УДК 681.142.2

А.Ф. Терпугов, Н.П. Щирова

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СКЛАДА

Рассматривается математическая модель деятельности склада, где особое внимание уделено применению релейно-гистерезисного управления ценой на товар. Правило управления устанавливается в зависимости от пороговых значений объемов товара, имеющегося в наличии на складе. Рассматриваются такие величины, как вероятности возникновения «упущенной выгоды» и осуществления продаж товара. Исследуется плотность вероятностей величины товара на складе.

Пусть имеется предприятие, результатом деятельности которого, является выпуск однородной продукции с постоянной скоростью θ единиц в единицу времени. Следовательно, за период времени Δt предприятием будет произведено $\theta\cdot\Delta t$.

Для хранения готового продукта существует специальное помещение – склад. Через $Q(t)$ обозначим количество товара на складе в момент времени t.

Естественно, что реализация готового продукта зависит от спроса покупателей. Итак, обозначим $\lambda(S)$ – интенсивность потока покупателей, где S – стоимость единицы продукции. Очевидно, что монотонно убывает $\lambda(S)$ с ростом цены S. Случайное количество продукции, которое забирают с собой покупатели, обозначим ξ. Будем считать, что покупки ξ имеют экспоненциальное распределение $p_\xi(x)=\frac{1}{a}\exp\left(-\frac{x}{a}\right)$.

РЕЛЕЙНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЦЕНОЙ НА ПРОДУКЦИЮ С ГИСТЕРЕЗИСОМ

Устанавливается два пороговых значения для величины товара на складе Q_1 и Q_2 ($Q_1 < Q_2$). В области $Q < Q_1$ всегда устанавливается цена S_1, что приводит к интенсивности потока покупок величины $\lambda_1 = \lambda(S_1)$. В области $Q > Q_2$ всегда устанавливается цена S_2, что приводит к интенсивности потока покупок величины $\lambda_2 = \lambda(S_2)$. Причем $S_1 < S_2$, тогда $\lambda_2 > \lambda_1$, что уменьшает риск переполнения склада.

Для области $Q_1 < Q < Q_2$ используем следующее правило: если мы попали в эту область из области $Q < Q_1$, то цена на товар сохраняется со значением S_1 и, следовательно, $\lambda = \lambda_1$; если же мы попали в эту область из области $Q > Q_2$, то значение цены сохраняется величиной S_2 и, следовательно, $\lambda = \lambda_2$.

Найдем плотность вероятностей $p(Q)$ количества продукции Q на складе во всех областях.

Начнем с области $Q > Q_2$. Согласно нашей модели, в этой области интенсивность потока покупателей $\lambda = \lambda_2$; через $p_2(Q)$ обозначим плотность вероятностей в этой области. Выведем явное выражение для $p_2(Q)$. Пусть мы имеем некоторый момент времени t. Тогда получить количество продукции Q на складе мы можем двумя путями:

а) в момент времени $t - \Delta t$ количество товара на складе было равно $Q - \theta\Delta t$, и за интервал времени Δt было произведено продукции $\theta\Delta t$ с вероятностью $(1 - \lambda_2\Delta t) + o(\Delta t)$;

б) с вероятностью $\lambda_2\Delta t + o(\Delta t)$ за период времени Δt удалось реализовать продукцию в размере ξ, так что в момент времени $t - \Delta t$ количество продукции на складе составило $Q + \xi - \theta\Delta t$.

Для вывода явного вида используем идеологию вывода обратных уравнений Колмогорова для марковских процессов:

$$p_2(Q) = p_2(Q-\theta\Delta t)(1-\lambda_2\Delta t) + \lambda_2\Delta t\int_0^\infty p_2(Q+x)p_2(x)\,dx + o(\Delta t). \qquad (1)$$

