ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 280 Декабрь 2003

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

УДК 681.142.2

С.Э. Воробейчиков, Т.В. Кабанова

ОБНАРУЖЕНИЕ МОМЕНТА РАЗЛАДКИ ПРОЦЕССА АВТОРЕГРЕССИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Рассматривается задача обнаружения момента изменения среднего значения процесса авторегрессии первого порядка. Предлагается последовательная процедура обнаружения как положительного, так и отрицательного сдвигов среднего наблюдаемого процесса. Получены формулы для среднего времени между ложными тревогами и среднего времени запаздывания в обнаружении разладки. Приведены результаты численного моделирования.

Одной из актуальных задач статистики является определение момента изменения свойств наблюдаемого процесса (момента разладки процесса). Существуют различные подходы к решению данной проблемы в зависимости от исходных предположений о модели наблюдений. Наиболее изученной является ситуация, когда известны начальная и конечная модели процесса [1–3]. В этом случае для обнаружения момента изменения разладки используется алгоритм кумулятивных сумм (АКС), представляющий собой многократно возобновляемую процедуру Вальда последовательной классификации двух простых гипотез. Лорденом в [4] было установлено, что эта процедура в схеме независимых наблюдений является оптимальной в смысле минимума среднего времени запаздывания при фиксированном среднем времени между ложными тревогами. В [5] было показано, что АКС является оптимальным при обнаружении моментов переключения между двумя авторегрессионными моделями.

Большой интерес на практике представляет случай, когда распределения наблюдаемого процесса до и после разладки не известны. Подобная ситуация рассмотрена в работах [6–8], где устанавливаются асимптотические соотношения между средним временем запаздывания и средним временем между ложными тревогами. При этом для оптимальных процедур обнаружения [6] имеет место логарифмическая зависимость среднего времени запаздывания от среднего времени между ложными тревогами. В [9] была предложена последовательная непараметрическая процедура обнаружения увеличения среднего значения в последовательности независимых наблюдений, для которой найдены основные характеристики.

В данной работе рассматривается задача обнаружения скачка среднего процесса авторегрессии с неизвестными параметрами. При этом на первом этапе производится оценивание неизвестных (мешающих) параметров авторегрессионной части. Далее осуществляется преобразование наблюдаемого процесса для ослабления влияния этих параметров. К полученному процессу применяется модифицированная процедура [10]. Исследуются свойства процедуры обнаружения.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ПОСТРОЕНИЕ ПРОЦЕДУРЫ ОБНАРУЖЕНИЯ

Пусть наблюдается процесс авторегрессии первого порядка

$$x_{i+1} - M = \lambda(x_i - M) + \xi_{i+1},\ i = 0, 1, \dots, \qquad (1)$$

где M – неизвестное среднее значение наблюдаемого процесса; λ – неизвестный параметр процесса авторегрессии; $\{\xi_i\}_{i\geq 0}$ – последовательность независимых случайных величин, распределенных по нормальному закону с $M\xi_i = 0$ и $D\xi_i = 1$.

В некоторый момент θ происходит изменение среднего значения наблюдаемого процесса на неизвестную величину a. Требуется по наблюдениям процесса оценить момент разладки θ.

Представим уравнение (1) в виде

$$x_{i+1} = \mu + \lambda x_i + \xi_{i+1}, \qquad (2)$$

где

$$\mu = M(1-\lambda). \qquad (3)$$

В момент времени θ происходит изменение значения μ на величину

$$\tilde{a} = a(1-\lambda). \qquad (4)$$

Поскольку λ в данной модели является мешающим параметром, чтобы уменьшить его влияние на качество процедуры обнаружения, по первым наблюдениям процесса строится оценка этого параметра $\hat{\lambda}$, предложенная в [11], обладающая свойством равномерной ограниченности среднеквадратичекого уклонения при любых распределениях шумов

$$M(\lambda-\hat{\lambda})^2 \leq \frac{1}{H}, \qquad (5)$$

где H – порог процедуры оценивания.

На основе исходных наблюдений с использованием полученной оценки строим новую вспомогательную последовательность

$$y_{i+1} = x_{i+1} - \hat{\lambda}x_i = \mu + \left(\lambda - \hat{\lambda}\right)x_i + \xi_{i+1}. \qquad (6)$$

Рассмотрим сначала случай положительного сдвига среднего, когда параметр $a > 0$.

