

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ УСЛОВНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СИЛЬНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ

В работе предлагается метод оценивания функционалов от условных распределений при непараметрической неопределенности по наблюдениям, удовлетворяющим условиям сильного перемешивания, на основе кусочно-гладких аппроксимаций оценок подстановки, для которых выведены формулы главных частей асимптотических среднееквadraticеских ошибок с улучшенной скоростью сходимости. Полученные результаты применены для решения задачи идентификации нелинейной авторегрессии первого порядка.

Определим класс условных функционалов формулой

$$J(x) = \int g(y)f(y|x)dy = \frac{\int g(y)f(x,y)dy}{p(x)} = \frac{G(x)}{p(x)}, \quad (1)$$

где $g(\bullet)$ – известная измеримая по Борелю скалярная функция, $f(x,y)$ – неизвестная плотность распределения наблюдаемой двумерной случайной величины $Z = (X,Y) \in \mathbf{R}^2$, $G(x) = \int g(y)f(x,y)dy$, $p(x)$ – маргинальная плотность распределения величины X , $f(y|x) = \frac{f(x,y)}{p(x)}$ – условная плотность распределения.

Интегрирование, если не оговорено иначе, проводится на всей числовой оси или плоскости, т.е.

$$\int \equiv \int_{\mathbf{R}^1}, \quad \iint \equiv \int_{\mathbf{R}^2}.$$

Приведем примеры условных функционалов (1).

Так, условное математическое ожидание, или функция регрессии выхода стохастического объекта относительно входа, является моделью, минимизирующей среднеквадратическую ошибку (СКО) истинных выходов объекта и модели:

$$r(x) = E(Y|X=x) = \int yf(y|x)dy = \frac{\int yf(x,y)dy}{p(x)}.$$

Обычно при построении модели учитываются не все входы реального объекта, поэтому возникает погрешность, связанная с упрощением регрессионной модели относительно истинной структуры объекта.

Эту погрешность можно измерять остаточной (условной) дисперсией

$$D(Y|x) = \frac{\int y^2 f(x,y)dy}{p(x)} - r^2(x).$$

Для характеристики уровня сложности объекта применяются также такие его статистические характеристики, как условные коэффициенты асимметрии и эксцесса. В этом случае $g(y) = y^k$, $k = 1, 2, 3, 4$; более сложные функции $g(y)$ заданного вида используются при построении оптимальных оценок прогноза (см. гл. 8 в [1]).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Простые непараметрические ядерные оценки подстановки [2. С. 91] условных функционалов $J(x)$ в точке x согласно [1. С. 28] имеют вид

$$J_n(x) = \frac{G_n(x)}{p_n(x)} = \frac{\sum_{i=1}^n g(Y_i)K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)}, \quad (2)$$

$$\text{где} \quad G_n(x) = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n g(Y_i)K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right),$$

$$Z_i = (X_i, Y_i), \quad i = \overline{1, n}$$

– двумерная выборка, характеризуемая плотностью $f(x,y)$,

$$p_n(x) = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right),$$

$K(u)$ – ядерная функция, последовательность чисел $h_n > 0$ удовлетворяет условию $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$. Согласно (2),

при $g(y) = y$ получаем известную ядерную оценку регрессии Надарая–Ватсона [3,4].

Применение оценок типа (2) иногда приводит к нежелательным эффектам. Например, при некоторых значениях параметров модели оценки (2) становятся неустойчивыми, в частности, если $|p_n(x)| < \varepsilon$ для достаточно малых ε .

Другая проблема состоит в том, что теоретическая возможность равенства $p_n(x) = 0$ (например, когда используются знакопеременные ядра [5]), улучшающие скорость сходимости в среднеквадратическом ядерной оценки $J_n(x)$ к функции $J(x)$ не позволяет из-за неустойчивости оценки типа (2) в явном виде сформировать мажорантную последовательность и определить главную часть СКО оценки $J_n(x)$ в соответствии с методами, изложенными в [1, 6, 7].

Известны следующие три метода решения этих проблем.

1. Ограничивать область U , в которой $p(x) > 0$ [8], при исследовании свойств сходимости оценки $J_n(x)$.

2. Налагать на случайную величину $g(Y)$ и ядро $K(u)$ дополнительные условия:

$$|g(Y)| < \infty \quad [3], \quad \sup_Y E[\exp(a|g(Y)|)] < \infty, \quad a > 0 \quad [9],$$

$$K(u) \geq 0 \quad [3,9].$$

3. Использовать усеченные модификации знаменателя оценки (2) [1. С. 68].

В работе предлагается четвертый метод решения указанных проблем: оценивание функционала (1) при непараметрической неопределенности с помощью кусочно-гладких аппроксимаций оценок (2), для которых можно найти главные части асимптотических СКО с улучшенной скоростью сходимости, причем наблюдения удовлетворяют условиям сильного перемешивания (с.п.).

Полученные результаты применены при решении задачи идентификации нелинейной авторегрессии первого порядка и позволяют также исследовать более общие динамические системы, в том числе процессы авторегрессионного типа со свойствами с.п. [1. С. 146].

Сходимость с вероятностью 1 для последовательностей с.п. оценок типа (2) исследовалась в [11], но проблема вычисления СКО таких оценок осталась не исследованной. В [9] найдена главная часть асимптотической оптимальной СКО оценки Надарая – Ватсона

для с.п. последовательностей, но с традиционной скоростью сходимости.

