

СУБОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМОЙ, ОПИСЫВАЕМОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛЬЮ МИРОВОЙ ДИНАМИКИ ФОРРЕСТЕРА

Рассматривается стохастический вариант модели мировой динамики Дж. Форрестера. На основе квазилинеаризации модели получена структура алгоритма оптимального управления динамической системой, описываемой этой моделью. Показано, что алгоритм оптимального управления требует решения нелинейной двухточечной краевой задачи для системы разностных уравнений, существенно затрудняющей возможности его реализации. Предложено два варианта реализуемого субоптимального алгоритма управления. Приведен пример решения задачи стабилизации численности населения планеты путем регулирования распределения части капиталовложений (фондов) в мировое сельское хозяйство. Обсуждаются возможные положительные и отрицательные последствия такого регулирования.

Модель мировой динамики Джея Форрестера хорошо известна [1]. Она была опубликована в 1971 г. и связывала между собой в динамике 5 глобальных переменных-уровней (численность населения планеты, уровень загрязнения, фонды, или капиталовложения, природные ресурсы, долю фондов в сельском хозяйстве), 7 переменных-темпов (темп рождаемости, темп смертности, темп образования загрязнения, темп разложения загрязнения, темп фондообразования, темп износа фондов, темп использования природных ресурсов) и ряд переменных-параметров (качество жизни, уровень питания, материальный уровень жизни, эффективность фондов, относительную плотность населения, относительную величину фондов, относительную величину фондов в сельском хозяйстве, предписываемую уровнем питания часть фондов, долю капиталовложений в зависимости от качества жизни, относительное загрязнение и др.). Изменения во времени переменных-уровней описывались линейными разностными уравнениями первого порядка. Зависимости переменных-темпов и переменных-параметров друг от друга и от переменных-уровней в каждый данный момент времени описывались нелинейными эмпирическими зависимостями, задаваемыми таблично на основе анализа реальных данных мирового развития за период времени с 1900 по 1970 г. Случайно изменяющиеся (стохастические) факторы в модель не вводились. Таким образом, модель мировой динамики Дж. Форрестера была достаточно сложной детерминированной нелинейной разностной моделью довольно высокого порядка. Вопросы стабилизации состояния мировой системы, описываемой этой моделью, т.е. вопросы целенаправленного достижения состояния равновесия в мировой системе (управления системой) в работе Форрестера не ставились.

Ниже на основе формализации модели Форрестера с включением в нее стохастических факторов ставится задача синтеза оптимального или близкого к оптимальному (субоптимального) управления такой системой по данным наблюдения ее вектора состояния (переменных-уровней) в каждый данный момент текущего дискретного времени. Задача решается в предположении полного и точного наблюдения вектора состояния в дискретные моменты времени.

ФОРМАЛИЗАЦИЯ МОДЕЛИ ДЖ. ФОРРЕСТЕРА

Обозначим для каждого момента дискретного времени $t(k)$, $k = \overline{1, N}$, через $x(k)$ вектор состояния динамической системы Форрестера, включающий в себя только переменные-уровни:

- $x_1(k) = P$ (численность населения, чел.);
- $x_2(k) = POL$ (уровень загрязнения);
- $x_3(k) = CI$ (фонды);
- $x_4(k) = NR$ (природные ресурсы);
- $x_5(k) = CIAF$ (часть фондов в сельском хозяйстве).

Нижний индекс указывает номер соответствующей переменной в векторе-столбце состояния

$$x(k) = [x_1(k), \dots, x_n(k)]^T,$$

где n – размерность вектора состояния ($n = 5$); T – знак транспонирования.

Переменные-темпы и переменные-параметры объединим в вектор-столбец $p(k) = [p_1(k), \dots, p_m(k)]^T$ с компонентами:

- $p_1(k) = QL$ (качество жизни, ед. удовлетворенности);
- $p_2(k) = BR$ (темп рождаемости, чел./год);
- $p_3(k) = DR$ (темп смертности, чел./год);
- $p_4(k) = POLG$ (темп образования загрязнения);
- $p_5(k) = POLA$ (темп разложения загрязнения);
- $p_6(k) = CIG$ (темп фондообразования);
- $p_7(k) = CID$ (темп износа фондов);
- $p_8(k) = NRUR$ (темп использования природных ресурсов);
- $p_9(k) = FR$ (относительный уровень питания);
- $p_{10}(k) = MSL$ (материальный уровень жизни);
- $p_{11}(k) = ECIR$ (эффективность фондов);
- $p_{12}(k) = CR$ (относительная плотность населения);
- $p_{13}(k) = CIRA$ (относительная величина фондов в сельском хозяйстве);
- $p_{14}(k) = CIR$ (относительная величина фондов);
- $p_{15}(k) = POLR$ (относительное загрязнение);
- $p_{16}(k) = CFIFR$ (предписываемая уровнем питания часть фондов);
- $p_{17}(k) = CIQR$ (доля капиталовложений в зависимости от качества жизни).

Все переменные $p_i(k)$ в каждый момент дискретного времени $t(k)$ являются, в конечном счете, функциями $\varphi_i(k, x(k))$ переменных состояния $x(k)$:

$$p(k) = \varphi(k, x(k)), \quad (1)$$

где $\varphi(k, x(k)) = [\varphi_1(k, x(k)), \dots, \varphi_m(k, x(k))]^T$ – вектор-функция-столбец размерности m . Конкретно же каждая функция $\varphi_i(k, x(k))$ в модели Форрестера задается как сложная табличная функция переменных $p(k)$ и $x(k)$, использующая кусочно-линейную и кусочно-квадратичную интерполяцию [1].

Объединим векторы $x(k)$ и $p(k)$ в единый вектор-столбец $y(k)$ переменных задачи:

$$y(k) = [x(k)^T, p(k)^T]^T, \quad (2)$$

так что

$$y(k) = [P, POL, CI, NR, CIAF, QL, BR, DR, POLG, POLA, CIG, CID, NRUR, FR, MSL, ECIR, CR, CIRA, CIR, POLR, CFIFR, CIQR]^T.$$

С учетом (1) получаем

$$y(k) = [x(k)^T, \varphi(k, x(k))^T]^T. \quad (3)$$

Таким образом, вектор $y(k)$ всех переменных модели полностью определяется вектором состояния $x(k)$. Вектор состояния $x(k)$ будем называть также фазовым вектором.

Введем n -вектор-функцию

$$f(k, x(k)) = [BR - DR, POLG - POLA, CIG - CID, -NRUR, (1/CIAFT)(CFIFR \cdot CIQR - CIAF)]^T,$$

так что

$$f(k, x(k)) = [p_2(k) - p_3(k), p_4(k) - p_5(k), p_6(k) - p_7(k), -p_8(k), (1/\tau)(p_{16}(k) \cdot p_{17}(k) - x_5(k))]^T,$$

где $\tau = CIAFT$ – время задержки изменения части фондов в сельском хозяйстве (в годах). Как видим, вектор-функция $f(k, x(k))$ является функцией переменных-темпов, некоторых переменных-параметров и переменных состояния. Но с учетом (1) эта функция, в конечном счете, есть сложная функция переменных состояния (фазовых переменных) $x(k)$: $f(k, x(k))$.