Построим процедуру обнаружения увеличения среднего (a>0) для процесса авторегрессии, аналогичную случаю независимых наблюдений, рассмотренному в [9]. Определим последовательность z_i^1 по формулам

$$\begin{gathered} z_i^1 = \operatorname{sign}(y_i - y_{i-k} - \varepsilon)\cdot l - m, \\ S_0 = l+m, S_i = \max(l+m, z_i^1 + S_{i-1}). \end{gathered} \qquad (7)$$

Здесь l, m, k – натуральные числа ($m < l$), параметр ε используется для компенсации погрешности в оценивании параметра λ. Решение о наличии разладки принимается при достижении суммой S_i порога h.

Для обнаружения уменьшения среднего значения наблюдений, то есть для случая $a<0$, используется вторая процедура АКС, в которой величины x_i заменяются на $-x_i$:

$$\begin{gathered}z_i^2=\operatorname{sign}(y_{i-k}-y_i-\varepsilon)\cdot l-m,\\ S_0=l+m, S_i=\max(l+m, z_i^2+S_{i-1}).\end{gathered}\tag{8}$$

Процедуры АКС будем применять последовательно [10], изменяя номер j последовательности z_i^j, если значение S_i становится меньше $l+m$.

РАСЧЕТ ОСНОВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОЦЕДУРЫ

Рассмотрим последовательности (7) и (8). Будем считать ту последовательность, в которой после разладки среднее значение наблюдений увеличивается, первой, а ту, в которой среднее уменьшается, – второй. Это означает, что при увеличении в момент разладки среднего значения наблюдений первой процедурой считается процедура (7), а при уменьшении – процедура (8). Обозначим через z_i статистики z_i^j, используемые в текущий момент времени i в АКС; P_0 – распределение величин z_i до момента разладки, а через P_1 и P_2 – распределения этих величин после разладки соответственно в первой и второй последовательностях. Основными характеристиками построенной процедуры являются среднее время между ложными тревогами $T_{\text{лт}}$ и среднее время запаздывания $T_{\text{зап1}}$, $T_{\text{зап2}}$ при наблюдении первой и второй последовательности соответственно.

Теорема 1. Пусть существует такое p_0, для которого выполнено следующее условие:

$$P_0(z_i>0\,|\,z_{i-1})\le p_0<\frac{1+\delta}{2}.\tag{9}$$

Тогда среднее время между ложными тревогами растет экспоненциально при увеличении порога h:

$$T_{\text{лт}}=L_1\tilde{\nu}^h+L_2h+L_3+o(1),\tag{10}$$

где $L_1,L_2,L_3,\tilde{\nu}$ – известные константы, $\tilde{\nu}>1$.

Доказательство. Обозначим через $T_0(j)$ — среднее число шагов, оставшихся для принятия решения о наличии разладки, если текущее значение $S_i=j$ и разладка еще не произошла. Если выполнено условие $P_0(z_i>0\,|\,z_{i-1})\le p_0$ и $q_0=1-p_0$, нижняя граница для среднего времени между ложными тревогами находится из уравнения

$$T_0(j)=1+p_0\cdot T(j+l-m)+q_0\cdot T(j-l-m)\tag{11}$$

с граничными условиями

$$\begin{gathered}T_0(k)=0, k=\overline{h,\dots,h+l-m-1};\\ T_0(k)=T_0(l+m), k=\overline{0,\dots,l+m-1}.\end{gathered}\tag{12}$$

При этом для среднего времени между ложными тревогами T_0 имеет место неравенство

$$T_{\text{лт}}\ge T_0(l+m).\tag{13}$$

Составим характеристический многочлен для уравнения (11):

$$P(\nu)=p_0\nu^{2l}-\nu^{l+m}+q_0.$$

Данный многочлен имеет два положительных вещественных корня, один из которых равен единице. В силу условия

$$p_0<\frac{l+m}{2l}$$

имеем $\quad P'_0(1)=2lp_0-(l+m)<0,$

следовательно, второй вещественный корень характеристического многочлена (обозначим его $\tilde{\lambda}$) будет больше единицы. Тогда, решая уравнение (11) аналогично [10], получаем

$$T_{\text{лт}}=L_1\tilde{\nu}^h+L_2h+L_3+o(1),\tag{14}$$

где L_1,L_2,L_3 – известные константы. Теорема доказана.