2. КУСОЧНО-ГЛАДКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ КЛАССИЧЕСКИХ ОЦЕНОК

Представим функционал $J(x)$ в виде

$$J(x) = H(a_1(x), a_0(x)) = a_1(x)/a_0(x). \quad (3)$$

Согласно [1. С. 17], назовем базовыми функционалами функции

$$a_1(x) = \int g(y)f(x, y)dy \text{ и } a_0(x) = \int f(x, y)dy = p(x).$$

Для преодоления ограничений, указанных в п.2, и увеличения устойчивости оценки $J_n(x)$ в области, в которой знаменатель $p_n(x)$ в (2) близок к нулю, применим следующую кусочно-гладкую аппроксимацию (см. [7]) для оценки (2):

$$\tilde{J}_n^{[v]}(x) = \frac{J_n(x)}{(1 + \delta_{n,v} |J_n(x)|^\rho)^\tau}, \quad (4)$$

где $\tau > 0$, $\rho > 0$, $\rho\tau \geq 1$ и $\delta_{n,v} = O(h_n^{2v} + (nh_n)^{-1})$, $v \geq 2$.

В данной работе установлены условия существования оптимальной скорости сходимости порядка $O(n^{-2v/(2v+1)})$, $v = 2, 4, \dots$, непараметрической оценки (2) и ее кусочно-гладких аппроксимаций (4) для слабовзвешенных наблюдений, удовлетворяющих условию с. п., при которых эта скорость является оптимальной и в случае независимых наблюдений (см. [5, 6]). Если $v \rightarrow \infty$, то эта оптимальная скорость, которая является наилучшей согласно [10], стремится к скорости сходимости $O(n^{-1})$ классических параметрических оценок.

3. ЯДЕРНЫЕ ОЦЕНКИ БАЗОВЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ СЛУЧАЙНОЙ ВЫБОРКИ

3.1. Вспомогательные обозначения и определения

Пусть $Z_1, \dots, Z_n$ – двумерная выборка объема n из генеральной совокупности, характеризуемой плотностью распределения $f(x, y)$. В качестве непараметрической оценки плотности $p(x) = a_0(x)$ и базового функционала $a_1(x)$ воспользуемся объединенной статистикой следующего вида:

$$a_{nr}(x) = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n g^r(Y_i) K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right), \quad r = 0, 1, \quad (5)$$

где $K(u)$ – ядро, которое, вообще говоря, не обязательно обладает характеристическими свойствами плотности (неотрицательность и нормировка на 1), а последовательность чисел $h_n \downarrow 0$.

Оценку (5) при $r = 0$ обычно называют ядерной или парзеновской оценкой плотности (иногда оценкой типа Розенблатта – Парзена).

Определение 1. Функция $H(z): R^s \rightarrow R^1$ принадлежит классу $N_{v,s}(x)$, если она и все ее частные производные (до v -го порядка включительно) непрерывны в точке x .

Определение 2. Функция $H(z) \in N_{v,s}(R)$, если указанные в определении 1 свойства $H(z)$ выполняются для всех $x \in R^s$.

Определение 3. Функция $H(z) \in N_{v,s}(x, \varepsilon)$, если $H(z)$ и все ее частные производные до v -го порядка включительно непрерывны и ограничены в некоторой ε -окрестности точки x .

Обозначим:

$$\sup_x = \sup_{x \in R^1} T_j = \int u^j K(u) du, \quad j = 1, 2, \dots$$

Определение 4. Борелевская функция $K(u)$ принадлежит классу нормированных ядер A , если

$$\sup_u |K(u)| < \infty, \quad \int |K(u)| du < \infty, \quad \int K(u) du = 1.$$

Определение 5. Борелевская функция $K(u) \in A_v$, если $K(u) \in A$, и $K(u)$ удовлетворяет условиям

$$\int |u^v K(u)| du < \infty, \quad T_j = 0, \quad j = 1, \dots, v-1.$$

Замечание 1. Классу A_2 принадлежат симметричные относительно нуля ядра с характеристическими свойствами плотности и $\int u^2 K(u) du < \infty$, однако ядра $K(u)$ из класса A_v , $v \geq 4$, не являются плотностями, поэтому функция $K(u)$ при некоторых значениях аргумента u будет отрицательной.

Одним из методов нахождения ядер $K(u) \in A_v$ является рекуррентная процедура, основанная на полиномах Якоби, ортонормированных с весовой функцией $p(u) = \{1 - u^2, |u| \leq 1; 0, |u| > 1\}$, которая определяется следующим образом:

$$K(u) = p(u) \sum_{i=0}^{v-2} p_j(0) p_j(u) (2j+3)(j+2)/8(j+1),$$

$$p_{j+2}(u) = \frac{j+3}{j+4} \left[\frac{2j+5}{j+2} u p_{j+1}(u) - p_j(u) \right],$$

$$p_0(u) = p_0(0) = 1, \quad p_1(u) = 2u, \quad p_1(0) = 0.$$

В качестве примера приведем ядро класса A_6 :

$$K(u) = \begin{cases} 105(5 - 35u^2 + 63u^4 - 33u^6)/2^8, & \text{при } |u| \leq 1, \\ 0, & \text{при } |u| > 1. \end{cases}$$

3.2. Асимптотические свойства

Обозначим $a_r^+(x) = \int |g^r(y)| f(x, y) dy$, смещение оценки $a_{nr}(x)$ – через $b(a_{nr}) = E a_{nr}(x) - a_r(x)$. Теперь сформулируем условия асимптотической несмещенности оценки (5).