Обозначив через $h = DT$ шаг дискретизации по времени $h = t(k+1) - t(k) \quad \forall k = \overline{1, N-1}$, запишем систему уравнений динамики модели Форрестера в векторной форме:

$$x(k+1) = x(k) + h \cdot f(k, x(k)) \quad (4)$$

с начальным условием

$$x(1) = [PI, POLI, CII, NRI, CIAFI]^T,$$

где при $t = t(1)$

$$x_1(1) = PI$$

(для $t(1) = 1900$ г. $PI = 1,65E + 9$ чел.,

для $t(1) = 1970$ г. $PI = 3,6E + 9$ чел.,

для $t(1) = 2000$ г. $PI = 5,3E + 9$ чел.),

$$x_2(1) = POLI,$$

$$x_3(1) = CII,$$

$$x_4(1) = NRI,$$

$$x_5(1) = CIAFI.$$

В дальнейшем при численном моделировании и анализе управляемой модели Форрестера будем использовать исходные данные из книги [1], за некоторыми исключениями, оговоренными ниже.

Примем, согласно Форрестеру [1], следующие начальные условия: $t(1) = 1900$, $t(N) = 2100$, $h = DT = 0,25$ (годы), $PI = 1,65E + 9$ (чел. в 1900 г.), $POLI = 0,2E + 9$ (ед. загрязнения), $CII = 0,4E + 9$ (ед. фондов), $NRI = 900E + 9$

(ед. природных ресурсов), $CIAFI = 0,2$ (безразмерна – начальная часть фондов в сельском хозяйстве).

Нормальные значения параметров модели: $BRN = 0,078$ (нормальный темп рождаемости, часть/год, – примем его равным этому значению вместо 0.04, взятого в [1], чтобы удовлетворить значению численности населения $PI = 5,3E + 9$ чел. в 2000 г.), $CIAFN = 0,3$ (нормальная часть фондов в сельском хозяйстве, безразмерна), $CIGN = 0,05$ (нормальное фондообразование, ед. фондов/чел.год), $CIDN = 0,025$ (нормальный износ фондов, часть/год), $DRN = 0,028$ (нормальный темп смертности, часть/год), $NRUN = 1$ (нормальное потребление природных ресурсов, ед. ресурсов/год), $PDN = 26,5$ (нормальная плотность населения, чел./кв.км.), $POLN = 1$ (нормальное загрязнение, ед. загрязнения/чел.год), $ECIRN = 1$ (нормальная эффективность относительной величины фондов, ед. фондов/чел.), $FN = 1$ (нормальный уровень питания, безразмерен).

Приведем также значения некоторых констант: $LA = 135E + 6$ (площадь земли, кв.км.), $POLS = 3.6E + 9$ (стандартное загрязнение, ед. загрязнения), $\tau = CIAFT = 15$ (время задержки изменения части фондов, лет), $QLS = 1$ (стандартное качество жизни, ед. удовлетворенности), $FC = 1$ (коэффициент питания). Остальные значения констант модели и таблично заданные зависимости между переменными опускаем (они полностью соответствуют работе Форрестера [1]).

Уравнение состояния (4) позволяет, с учетом соотношений (1), (2) или соотношения (3), получать из вектора состояния $x(k)$ в момент времени $t(k)$ вектор состояния $x(k+1)$ в следующий момент дискретного времени $t(k+1)$ и вычислять в этот момент новое значение вектора переменных модели

$$y(k+1) = [x(k+1)^T, \varphi(k+1, x(k+1))^T]^T. \quad (5)$$

Это позволяет шаг за шагом проследить изменение всех переменных модели. Если со временем значения параметров модели изменяются, предусмотрено их «клиппирование» (вырезание и замена другими значениями в заданные моменты времени). Тем самым обеспечивается необходимая нестационарность модели, изменчивость ее параметров. Именно эта особенность модели отражается в первом аргументе функции $f(k, x(k))$, выражающем явную зависимость уравнения состояния (4) от времени.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Векторное уравнение состояния мировой динамики (4), соответствующее модели Форрестера, не содержит случайно изменяющихся факторов, является детерминированным. Введение в модель стохастических возмущений позволило бы «проигрывать» более реалистические траектории мировой динамики. В связи с этим введем в правую часть уравнений (4) случайные флуктуации переменных-темпов в виде гауссовских «белых» (некоррелированных во времени) последовательностей случайных векторов $\xi(k)$ с нулевыми математическими ожиданиями $M\{\xi(k)\} = 0$ и дисперсионными матрицами $D(k) = M\{\xi(k)\xi(k)^T\}$,

где $M\{\cdot\}$ – оператор математического ожидания:

$$x(k+1) = x(k) + h(f(k, x(k)) + \xi(k)). \quad (6)$$

При стационарных стохастических возмущениях матрицы $D(k) = D$ остаются постоянными во времени. Однако в общем случае эти матрицы могут изменяться. Структура матриц $D(k)$ должна быть такой, чтобы с изменением шага h дискретизации по времени флуктуации переменных состояния модели не изменялись. Это обеспечивается введением обратно пропорциональной зависимости дисперсий $D_{ii}(k)$ компонент $\xi_i(k)$ вектора $\xi(k)$ от шага h [2]:

$$D_{ii}(k) = \sigma_i^2(k) / h, \quad i = \overline{1, n}, \quad (7)$$

где $\sigma_1(k)$ – среднеквадратичное отклонение (СКО) темпа рождаемости-смертности; $\sigma_2(k)$ – СКО темпа загрязнения; $\sigma_3(k)$ – СКО темпа фондообразования; $\sigma_4(k)$ – СКО темпа потребления природных ресурсов; $\sigma_5(k)$ – СКО темпа изменения части фондов в сельском хозяйстве.

При моделировании стохастической динамики будем для простоты считать возмущения темпов стационарными с постоянной диагональной дисперсионной матрицей

$$D = \text{diag}[\sigma_1^2 / h, \sigma_2^2 / h, \sigma_3^2 / h, \sigma_4^2 / h, \sigma_5^2 / h]$$

при следующих ориентировочных значениях СКО темпов:

$$\begin{aligned} \sigma_1(k) &= 0,5E+8; \quad \sigma_2(k) = 1E+4; \quad \sigma_3(k) = 1E+4; \\ \sigma_4(k) &= 1E+4; \quad \sigma_5(k) = 1E-2. \end{aligned}$$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Пусть для наблюдения доступен весь вектор состояния $x(k)$ в каждый данный момент дискретного времени как в детерминированной, так и в стохастической системе. Пусть при этом наблюдения производятся без ошибок. Это довольно сильное и, по-видимому, не вполне реалистичное предположение. Но для выяснения возможностей синтеза управлений в такой сложной системе, как мировая динамика, подобное упрощение представляется оправданным.

Поставим задачи синтеза оптимального управления системой, описываемой детерминированной моделью Форрестера (4) или более общей стохастической моделью (6).

Одним из основных выводов работы Форрестера [1] является тревога, вызванная постоянным ростом численности населения планеты, прогрессирующим загрязнением окружающей среды, истощением природных ресурсов, уменьшением площадей для сельскохозяйственной деятельности и другими явлениями, могущими привести к возможному существенному снижению качества питания и уровня жизни людей. Мировая динамика нестабильна, далека от равновесия. В связи с этим возникает вопрос, нельзя ли ввести в модель мировой динамики стабилизирующие факторы, глобальные управления, способные удерживать ее в состоянии некоторого равновесия.