Покажем далее, что при соответствующем выборе параметров процедуры H,ε могут быть выполнены условия теоремы 1. Обозначим $\Delta_i=(\lambda-\hat{\lambda})(x_i-x_{i-k})$ и $P(\Delta_i\ge\varepsilon)=P_\Delta$.

Теорема 2. Пусть параметры процедуры H (5) и ε такие, что выполняется условие

$$\Phi(\sqrt{2}\varepsilon)+8P_\Delta<\frac{1+\delta}{2},$$

где $\Phi(x)$ – функция стандартного нормального распределения.

Тогда для условных вероятностей $P_0(z_i>0\,|\,z_{i-1})$ выполнены условия теоремы 1, где

$$p_0=\Phi(\sqrt{2}\varepsilon)+8P_\Delta.$$

Доказательство. Оценим сверху условную вероятность $P_0(z_i>0\,|\,z_{i-1}>0)$:

$$P_0(z_i>0\,|\,z_{i-1}>0)=\frac{P_0(z_i>0,z_{i-1}>0)}{P_0(z_{i-1}>0)}.\tag{15}$$

Построим оценку сверху для числителя (15) и оценку снизу для знаменателя.

Обозначим $t=(\lambda-\hat{\lambda})$, $\varepsilon_i=\xi_i-\xi_{i-k}$, $x=x_i-x_{i-k}$. Учтем тот факт, что разность $(\xi_{i-1}-\xi_{i-k-1})$ распределена нормально с нулевым средним и дисперсией 2, а (x_i-x_{i-k}) – нормально с нулевым средним и дисперсией $\frac{2}{1-\lambda^2}$. Получаем

$$\begin{aligned}&P_0(z_{i-1}<0)=\\ &=\int_{-\infty}^{\infty}P(tx+\varepsilon_i<\varepsilon\,|\,\lambda-\hat{\lambda}=t)f(t)dt=\\ &=\int_{-\infty}^{\infty}P(tx+\varepsilon_i<\varepsilon)f(t)dt=\\ &=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\left(1+\frac{t^2}{1-\lambda^2}\right)}}\right)f(t)dt\ge\frac{1}{2},\end{aligned}\tag{16}$$

где $$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Аналогично находим

$$
\begin{aligned}
&P_0(z_{i-1}>0)=\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}P(tx+\varepsilon_i>\varepsilon\mid\lambda-\hat{\lambda}=t)f(t)dt=\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}P(tx+\varepsilon_i>\varepsilon)f(t)dt=\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\left(1+\frac{t^2}{1-\lambda^2}\right)}}\right)f(t)dt\geq\Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right).
\end{aligned}\tag{17}
$$

Получим далее оценку для совместной вероятности $P_0(z_i>0,z_{i-1}>0)$:

$$
\begin{aligned}
&P_0(z_i>0,z_{i-1}>0)=\\
&=P_0(z_i>0,\Delta_{i-1}<\varepsilon;z_{i-1}>0,\Delta_{i-2}<\varepsilon)+\\
&+P_0(z_i>0,\Delta_{i-1}<\varepsilon;z_{i-1}>0,\Delta_{i-2}\geq\varepsilon)+\\
&+P_0(z_i>0,\Delta_{i-1}\geq\varepsilon;z_{i-1}>0,\Delta_{i-2}<\varepsilon)+\\
&+P_0(z_i>0,\Delta_{i-1}\geq\varepsilon;z_{i-1}>0,\Delta_{i-2}\geq\varepsilon)\leq\\
&\leq P(\xi_i-\xi_{i-k}>0,\xi_{i-1}-\xi_{i-1-k}>0)+3P_\Delta=\\
&=\frac{1}{4}+3P_\Delta.
\end{aligned}\tag{18}
$$

