

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РЕКЛАМОЙ В ЗАДАЧЕ ПРОИЗВОДСТВА И СБЫТА ТОВАРА

Обсуждается влияние рекламы в задаче производства и сбыта товара. Рассмотрен вариант, когда покупательная способность пропорциональна количеству рекламы. В результате получено решение задачи об оптимальном управлении производством и сбытом товара и рекламой.

В настоящее время разрабатывается новое научное направление – динамическая экономика, когда в качестве математических моделей экономических процессов выбирается система дифференциальных или разностных уравнений. Для задач производства, хранения и сбыта товаров достаточно удачной является модель, предложенная в [1]. В [2] эта модель несколько уточнена и для нее решен ряд задач об оптимальном управлении процессом производства, хранения и сбыта товара. В настоящей работе проводится дальнейшее обобщение этой модели, связанное с включением в задачу проблемы влияния рекламы на темп продажи. В результате ставится и решается задача об оптимальном управлении производством, сбытом и рекламированием товара. Для простоты решения такой задачи рассматривается упрощенная модель с товаром неограниченного спроса и отсутствием затрат на его хранение.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $z(t)$ – количество товара на складе производителя. Изменение этой величины можно описать уравнением

$$\dot{z} = u - P, \quad z(0) = 0, \quad (1.1)$$

где $u(t)$ – темп производства; $P(t)$ – темп продажи, т.е. $u(t)\Delta t$ – количество товара, произведенного за время Δt ; $P(t)\Delta t$ – количество товара, проданного за это же время. Здесь имеется в виду стоимостное выражение для количества товара и темпа производства. Для простоты изложения будем рассматривать задачу с товаром неограниченного спроса. В этом случае функция $P(t)$ не зависит от количества товара у покупателя, и ее, согласно [1, 2], можно выбрать в виде $P(t) = z(t)N(c(t), w(t))$, где $N(c, w)$ – покупательная способность потребителя, зависящая от цены товара $c(t)$ и количества затрат на рекламу $w(t)$. Более конкретно эту функцию, согласно [1, 2], можно выбрать в виде $N(c, w) = f(w)\exp[-c]$, где $f(w)$ – некоторая монотонно возрастающая функция, характеризующая зависимость покупательной способности от затрат на рекламу. Можно рассмотреть разные варианты задания функции $f(w)$. Но чтобы подробно обсудить особенности задачи, рассмотрим простейший случай, когда эта функция линейная, т.е. будем рассматривать случай, когда

$$P(t) = bw(t)z(t)\exp[-c], \quad (1.2)$$

где b – какой-то коэффициент пропорциональности. Такое предположение, в частности, означает, что в отсутствие рекламы товар не продается.

Пусть весь процесс продолжается в течение некоторого конечного интервала времени $[0, T]$. Общий доход производителя товара равен

$$J = \int_0^T [c(t)P(t) - u(t) - w(t)] dt. \quad (1.3)$$

Для уточнения отметим, что $w(t)$ – темп затраты на рекламу, т.е. $w(t)\Delta t$ – количество средств, затраченных на рекламу за время Δt . Очевидно, что все рассматриваемые параметры и переменные не могут быть отрицательными. Будем также предполагать, что должны выполняться условия

$$0 \leq u(t) \leq u_0, \quad 0 \leq w(t) \leq w_0, \quad (1.4)$$

где u_0 – максимально возможный темп производства; w_0 – максимально возможный темп затрат на рекламу.

В результате получается стандартная задача из теории оптимального управления: найти такие функции $c(t)$, $u(t)$ и $w(t)$ на интервале времени $[0, T]$, удовлетворяющие условиям (1.4), при которых функционал (1.3) максимален. Очевидно, что если производство не включается и затрат на рекламу нет, то $J = 0$. Такое решение назовем тривиальным. При решении данной задачи нужно также найти ограничения на параметры задачи T, b, u_0, w_0 , при которых можно получить оптимальное решение, отличное от тривиального и такое, что $J > 0$.

2. ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА Л.С. ПОНТЯГИНА

Сначала на основании (1.1) и (1.3) составляется функция Гамильтона

$$H(z, p, u, c, w) = p(u - P) - cP + u + w = \\ = u(p + 1) - (p + c)P + w, \quad (2.1)$$

где $p(t)$ – вспомогательная переменная. Минимум функции H по u с учетом (1.4) достигается при

$$u^*(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } p(t) > -1, \\ u_0, & \text{если } p(t) < -1. \end{cases} \quad (2.2)$$

Минимум функции H по $c(t)$ с учетом (1.2) достигается при

$$c^*(t) = 1 - p(t). \quad (2.3)$$

Минимум функции H по w с учетом (1.4) достигается при

$$w^*(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } y(t) < 1, \\ w_0, & \text{если } y(t) > 1. \end{cases} \quad (2.4)$$

где $y(t) = b(p(t) + c(t))z(t)\exp[-c(t)]$.

После подстановки (2.2)–(2.4) в (2.1) получаем гамильтониан

$$H^*(z, p) = u^*(p + 1) - P^* + w^*, \quad (2.5)$$

где

$$P^*(t) = b_0 w^*(t) z(t) \exp[p(t)], \quad b_0 = b/e. \quad (2.6)$$

При этом

$$y(t) = b_0 z(t) \exp[p(t)]. \quad (2.7)$$

Переменная $p(t)$ должна удовлетворять уравнению

$$\dot{p} = -\partial H^* / \partial z = b_0 w^* e^p, \quad p(T) = 0. \quad (2.8)$$

Основная проблема при решении задач оптимального управления – это нахождение начальных значений для вспомогательных переменных (в настоящем случае значения $p(0)$), для которых существует решение краевой задачи.

3. СТРУКТУРА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Как следует из (2.2), оптимальное управление производством является релейным, т.е. производство либо включается на полную мощность, либо выключается. Моменты включения или выключения производства происходят в моменты времени, когда выполняется равенство

$$p(t) = -1. \quad (3.1)$$

Оптимальное управление рекламой также является релейным, то есть реклама либо включается на полную мощность, либо отсутствует. Моменты включения или выключения рекламы происходят в моменты времени, когда выполняется равенство $y(t) = 1$.

Естественно предположить, что $p(0) < -1$, т.е. в начальный момент времени производство включается. Поскольку $z(0) = 0$, то $y(0) = 0$ и, как видно из (2.7), вначале реклама не включается. Получается, что существует некоторый интервал времени $[0, t_1]$, когда товар не продается, а только накапливается на складе. Момент времени t_1 определяется из условия

$$y(t_1) = 1. \quad (3.2)$$

Затем товар поступает в продажу при максимальной возможной рекламе, что соответствует максимальной возможной покупательной способности. Подобная ситуация часто встречается на практике.

Из (2.8) видно, что производная функции $p(t)$ всегда неотрицательна и, следовательно, она не может убывать. Но поскольку она должна удовлетворять условиям $p(0) < -1$ и $p(T) = 0$, то условие (3.1) может выполняться только один раз в некоторый момент времени t_2 , причем, как можно показать, всегда $t_1 < t_2$. После момента t_2 производство товара прекращается.

Функция $y(t)$, которая согласно (2.4) определяет включение рекламы, удовлетворяет уравнению

$$\dot{y} = b_0 e^p u^*, y(0) = 0, \quad (3.3)$$

что следует из (1.1) и (2.7). Видно, что производная этой функции всегда неотрицательна и, следовательно, она не может убывать. Поэтому, если реклама включена в момент t_1 , то она остается включенной и на всем интервале $[t_1, T]$.

В результате получается следующая структура решения задачи. Интервал $[0, T]$ разбивается на три части. На интервале $[0, t_1]$ товар производится с максимальной интенсивностью, но не продается. На интервале $[t_1, t_2]$ товар производится и продается с максимальной интенсивностью. На интервале $[t_2, T]$ товар не производится, но продается с максимальной интенсивностью. Остается только найти значения t_1 и t_2 .

Пусть $p(0) = p_0 (< -1)$. Поскольку на интервале $[0, t_1]$ $w^*(t) = 0$, то, как видно из (2.8), на этом интервале

$p(t) = p_0$. На интервале $[t_1, T]$ решение уравнения (2.8) можно записать в виде

$$p(t) = -\ln F(t), \quad (3.4)$$

где $F(t) = 1 + q(T - t)$, $q = b_0 w_0$, что проверяется непосредственной подстановкой.