Очевидно, такие управляющие факторы могут быть введены только в правую часть уравнений динамики (4) или (6). В простейшем случае эти управления могут линейно влиять на темпы изменения переменных состояния, то есть входить в правую часть уравнений состояния аддитивно:

$$x(k+1) = x(k) + h(f(k, x(k)) + \xi(k) + Bu(k)), \quad (8)$$

где $u(k)$ – вектор управляющих воздействий; B – матрица передачи управлений соответствующей размерности. Управления $u(k)$ могут влиять на темпы роста населения, темпы загрязнения, темпы роста фондов, темпы использования природных ресурсов и, наконец, на долю капиталовложений в сельское хозяйство.

Для синтеза оптимального управления необходимо задать цель управления, обычно связываемую с минимизацией некоторого аддитивного функционала на траектории переменных системы и управлений:

$$J[y, u] = \sum_{k=1}^{N-1} f_0(k, y(k), u(k)) + \Phi(N, y(N)) \Rightarrow \min_{u, x}.$$

В качестве цели управления можно выбрать стабилизацию на каком-либо заданном уровне одной или нескольких переменных (переменных состояния, переменных-темпов или переменных-параметров). В этом случае можно выбрать квадратичный критерий управления:

$$\begin{aligned} J[y, u] &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} (y(k+1) - y^*)^T R(k+1) (y(k+1) - y^*) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} u(k)^T Q(k) u(k) \Rightarrow \min_{u, y}, \end{aligned} \quad (9)$$

где вектор y^* определяет желаемые уровни стабилизации соответствующих переменных. Неотрицательно определенная матрица $R(k+1)$ «штрафует» отклонения от желаемых значений тех переменных, которые требуется стабилизировать, обнуляя вклад в функционал тех переменных, стабилизация которых не требуется. Матрица $Q(k)$ квадратичной формы по управлениям должна быть положительно определенной (следовательно, невырожденной). Она «штрафует» большие значения управлений. Чем больше диагональные элементы этой матрицы, тем меньше ресурс соответствующих компонент управления, и наоборот.

Синтез оптимального управления нелинейной системой, тем более при неаналитическом задании нелинейностей, в общем случае является крайне сложным делом даже при таком простом критерии оптимальности, как квадратичный. Однако для линеаризованной подходящим образом системы в отсутствие ограничений на управление найти структуру оптимального управления не составляет труда, поскольку решение задачи оптимального управления линейной системой (как с непрерывным, так и с дискретным временем) при квадратичном критерии хорошо известно [3,4]. Это задача аналитического конструирования оптимального регулятора (АКОР). Полученное при этом оптимальное управление в k -й момент времени $u(k) = u^*(k)$ не стеснено никакими ограничениями, кроме квадратичной штрафной функции в функцио-

нале (9). При наличии дополнительных ограничений на управления типа неравенств

$$|u_i(k)| \leq c_i(k), \quad c_i(k) \geq 0, \quad i = \overline{1, l}, \quad (10)$$

где l – размерность вектора управления, оптимальные управления соответственно ограничиваются:

$$u_i(k) = c_i(k) \operatorname{sign}(u_i^*(k)), \quad i = \overline{1, l}, \quad (11)$$

где $\operatorname{sign}(\cdot)$ – знаковая функция. Заметим, что соотношение (11) определяет оптимальное управление в условиях ограничений (10) только в случае скалярных управлений, когда $l=1$. В векторном случае это соотношение определяет лишь субоптимальное управление.

КВАЗИЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ

Предположим, нам удалось решить задачу (8), (9) при начальном условии $\bar{x}(1)$, не равном $x(1)$, но близком к нему. Тогда последовательность $\bar{x}(k)$, $k = \overline{1, N}$, образует оптимальную фазовую траекторию, соответствующую начальному условию $\bar{x}(1)$, а последовательность $\bar{u}(k)$, $k = \overline{1, N-1}$, – оптимальное управление на этой траектории. Произведем линеаризацию системы (8) относительно траектории $\bar{x}(k)$, разложив функцию $f(k, x(k))$ в правой части векторного уравнения (8) в ряд Тейлора по $x(k)$ около точки $\bar{x}(k)$:

$$f(k, x(k)) = f(k, \bar{x}(k)) + \frac{\partial f(k, \bar{x}(k))}{\partial x(k)}(x(k) - \bar{x}(k)) + o(|x(k) - \bar{x}(k)|)$$

и ограничившись линейным приближением

$$x(k+1) = A(k, \bar{x}(k))x(k) + h(v(k, \bar{x}(k)) + \xi(k) + Bu(k)), \quad (12)$$

где обозначено:

$$A(k, \bar{x}(k)) = I + h \frac{\partial f(k, \bar{x}(k))}{\partial x(k)}; \quad (13)$$

$$v(k, \bar{x}(k)) = f(k, \bar{x}(k)) - \frac{\partial f(k, \bar{x}(k))}{\partial x(k)} \bar{x}(k). \quad (14)$$

Система (12) линейна по состояниям $x(k)$ и управлениям $u(k)$. Естественно, при $\bar{x}(1) = x(1)$ эта система в точности совпадает с нелинейной системой (8). В этом случае система (12) становится как бы линейной, квазилинейной [5]. Но для такой квазилинейной системы (12) уже можно построить оптимальное в смысле критерия (9) управление.

СТРУКТУРА АЛГОРИТМА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Выпишем формулы, определяющие структуру оптимального управления для нестационарной линейно-квадратичной задачи (9), (11) (задачи АКОР) с дискретным временем при точно известном начальном условии $x(1)$ и точных и полных наблюдениях вектора состояния $x(k)$ [4, 5]:

$$u^*(k) = -Q^{-1}(k)B^T P(k+1)A(k, \bar{x}(k))\Delta x(k), \quad (15)$$

где $\Delta x(k) = x(k) - x^*$ – отклонение вектора состояния $x(k)$ от значения x^* , соответствующего желаемому значению y^* вектора $y(k)$ переменных системы, а матрица $P(k+1)$ определяется решением рекуррентного матричного уравнения Риккати в любой из удобных форм

$$P(k) = R(k) + A(k, \bar{x}(k))^T P(k+1) \times \\ \times (I + BQ^{-1}B^T P(k+1))^{-1} A(k, \bar{x}(k)); \quad (16')$$

$$P(k) = A(k, \bar{x}(k))^T P(k+1)A(k, \bar{x}(k)) - \\ - A(k, \bar{x}(k))^T P(k+1)B(B^T P(k+1)B + Q(k))^{-1} \times \\ \times B^T P(k+1)A(k, \bar{x}(k)) + R(k); \quad (16'')$$

$$P(k) = R(k) + A(k, \bar{x}(k))^T \times \\ \times (P(k+1)^{-1} + BQ^{-1}B^T)^{-1} A(k, \bar{x}(k)) \quad (16''')$$

в обратном времени с граничным условием на правом конце $P(N) = R(N)$.

Если нет дополнительных ограничений на управления, то $u(k) = u^*(k)$. Если имеются дополнительные ограничения вида (10), оптимальное управление корректируется в соответствии с формулой (11) с учетом замечания к этой формуле.

