$. Интегрируя еще раз, получим, что $p_2(S) = C_2 - C\int\limits_{S_0}^{S}\varphi(x)dx$. Но легко видеть, что $p_2(S_m) = 0$, так что $C_2 = C\int\limits_{S_0}^{S_m}\varphi(x)dx$ и окончательно в области $S > S_0$

$$p_2(S) = C\int_{S}^{S_m}\varphi(x)dx. \qquad (13)$$

Осталось найти константы C и $\tilde{C}$. Прежде всего отметим, что должно выполняться условие сшивания $p_1(S_0) = p_2(S_0)$. Это даёт нам $\tilde{C} = C\int\limits_{S_0}^{S_m}\varphi(x)dx$, так что

$$p_1(S) = C\int_{S_0}^{S_m}\varphi(x)dx \exp\left(\frac{c_0 - \lambda a}{c_0 a}(S - S_0)\right). \qquad (14)$$

Для нахождения C воспользуемся условием нормировки. Имеем $\int\limits_{-\infty}^{S_0} p_1(S)dS = C\frac{c_0 a}{c_0 - a\lambda}\int\limits_{S_0}^{S_m}\varphi(x)dx.$

Далее $\int\limits_{S_0}^{S_m} p_2(S)dS = C\int\limits_{S_0}^{S_m} dS\int\limits_{S}^{S_m}\varphi(x)dx.$ Переставляя интегралы местами, получим, что

$$\int_{S_0}^{S_m} p_2(S)dS = C\int_{S_0}^{S_m}(x - S_0)\varphi(x)dx.$$

Поэтому $$\int_{-\infty}^{S_0} p_1(S)dS + \int_{S_0}^{S_m} p_2(S)dS =$$

$$= C\int_{S_0}^{S_m}\left[\frac{c_0 a}{c_0 - a\lambda} + x - S_0\right]\varphi(x)dx = 1,$$

откуда и определяется константа C:

$$C = 1\Big/\int_{S_0}^{S_m}\left[\frac{c_0 a}{c_0 - a\lambda} + x - S_0\right]\varphi(x)dx. \qquad (15)$$

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАБОТЫ ФОНДА

Вероятность неплатежеспособности фонда. Фонд не может производить выплаты по страховым случаям, когда его капитал становится отрицательным. Вероятность этого события равна

$$\pi_0 = P\{S<0\} = \int_{-\infty}^{0} p_1(S)dS =$$

$$= \left[\frac{c_0 a}{c_0 - a\lambda}\int_{S_0}^{S_m}\varphi(x)dx\right]\Big/\left[\int_{S_0}^{S_m}\left(\frac{c_0 a}{c_0 - a\lambda} + x - S_0\right)\varphi(x)dx\right]\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{c_0 - a\lambda}{c_0 a}S_0\right). \qquad (16)$$

Вероятность выделения денег на социальные расходы. Деньги на социальные расходы выделяются при $S > S_0$. Вероятность этого события равна

$$\pi_1 = P\{S > S_0\} = \int_{S_0}^{\infty} p_2(S)dS =$$

$$= \left[\int_{S_0}^{S_m}(x - S_0)\varphi(x)dx\right]\Big/\left[\int_{S_0}^{S_m}\left(\frac{c_0 a}{c_0 - a\lambda} + x - S_0\right)\varphi(x)dx\right]\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{c_0 - a\lambda}{c_0 a}S_0\right). \qquad (17)$$

ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ФОНДА

Средняя длительность периода неплатежеспособности. Неплатежеспособность фонда наступает при $S < 0$. Обозначим через $m(S)$ среднее время пребывания траектории $S(t)$ ниже нулевого уровня, если в начальный момент времени значение капитала было равно S (естественно, $S < 0$).

Рассмотрим, какие события могут произойти спустя время Δt:

- с вероятностью $1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)$ не наступит страховых случаев, и значение капитала станет равным $S + c_0\Delta t$;

- с вероятностью $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ наступит страховой случай, и значение капитала станет равным $S - x + o(\Delta t)$, где x – случайная величина с плотностью вероятностей $p_\xi(x)$.