С учетом (15),(16) и (18) получаем оценку условной вероятности (19):

$$
P_0(z_i>0\mid z_{i-1}>0)<\frac{\frac{1}{4}+3P_\Delta}{\Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)}.\tag{19}
$$

$$
\begin{aligned}
&P_0(z_i>0,z_{i-1}<0)=\\
&=P_0(z_i>0,\Delta_{i-1}<\varepsilon;z_{i-1}<0,|\Delta_{i-2}|<\varepsilon)+\\
&+P_0(z_i>0,\Delta_{i-1}<\varepsilon;z_{i-1}<0,|\Delta_{i-2}|\geq\varepsilon)+\\
&+P_0(z_i>0,\Delta_{i-1}\geq\varepsilon;z_{i-1}<0,|\Delta_{i-2}|<\varepsilon)+\\
&+P_0(z_i>0,\Delta_{i-1}\geq\varepsilon;z_{i-1}<0,|\Delta_{i-2}|\geq\varepsilon)\leq\\
&\leq P(\xi_i-\xi_{i-k}>0;\xi_{i-1}-\xi_{i-1-k}<0,|\Delta_{i-2}|\geq\varepsilon)+\\
&+P_0(|\Delta_{i-2}|\geq\varepsilon)+P_0(\Delta_{i-1}\geq\varepsilon)+\\
&+P_0(\Delta_{i-1}\geq\varepsilon)\leq\frac{1}{2}P(\xi_{i-1}-\xi_{i-1-k}<2\varepsilon)+4P_\Delta.
\end{aligned}\tag{20}
$$

$$
\begin{aligned}
&P_0(z_i>0\mid z_{i-1}<0)<\\
&<\frac{\frac{1}{2}\Phi(\sqrt{2}\varepsilon)+4P_\Delta}{\frac{1}{2}}=\Phi(\sqrt{2}\varepsilon)+8P_\Delta.
\end{aligned}\tag{21}
$$

$$
\frac{\frac{1}{4}+3P_\Delta}{\Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)}<\frac{1+\delta}{2}\tag{22}
$$

$$
\Phi(\sqrt{2}\varepsilon)+8P_\Delta<\frac{1+\delta}{2}.\tag{23}
$$

Можно показать, что

$$
\frac{\frac{1}{4}+3P_\Delta}{\Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)}\leq\Phi(\sqrt{2}\varepsilon)+8P_\Delta,
$$

следовательно при выполнении условия (23) будет выполнено и условие (22). Окончательно получаем:

$$
P_0(z_i>0\mid z_{i-1})\leq\Phi(\sqrt{2}\varepsilon)+8P_\Delta<\frac{1+\delta}{2}.\tag{24}
$$

Выбирая в (9) в качестве p_0 величину $\Phi(\sqrt{2}\varepsilon)+8P_\Delta$, получаем условие теоремы 1. Теорема 2 доказана.

Теоремы 1,2 показывают, что при подходящем выборе параметров процедуры имеет место экспоненциальный рост среднего времени между ложными тревогами при увеличении порога h.

Теорема 3. Пусть существует такое q_1, для которого выполнено следующее условие:

$$
P_1(z_i<0\mid z_{i-1})\leq q_1<\frac{1-\delta}{2}.\tag{25}
$$

Тогда среднее время запаздывания растет линейно при увеличении порога h:

$$
T_{\text{зап}1}=Kh+K_1+o(1),\tag{26}
$$

где K,K_1 – известные константы.

Доказательство. Введем следующее обозначение: $T_1(j)$ – среднее число шагов, оставшихся для принятия решения о наличии разладки. Если разладка произошла, текущее значение $S_i=j$ и наблюдается первая последовательность. Если выполнено условие $P_1(z_i<0\mid z_{i-1})\leq q_1$, верхняя граница для среднего времени запаздывания находится из уравнения

$$
T_1(j)=1+p_1\cdot T_1(j+l-m)+q_1\cdot T_1(j-l-m)\tag{27}
$$

с граничными условиями

$$
\begin{aligned}
&T_1(k)=0,k=\overline{h,...,h+l-m-1};\\
&T_1(k)=D(l+m)+T_1(l+m),k=\overline{0,...,l+m-1},
\end{aligned}\tag{28}
$$