Лемма 1 (асимптотическая несмещенность базовой оценки). Если при $r=0,1$ функции $a_r(z) \in N_{0,1}(x)$, $\sup_x a_r^+(x) < \infty$, ядро удовлетворяет условиям

$$\int |K(u)| du < \infty, \quad \int K(u) du = 1,$$

последовательность вещественных чисел $h_n \downarrow 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b(a_{nr}) = \lim_{n \rightarrow \infty} E a_{nr}(x) - a_r(x) = 0. \quad (6)$$

Определение 6. Оценка t_n параметра t имеет скорость сходимости порядка $n^{-\alpha}$ при $\alpha > 0$ (в знаках: $t_n \in V(n^{-\alpha})$), если для ее СКО $u^2(t_n) = E(t_n - t)^2$ справедливо предельное соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha u^2(t_n) = C$, где $0 < C < \infty$.

Обозначим производную m -го порядка функции $a_r(x)$ как $a_r^{(m)}(x)$.

При вычислении скорости сходимости оценки (2) в соответствии с определением 6 требуется для $J_n(x)$ вычислить скорость сходимости смещения.

Лемма 2 (скорость сходимости смещения). Пусть при $r = 0, 1$ $a_r(z) \in N_{v,1}(R)$; 2) $\sup_x |a_r^{(m)}(x)| < \infty$, $m = 0, v$;

3) $K(u)$ удовлетворяет условию A_v без $\sup_u |K(u)| < \infty$;

4) $h_n \downarrow 0$.

Тогда при $n \rightarrow \infty$ для смещения оценки $a_{nr}(x)$ получим

$$|b(a_{nr}) - \omega_r^{(v)}(x)h_n^v| = o(h_n^v), \quad (7)$$

где
$$\omega_r^{(v)}(x) = \frac{a_r^{(v)}(x)}{v!} T_v.$$

Определение 7. Последовательность вещественных чисел $\{h_n\}$ принадлежит классу H , если $(h_n + 1/nh_n) \downarrow 0$.

Обозначим $L(c) = \int K(u)K(cu)du$, $c \in R^1$, т.е. $L(1) = \int K^2(u)du$.

Определение 8. Числовую последовательность α_n будем называть эквивалентной числовой последовательности $\beta_n \neq 0$ (в знаках $\alpha_n \sim \beta_n$), если $\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n / \beta_n| = 1$.

Лемма 3 (ковариация). Пусть при $r, s = 0, 1$ и $x \neq y$:

1) функции $a_r(z) \in N_{0,1}(y)$, $a_s(z) \in N_{0,1}(y)$;

2) функции $a_r(z) \in N_{0,1}(x)$, $a_s(z) \in N_{0,1}(x)$;

3) ядро $K(u) \in A$ и $\lim_{|u| \rightarrow \infty} K(u) = 0$;

4) $E|g^2(Y)| < \infty$;

5) последовательность вещественных чисел $h_n \in H$;

6) $\sup_u |K(u)u| \leq C_0$.

Тогда при $n \rightarrow \infty$ ковариация равна

$$\text{cov}(a_{nr}(x), a_{ns}(y)) \sim \frac{\delta_{x,y}}{2nh_n} L(1) [a_{r+s}(x) + a_{r+s}(y)]. \quad (8)$$

Следствие 1 (дисперсия). Если выполнены условия 2) – 5) леммы 3, то при $n \rightarrow \infty$ дисперсия равна

$$Da_{nr}(x) \sim \frac{1}{nh_n} L(1) a_{2r}(x). \quad (9)$$

Улучшение скорости сходимости смещения оценки (лемма 2) позволяет повысить скорость ее сходимости в смысле определения 6.

Теорема 1 (СКО). Если выполнены условия леммы 2 и следствия 1, то при $n \rightarrow \infty$ оптимальная последовательность h_{nr}^0 принимает вид

$$h_{nr}^0 = \arg \min_{h_{nr} > 0} u^2(a_{nr}(x)) \sim \left[\frac{L(1) a_{2r}(x)}{2nv [\omega_r^{(v)}(x)]} \right]^{\frac{1}{2v+1}},$$

а оптимальная СКО вычисляется по формуле

$$u^2(a_{nr}(x)|_{h_{nr}=h_{nr}^0}) = u^2(a_{nr}^0(x)) \sim$$

$$\sim [2v+1] \left[\frac{L(1) a_{2r}(x)}{2nv} \right]^{\frac{2v}{2v+1}} [\omega_r^{(v)}(x)]^{\frac{2v}{2v+1}} = O(n^{\frac{2v}{2v+1}}). \quad (10)$$

Согласно (10) и определению 6, при $v \rightarrow \infty$

$$a_{nr}^0(x) \in V(n^{\frac{2v}{2v+1}}) \rightarrow V(n^{-1}),$$

Вывод. Скорость сходимости оптимальной непараметрической оценки $a_{nr}^0(x)$ стремится к обычной скорости сходимости параметрических оценок.

Замечание 2. Результаты теоремы 1 имеют важное теоретическое значение, но их применение на практике вызывает определенные затруднения, так как, во-первых, они справедливы только при достаточно больших n и, во-вторых, оптимальные h_{nr}^0 и $u^2(a_{nr}(x))$ выражаются через неизвестные нам функции $a_{2r}(x)$, $a_r(x)$ и их производные $a_r^{(v)}(x)$.