Так как время, равное Δt, прошло, то имеем следующее соотношение для $m(S)$:

$$m(S) = \Delta t + (1 - \lambda\Delta t)m(S + c_0\Delta t) + \\ + \lambda\Delta t\int_0^\infty m(S - x)p_\xi(x)dx + o(\Delta t). \qquad (18)$$

Разлагая $m(S + c_0\Delta t)$ в ряд Тейлора, получаем

$$m(S) = \Delta t + (1 - \lambda\Delta t)[m(S) + m'(S)c_0\Delta t] + \\ + \lambda\Delta t\int_0^\infty m(S - x)p_\xi(x)dx + o(\Delta t).$$

Сокращая, $m(S)$ деля на Δt и переходя к пределу $\Delta t\to 0$, получим для $m(S)$ интегродифференциальное уравнение

$$m'(S) = \frac{\lambda}{c_0}m(S) - \frac{\lambda}{c_0}\int_0^\infty m(S - x)p_\xi(x)dx - \frac{1}{c_0} \qquad (19)$$

с граничным условием $m(0) = 0$, так как при достижении капиталом нулевого уровня период неплатежеспособности заканчивается.

Решим уравнение (19) для случая, когда выплаты имеют экспоненциальное распределение. Тогда уравнение (19) принимает вид

$$m'(S) = \frac{\lambda}{c_0}m(S) - \frac{\lambda}{c_0 a}\int_0^\infty m(S - x)\exp\left(-\frac{x}{a}\right)dx - \frac{1}{c_0}. \qquad (20)$$

Имеем

$$\int_0^\infty m(S - x)\exp\left(-\frac{x}{a}\right)dx = \mathrm{e}^{-S/a}\int_{-\infty}^{S} m(y)\mathrm{e}^{y/a}dy,$$

где сделана замена переменных $y = S - x$. Подставляя это выражение в (20), умножая на $\mathrm{e}^{-S/a}$, дифференцируя по S и сокращая сомножитель $\mathrm{e}^{-S/a}$, получим, что $m(S)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка

$$m''(S) = \left(\frac{\lambda}{c_0} - \frac{1}{a}\right)m'(S) - \frac{1}{c_0 a}. \qquad (21)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$m(S) = C_1 - \frac{S}{c_0 - \lambda a} + C_2\exp\left(-\frac{c_0 - \lambda a}{c_0 a}S\right). \qquad (22)$$

Наличие экспоненциально нарастающих членов противоречит экономическому смыслу ситуации. Поэтому C_2 следует положить равным нулю и

$$m(S) = C_1 - \frac{S}{c_0 - \lambda a}.$$

Условие $m(0) = 0$ даёт $C_1 = 0$ и окончательно

$$m(S) = -\frac{S}{c_0 - \lambda a}. \qquad (23)$$

Осталось найти $p(S)$ в начале периода неплатежеспособности. Он наступает тогда, когда требуемая страховая выплата больше капитала фонда в данный момент времени. Учитывая важнейшее свойство экспоненциального распределения [2] $P\{x < S + a| \, x > S\} = P(x < a)$, называемое свойством отсутствия последействия, можно написать, что в начальный момент времени

$$p(S) = \frac{1}{a}\exp\left(\frac{S}{a}\right), \; S < 0. \qquad (24)$$

Тогда, усредняя (23) по этому значению S, получим окончательно

$$m_0 = \int_{-\infty}^{0} m(S)p(S)dS = \frac{1}{(c_0 - \lambda a)a}. \qquad (25)$$

Интересно отметить, что в этой формуле отсутствует S_0. Но, учитывая, что π_0 обычно мало, такой период наступает достаточно редко.

Средняя длительность периода социальных выплат. Найдём теперь среднее время пребывания процесса $S(t)$ выше порога S_0, т.е. среднюю длительность периода социальных выплат.

Обозначим через $m(S)$ среднюю длительность этого периода при условии, что в начальный момент $S(t) = S$. Тогда, спустя время Δt

- с вероятностью $1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)$ не наступит страховых случаев, и значение капитала станет равным $S+c(S)\Delta t$;

- с вероятностью $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ наступит страховой случай, и будет страховая выплата величины x. Если окажется, что $S - x > S_0$, т.е. если $x < S - S_0$, то период выплат продолжится, но уже со значения $S - x$. Если же окажется, что $S - x < S_0$, то период пребывания процесса $S(t)$ над порогом S_0 завершится.

В силу этого имеем соотношение

$$m(S) = o(\Delta t) + \Delta t + (1 - \lambda\Delta t)m(S + c(S)\Delta t) +$$

$$+ \lambda\Delta t\left[\int_0^{S-S_0} m(S-x)p_\xi(x)dx + 0\int_{S-S_0}^{\infty} p_\xi(x)dx\right]. \quad (26)$$