Так как на интервале $[0, t_1]$ функции $u(t)$ и $p(t)$ постоянны, то на основании (3.3) равенство (3.2) принимает вид

$$b_0 u_0 \exp[p_0] t_1 = 1.$$

Отсюда получаем

$$t_1 = \frac{1}{b_0 u_0} e^{-p_0}. \quad (3.5)$$

С другой стороны, из (3.4) получаем

$$p_0 = p(t_1) = -\ln[1 + q(T - t_1)].$$

Подставляя это в (3.5), получаем окончательно

$$t_1 = \frac{1 + qT}{b_0(u_0 + w_0)}. \quad (3.6)$$

Подставляя (3.4) в (3.1), получаем

$$t_2 = T - (e - 1)/q. \quad (3.7)$$

4. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Для существования решения задачи необходимо, чтобы выполнялось условие $0 < t_1 < t_2 < T$. Подставляя сюда (3.6) и (3.7), получаем

$$T > \frac{1}{b_0} \left(\frac{e-1}{w_0} + \frac{e}{u_0} \right). \quad (4.1)$$

Это означает, что интервал $[0, T]$ должен быть достаточно большим, иначе не имеет смысла начинать производство. Видно, что нижняя граница для T обратно пропорциональна параметрам u_0 и w_0 .

5. ДРУГИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

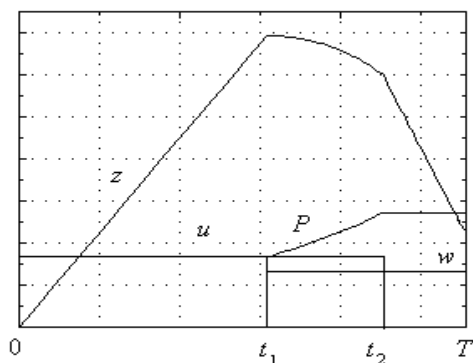
Для окончательного решения задачи приведем следующие результаты. Они получаются из условия, что на всем интервале времени $[0, T]$ гамильтониан постоянен. Например, можно записать $H^*(t) = H_0 = u_0(p_0 + 1)$. В результате оптимальный темп продажи равен

$$P^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < t < t_1, \\ u_0(p(t) - p_0) + w_0 & \text{при } t_1 < t < t_2, \\ w_0 - H_0 & \text{при } t_2 < t < T. \end{cases}$$

Отсюда с учетом (2.6) получаем, что решение уравнения (1.1) имеет вид

$$z(t) = \begin{cases} u_0 t & \text{при } 0 < t < t_1, \\ \frac{u_0 F(t)}{q} (p(t) - p_0) + w_0 & \text{при } t_1 < t < t_2, \\ \frac{F(t)}{q} (w_0 - H_0) & \text{при } t_2 < t < T. \end{cases}$$

На рисунке приведены типичные кривые для $z(t)$, $P^*(t)$, $u^*(t)$ и $w^*(t)$.



В заключение вычислим явное выражение для функционала (1.3). Учитывая структуру полученного решения, можно записать

$$J(T) = \int_{t_1}^{t_2} c(t)P(t)dt + \int_{t_2}^T c(t)P(t)dt - u_0 t_2 - w_0 (T - t_1).$$

Подставляя сюда функцию $P(t)$ из (1.1) и выполняя интегрирование по частям, получаем

$$\begin{aligned} J(T) &= \int_{t_1}^{t_2} c(t)[u_0 - \dot{z}]dt - \int_{t_2}^T c(t)\dot{z}dt - u_0 t_2 - v_0 (T - t_1) = \\ &= \frac{u_0}{q} [(1 + qT) \ln b_0 u_0 t_1 - u_0 b_0 t_1 - q t_2] - w_0 (T - t_1). \end{aligned}$$

Можно проверить, что при выполнении (4.1) этот функционал положителен.

В работе рассмотрено влияние рекламы на процесс оптимального управления процессом производства и сбыта товара. Этот результат носит в какой-то мере предварительный характер, поскольку следует проанализировать различные виды зависимостей покупательной способности от количества рекламы. Дальнейший этап – исследование динамической рекламы, когда количество рекламы описывается дифференциальным уравнением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горский А.А., Колтакова И.Г., Локишин Б.Я. Динамическая модель процесса производства, хранения и сбыта товаров повседневного спроса // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. № 1. С.144–148.
2. Параев Ю.И. Решение задачи об оптимальном производстве, хранении и сбыте товара // Изв. РАН. ТиСу. 2000. № 2. С.103–107.

Статья представлена кафедрой прикладной математики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Кибернетика и информатика» 1 сентября 2003 г.