Получив структуру алгоритма построения оптимального управления (15), (16), перейдем к пределу при $\bar{x}(1) \rightarrow x(1)$. Тогда в выражениях (15), (16) траектория $\bar{x}(k)$ заменится на $x(k)$ – оптимальную управляемую траекторию. Линеаризация больше не требуется. Уравнения для оптимальной управляемой траектории и оптимального управления примут вид

$$x(k+1) = x(k) + h(f(k, x(k)) + \xi(k) + Bu(k)); \quad (17)$$

$$u^*(k) = -Q^{-1}(k)B^T P(k+1)A(k, x(k))\Delta x(k); \quad (18)$$

$$\Delta x(k) = x(k) - x^*; \quad (19)$$

$$u(k) = u^*(k), \quad (20')$$

$$\text{или} \quad u(k) = c(k) \operatorname{sign}(u^*(k)); \quad (20'')$$

$$P(k) = R(k) + A(k, x(k))^T P(k+1) \times \\ \times (I + BQ^{-1}B^T P(k+1))^{-1} A(k, x(k)), \quad (21')$$

$$\text{или} \quad P(k) = A(k, x(k))^T P(k+1)A(k, x(k)) - \\ - A(k, x(k))^T P(k+1)B(B^T P(k+1)B + Q(k))^{-1} \times \\ \times B^T P(k+1)A(k, x(k)) + R(k), \quad (21'')$$

$$\text{или} \quad P(k) = R(k) + A(k, x(k))^T \times \\ \times (P(k+1)^{-1} + BQ^{-1}B^T)^{-1} A(k, x(k)) \quad (21''')$$

с граничными условиями

$$x(1) = x(1), \quad P(N) = R(N). \quad (22)$$

Получилась нелинейная двухточечная краевая задача (ДТКЗ). Чтобы вычислить управление (18) в текущий момент времени, нужно решить уравнение

Риккати (21) в обратном времени, начиная с момента окончания процесса управления. Но матрица $A(k, x(k))$ этого уравнения зависит от состояния системы в текущий момент времени, а оно может быть достигнуто только при наличии управлений до этого момента, то есть решений уравнения Риккати до этого момента. Следовательно, оптимальное управление, определяемое соотношениями (18)–(22), оказывается физически нереализуемым.

ПОСТРОЕНИЕ АЛГОРИТМОВ ФИЗИЧЕСКИ РЕАЛИЗУЕМОГО СУБОПТИ- МАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Для реализации алгоритма оптимального управления необходимо знание матрицы $A(k, x(k))$ в любой момент времени до и после текущего момента, что физически невозможно, так как эта матрица зависит от траектории движения управляемой системы и не может быть известной для моментов времени, будущих по отношению к текущему.

Отсюда следует, что для построения физически реализуемого алгоритма управления необходимо каким-то образом вычислять (точно или приближенно) матрицы $A(k, x(k))$ на траектории $x(k)$.

Очевидно, проще всего это можно сделать, если управляемая система слабо нелинейна, то есть если матрица $A(k, x(k))$ сравнительно мало изменяется на фазовой траектории $x(k)$, в том числе на неуправляемой траектории. Тогда эта матрица будет мало отличаться от своего среднего значения на траектории $x(k)$, в том числе неуправляемой:

$$A(k, x(k)) \approx \bar{A}, \quad \bar{A} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N A(k, x(k)). \quad (23)$$

Рассмотрим два возможных варианта реализации алгоритма управления на основе предположения о справедливости условия (23). Эти алгоритмы не будут, строго говоря, оптимальными, но в условиях предположения (23) они будут близкими по качеству к оптимальному. Будем называть их субоптимальными.

Алгоритм 1

Предположим, что соотношение (23) действительно имеет место.

1. Заменим в уравнении Риккати (21) матрицу $A(k, x(k))$ матрицей $\bar{A}$, вычисленной по формуле (23) на неуправляемой траектории, и решим уравнение (21) в обратном времени с граничным условием (22) на правом конце. Запомним полученную последовательность матриц $P(N), \dots, P(1)$.

2. По заданному начальному состоянию $x(1)$ вычислим матрицу $A(1, x(1))$ и, используя формулу (18), начальное управление

$$u^*(1) = -Q^{-1}(1)B^T P(2)A(1, x(1))\Delta x(1),$$

скорректировав его, если нужно, по формуле (20).

3. Получив с этим управлением одношаговое решение $x(2)$ уравнения замкнутой (управляемой) системы, по известному теперь состоянию $x(2)$ вычислим матрицу $A(2, x(2))$ и, используя формулу (18), управление

$$u^*(2) = -Q^{-1}(2)B^T P(3)A(2, x(2))\Delta x(2),$$

скорректировав его, если нужно, по формуле (20).

4. Продолжая этот процесс, по известному на k -м шаге состоянию $x(k)$ вычислим матрицу $A(k, x(k))$ и, используя формулу (18), управление

$$u^*(k) = -Q^{-1}(k)B^T P(k+1)A(k, x(k))\Delta x(k),$$

скорректировав его, если нужно, по формуле (20).

5. Получив реализовавшееся с этим управлением в соответствии с уравнением (17) состояние $x(k+1)$, переходим на шаг 4 с увеличением индекса k на единицу.

6. По достижении шага N (финального состояния $x(N)$ управляемого процесса) заканчиваем процесс управления.

Мы получили физически реализуемый субоптимальный алгоритм управления с обратной связью, причем матрица $P(k+1)$, входящая в матрицу коэффициентов обратной связи в выражении (18), вычисляется заранее с использованием усредненной матрицы $\bar{A}$. Заменять усредненной матрицей $\bar{A}$ матрицу $A(k, x(k))$ в выражении (18) для управления нет необходимости. Она может быть вычислена в каждый текущий момент времени на траектории системы. Однако в вычислительном отношении алгоритм 1 проще, когда матрица $A(k, x(k))$ в выражении (18) тоже заменена матрицей $\bar{A}$.

Таким образом, соотношения (17)–(22), определяющие структуру оптимального управления, не изменяются для субоптимального реализуемого управления, только в уравнении (21) матрица $A(k, x(k))$ заменяется усредненной по неуправляемой траектории матрицей $\bar{A}$. Остается лишь проверить справедливость предположения (23).

Модифицированный алгоритм 1

Упрощенной модификацией алгоритма 1 является алгоритм, в котором, как и в алгоритме 1, уравнение Риккати (21) использует усредненную матрицу $\bar{A}$ вместо матрицы $A(k, x(k))$ и решается в обратном времени с условием (22) на правом конце. Но запоминается только матрица $P_0 = P(1)$, и на всех шагах алгоритма вместо матрицы $P(k+1)$ в выражении (18) для управления используется матрица P_0 . Для простоты матрица $A(k, x(k))$ в выражении (18) также заменяется матрицей $\bar{A}$.

Алгоритм 2

Другой вариант алгоритма субоптимального управления на основе предположения о справедливости условия (23) может быть реализован на текущей управляемой траектории. По форме он совпадает с алгоритмом 1, но матрицы $\bar{A}$ и P вычисляются по-иному.

1. Сначала в качестве матрицы $\bar{A}$ выбирается начальная матрица $\bar{A}(1) = A(1, x(1))$ и с ней в обратном времени решается уравнение Риккати (21) с граничным условием (22) на правом конце до получения матрицы $P(2)$. Матрица $\bar{A}(1)$ запоминается.