Это позволяет считать центральной проблемой при применении на практике оценок $a_{nr}(x)$ задачу нахождения для конкретного набора $Z_1, \dots, Z_n$ оптимального, в смысле некоторого критерия, значения $h_{nr}^0(Z_1, \dots, Z_n)$.

Например, при $r = 0$ такое $h_{nr}^0(Z_1, \dots, Z_n)$ часто находят из максимума эмпирической функции правдоподобия:

$$h_{nr}^0(Z_1, \dots, Z_n) = \arg \max_{h>0} \prod_{i=1}^n p_{n-1}(X_i), \quad (11)$$

где
$$p_{n-1}(X_i) = \frac{1}{(n-1)h} \sum_{j \neq i}^{n-1} K\left(\frac{X_j - X_i}{h}\right).$$

Свойства так называемой кросс-проверочной ядерной оценки $\hat{p}_n(x) = \hat{a}_{n0}(x)$ с параметром $h_{n0}^0(Z_1, \dots, Z_n)$, полученным из критерия (11), обсуждаются в гл. 6 монографии [14], где также можно найти достаточно подробный список литературы по данной проблеме.

Методом кросс-проверки можно найти $h_{n1}^0(Z_1, \dots, Z_n)$ для $a_{n1}(x)$, $h_n^0(Z_1, \dots, Z_n)$ для оценки $J_n(x) = a_{n1}(x)/a_{n0}(x)$ функции $J(x)$ из минимума критериев:

$$h_{n1}^0(Z_1, \dots, Z_n) = \arg \min_{h>0} \sum_{i=1}^n [g(Y_i) - \frac{1}{(n-1)h} \sum_{j \neq i}^{n-1} g(Y_j) K\left(\frac{X_i - X_j}{h}\right) / \hat{p}_{n-1}(X_i)]^2,$$

$$h_n^o(Z_1, \dots, Z_n) = \arg \min_{h>0} \sum_{i=1}^n [g(Y_i) - \sum_{i \neq j}^{n-1} g(Y_i) K\left(\frac{X_i - X_j}{h}\right) / \sum_{i \neq j}^{n-1} g(Y_i) K\left(\frac{X_i - X_j}{h}\right)]^2.$$

Представляет интерес также подход Э.Надаря к решению указанной проблемы, когда в оптимальных h_{nr}^o неизвестные функции $a_{2r}(x)$, $a_r(x)$ и их производные $a_r^{(v)}(x)$ заменяются соответственно состоятельными ядерными оценками (см. пар. 2, гл. 1 в [15]).

Замечание 3. При использовании в (11) оценок с $v > 2$ эмпирическая функция правдоподобия может принять отрицательное значение с отличной от нуля вероятностью, что приведет к некорректному результату, не поддающемуся интерпретации. Этого можно избежать, если в (11) использовать неотрицательные ядерные оценки плотностей с улучшенной скоростью сходимости [1, 16].

4. УСЛОВИЕ СИЛЬНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ

Обозначим σ -алгебру, порожденную одномерными случайными величинами $X_s, X_{s+1}, \dots, X_t$, через F_s^t .

Определение 9. Строго стационарная последовательность $\{X_j\}_{j \geq 1}$ удовлетворяет с.п. условию, если

$$\sup_{A \in F_{-\infty}^0, B \in F_{\tau}^{\infty}} |P(AB) - P(A)P(B)| \leq \alpha(\tau) \downarrow 0, \quad \tau \uparrow \infty, \quad (12)$$

$\alpha(\tau)$ – коэффициент с.п. (в знаках: $\{X_j\}_{j \geq 1} \in S(\alpha)$).

Замечание 4. В определении 9 под $\{X_j\}_{j \geq 1}$ можно подразумевать также последовательность векторов.

Важные примеры с.п. последовательностей можно найти в [10], [1]; отметим только, что с.п. последовательности обычно генерируются динамическими моделями авторегрессионного типа [1].

Обозначим $\|X\|_p = (E|X|^p)^{1/p}$. В дальнейшем часто будет использоваться следующее неравенство.

Лемма 4 [17]. Пусть случайные величины X и Y измеримы относительно σ -алгебр $F_{-\infty}^0$ и F_{τ}^{∞} соответственно, имеет место (12) и пусть $1 \leq p, q, r \leq \infty$, $p^{-1} + q^{-1} + r^{-1} = 1$. Тогда

$$|EXY - EXEY| \leq 2\pi\alpha^{1/r}(\tau) \|X\|_p \|Y\|_q. \quad (13)$$

Впервые неравенство типа (13) с константой $C = 12$ вместо 2π было доказано в [18].

5. СВОЙСТВА ЯДЕРНЫХ ОЦЕНОК БАЗОВЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ С.П. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Понятно, что результаты лемм 1 и 2 остаются справедливыми и в случае, когда выборочные наблюдения $\{Z_j\}_{j=1}^n$ зависимы между собой. Далее мы докажем, что для ковариаций, дисперсий и СКО оценок выражения их главных частей (главных вкладов) при задаваемых условиях перемешивания совпадают с

главными вкладами утверждений леммы 3, следствия 1 и теоремы 1.

Положим $z = (x, y)$, $\partial z = \partial x \partial y$, $(Z_1 < z) = (X_1 < x, Y_1 < y)$.

Обозначим

$$a_{2+\delta}^+(x) = \int |g(y)|^{2+\delta} f(x, y) dy,$$

$$a_{1\tau,rs}^+(x, y) = \iiint |g^r(v)g^r(q)| f_{1\tau}(x, v, y, p) dv dp,$$

где $f_{1\tau}(z, p) = \frac{\partial^4}{\partial z \partial p} P(Z_1 < z, Z_{\tau} < p)$ – четырехмерная

плотность распределения случайных величин (Z_1, Z_{τ}) .