Разложим $p_2(Q - \theta\cdot\Delta t)$ в ряд Тейлора

$$p_2(Q-\theta\Delta t) = p_2(Q) - p_2'(Q)\theta\Delta t + o(\Delta t)$$

и подставим в (1)

$$p_2(Q) = \left[p_2(Q) - p_2'(Q)\theta\Delta t\right](1-\lambda_2\Delta t) + \lambda_2\Delta t\int_0^\infty p_2(Q+x)p_\xi(x)\,dx + o(\Delta t).$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые

$$0 = -p_2'(Q)\theta\Delta t - \lambda_2 p_2(Q)\Delta t + \lambda_2\Delta t\int_0^\infty p_2(Q+x)p_\xi(x)\,dx + o(\Delta t).$$

Последнее выражение делим на Δt и устремляем к нулю $\Delta t\to 0$. С учетом того, что

$$p_\xi(x) = \frac{1}{a}\exp\left(-x/a\right),$$

получим

$$\int_0^\infty p_2(Q+x)\frac{1}{a}\exp\left(-\frac{x}{a}\right)dx = \frac{1}{a}\int_Q^\infty p_2(y)e^{Q/a}e^{-y/a}\,dx.$$

Имеем

$$p_2'(Q)\theta + \lambda_2 p_2(Q) - \lambda_2\frac{1}{a}e^{Q/a}\int_Q^\infty p_2(y)e^{-y/a}\,dy = 0. \qquad (2)$$

Умножим (2) на $e^{-Q/a}$:

$$p_2'(Q)e^{-\frac{Q}{a}}\theta + \lambda_2 e^{-\frac{Q}{a}}p_2(Q) - \lambda_2\frac{1}{a}\int_Q^\infty p_2(y)e^{-\frac{Q}{a}}\,dy = 0.$$

Дифференцируем по Q:

$$p_2''(Q)e^{-Q/a}\theta - \frac{1}{a}p_2'(Q)e^{-Q/a}\theta + \lambda_2 p_2'(Q)e^{-Q/a} - \frac{\lambda_2}{a}p_2(Q)e^{-Q/a} + \frac{\lambda_2}{a}p_2(Q)e^{-Q/a} = 0.$$

Все выражение умножим на $e^{Q/a}$ и соберем подобные слагаемые:

$$p_2''(Q)\theta + \frac{a\lambda_2-\theta}{a}p_2'(Q) = 0. \qquad (3)$$

Обозначим для краткости $\frac{a\lambda_2-\theta}{a\theta} = \kappa_1$, причем $\kappa_1 > 0$. Тогда общее решение уравнения (3) будет иметь вид

$$p_2(Q) = C_2 e^{-\kappa_1 Q} + D_2. \qquad (4)$$

Заметим, что $\lim\limits_{Q\to\infty} p_2(Q) = 0$ и, следовательно, $D_2 = 0$.

Для удобства дальнейших записей возьмем C_2 в виде

$$C_2 = C\,e^{\kappa_1 Q_2}. \qquad (5)$$

Тогда окончательно для $p_2(Q)$ получаем

$$p_2(Q) = Ce^{-\kappa_1(Q - Q_2)};\; Q > Q_2. \qquad (6)$$

Вид $p_2(Q)$ в области $Q > Q_2$ изображен на рис. 1.

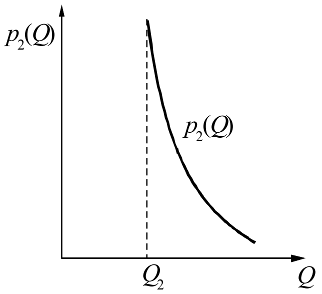

Рис. 1

Перейдем к рассмотрению области $Q_1 < Q < Q_2$. Здесь возможны два варианта: $\lambda = \lambda_1$ или $\lambda = \lambda_2$. Рассмотрим ситуацию при $\lambda = \lambda_1$. Соответствующую плотность вероятностей будем обозначать $p_{01}(Q)$. Здесь существует одно условие: при скачке вверх величина $Q + x$ должна быть меньше Q_2, т.е. $Q + x < Q_2$, $x < Q_2 - Q$. Тогда за период Δt рассмотрение исходов приводит к уравнению

$$p_{01}(Q) = p_{01}(Q - \theta\Delta t)\,(1 - \lambda_1\Delta t) + \\ + \lambda_1\Delta t \int_0^{Q_2 - Q} p_{01}(Q + x)\,p_\xi(x)\,dx. \qquad (7)$$