Разлагая $m(S+c(S)\Delta t)$ в ряд Тейлора

$$m(S+c(S)\Delta t) = m(S) + m'(S)c(S)\Delta t + o(\Delta t),$$

получим $m(S) = m(S) + \Delta t\Big[1 + m'(S)c(S) -$

$$- \lambda m(S) + \lambda\int_0^{S-S_0} m(S-x)p_\xi(x)dx\Big] + o(\Delta t).$$

Сокращая $m(S)$, деля на Δt и переходя к пределу $\Delta t\to 0$, получим интегродифференциальное уравнение относительно $m(S)$:

$$m'(S)c(S) - \lambda m(S) + \lambda\int_0^{S-S_0} m(S-x)p_\xi(x)dx = -1. \quad (27)$$

Рассмотрим случай экспоненциально распределённых выплат. Тогда

$$\int_0^{S-S_0} m(S-x)\,\mathrm{e}^{-x/a}\,dx = \mathrm{e}^{-S/a}\int_{S_0}^{S} m(y)\,\mathrm{e}^{y/a}\,dy,$$

где сделана замена переменных $S - x = y$. После этого уравнение (27) примет вид

$$m'(S)c(S)\mathrm{e}^{S/a} - \lambda m(S)\mathrm{e}^{S/a} + \frac{\lambda}{a}\int_{S_0}^{S} m(y)e^{y/a}dy = -\mathrm{e}^{S/a}.$$

Дифференцируя по S, сокращая сомножитель $\mathrm{e}^{S/a}$ и приводя подобные, получим дифференциальное уравнение относительно $m(S)$:

$$m''(S) + m'(S)\left[\frac{1}{a} - \frac{\lambda}{c(S)} + \frac{c'(S)}{c(S)}\right] = -\frac{1}{ac(S)}, \quad (28)$$

которое является линейным дифференциальным уравнением второго порядка с переменными коэффициентами. Решим его.

Обозначая $m'(S) = \mu(S)$, получим

$$\mu'(S) + \mu(S)\left[\frac{1}{a} - \frac{\lambda}{c(S)} + \frac{c'(S)}{c(S)}\right] = -\frac{1}{ac(S)}. \quad (29)$$

Соответствующее однородное уравнение есть уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{d\mu}{\mu} = \left(\frac{1}{a} - \frac{\lambda}{c(S)} + \frac{c'(S)}{c(S)}\right)dS,$$

общее решение которого имеет вид

$$\ln\mu(S) = \ln C + \lambda\int_{S_0}^{S}\frac{dx}{c(x)} - \frac{S-S_0}{a} - \ln c(S).$$

Отсюда получим общее решение однородного уравнения:

$$\mu(S) = C\exp\left(\lambda\int_{S_0}^{S}\frac{dx}{c(x)} - \frac{S-S_0}{a} - \ln c(S)\right). \quad (30)$$

Общее решение уравнения (29) будем искать методом вариации произвольных постоянных в виде

$$\mu(S) = C(S)\exp\left(\lambda\int_{S_0}^{S}\frac{dx}{c(x)} - \frac{S-S_0}{a} - \ln c(S)\right). \quad (31)$$

Находя $\mu'(S)$ и подставляя его в (29) после упрощений, получим

$$C'(S) = -\frac{1}{a}\exp\left(-\lambda\int_{S_0}^{S}\frac{dx}{c(x)} + \frac{S-S_0}{a}\right),$$

откуда

$$C(S) = -\frac{1}{a}\int_{S_0}^{S}\exp\left(-\lambda\int_{S_0}^{y}\frac{dx}{c(x)} + \frac{y-S_0}{a}\right)dy + C_1,$$

что и даёт нам общее решение уравнения (29):

$$\mu(S) = -\frac{1}{ac(S)}\exp\left(\lambda\int_{S_0}^{S}\frac{dx}{c(x)} - \frac{S-S_0}{a}\right)\times$$

$$\times\left[\int_{S_0}^{S}\exp\left(-\lambda\int_{S_0}^{y}\frac{dx}{c(x)} + \frac{y-S_0}{a}\right)dy + C_1\right]. \quad (32)$$

Теперь можно определить константу C_1. Заметим, что при $x\to S_m$ $c(x)\to 0$ и поэтому $\int_{S_0}^{S}\frac{dx}{c(x)} \to +\infty$.