Лемма 5 (ковариация оценок базовых функционалов для с.п. последовательностей).

Пусть при $r, s = 0, 1$

1) последовательность $\{Z_j\}_{j \geq 1} \in S(\alpha)$, причем

$$\int_1^{\infty} [\alpha(\tau)]^q d\tau < \infty, \quad 0 < q < 1;$$

2) функции $a_{r+s}(v) \in N_{0,1}(y)$, $a_{2+\delta}^+(v) \in N_{0,1}(y)$;

3) функции $a_{r+s}(v) \in N_{0,1}(x)$, $a_{2+\delta}^+(v) \in N_{0,1}(x)$;

4) ядро $K(u) \in A$ и дополнительно $\lim_{|u| \rightarrow \infty} K(u) = 0$;

5) $\sup_u |K(u)u| \leq C_0$;

6) последовательность вещественных чисел $h_n \in H$, $\sup_x a_{(2+\delta)r}^+(x) < \infty$.

Тогда при $n \rightarrow \infty$ для ковариации справедлива оценка

$$\begin{aligned} |\text{cov}(a_{nr}(x), a_{ns}(y))| &\leq \frac{4\pi(1+o(1))}{nh_n^{1+q}} \times \\ &\times \left[a_{(2+\delta)r}^+(x) a_{(2+\delta)s}^+(y) \right]^{\frac{1-q}{2}} \times \\ &\times \left[\int |K(u)|^{\frac{2}{1-q}} du \right]^{1-q} \int_1^{\infty} [\alpha(\tau)]^q d\tau. \end{aligned} \quad (14)$$

Пусть дополнительно

7) коэффициент $\alpha(\tau)$ удовлетворяет

$$\int_1^{\infty} [\alpha(\tau)]^q d\tau < \infty, \quad 0 < q < 0,5;$$

8) функции $a_r^+(x)$, $a_s^+(y)$ и $a_{1\tau,rs}^+(x, y)$ для $\tau > 1$ равномерно ограничены в $\mathbf{R}^2$.

Тогда при $n \rightarrow \infty$ ковариация равна

$$\begin{aligned} \text{cov}(a_{nr}(x), a_{ns}(y)) &= \\ &= \frac{\delta_{x,y}}{2nh_n} L(1) [a_{r+s}(x) + a_{r+s}(y)] + o\left(\frac{1}{nh_n}\right). \end{aligned} \quad (15)$$

Следствие 2 (дисперсия оценок базовых функционалов для с.п. последовательностей).

Если при $r = s = 0, 1$ выполнены условия 1), 3), 4), 6) – 8) леммы 5, то при $n \rightarrow \infty$ дисперсия оценки равна

$$Da_{nr(x)} = \frac{1}{nh_n} L(1) a_{2r}(x) + o\left(\frac{1}{nh_n}\right). \quad (16)$$

Теорема 2 (СКО оценок базовых функционалов для с.п. последовательностей). В условиях леммы 2 и следствия 2 при $n \rightarrow \infty$ выполняются все утверждения теоремы 1.

6. СХОДИМОСТЬ ЧЕТВЕРТЫХ МОМЕНТОВ ЯДЕРНЫХ ОЦЕНОК БАЗОВЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ДЛЯ С.П. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Обозначим

$$f_{1i(i+j)(i+j+k)}(z, s, u, w) = \frac{\partial^8 P(Z_1 < z, Z_i < s, Z_{i+j} < u, Z_{i+j+k} < w)}{\partial z \partial s \partial u \partial w}$$

— плотность распределения случайных величин $(Z_1, Z_i, Z_{i+j}, Z_{i+j+k})$,

$$a_{1i(i+j)(i+j+k),r}^+(x, y, x', y') = \int_{R^8} |g^r(v)g^r(s)g^r(v')g^r(s')| \times \\ \times f_{1i(i+j)(i+j+k),r}(x, v, y, s, x', v', y', s') dv ds dv' ds',$$

$$a_{1(1+j)(1+j+k),r}^+(x, y, x') = \int_{R^6} |g^r(v)g^r(s)g^r(v')| \times \\ \times f_{1(1+j)(1+j+k),r}(x, v, y, s, x', v') dv ds dv'.$$

$M_4(a_{nr}) = E[a_{nr}(x) - a_n(x)]^4$ — четвертый момент отклонений $a_{nr}(x)$ от $a_r(x)$,

$$S_{nr} = a_{nr}(x) - E a_r(x) = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n \eta_{ir} \quad \text{— центрированная оценка } a_{nr}(x),$$

$$\eta_{ir} = g^r(Y_i) K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right) - E\left[g^r(Y_i) K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right)\right], \quad r = 0, 1.$$

Лемма 6 (порядок сходимости четвертых центральных моментов). Пусть для $r = 0, 1$

1) последовательность $\{Z_j\}_{j \geq 1} \in S(\alpha)$ и

$$\int_0^\infty \tau^2 [\alpha(\tau)]^{2+\delta} d\tau < \infty, \quad \delta > 0$$

2) функции $a_{1i(i+j)(i+j+k),r}^+(u, v, t, w) \in N_{0,4}(x, x, x, x)$, $i, j, k \geq 1, \quad i+j+k \leq n$; $a_{1(1+j)(1+j+k),r}^+(u, v, t) \in N_{0,3}(x, x, x)$, $j, k \geq 1, \quad 1+j+k \leq n$;

3) $K(u) \in A$ и $\lim_{|u| \rightarrow \infty} uK(u) = 0$;

4) последовательность вещественных чисел $h_n \in H$, $\sup_x a_{(2+\delta)r}^+(x) < \infty$.

$$\text{Тогда } E(S_{nr})^4 = O\left(\frac{1}{n^2 h_n^2}\right).$$

Лемма 7. (порядок сходимости четвертых моментов отклонений). Если для $r = 0, 1$ выполняются условия лемм 2 и 6, то $M_4(a_{nr}) = O\left(\frac{1}{n^2 h_n^2} + h_n^{4v}\right)$.