Здесь $D(j)$ – среднее время до окончания наблюдения второй последовательности, если текущее значение $S_i=j$. Эта величина находится из уравнения

$$
D(j)=1+q_1\cdot D(j+l-m)+p_1\cdot D(j-l-m)
$$

с нулевыми граничными условиями

$$
D(k)=0,k=\overline{0,...,l+m-1},k=\overline{h,...,h+l-m-1};\tag{29}
$$

$$
T_{\text{зап}1}\leq T_1(l+m).\tag{30}
$$

Составим характеристический многочлен для уравнения (27)

$$
P(\nu)=p_1\nu^{2l}-\nu^{l+m}+q_1.
$$

Данный многочлен имеет два положительных вещественных корня, один из которых равен единице. Для

$$
q_1<\frac{l-m}{2l}
$$

имеем $\quad p_1=1-q_1>1-\dfrac{l-m}{2l}=\dfrac{l+m}{2l}.$

При выполнении последнего условия

$$
P'_1(1)=2lp_1-(l+m)>0,
$$

и следовательно, второй вещественный корень характеристического многочлена будет меньше единицы.

Тогда, решая уравнение (27) с граничными условиями (28) аналогично [9], получаем

$$T_{\text{зап1}} = Kh + K_1 + o(1), \quad (31)$$

где K, K_1 – известные константы. Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть сдвиг $\tilde{a}$ (4) и параметры процедуры H (5) и ε такие, что выполняется условие

$$\frac{\Phi^2\left(\frac{2\varepsilon-\tilde{a}}{\sqrt{2}}\right)+6P_\Delta}{\Phi\left(\frac{\varepsilon-\tilde{a}}{\sqrt{2}}\right)} < \frac{1-\delta}{2}, \quad (32)$$

где $\tilde{a}$ – параметр сдвига, определенный в (4).

Тогда для условных вероятностей $P_1(z_i > 0 \mid z_{i-1})$ выполнены условия теоремы 3, где

$$q_1 = \frac{\Phi^2\left(\frac{2\varepsilon-\tilde{a}}{\sqrt{2}}\right)+6P_\Delta}{\Phi\left(\frac{\varepsilon-\tilde{a}}{\sqrt{2}}\right)}.$$

Доказательство. Оценим сверху условные вероятности $P_1(z_i < 0 \mid z_{i-1} > 0)$ и $P_1(z_i < 0 \mid z_{i-1} < 0)$.

$$P_1(z_i < 0 \mid z_{i-1} > 0) = \frac{P_1(z_i < 0, z_{i-1} > 0)}{P_0(z_{i-1} > 0)}, \quad (33)$$

$$P_1(z_i < 0 \mid z_{i-1} < 0) = \frac{P_1(z_i < 0, z_{i-1} < 0)}{P_0(z_{i-1} < 0)}. \quad (34)$$

Построим оценки сверху для числителя и оценки снизу для знаменателя:

$$\begin{aligned} &P_1(z_{i-1} < 0) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P(tx+\varepsilon_i < \varepsilon-\tilde{a} \mid \lambda-\hat{\lambda}=t) f(t)dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P(tx+\varepsilon_n < \varepsilon-\tilde{a}) f(t)dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{\varepsilon-\tilde{a}}{\sqrt{2\left(1+\frac{t^2}{1-\lambda^2}\right)}}\right) f(t)dt \ge \Phi\left(\frac{\varepsilon-\tilde{a}}{\sqrt{2}}\right), \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} &P_1(z_{i-1} > 0) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P(tx+\varepsilon_i > \varepsilon-\tilde{a} \mid \lambda-\hat{\lambda}=t) f(t)dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P(tx+\varepsilon_i > \varepsilon-\tilde{a}) f(t)dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(-\frac{\varepsilon-\tilde{a}}{\sqrt{2\left(1+\frac{t^2}{1-\lambda^2}\right)}}\right) f(t)dt \ge \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (36)$$

при условии, что $\varepsilon < \tilde{a}$.