Как и выше, $p_{01}(Q - \theta\cdot\Delta t)$ раскладываем в ряд Тейлора:

$$p_{01}(Q - \theta\Delta t) = p_{01}(Q) - p'_{01}(Q)\theta\Delta t + o(\Delta t).$$

Полученное выражение подставим в (7). Раскрываем скобки, приводим подобные слагаемые:

$$p'_{01}(Q)\theta + \lambda_1 p_{01}(Q) = \\ = \lambda_1 \int_0^{Q_2 - Q} p_{01}(Q + x)\,p_\xi(x)\,dx + o(\Delta t). \qquad (8)$$

Далее используем те же рассуждения, что и в (1) – (6), что приводит к дифференциальному уравнению

$$p''_{01}(Q)\,\theta - \frac{\theta - a\lambda_1}{a}\,p'_{01}(Q) = 0. \qquad (9)$$

Обозначим $\dfrac{\theta - a\lambda_1}{a\theta} = \kappa_0$; $\kappa_0 > 0$. Тогда общее решение уравнения (9) имеет вид

$$p_{01}(Q) = D_{01} - C_{01}e^{\kappa_0 Q}. \qquad (10)$$

Знак «минус» перед вторым слагаемым взят для удобства окончательного результата. В отличие от предыдущей части, здесь константы C_{01} и D_{01} не могут быть произвольными, так как в (8) в верхнем пределе интеграла стоит $Q_2 - Q$, а не бесконечность. Подставим выражение (10) в (8). Имеем

$$p'_{01}(Q)\,\theta + \lambda_1 p_{01}(Q) = \\ = \lambda_1 \int_0^{Q_2 - Q} p_{01}(Q + x)\,p_\xi(x)\,dx + o(\Delta t).$$

С учетом того, что $p_\xi(x) = \dfrac{1}{a}\exp\left(-\dfrac{x}{a}\right)$, рассмотрим интеграл по слагаемым:

$$\int_0^{Q_2 - Q} D_{01}\frac{1}{a}\,e^{-\frac{x}{a}}dx = D_{01}\left(1 - e^{-\frac{Q_2}{a} + \frac{Q}{a}}\right),$$

$$\int_0^{Q_2 - Q} \exp\left(\frac{\theta - a\lambda_1}{a\theta}(Q + x)\right)\frac{1}{a}\exp\left(-\frac{x}{a}\right) = \\ = \exp\left(\frac{\theta - a\lambda_1}{a\theta}Q\right)\frac{1}{a}\int_0^{Q_2 - Q} e^{-\frac{\lambda_1}{\theta}x}dx = \\ = \frac{\theta}{a\lambda_1}\left[e^{\kappa_0 Q} - e^{\frac{1}{a}Q - \frac{\lambda_1}{\theta}Q_2}\right].$$

Тогда, собирая выражения при константах C_{01} и D_{01}

$$C_{01}\frac{\theta}{a}\,e^{-\frac{\lambda_1}{\theta}Q_2}\cdot e^{\frac{1}{a}Q} - D_{01}\lambda_1 e^{-\frac{Q_2}{a}}\cdot e^{\frac{Q}{a}} = 0,$$

находим вид

$$D_{01} = C_{01}\frac{\theta}{a\lambda_1}\,e^{\kappa_0 Q_2}$$

и вид плотностей вероятностей

$$p_{01}(Q) = C_{01}\left(\frac{\theta}{a\lambda_1}\,e^{\kappa_0 Q_2} - e^{\kappa_0 Q}\right). \qquad (11)$$

Заметим, что $\theta > a\lambda_1$, т.е. $\dfrac{\theta}{a\lambda_1} > 1$. Далее, поскольку $\kappa_0 > 0$ и $Q_1 < Q_2$, то $e^{\kappa_0 Q_2} > e^{\kappa_0 Q}$ и выражение, стоящее в скобках, должно быть положительным. Следовательно, $C_{01} > 0$. Коэффициент C_{01} будет определен позже. Вид этой зависимости приведен на рис. 2.