Чтобы не получить неограниченного возрастания $\mu(S)$ при $S\to S_m$, надо, чтобы при $x\to S_m$ выражение, стоящее в (32) в квадратных скобках, стремилось к нулю. Отсюда имеем соотношение

$$\int_{S_0}^{S_m}\exp\left(-\lambda\int_{S_0}^{y}\frac{dx}{c(x)} + \frac{y-S_0}{a}\right)dy + C_1 = 0,$$

откуда

$$C_1 = -\int_{S_0}^{S_m}\exp\left(-\lambda\int_{S_0}^{y}\frac{dx}{c(x)} + \frac{y-S_0}{a}\right)dy,$$

и выражение для $\mu(S)$ принимает вид

$$\mu(S) = \frac{1}{ac(S)}\exp\left(\lambda\int_{S_0}^{S}\frac{dx}{c(x)} - \frac{S-S_0}{a}\right)\times$$

$$\times\int_{S}^{S_m}\exp\left(-\lambda\int_{S_0}^{y}\frac{dx}{c(x)} + \frac{y-S_0}{a}\right)dy.$$

Объединяя вместе экспоненты, получим выражение

$$\mu(S)=\frac{1}{ac(S)}\int_S^{S_m}\exp\left(-\lambda\int_S^y\frac{dx}{c(x)}+\frac{y-S}{a}\right)dy, \qquad (33)$$

которое и является окончательным выражением для $\mu(S) = m'(S)$.

Теперь можно найти и явный вид $m(S)$:

$$m(S) = \int_{S_0}^{S}\mu(z)dz + C_2, \qquad (34)$$

где C_2 – пока неизвестная константа. Для её нахождения выведем граничное условие на границе $S = S_0$. В этом случае любая страховая выплата приводит к прерыванию процесса пребывания $S(t)$ над порогом S_0. Поэтому имеем

$$m(S_0)=\Delta t+(1-\lambda\Delta t)m(S_0+c(S_0)\Delta t)+\lambda\Delta t+o(\Delta t)\ . \ (34)$$

Разлагая $m(S_0 + c(S_0)\Delta t)$ в ряд Тейлора, подставляя его в (34), сокращая $m(S_0)$, деля на Δt и переходя к пределу $\Delta t\to 0$, получим граничное условие в виде

$$c(S_0)m'(S_0) - \lambda m(S_0) = -1. \qquad (35)$$

В нашем случае

$$m(S_0) = C_2,$$
$$m'(S_0) = \mu(S_0) =$$
$$=\frac{1}{ac(S_0)}\int_{S_0}^{S_m}\exp\left(-\lambda\int_{S_0}^{y}\frac{dx}{c(x)} + \frac{y-S_0}{a}\right)dy.$$

Подстановка этих соотношений в (35) даёт

$$\frac{1}{a}\int_{S_0}^{S_m}\exp\left(-\lambda\int_{S_0}^{y}\frac{dx}{c(x)}+\frac{y-S_0}{a}\right)dy-\lambda C_2=-1, \qquad (36)$$

откуда имеем

$$C_2=\frac{1}{\lambda}\left[1+\frac{1}{a}\int_{S_0}^{S_m}\exp\left(-\lambda\int_{S_0}^{y}\frac{dx}{c(x)}+\frac{y-S_0}{a}\right)dy\right]. \qquad (37)$$

Заметим, что любой период выплаты социальных пособий начинается с того, что $S(t)$ пересекает порог S_0. Поэтому средняя длительность этого периода $m_2 = m(S_0) = C_2$. Таким образом, окончательно

$$m_2=\frac{1}{\lambda}\left[1+\frac{1}{a}\int_{S_0}^{S_m}\exp\left(-\lambda\int_{S_0}^{y}\frac{dx}{c(x)}+\frac{y-S_0}{a}\right)dy\right]. \qquad (38)$$

НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Релейное управление капиталом

Рассмотрим случай, когда управление капиталом имеет вид

$$c(S)=\begin{cases}c_0, & \text{при } S<S_0,\\ c_1, & \text{при } S>S_0,\end{cases} \qquad (39)$$

причем $c_0 > a_1\lambda$ и $c_1 < a_1\lambda$. Смысл такого управления следующий: устанавливается некоторый резервный уровень капитала S_0. Если капитал $S(t) < S_0$, то производятся только страховые выплаты. Условие $c_0 > a_1\lambda$ означает, что в среднем капитал растёт. При $S(t) > S_0$ начинаются выплаты по социальным программам со скоростью $c^* = c_0 - c_1 > 0$. То, что $c_1 < a_1\lambda$, означает, что из-за этих выплат капитал в среднем уменьшается. Таким образом, величина капитала $S(t)$ колеблется около величины S_0.

Подстановка $c(S) = c_1$ в формулы, определяющие плотность вероятностей капитала, дает нам

$$p(S)=\begin{cases}C\exp\left(-\dfrac{\lambda a-c_1}{c_1 a}(S-S_0)\right) & \text{при } S>S_0,\\ C\exp\left(\dfrac{c_0-\lambda a}{c_0 a}(S-S_0)\right) & \text{при } S>S_0.\end{cases} \qquad (40)$$

Константу C найдём из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty}p(S)dS=\int_{-\infty}^{0}p_0(S)dS+\int_{0}^{\infty}p_1(S)dS=1\,.$$

Вычисляя входящие сюда интегралы, получаем

$$C = \frac{(\lambda a - c_1)(c_0 - \lambda a)}{\lambda a^2(c_0 - c_1)} > 0. \qquad (41)$$

Тем самым $p(S)$ определена полностью.