2. С полученной матрицей $P(2)$ по заданному начальному состоянию $x(1)$ по формулам (18), (19) находится управление $u(1)$ и, согласно уравнению (17), реализуется состояние управляемого процесса $x(2)$.

3. По известному теперь состоянию $x(2)$ находится матрица $A(2, x(2))$. Усредненная по двум шагам матрица

$$\bar{A}(2) = (A(1, x(1)) + A(2, x(2))) / 2$$

принимается за новую матрицу $\bar{A}$. Матрица $\bar{A}(2)$ запоминается.

4. Снова решается уравнение Риккати (21) с матрицей $\bar{A} = \bar{A}(2)$ на всей траектории и с граничным условием (22) на правом конце до получения матрицы $P(3)$. С полученной матрицей $P(3)$ находится управление $u(2)$ и реализуется состояние управляемого процесса $x(3)$.

5. По известному теперь состоянию $x(3)$ находится матрица $A(3, x(3))$ и усредненная по трем шагам матрица

$$\bar{A}(3) = (A(1, x(1)) + A(2, x(2)) + A(3, x(3))) / 3.$$

Матрица $\bar{A}(3)$ запоминается.

6. Затем снова решается уравнение Риккати (21) с матрицей $\bar{A} = \bar{A}(3)$ на всей траектории от финального момента времени до текущего с граничным условием (22) на правом конце до получения матрицы $P(4)$. С полученной матрицей $P(4)$ находится управление $u(3)$ и реализуется состояние управляемого процесса $x(4)$.

И так далее по шагам 5, 6 с увеличивающимся на единицу индексом, пока не будет достигнуто финальное состояние $x(N)$ управляемого процесса.

Процесс вычисления последовательности матриц $\bar{A}(k)$ можно осуществить по рекуррентной схеме:

$$\bar{A} = \bar{A}(k+1),$$

$$\bar{A}(k+1) = (k\bar{A}(k) + A(k+1, x(k+1))) / (k+1),$$

$$P(k+1), u(k), x(k+1), k = \overline{1, N-1}, \bar{A}(1) = A(1, x(1)).$$

При этом запоминать потребуется только последнее полученное значение $\bar{A}(k)$.

Конечно, этот алгоритм значительно более трудоемок, чем предыдущий, поскольку на каждом шаге алгоритма приходится решать уравнение Риккати в обратном времени от финального N -го момента времени до текущего k -го. Но зато усреднение матрицы $A(k, x(k))$ ведется на управляемой траектории.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕУПРАВЛЯЕМОЙ И УПРАВЛЯЕМОЙ ДЕТЕРМИНИРОВАННОЙ И СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛЕЙ МИРОВОЙ ДИНАМИКИ ФОРРЕСТЕРА

Прежде всего, проверим, выполняется ли для модели Форрестера предположение (23). При выбранных выше параметрах модели и начальных условиях вычислим матрицы $A(k, x(k))$ на интервале времени с $t(1) = 1900$ г. по $t(N) = 2100$ г. с шагом $h = 1/4$ года (1 квартал) на неуправляемой стохастической траектории. При этом случайные возмущения оставим только в темпах рождаемости–смертности. Матрицы $A(k, x(k))$ найдем численным дифференцированием. Вычислим эмпирические средние $\bar{A}$ и эмпирические дисперсии S^2 всех элементов этой матрицы на выбранной траектории:

$$\bar{A}_{i,j} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N A_{i,j}(k, x(k)),$$

$$S_{i,j}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (A_{i,j}(k, x(k)) - \bar{A}_{i,j})^2, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Для некоторой конкретной реализации траектории неуправляемого движения стохастической динамической системы, описываемой моделью Форрестера, получаем результат, представленный в табл. 1 и 2.

Таблица 1

$\bar{A}_{i,j}$	$j = 1$	2	3	4	5
$i = 1$	9,473 $E-001$	4,005 $E-003$	5,412 $E-002$	3,071 $E-006$	7,787 $E+007$
2	1,250 $E-002$	4,527 $E-001$	2,375 $E-001$	0	0
3	1,250 $E-003$	0	9,988 $E-001$	2,848 $E-006$	-2,540 $E+007$
4	-4,261 $E-015$	0	-1,112 $E-001$	9,999 $E-001$	5,644 $E+008$
5	4,405 $E-013$	7,783 $E-015$	-2,766 $E-013$	1,536 $E-016$	9,805 $E-001$

Таблица 2

$S_{i,j}$	$j = 1$	2	3	4	5
$i = 1$	2,8555 $E-002$	1,2276 $E-003$	9,9051 $E-003$	2,7107 $E-006$	1,9208 $E+007$
2	1,0290 $E-012$	5,3336 $E-002$	2,9151 $E-012$	0	0
3	4,2597 $E-014$	0	1,6008 $E-003$	2,4816 $E-006$	1,0204 $E+007$
4	5,7536 $E-013$	0	3,5573 $E-002$	5,5147 $E-005$	2,2675 $E+008$
5	8,7312 $E-014$	3,1843 $E-016$	1,8775 $E-013$	1,1860 $E-016$	3,2152 $E-004$

Эти же данные приведены в логарифмическом масштабе на рис.1 для абсолютного значения матрицы $|\bar{A}|$, вытянутой по столбцам, т.е. представленной в виде массива-столбца, составленного путем последовательного присоединения к первому столбцу остальных ее столбцов. Для наглядности соседние по номерам значения массива соединены линиями. Элементы с матричными индексами (3,2), (4,2), (2,4), (2,5),

имеющие соответственно номера 8, 9, 17, 22, равны 0, т.е. в логарифмическом масштабе равны $-\infty$, поэтому на рис. 1 они не представлены (пропущены). Эти пропущенные значения надо понимать просто как равные нулю. На этом же рисунке приведены матрицы $\bar{A} \mp S$ в том же представлении.

Как видно из сравнения табл. 1 и 2 и представленных на рис. 1 массивов, элементы матрицы $A(k, x(k))$ относительно незначительно флуктуируют на траектории движения (эволюции) системы. Это дает основание считать систему слабо нелинейной и предположение (23) справедливым.

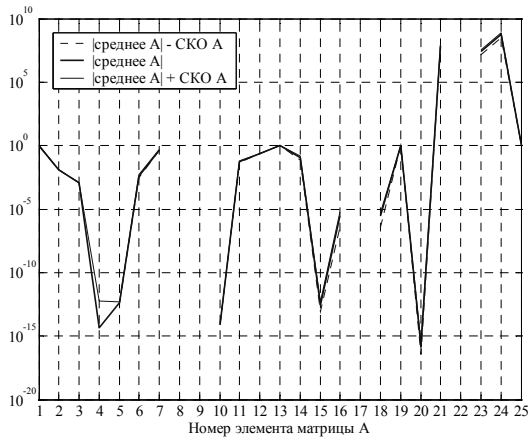


Рис. 1. Изменчивость матрицы A на траектории

Рассмотрим в качестве примера реализацию и детерминированной и стохастической модели мировой динамики Форрестера в отсутствие управления и в случае использования модифицированного алгоритма субоптимального ограниченного управления, в котором управления производятся только путем перераспределения капиталовложений (фондов) в сельское хозяйство, а критерием управления является стабилизация численности населения планеты на желаемом мировым сообществом уровне.