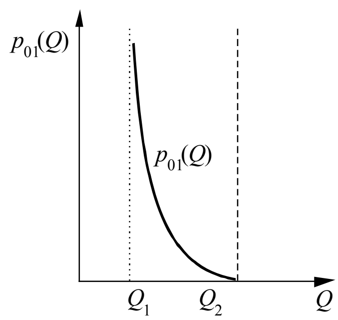

Рис. 2

Найдем теперь вид плотностей вероятностей величины в области $Q_1 < Q < Q_2$, но при условии $\lambda = \lambda_2$. Обозначим ее через $p_{11}(Q)$. Рассматривая переходы за интервал времени Δt, можем записать

$$p_{11}(Q) = (1 - \lambda_2\Delta t)\,p_{11}(Q - \theta\Delta t) + \\ + \lambda_2\Delta t\left[\int_0^{Q_2 - Q} p_{11}(Q + x)\,p_\xi(x)\,dx + \\ + \int_{Q_2 - Q}^{\infty} p_2(Q + x)\,p_\xi(x)\,dx\right].$$

И как ранее

$$\theta\, p_{11}'(Q)+\lambda_2 p_{11}(Q)=\lambda_2\left[\int\limits_0^{Q_2-Q} p_{11}(Q+x)\,p_\xi(x)\,dx+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{Q_2-Q}^{\infty} p_2(Q+x)\,p_\xi(x)\,dx\right]. \qquad (12)$$

При экспоненциальном распределении покупок ξ, используя те же рассуждения, что и выше, получаем

$$p_{11}''(Q)+\frac{a\lambda_2-\theta}{a\theta}p_{11}'(Q)=0.$$

Ранее был введен коэффициент κ_1, который определялся как $\kappa_1=\dfrac{a\lambda_2-\theta}{a\theta}$, согласно которому мы можем последнее дифференциальное уравнение записать как

$$p_{11}''(Q)+\kappa_1 p_{11}'(Q)=0. \qquad (13)$$

Общее решение (13) имеет вид

$$p_{11}(Q)=D_{11}-C_{11}e^{e^{-\kappa_1 Q}}. \qquad (14)$$

Теперь задача заключается в определении констант. В нашем случае Q_2 граница может быть пересечена только сверху, так как пересечение процессом $Q(t)$ границы Q_1 снизу дает нам значение $\lambda=\lambda_1$, а не $\lambda=\lambda_2$. Тогда за интервал времени Δt

$$p_{11}(Q_1)=\lambda_2\Delta t\left[\int\limits_0^{Q_2-Q} p_{11}(Q+x)\,p_\xi(x)\,dx+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{Q_2-Q}^{\infty} p_2(Q+x)\,p_\xi(x)\,dx\right]+\mathrm{o}(\Lambda t).$$

Устремим $\Delta t\to 0$ и получим условие $p_{11}(Q_1)=0$. Тогда

$$D_{11}=C_{11}e^{-\kappa_1 Q_1}. \qquad (15)$$

Следовательно,

$$p_{11}(Q)=C_{11}\left(e^{-\kappa_1 Q_1}-e^{-\kappa_1 Q}\right). \qquad (16)$$

Так как $Q>Q_1$, то $e^{-\kappa_1 Q_1}>e^{-\kappa_1 Q}$ и выражение, стоящее в скобках, положительно. Поэтому $C_{11}>0$. Вид $p_{11}(Q)$ в области $Q_1<Q<Q_2$ приведен на рис. 3.

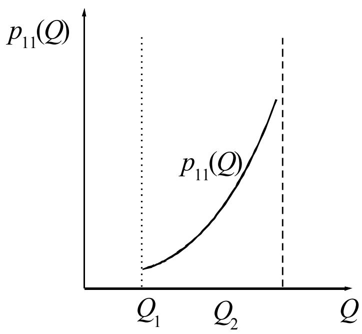

Рис. 3

Для нахождения связи между C_{11} и C_2 решение (16) нужно подставить в интегрально-дифференциальное уравнение (12). Выпишем еще раз (12):

$$\theta\, p_{11}'(Q)+\lambda_2 p_{11}(Q)=\lambda_2\left[\int\limits_0^{Q_2-Q} p_{11}(Q+x)\,p_\xi(x)\,dx+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{Q_2-Q}^{\infty} p_2(Q+x)\,p_\xi(x)\,dx\right].$$

Из (16) следует, что

1) $\quad p_{11}'(Q)=C_{11}\kappa_1 e^{-\kappa_1 Q}.$

Рассмотрим слагаемые в квадратных скобках. При этом учитываем, что продажа товара имеет экспоненциальное распределение.