7. СВОЙСТВА ЯДЕРНОЙ ОЦЕНКИ УСЛОВНО- ГО ФУНКЦИОНАЛА ДЛЯ С.П. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Оценим условный функционал

$$J(x) = H(a_1(x), a_0(x)) = a_1(x) / a_0(x)$$

методом подстановки [2, с.91], т.е. отношением

$$J_n(x) = H(a_{n1}(x), a_{n0}(x)) = a_{n1}(x) / a_{n0}(x),$$

где $a_{nr}(x)$ задается формулой (5).

Учитывая, что знаменатель $f_n(x)$ может быть близок к нулю в оценке подстановки $J_n(x)$ отношения $J(x)$, особенно при использовании знакопеременных ядер для восстановления базовых функционалов, приходим к выводу о неустойчивости самой оценки подстановки. Поэтому, как следует из Введения и п.3, теоремы о СКО оценок сложных функций с особенностями, требующими нахождения мажорантных последовательностей, оказываются неприменимыми. Одним из конкретных способов решения этой проблемы является использование для оценки отношения $J_n(x)$ кусочно-гладкой аппроксимации $\tilde{J}_n(x)$ (см. формулу (4)).

Введем обозначения:

$$B(a_{n1}, a_{n0}) = \begin{bmatrix} \text{cov}(a_{n1}, a_{n1}) & \text{cov}(a_{n1}, a_{n0}) \\ \text{cov}(a_{n0}, a_{n1}) & \text{cov}(a_{n0}, a_{n0}) \end{bmatrix};$$

$\{t_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность оценок аргумента t функции $H(t): R^s \rightarrow R^1, s \geq 1; \quad \nabla H(t) = (H_1, \dots, H_s)$, где $H_1 = \partial H(t) / \partial t_1, \dots, H_s = \partial H(t) / \partial t_s$;

$$\|t_n\| = \sqrt{t_{n1}^2 + \dots + t_{ns}^2} \quad \text{— евклидова норма вектора } t_n;$$

N^+ — множество четных натуральных чисел;

$$Y(\lambda) = \{(q, k) : q \geq q(\lambda) = 2k / (\lambda - k - 1) > 0,$$

$$\lambda \geq \lambda_0 = [3, k = 1; 2k, k \geq 2]\},$$

множество для тройки (q, k, λ) , где $k, \lambda \in N$;

$$\Gamma(m) = \{(\gamma, k) : 0 \leq \gamma \leq (m - k - 1) / 2k,$$

$m \geq m_0 = (3, k = 1; 2k, k \geq 2, k \in N)\}$ — множество для пары (γ, k) и $m \in N$;

$$\tilde{H}(t_n) = H(t_n) / (1 + \delta_n |H(t_n)|^q)^p,$$

где $q > 0, p > 0, pq \geq 1, \delta_n > 0$.

Определение 10. Последовательность функций $\{H(t_n)\}$ принадлежит классу $M(\gamma)$, если для всевозможных значений величин $X_1, \dots, X_n$ последовательность $\{H(t_n)\}$ мажорируется числовой последовательностью $C_0 d_n^\gamma, d_n \uparrow \infty, n \rightarrow \infty, 0 \leq \gamma < \infty$.

Свойства оценки подстановки $H(t_n)$ и ее кусочно-

гладкой аппроксимации $\tilde{H}(t_n)$ исследованы в [7]. Далее эти теоремы (обозначенные здесь под номерами 4 и 5) дополнены новыми следствиями.

Теорема 3 (теорема 1 в [7]). Пусть выполнены условия

$$1) H(z) N_{2,s},$$

$$2) \{H(t_n)\} \in M(\gamma),$$

$$3) E \|t_n - t\|^i = O(d_n^{-i/2})$$

для всех $i \in N$.

Тогда для любого $k \in N$

$$\left| E[H(t_n) - H(t)]^k - E[\nabla H(t)(t_n - t)^T]^k \right| = O(d_n^{-(k+1)/2}).$$

Если в условии 3) положить $i = m$, то утверждение теоремы выполняется, когда 4) $(\gamma, k) \in \Gamma(m)$.

Следствие 3. Пусть выполнены условия

- 1) $H(z)N_{2,s}$,
- 2) $\{H(t_n)\} \in M(\gamma)$,
- 3) $E\|t_n - t\|^4 = O(d_n^{-2})$,
- 4) $(\gamma, k) \in \Gamma(4) = \{\gamma : 0 \leq \gamma \leq 1/4\}$.