Возьмем в качестве желаемого значения численности населения $x_1^* = 5E+9$ (5 млрд) человек при начальном значении в 1900 г. $x_1(1) = 1,65E+9$ человек. Желаемых значений остальных переменных устанавливать не будем. Тогда вектор рассогласования $\Delta x(k)$, определяемый формулой (19) и входящий в выражение (18) для оптимального управления, примет вид

$$\Delta x(k) = [x_1(k) - x_1^*, 0, 0, 0, 0]^T.$$

Матрица $R(k)$ в этом случае должна иметь только один отличный от нуля элемент – первый диагональный. Примем $R(k) = \text{diag}[1, 0, 0, 0, 0] \quad \forall k = \overline{1, N}$.

В качестве управления u возьмем скалярную переменную – темп изменения доли капиталовложений в сельское хозяйство. В этом случае матрица B примет вид

$$B = [0, 0, 0, 0, 1]^T.$$

Примем $Q(k) = 3E+19 \quad \forall k = \overline{1, N-1}$.

Ограничим управление в соответствии с формулой (20), выбрав $c(k) = 0,03 \quad \forall k = \overline{1, N-1}$.

Стохастические возмущения в рассматриваемом примере будем вводить только в виде случайных независимых во времени флуктуаций темпа рождаемости–смертности, имеющих нормальное распределение с нулевым средним и стандартным отклонением (СКО) $\sigma_1(k) = 0,5E+8$. Тогда дисперсионная матрица стохастических возмущений в системе примет вид

$$D = \text{diag}[\sigma_1^2/h, 0, 0, 0, 0].$$

Нетрудно проверить, что линеаризованная система (12) при выбранной матрице $B = [0, 0, 0, 0, 1]^T$, а следовательно, и нелинейная система (17), вполне управляемы [3], поскольку матрица управляемости системы (12) с усредненной матрицей динамики $\bar{A}$ имеет полный ранг $n = 5$ и матрица $W(1, N)$ не вырождена:

$$\text{rank}[B, \bar{A}B, \bar{A}^2B, \bar{A}^3B, \bar{A}^4B] = 5, \quad \det W(1, N) \neq 0,$$

$$W(1, N) = \sum_{k=1}^{N-1} \Phi(N, k+1) B B^T \Phi^T(N, k+1),$$

$$\Phi(N, k+1) = A(N-1, x(N-1)) \cdots A(k+1, x(k+1)).$$

Результаты численного моделирования на двухсотлетнем интервале времени (с 1900 по 2100 г.) неуправляемой и управляемой систем мировой динамики Форрестера в отсутствие и при наличии стохастических возмущений приведены на рис. 2 – 12. Естественно, в силу ограниченности места мы приводим ход только некоторых переменных модели.

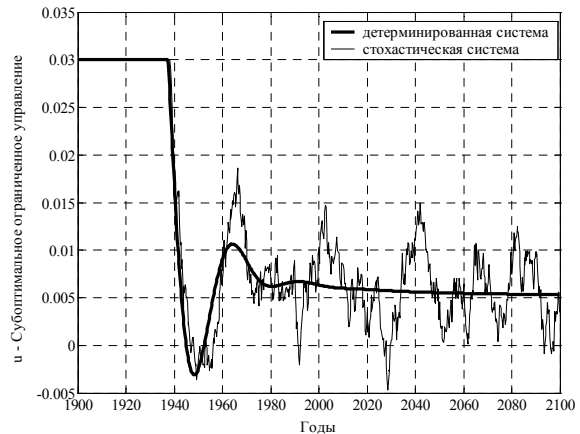


Рис. 2. Субоптимальное ограниченное управление

На рис. 2 приведен ход субоптимальных ограниченных управлений с обратной связью для детерминированной и стохастической системы. Управление построено по модифицированному алгоритму 1.

Видно, что на начальном (почти 20-летнем) интервале времени управление принимает максимально возможное значение, т.е. перераспределение капиталовложений в сельское хозяйство производится с максимальной возможной скоростью. Затем темп этого перераспределения резко снижается, даже на некоторое время становится отрицательным, а затем стабилизируется на сравнительно невысоком положительном уровне.

Такое поведение управления легко объясняется требованием критерия управления стабилизировать численность населения на уровне 5 млрд человек.

Действительно, как видно из рис. 3, в начальный момент времени (1900 г.) численность населения

(1,65 млрд человек) еще далека от желаемой (5 млрд человек). Для увеличения численности населения по модели Форрестера требуется существенное увеличение производства продуктов питания, что и потребовало в начальном периоде быстрее увеличения доли капиталовложений (фондов) в сельское хозяйство. К концу этого периода население почти достигает, как видно из рис.3, желаемого значения численности, и доля капиталовложений в сельское хозяйство должна быть резко снижена, чтобы не допустить дальнейшего роста населения.

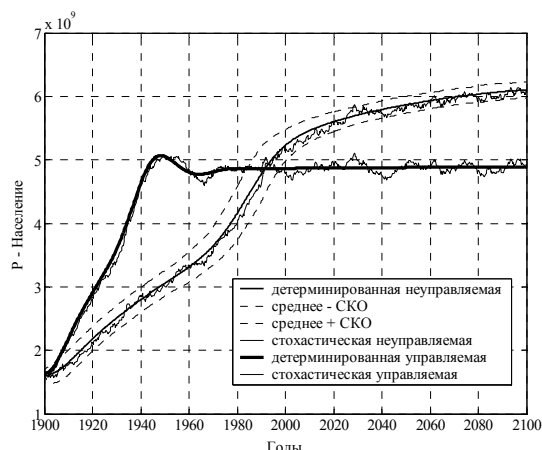


Рис. 3. Динамика численности населения

На приведенных здесь же кривых роста численности населения в неуправляемой системе стабилизация населения в рассматриваемом интервале времени (1900 – 2100 гг.) не наступает (возможно, стабилизация произойдет значительно позже из-за сопровождающего рост населения истощения ресурсов).

На рис. 4 представлена относительная (в расчете на душу населения) величина фондов в сельском хозяйстве. На кривых, соответствующих управляемому

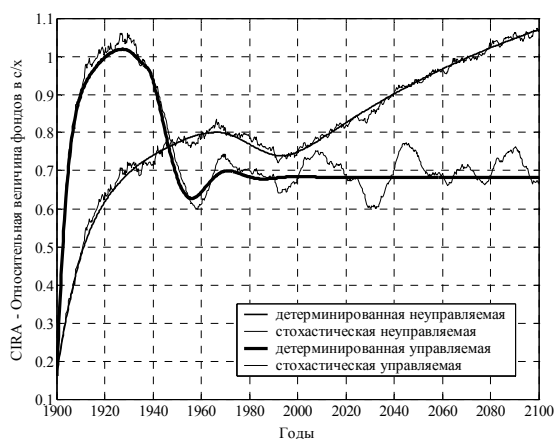


Рис. 4. Относительная величина фондов в сельском хозяйстве

движению, виден существенный подъем этой величины на участке стимулирования роста населения и стабилизация ее в последующем периоде. На кривых, соответствующих неуправляемой системе, относительная величина фондов в сельском хозяйстве в целом растет вместе с ростом населения.