2) $$\int\limits_{Q_2-Q}^{\infty} p_2(Q+x)\,p_\xi(x)\,dx=$$

$$=C_2\int\limits_{Q_2-Q}^{\infty} e^{\frac{\theta-a\lambda_2}{a\theta}(Q+x)}\frac{1}{a}e^{-\frac{x}{a}}dx=$$

$$=C_2 e^{-\kappa_1 Q}\frac{1}{a}\int\limits_{Q_2-Q}^{\infty} e^{-\frac{\lambda_2}{\theta}x}dx=C_2\frac{\theta}{a\lambda_2}e^{\frac{Q}{a}}\cdot e^{-\frac{\lambda_2}{\theta}Q_2}.$$

3) $$\int\limits_0^{Q_2-Q} p_{11}(Q+x)\,p_\xi(x)\,dx=$$

$$=\frac{C_{11}}{a}\int\limits_0^{Q_2-Q}\left[e^{-\kappa_1 Q_1}-e^{-\kappa_1(Q+x)}\right]e^{-\frac{x}{a}}dx.$$

Результаты из «1», «2» и «3» подставляем в (12), приводим подобные слагаемые и получаем

$$-\lambda_2 C_{11}e^{-\kappa_1 Q}+C_{11}\frac{\theta}{a}e^{e^{-\frac{\lambda_2}{\theta}Q_2}}+C_2\frac{\theta}{a}e^{e^{-\frac{\lambda_2}{\theta}Q_2}}=0, \qquad (17)$$

откуда находим зависимость между C_2 и C_{11}:

$$C_2=C_{11}\left[\frac{\lambda_2 a}{\theta}e^{\kappa_1(Q_2-Q_1)}-1\right]$$

или

$$C_{11}=C_2\Big/\left[\frac{\lambda_2 a}{\theta}e^{\kappa_1(Q_2-Q_1)}-1\right].$$

Так как $\dfrac{a\lambda_2}{\theta}>1$ и $Q_2>Q_1$, то и выражение в квадратных скобках тоже положительно, при условии

$$Q_1<Q<Q_2$$

$$p_{11}(Q)=\frac{C\left(e^{\kappa_1(Q_2-Q_1)}-e^{\kappa_1(Q_2-Q)}\right)}{\frac{\lambda_2 a}{\theta}e^{\kappa_1(Q_2-Q_1)}-1}. \qquad (18)$$

Рассмотрим ситуацию при $Q=Q_2$ и вычислим константу C_{01}. При $Q>Q_2$ имеем плотность вероятностей вида $p_2(Q)$. При $Q<Q_2$ могут быть процессы $Q(t)$ с $\lambda=\lambda_1$ и $\lambda=\lambda_2$. Поэтому, рассматривая интервал времени Δt, получим

$$p_2(Q_2)=(1-\lambda_2\Delta t)\left[p_{01}(Q_2-\theta\Delta t)+\right.$$
$$\left.+p_{11}(Q_2-\theta\Delta t)\right]+\mathrm{o}(\Delta t). \qquad (19)$$

Устремим $\Delta t\to 0$, что приводит нас к

$$p_2(Q_2)=p_{01}(Q_2)+p_{11}(Q_2). \qquad (20)$$

Подстановка решений дает

$$C=\frac{C\left(e^{\kappa_1(Q_2-Q_1)}-1\right)}{\frac{\lambda_2 a}{\theta}e^{\kappa_1(Q_2-Q_1)}-1}+C_{01}\left[\frac{\theta}{a\lambda_1}-1\right]e^{\kappa_0 Q_2}. \qquad (21)$$