Тогда для СКО оценки подстановки имеем

$$u^2(H(t_n)) = \sum_{j,p=1}^s H_j H_p [\text{cov}(t_{nj}, t_{np}) + b(t_{nj})b(t_{np})] = O(d_n^{-3/2}).$$

Теорема 4 (следствие 4 в [7]). Пусть выполнены условия

- 1) для некоторого $\lambda \geq 3$, $\lambda \in \mathbb{N}$,
 $E\|t_n - t\|^\lambda = O(d_n^{-\lambda/2})$, $d_n \uparrow \infty$, $n \rightarrow \infty$,
- 2) функция $H(z) \in N_{2,s}(t, \varepsilon)$,
- 3) $\delta_n = C d_n^{-1}$, $0 < C < \infty$
- 4) $H(t) \neq 0$ или $q \in \mathbb{N}^+$.

Тогда для любых $(q, k) \in \Upsilon(\lambda)$

$$\left| E[\tilde{H}(t_n) - H(t)]^k - E[\nabla H(t)(t_n - t)]^k \right| = O(d_n^{-\frac{k+1}{2}}).$$

Следствие 4. Пусть выполнены условия

- 1) $H(z) \in N_{2,s}$,
- 2) $E\|t_n - t\|^4 = O(d_n^{-2})$,
- 3) $\delta = \delta_n = \tilde{C} d_n^{-1}$,
- 4) $H(t) \neq 0$ или $q \in \mathbb{N}^+$,
- 5) $(q, 2) \in \Upsilon(4) = \{q : q \geq 4\}$.

Лемма 9. Если выполняются условия следствия 2, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2v}{2v+1}} B(a_{n1}^{o[v]}, a_{n0}^{o[v]}) = \begin{bmatrix} \frac{L^{[v]}(1)a_2(x)}{\beta_1^{[v]}} & \left(\frac{L(\beta_0^{[v]}/\beta_1^{[v]})}{\beta_1^{[v]}} + \frac{L(\beta_1^{[v]}/\beta_{01}^{[v]})}{\beta_{01}^{[v]}} \right) \frac{a_1(x)}{2} \\ \left(\frac{L(\beta_0^{[v]}/\beta_1^{[v]})}{\beta_1^{[v]}} + \frac{L(\beta_1^{[v]}/\beta_{01}^{[v]})}{\beta_{01}^{[v]}} \right) \frac{a_1(x)}{2} & \frac{L^{[v]}(1)a_0(x)}{\beta_0^{[v]}} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Замечание 5. Порядок скорости сходимости СКО в (10) совпадает с порядком скорости сходимости ковариационной матрицы (20) (каждого ее элемента) в смысле определения 6.

Обозначим

$$\sigma^2(x) = \frac{L(1)}{p(x)} \left[\int g^2(y) f(y|x) dy - J^2(x) \right].$$

Свойства оценки подстановки условного функционала $J_n(x)$ и ее кусочно-гладкой аппроксимации $\tilde{J}_n^{[v]}(x)$ изучаются ниже.

Теорема 5. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) последовательность $\{Z_j\}_{j \geq 1} \in S(\alpha)$, и коэффициент с.п. $\alpha(\tau)$ удовлетворяет двум дополнительным ограничениям

$$\int_1^\infty [\alpha(\tau)]^q d\tau < \infty, \quad 0 < q < 1/2,$$

$$\int_0^\infty \tau^2 [\alpha(\tau)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} d\tau < \infty, \quad \delta > 0;$$

Тогда

$$E[\tilde{H}(t_n) - H(t)]^2 = \sum_{j,p=1}^s H_j H_p [\text{cov}(t_{nj}, t_{np}) + b(t_{nj})b(t_{np})] + O(d_n^{-3/2}).$$

Лемма 5 и следствие 2 определяют условия сходимости ковариационной матрицы оценок $a_{n1}(x)$ и $a_{n0}(x)$ для с.п. последовательностей.

Лемма 8. Если выполняются условия следствия 2, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n h_n B(a_{n1}, a_{n0}) = L(1) \begin{bmatrix} a_2(x) & a_1(x) \\ a_1(x) & a_0(x) \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Наличие верхнего или нижнего индекса $[v]$ у величин $h_{nr}^{[v]}, a_{nr}^{[v]}(x)$ и др., зависящих от $K(u)$, обозначает принадлежность ядра $K(u)$ классу функций A_v . Обозначим через $a_{nr}^{o[v]}(x)$ оптимальную оценку базового функционала, для которой

$$h_{nr}^{o[v]} = \beta_r^{o[v]} n^{-1/(2v+1)},$$

$$\beta_r^{o[v]} = \left[L^{[v]}(1) a_{2r}(x) / (2v \beta_r^{[v]}) \right]^{1/(2v+1)},$$

где

$$B_r^{[v]} = [\omega_r^{(v)}]^2;$$

пусть также

$$Q_r^{o[v]} = \left(B_r^{[v]} \right)^{1/2} \left(\beta_r^{o[v]} \right)^v, \quad L = \int K^2(u) du.$$

$$2) a_r(z) \in N_{2,1}(x), \quad \sup_x |a_r^{(2)}(x)| < \infty, \quad r = 0, 1,$$

$$a_2^+(v) \in N_{0,1}(x), \quad a_{(2+\delta)}(v) \in N_{0,1}(x),$$

$$3) \sup_x |a_r^{(2)}(x)| < \infty, \quad p(x) > 0, \quad r = 0, 1, \quad \sup_x p(x) < \infty;$$