На рис. 5 и 6 приведены темпы рождаемости и смертности населения.

Видно, что в управляемой системе вместе со стабилизацией численности населения стабилизируются и темпы рождаемости и смертности, даже при наличии весьма значительных собственных (естественных) флуктуаций этих темпов.

В неуправляемой системе темпы рождаемости и смертности растут с ростом численности населения.

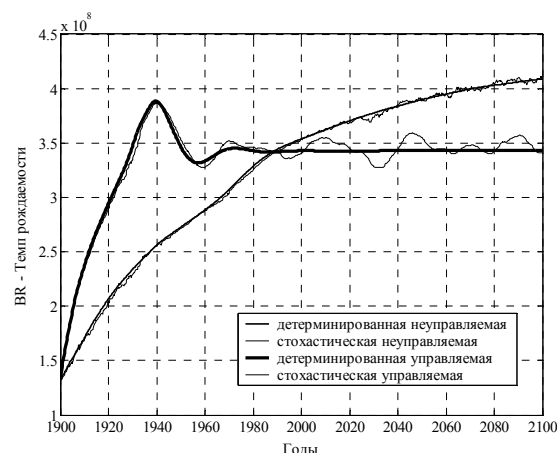


Рис. 5. Темп рождаемости

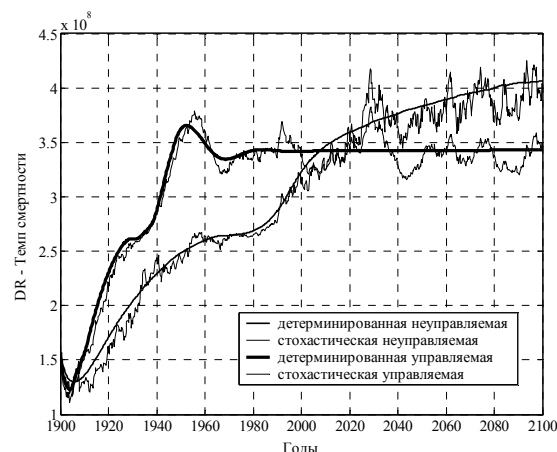


Рис. 6. Темп смертности

Обратим внимание, что колебания темпов рождаемости и смертности в стохастической системе существенно различаются, хотя темп прироста населения равняется просто разности темпов рождаемости и смертности. Здесь проявляются достаточно сложные влияния на темп смертности материального уровня жизни, уровня питания, уровня загрязнения, плотности населения, учитываемые моделью Форрестера.

На рис.7 приведен ход безразмерного относительного уровня питания населения. Этот показатель определяет количество пищи на душу населения в единицах среднего мирового уровня питания на душу населения в каком-нибудь выбранном году (в данном случае в неуправляемой модели это соответствует уровню питания населения в 1940 г.).

Видно, что в начальном периоде управляемого процесса благодаря интенсивным капиталовложениям в сельское хозяйство уровень питания населения быстро растет, но с ростом населения уровень питания неизбежно начинает падать, причем падение его в управляемой системе происходит быстрее, чем в неуправляемой (требование стабилизации уровня насе-

ления). По достижении некоторого минимального для системы значения уровень питания стабилизируется.

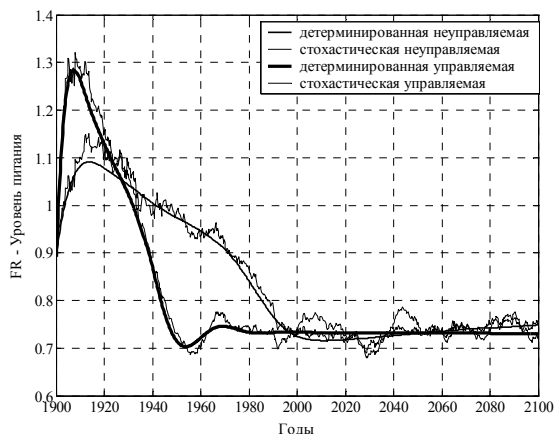


Рис. 7. Относительный уровень питания

Очевидно, перераспределение капиталовложений в сельское хозяйство должно привести к уменьшению доли фондов в другие сферы человеческой деятельности, в том числе в материальную сферу. Поэтому материальный уровень жизни населения должен снизиться, тем более что капиталовложения в материальную сферу резко снижаются в начальный период интервала управления, затрудняя поддержание и развитие материальной сферы.

На рис.8 приведены кривые хода материального уровня жизни при наличии и отсутствии управления. Материальный уровень жизни в модели Форрестера есть безразмерная величина, которая описывает степень изменения эффективности относительной величины фондов на душу населения в сравнении с некоторым стандартом – фиксированным значением.

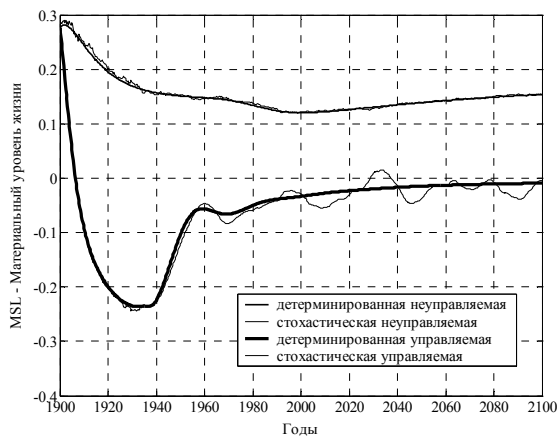


Рис. 8. Материальный уровень жизни

Видно, что в отсутствие управления в модели Форрестера происходит некоторое снижение материального уровня жизни с ростом населения. Но в управляемой системе это снижение идет значительно быстрее в силу рассмотренных выше обстоятельств, причем в период стимуляции роста населения, когда темпы перераспределения фондов в сельское хозяйство максимальны, падение материального уровня жизни происходит особенно быстро и ощутимо, существенно понижая материальный уровень жизни по сравнению со стандартом. Постепенно со стабилизацией

численности населения стабилизируется и материальный уровень жизни, оставаясь, однако, несколько ниже принятого стандарта.

На материальный уровень жизни непосредственно влияет эффективность относительной величины фондов (переменная-параметр $p_{11}(k) = ECIR$), которая пропорциональна произведению фондовооруженности в целом (относительной величины фондов $p_{14}(k) = CIR$) и доли капитала $1 - p_{13}(k) = 1 - CIRA$, не используемого в сельском хозяйстве. Коэффициент пропорциональности, в свою очередь, тем меньше, чем меньше остающаяся часть природных ресурсов. А последняя тем меньше, чем больше численность населения.

На рис. 9 представлен ход относительной величины фондов (фондовооруженность) для управляемой и неуправляемой системы. Снижение фондовооруженности на начальном участке управляемой траектории по сравнению с неуправляемой можно объяснить необходимостью увеличения уровня питания на участке стимулирования роста населения.