Из последнего соотношения находим

$$C_{01}=C\,\frac{\left[\frac{\lambda_2 a}{\theta}e^{\kappa_1(Q_2-Q_1)}-e^{\kappa_1(Q_2-Q_1)}\right]e^{-\kappa_0 Q_2}}{\left[\frac{\lambda_2 a}{\theta}e^{\kappa_1(Q_2-Q_1)}-1\right]\left[\frac{\theta}{a\lambda_1}-1\right]}. \tag{22}$$

Окончательно вид для $p_{01}(Q)$ таков:

$$p_{01}(Q)=$$

$$=C\,\frac{\left(\frac{\lambda_2 a}{\theta}-1\right)e^{\kappa_1(Q_2-Q_1)}\cdot e^{-\kappa_0 Q_2}}{\left[\frac{\lambda_2 a}{\theta}e^{\kappa_1(Q_2-Q_1)}-1\right]\left[\frac{\theta}{a\lambda_1}-1\right]}\times$$

$$\times\left[\frac{\theta}{a\lambda_1}e^{\kappa_0 Q_2}-e^{\kappa_0 Q}\right]. \tag{23}$$

Рассмотрим область $Q < Q_1$, плотность вероятностей процесса $Q(t)$ обозначим $p_0(Q)$. Отметим, что $\lambda=\lambda_1$ и $\theta - a\lambda_1 > 0$, т.е. $\frac{\theta-a\lambda_1}{a\theta}=\kappa_0$; $\kappa_0>0$. Используя вывод уравнений (1)–(6), можно получить

$$p_0(Q)=C_0\,e^{\kappa_0 Q}+D_0. \tag{24}$$

Но при $\Delta Q\to-\infty$ плотность вероятностей $p_0(Q)$ должна стремиться к нулю. Это означает, что $D_0 = 0$. Для удобства представим $p_0(Q)$ в виде

$$p_0(Q)=\bar{C}_0\,e^{\kappa_0(Q-Q_1)}. \tag{25}$$

Рассмотрим $Q = Q_1$. Тогда

$$p_{01}(Q_1)=(1-\lambda_1\Delta t)\,p_0(Q_1-\theta\Delta t)+o(\Delta t).$$

После предельного перехода при устремлении $\Delta t\to 0$ получаем условие сшивания на границе $Q = Q_1$: $p_{01}(Q_1) = p_0(Q_1)$. Данное условие позволяет нам найти константу $\bar{C}_0$:

$$\bar{C}_0=C\,\frac{\left[\frac{\lambda_2 a}{\theta}-1\right]e^{\kappa_1(Q_2-Q_1)}\cdot e^{-\kappa_0 Q_2}}{\left[\frac{\lambda_2 a}{\theta}e^{\kappa_1(Q_2-Q_1)}-1\right]\left[\frac{\theta}{a\lambda_1-1}\right]}\times$$

$$\times\left[\frac{\theta}{a\lambda_1}e^{\kappa_0 Q_2}-e^{\kappa_0 Q_1}\right].$$

Окончательный результат имеет вид

$$p_{01}(Q)=C\,\frac{\left[\frac{\lambda_2 a}{\theta}-1\right]\cdot e^{\kappa_1(Q_2-Q_1)}\cdot e^{-\kappa_0 Q_2}}{\left[\frac{\lambda_2 a}{\theta}e^{\kappa_1(Q_2-Q_1)}-1\right]\left[\frac{\theta}{a\lambda_1-1}\right]}\times$$

$$\times\left[\frac{\theta}{a\lambda_1}e^{\kappa_0 Q_2}-e^{\kappa_0 Q}\right],$$

$$p_{11}(Q)=C\,\frac{e^{\kappa_1(Q_2-Q_1)}-e^{\kappa_1(Q_2-Q)}}{\frac{\lambda_2 a}{\theta}e^{\kappa_1(Q_2-Q_1)}-1},$$

$$p_2(Q)=C\,e^{-\kappa_1(Q-Q_2)}.$$

Константа C определяется из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{Q_1}p_0(Q)\,dQ+\int_{Q_1}^{Q_2}\left[p_{01}(Q)+p_{11}(Q)\right]dQ+\int_{Q_2}^{\infty}p_2(Q)\,dQ=1.$$