Построим оценку совместной вероятности с учетом соотношений

$$\begin{aligned} &P_1(\xi_i - \xi_{i-k} + \tilde{a} > 0 \mid i > \theta, i-k < \theta) = \\ &= \tilde{p} = \Phi\left(\frac{\tilde{a}}{\sqrt{2}}\right) > \frac{1}{2}; \\ &P_1(\xi_i - \xi_{i-k} + \tilde{a} < 0 \mid i > \theta, i-k < \theta) = \\ &= \tilde{q} = 1-\tilde{p} = \Phi\left(-\frac{\tilde{a}}{\sqrt{2}}\right) < \frac{1}{2}; \\ &P_1(\xi_i - \xi_{i-k} + \tilde{a} < 2\varepsilon) = \Phi\left(\frac{2\varepsilon-\tilde{a}}{\sqrt{2}}\right) > \tilde{q}. \end{aligned} \quad (37)$$

Аналогично рассуждениям теоремы 2 получаем

$$P_1(z_i < 0, z_{i-1} > 0) < \Phi\left(\frac{\tilde{a}}{\sqrt{2}}\right)\Phi\left(\frac{2\varepsilon-\tilde{a}}{\sqrt{2}}\right)+4P_\Delta; \quad (38)$$

$$P_1(z_i < 0, z_{i-1} < 0) < \Phi^2\left(\frac{2\varepsilon-\tilde{a}}{\sqrt{2}}\right)+6P_\Delta. \quad (39)$$

С учетом (38), (36) и (39), (35) окончательно получаем оценки условных вероятностей

$$\begin{aligned} &P_1(z_i < 0 \mid z_{i-1} > 0) < \\ &< \frac{\Phi\left(\frac{\tilde{a}}{\sqrt{2}}\right)\Phi\left(\frac{2\varepsilon-\tilde{a}}{\sqrt{2}}\right)+4P_\Delta}{1/2} = \\ &= 2\Phi\left(\frac{\tilde{a}}{\sqrt{2}}\right)\Phi\left(\frac{2\varepsilon-\tilde{a}}{\sqrt{2}}\right)+8P_\Delta; \end{aligned} \quad (40)$$

$$P_1(z_i < 0 \mid z_{i-1} < 0) < \frac{\Phi^2\left(\frac{2\varepsilon-\tilde{a}}{\sqrt{2}}\right)+6P_\Delta}{\Phi\left(\frac{\varepsilon-\tilde{a}}{\sqrt{2}}\right)}. \quad (41)$$

По условию теоремы выполнено условие

$$\frac{\Phi^2\left(\frac{2\varepsilon-\tilde{a}}{\sqrt{2}}\right)+6P_\Delta}{\Phi\left(\frac{\varepsilon-\tilde{a}}{\sqrt{2}}\right)} < \frac{1-\delta}{2}. \quad (42)$$

Можно показать, что

$$2\Phi\left(\frac{\tilde{a}}{\sqrt{2}}\right)\Phi\left(\frac{2\varepsilon-\tilde{a}}{\sqrt{2}}\right)+8P_\Delta < \frac{\Phi^2\left(\frac{2\varepsilon-\tilde{a}}{\sqrt{2}}\right)+6P_\Delta}{\Phi\left(\frac{\varepsilon-\tilde{a}}{\sqrt{2}}\right)},$$

следовательно, при выполнении условия (32) будет выполнено и условие

$$2\Phi\left(\frac{\tilde{a}}{\sqrt{2}}\right)\Phi\left(\frac{2\varepsilon-\tilde{a}}{\sqrt{2}}\right)+8P_\Delta < \frac{1-\delta}{2}. \quad (43)$$

Окончательно получаем

$$P_1(z_i < 0 \mid z_{i-1}) \le \frac{\Phi^2\left(\frac{2\varepsilon-\tilde{a}}{\sqrt{2}}\right)+6P_\Delta}{\Phi\left(\frac{\varepsilon-\tilde{a}}{\sqrt{2}}\right)} < \frac{1-\delta}{2}. \quad (44)$$

Выбирая в (25) величину

$$\frac{\Phi^2\left(\frac{2\varepsilon-\tilde{a}}{\sqrt{2}}\right)+6P_\Delta}{\Phi\left(\frac{\varepsilon-\tilde{a}}{\sqrt{2}}\right)}$$

в качестве q_1, получаем условие теоремы 3. Теорема 4 доказана.

Теоремы 3, 4 показывают, что при подходящем выборе параметров процедуры имеет место линейный рост среднего времени запаздывания при увеличении порога h.

Аналогичные рассуждения справедливы для среднего времени запаздывания при наблюдении второй последовательности.

Результаты использования полученных формул для расчета основных характеристик процедуры представлены в таблицах.