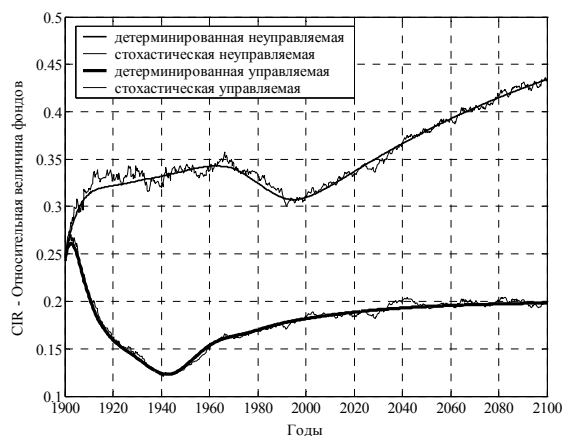


Рис.9. Относительная величина фондов (фондовооруженность)

А предписываемая уровнем питания часть фондов тем ниже, чем выше уровень питания, и наоборот, как это видно из сравнения рис.10 с рис.7. Кривые рис. 10 ведут себя в определенном смысле обратно кривым рис.7, выражающим относительный уровень питания. При стабилизации уровня питания стабилизируется и предписываемая уровнем питания часть фондов. В управляемой системе эта стабилизация наступает раньше, в неуправляемой – позже, но все равно наступает.

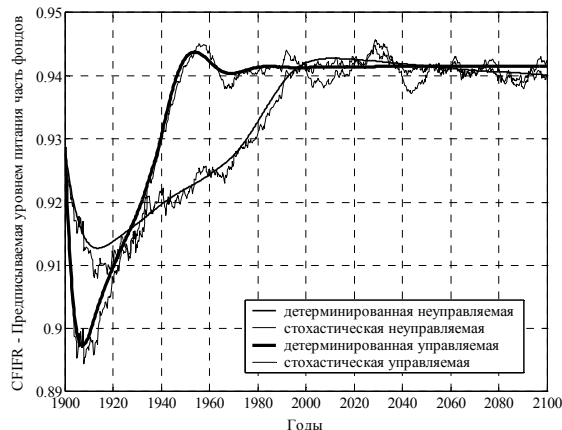


Рис. 10. Предписываемая уровнем питания часть фондов

На рис.11 представлены кривые изменения качества жизни при наличии и в отсутствие управления.

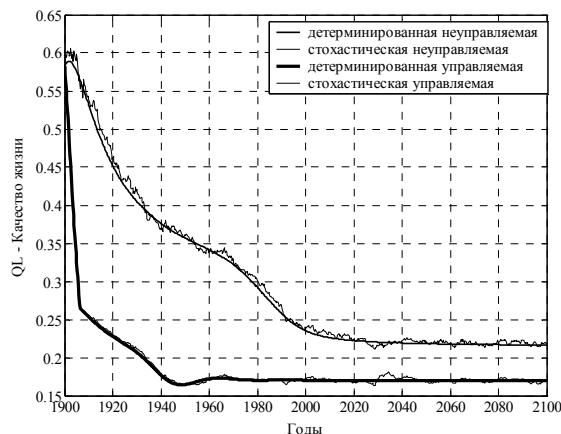


Рис. 11. Качество жизни

Качество жизни в модели Форрестера используется как мера функционирования мировой системы. Качество жизни определяется как степень удовлетворенности жизнью. Она зависит от многих факторов: уровня питания (значительно больше, чем от материального уровня, когда уровень питания низок), материального уровня (когда уровень питания высок, а материальный уровень низок), плотности населения (если она слишком велика), загрязнения окружающей среды (если оно ощутимо влияет на условия жизни). Эти и некоторые другие факторы достаточно полно учитываются в модели Форрестера [1].

На рис.11 видно, что в неуправляемой системе качество жизни постепенно снижается, стабилизируясь, в конце концов, на некотором не очень высоком уровне. И объяснить это можно увеличением численности и соответственно плотности населения, увеличением уровня загрязнения среды, истощением ресурсов и т.д. В управляемой же системе, вопреки ожиданиям, связанным со стабилизацией численности населения, дело с качеством жизни обстоит еще хуже: качество жизни резко падает в период стимуляции роста населения и устанавливается со стабилизацией численности населения на еще более низком уровне, чем в неуправляемой системе.

Объяснить в какой-то мере это парадоксальное явление можно с помощью рис.12, показывающего ход во времени изменения доли капиталовложений в зависимости от качества жизни. Как видно из сравнения рис. 3, 11 и 12, при стабилизации численности населения в управляемой системе путем резкого перераспределения фондов в сельское хозяйство уровень капиталовложений в остальные сферы жизни резко снизился, что привело к быстрому снижению качества жизни. А это, в свою очередь, привело к снижению доли капиталовложений, направляемых на

повышение качества жизни. И хотя численность населения в управляемой системе сравнительно быстро пришла в желаемое стационарное состояние, качество жизни стабилизировалось на сравнительно низком уровне, а это стабилизировало также на сравнительно низком уровне долю капиталовложений, направляемых на повышение качества жизни, что опять-таки стабилизирует на сравнительно низком уровне качество жизни.

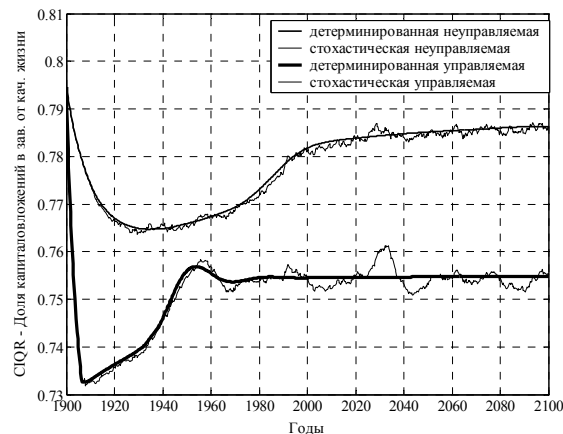


Рис. 12. Доля капиталовложений в зависимости от качества жизни

Однако, если бы каким-нибудь образом, например, путем технического прогресса, удалось повысить эффективность капиталовложений, направляемых на повышение качества жизни, парадокс снижения качества жизни при стабилизации численности населения мог бы легко разрешиться. Следовательно, парадокс обусловлен несовершенством модели, тем обстоятельством, что в рассматриваемом примере все параметры-константы модели действительно остаются постоянными, тогда как в реальности они могут существенно изменяться (и изменяются!) благодаря техническому прогрессу. В модели просто отсутствуют переменные, отвечающие за технический прогресс, хотя в модели Форрестера предусмотрена возможность скачкообразного изменения параметров модели в любой заданный момент времени с помощью «клиппирующих» функций.

В заключение заметим, что использование других форм алгоритма субоптимального управления (алгоритма 1 или 2) приводит практически к тем же результатам и существенно не меняет выводов, полученных в результате численного исследования управляемой детерминированной или стохастической модели мировой динамики Форрестера. И главный вывод состоит в том, что модель Форрестера управляема, то есть допускает стабилизацию вектора состояния и, следовательно, всех других переменных модели при наличии достаточных ресурсов управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Форрестер Дж. Мировая динамика. М.: Наука, 1978.
2. Кузнецов Д.Ф. Численное моделирование стохастических дифференциальных уравнений и стохастических интегралов. М.: Наука, 2000.
3. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
4. Медич Дж. Статистически оптимальные линейные оценки и управление. М.: Энергия, 1973.
5. Сейдж Э.П., Мелса Дж. Идентификация систем управления. М.: Наука, 1974.