Характеристики капитала

Найдем математическое ожидание величины капитала фонда в стационарном режиме. Представляя S в виде $S = S_0 + \eta$, можем написать

$$p(\eta)=\begin{cases}C\exp\left(-\dfrac{\lambda a-c_1}{c_1 a}\eta\right) & \text{при } \eta>0,\\ C\exp\left(\dfrac{c_0-\lambda a}{c_0 a}\eta\right) & \text{при } \eta<0.\end{cases}$$

Поэтому математическое ожидание величины η

$$M\{\eta\}\}=\int_{-\infty}^{\infty}\eta p(\eta)d\eta=C\left[\frac{(ac_1)^2}{(a\lambda-c_1)^2}-\frac{(ac_0)^2}{(c_0-a\lambda)^2}\right].$$

Подставляя сюда явное выражение для C и упрощая, получаем

$$M\{\eta\} = \frac{a(2c_0c_1 - \lambda a(c_0 + c_1))}{(a\lambda - c_1)(c_0 - \lambda a)} \qquad (42)$$

и

$$M\{S\}=S_0+M\{\eta\}.$$

Вероятностные характеристики

Фонд производит выплаты на социальные нужды при выполнении условия $S > S_0$. Вероятность этого равна

$$\pi_1=P\{S>S_0\}=C\int_{S_0}^{\infty}\exp\left(-\frac{a\lambda-c_1}{ac_1}(S-S_0)\right)dS =$$
$$=C\frac{ac_1}{a\lambda - c_1}.$$

Подставляя сюда явное выражение для C, получаем

$$\pi_1 = \frac{(c_0 - \lambda a)c_1}{\lambda a(c_0 - c_1)}. \qquad (43)$$

При выполнении условия $S < 0$ фонд вынужден прекратить выплаты по страховым случаям. Вероятность этого равна

$$\pi_0=P\{S<0\}=C\int_{-\infty}^{0}\exp\left(\frac{c_0-\lambda a}{c_0 a}(S-S_0)\right)dS =$$
$$= C\frac{c_0 a}{c_0 - \lambda a}\exp\left(-\frac{c_0-\lambda a}{c_0 a}S_0\right).$$

Подставляя сюда явное выражение для C, получаем

$$\pi_0 = \frac{c_0(\lambda a - c_1)}{\lambda a(c_0 - c_1)}\exp\left(-\frac{c_0 - \lambda a}{c_0 a}S_0\right). \qquad (44)$$

Одним из возможных вариантов управления капиталом фонда является тот, когда c_1 и S_0 выбираются из условия, чтобы π_0 и π_1 приняли некоторые заранее выбранные значения (удовлетворяющие условию $\pi_0 + \pi_1 < 1$). Тогда уравнения (10) и (11) превращаются в систему уравнений для определения величин c_1 и S_0.

Из (10) можно получить значение c_1:

$$c_1 = \frac{\pi_1 \lambda a c_0}{c_0 - (1 - \pi_1)\lambda a}. \qquad (45)$$

Зная c_1, можно найти и величину S_0:

$$S_0 = \frac{c_0 a}{c_0 - \lambda a}\ln\left[\frac{c_0(\lambda a - c_1)}{\pi_0(\lambda a - c_1)}\right]. \qquad (46)$$

Тем самым параметры c_1 и S_0 определяются полностью.

Временные характеристики

Что касается средней длительности периода неплатежеспособности и периода социальных выплат, то полученные выше формулы дают

$$m_0 = \frac{1}{(c_0 - \lambda a)a}, \quad m_2 = \frac{c_1}{\lambda(\lambda a - c_1)}. \qquad (47)$$

Эти формулы позволяют оценить временные характеристики деятельности фонда.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Panjer H.H.*, *Willmot G.E.* Insurance Risk Models. – Society of Actuaries, 1992. 442 p.
2. *Радюк Л.Е.*, *Терпугов А.Ф.* Теория вероятностей и случайных процессов. Томск.: Изд-во Том. ун-та, 1988. 174 с.
3. *Weiler K.*, *Atherton P.* Hidden surface removing using polygon area sorting // Computer Graphics. 1977. V. 11. P. 214–222.

Статья представлена кафедрой прикладной информатики факультета информатики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Кибернетика и информатика» 28 апреля 2003 г.