Здесь $K_{лт}$ – количество ложных тревог.

Из таблиц видно, что при увеличении порога запаздывание увеличивается, а количество ложных тревог уменьшается, причем среднее время запаздывания растет линейно, а среднее время между ложными тревогами растет экспоненциально при увеличении порога.

Табл. 1 – 4 показывают, что, чем больше сдвиг среднего значения наблюдений, тем лучше процедура его обнаруживает.

Таблица 1

$\lambda = 0{,}7 \quad \hat{\lambda}=0{,}71104 \quad a = 1$

h-порог	$T_{зап}$	$K_{лт}$
150	270	0
100	194	1
80	152	5
50	50	22
30	7	119
20	5	298

Таблица 2

$\lambda = 0{,}7 \quad \hat{\lambda}=0{,}71104 \quad a = -1$

h-порог	$T_{зап}$	$K_{лт}$
150	219	1
100	184	2
80	90	5
50	61	24
30	14	118
20	7	299

Таблица 3

$\lambda = 0{,}7 \quad \hat{\lambda}=0{,}71104 \quad a = 2$

h-порог	$T_{зап}$	$K_{лт}$
150	111	1
100	62	2
80	58	4
50	23	22
30	8	123
20	4	294

Таблица 4

$\lambda = 0{,}7 \quad \hat{\lambda}=0{,}71104 \quad a = -2$

h-порог	$T_{зап}$	$K_{лт}$
150	94	1
100	58	3
80	28	4
50	24	22
30	16	123
20	3	302

Таблица 5

$\lambda = -0{,}7 \quad \hat{\lambda} = -0{,}69256 \quad a = 1$

h-порог	$T_{зап}$	$K_{лт}$
150	26	1
100	19	2
80	13	4
50	6	22
30	4	113
20	3	280

Таблица 6

$\lambda = -0{,}7 \quad \hat{\lambda} = -0{,}69256 \quad a = -1$

h-порог	$T_{зап}$	$K_{лт}$
150	23	1
100	14	2
80	13	5
50	10	20
30	3	114
20	2	293

ЛИТЕРАТУРА

1. *Page E.S.* Continuous inspection schemes // Biometrika. 1954. No. 1. P. 141–145.
2. *Ширяев А.М.* Статистический последовательный анализ. М.: Наука, 1976.
3. *Сосулин Ю.Г., Фишман М.М.* Теория последовательных решений и ее применения. М.: Радио и связь, 1985.
4. *Lorden G.* Procedures for reacting to a change of distribution // Annals Math. Statistics. 1971. V.42. No.6. P.1897–1908.
5. *Моттль В.В., Мучник И.Б., Яковлев В.Г.* Оптимальная сегментация экспериментальных кривых // Автоматика и телемеханика. 1983. № 8. С.84–95.
6. *Дарховский Б.С.,Бродский Б.Е.* Непараметрический метод скорейшего обнаружения изменения среднего случайной последовательности // Теория вероятностей и ее применение. 1987. Т.32. №4. С.703–711.
7. *Драгалин В.* Асимптотические решения задачи обнаружения разладки при неизвестном параметре // Статистические проблемы управления. Вильнюс: Институт математики и кибернетики АН ЛитССР, 1988. Вып. 83. С.47–51.
8. *Yakir B.* On the average run length to false alarm in surveillance problems which possess an invariance structure // Annals Math. Statistics. 1998. V.26. No.3. P.1198–1214.
9. *Воробейчиков С.Э.* Об обнаружении изменения среднего в последовательности случайных величин // Автоматика и телемеханика. 1998. № 3. С. 50–56.
10. *Воробейчиков С.Э., Кабанова Т.В.* Обнаружение момента разладки последовательности независимых случайных величин // Радиотехника и электроника. РАН, 2002. Т.47(10). С.1198–1203.
11. *Воробейчиков С.Э.* О последовательной идентификации параметров случайных процессов рекуррентного типа // Математическая статистика и ее приложения. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1983. Вып.9.
12. *Бассвиль М., Вилски А., Банвенист и др.* Обнаружение изменения свойств сигналов и динамических систем. М.: Мир, 1989.

Статья представлена кафедрой высшей математики и математического моделирования Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 5 июня 2003 г.