Вычисляя входящие интегралы, получим

$$C\left[\frac{1}{\kappa_1}+\frac{\left[\frac{\lambda_2 a}{\theta}-1\right]\left[\frac{\theta}{a\lambda_1}e^{\kappa_0 Q_2}-\frac{1}{\kappa_1}e^{\kappa_1(Q_2-Q_1)}e^{\kappa_0 Q_1}\right]}{\left[\frac{\theta}{a\lambda_1-1}\right]\frac{\lambda_2 a}{\theta}e^{\kappa_1(Q_2-Q_1)}}+\right.$$

$$+\frac{\left[\frac{\theta}{a\lambda_1}-1\right]\left[-\frac{1}{\kappa_1}\left(1+e^{\kappa_1(Q_2-Q_1)}-e^{\kappa_1(Q_2-Q_1)}\right)\right]}{\frac{\lambda_2 a}{\theta}e^{\kappa_1(Q_2-Q_1)}\left[\frac{\theta}{a\lambda_1}-1\right]}+$$

$$+\frac{1}{\kappa_1}+\frac{1}{\kappa_0}\left[\frac{\lambda_2 a}{\theta}-1\right]\left[\frac{\theta}{a\lambda_1}e^{\kappa_0 Q_2}-e^{\kappa_1 Q}\right]\times$$

$$\left.\times\frac{\left[1-e^{\kappa_0(Q_2-Q_1)}\right]e^{\kappa_1(Q_2-Q_1)}e^{-\kappa_0 Q_2}}{\left[\frac{\lambda_2 a}{\theta}e^{\kappa_1(Q_2-Q_1)}-1\right]\left[\frac{\theta}{a\lambda_1}-1\right]}\right]=1.$$

Можно попытаться найти численно C.

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Как и ранее,

$$\Pi_0=\int_{-\infty}^{0}p_0(Q)\,dQ=\frac{1}{\kappa_0}\left[\frac{\lambda_2 a}{\theta}-1\right]\left[\frac{\theta}{a\lambda_1}e^{\kappa_0 Q_2}-e^{\kappa_1 Q}\right]\times$$

$$\times\frac{\left[1-e^{\kappa_0(Q_2-Q_1)}\right]e^{\kappa_1(Q_2-Q_1)}e^{-\kappa_0 Q_2}}{\left[\frac{\lambda_2 a}{\theta}e^{\kappa_1(Q_2-Q_1)}-1\right]\left[\frac{\theta}{a\lambda_1}-1\right]} \tag{26}$$

представляет собой вероятность того, что у компании будет «упущенная выгода», т.е. спрос покупателей остается неудовлетворенным.

Следующая характеристика – вероятность осуществления продаж, т.е. товар будет востребованным:

$$\Pi_1=\int_{Q_2}^{\infty}p_2(Q)\,dQ+\int_{Q_1}^{Q_2}p_{11}(Q)\,dQ=$$

$$=C\left[\frac{\left[\frac{\lambda_2 a}{\theta}-1\right]\left[\frac{\theta}{a\lambda_1}e^{\kappa_0 Q_2}-\frac{1}{\kappa_1}e^{\kappa_1(Q_2-Q_1)}e^{\kappa_0 Q}\right]}{\left[\frac{\theta}{a\lambda_1-1}\right]\frac{\lambda_2 a}{\theta}e^{\kappa_1(Q_2-Q_1)}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\left[\frac{\theta}{a\lambda_1}-1\right]\left[-\frac{1}{\kappa_1}\left(1+e^{\kappa_1(Q_2-Q_1)}-e^{\kappa_1(Q_2-Q_1)}\right)\right]}{\frac{\lambda_2 a}{\theta}e^{\kappa_1(Q_2-Q_1)}\left[\frac{\theta}{a\lambda_1}-1\right]}\right]. \tag{27}$$

Зная C, величины можно найти численно. Задавая величины $(Q_1 - Q_2)$ и Π_0 и Π_1 из уравнений (26), (27), можно найти θ и Q_1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Радюк Л.Е., Терпугов А.Ф.* Теория вероятностей и случайных процессов. Томск.: Изд-во Том. ун-та, 1988.

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Кибернетика и информатика» 25 апреля 2003 г.