$$4) \text{ последовательность вещественных чисел } h_n \in H;$$

$$5) \text{ ядро } K(u) \in A, \quad \lim_{|u| \rightarrow \infty} uK(u) = 0;$$

$$6) \text{ функции } a_r^+(x) \text{ и } a_{1\tau,rs}^+(x, x), \quad r = 0, 1, \text{ для } \tau > 1 \text{ в } R^2 \text{ равномерно ограничены};$$

$$7) \text{ функции } a_{li(i+j)(i+j+k),r}^+(u, v, t, w) \in N_{0,4}(x, x, x, x), \\ i, j, k \geq 1, i+j+k \leq n, a_{li(i+j)(i+j+k),r}^+(u, v, t) \in N_{0,3}(x, x, x), \\ r = 0, 1, j, k \geq 1, 1+j+k \leq n;$$

$$8) \int u^2 |K(u)| du < \infty; \quad 9) |g(Y)| < \infty.$$

$$\text{Тогда при } n \rightarrow \infty \left| E(J_n(x) - J(x))^2 - \frac{\sigma^2(x)}{n h_n} \right|$$

$$-\frac{h_n^4 T_2^2}{(2p(x))^2} \left[(J(x)p(x))^{(2)} - J(x)p^{(2)}(x) \right]^2 = O\left(\frac{1}{(nh_n)^{3/2}}\right).$$

Асимптотические свойства оценки условного функционала, задаваемой формулой (4), характеризует

Теорема 6. Пусть выполнены следующие условия:

1) последовательность $\{Z_j\}_{j \geq 1} \in S(\alpha)$ и

$$\int_1^\infty [\alpha(\tau)]^q d\tau < \infty, \quad 0 < q < 0,5,$$

$$\int_0^\infty \tau^2 [(\tau)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} d\tau < \infty, \quad \delta > 0;$$

2) $a_r(z) \in N_{v,1}(x)$, $\sup_x |a_r^{(v)}(x)| < \infty$, $r = 0, 1$,

$$a_2^+(v) \in N_{0,1}(x), \quad a_2(v) \in N_{0,1}(x), \quad a_{(2+\delta)}(v) \in N_{0,1}(x),$$

$$\sup_x a_4^+ < \infty,$$

3) $\sup_x |a_r^{(v)}(x)| < \infty$, $p(x) > 0$, $r = 0, 1$, $\sup_x p(x) < \infty$;

4) последовательность вещественных чисел такая, что $(h_n + 1/nh_n) \downarrow 0$;

5) ядро $K(u) \in A_v$, $\lim_{|u| \rightarrow \infty} uK(u) = 0$;

6) функции $a_r^+(x)$ и $a_{1\tau,rs}^+(x, x)$, $r = 0, 1$, для $\tau > 1$ в $\mathbf{R}^2$ равномерно ограничены;

7) функции $a_{1i(i+j)(i+j+k),r}^+(u, v, t, w) \in N_{0,4}(x, x, x, x)$, $i, j, k \geq 1$, $i + j + k \leq n$,

$a_{1i(i+j)(i+j+k),r}^+(u, v, t) \in N_{0,3}(x, x, x)$, $r = 0, 1$, $j, k \geq 1$, $1 + j + k \leq n$;

8) $\int u^v |K(u)| du < \infty$ для некоторого $v \in \mathbf{N}^+$;

9) $J(x) \neq 0$ или $\tau \geq 4$, $\tau \in \mathbf{N}^+$.

$$\text{Тогда при } n \rightarrow \infty \left| E(\tilde{J}_n^{[v]}(x) - J(x))^2 - \frac{\sigma_{[v]}^2(x)}{nh_n} - \frac{h_n^{2v} T_v^2}{(p(x)v!)^2} \left[(J(x)p(x))^{(v)} - J(x)p^{(v)}(x) \right]^2 \right| = O((\delta_{n,[v]})^{3/2}).$$

Для получения улучшенной скорости сходимости $\tilde{J}_n^{[v]}(x)$ порядка $O(n^{-2v/(2v+1)})$ по сравнению с обычной скоростью порядка $O(n^{-4/5})$ для $J_n(x)$ (ср. п. 6 в [6]) согласно теореме 7 необходимо применить знакопеременные ядра $K(u)$, принадлежащие к классу A_v для $v > 2$.

Применение полученных в этой работе новых результатов, изложенных в теоремах 6 и 7, в случае конкретной $g(\cdot)$ в (2), (4) и зависимости наблюдений требует проверки следующих простых условий:

$$E(a_n(x) - a(x))^4 = O((nh_n)^{-2}),$$

$$E(p_n(x) - p(x))^4 = O((nh_n)^{-2}).$$

Сравнительные преимущества теоремы 7 по сравнению с теоремой 6 открывают особые возможности применения кусочно-гладких аппроксимаций оценок подстановок:

1) Улучшается скорость сходимости СКО при использовании знакопеременных ядер для кусочно-гладкой аппроксимации $\tilde{J}_n^{[v]}(x)$ при $v \geq 4$.

Снимается ограничительное условие $|g(Y)| < \infty$.

СКО для кусочно-гладкой аппроксимации $\tilde{J}_n^{[v]}(x)$ вычисляется даже в тех случаях, когда ранее это было невозможно, т.е. при $\sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right) \leq 0$ и $K(u) \leq 0$ на некоторых множествах из $\mathbf{R}^1$ (например, в области определения знакопеременных финитных ядер).

Лемма 10. Если выполнены условия леммы 6 и теоремы 6 то при $n \rightarrow \infty$

$$E[J_n(x) - J(x)]^4 = O(\delta_{n,2}^2).$$

Лемма 11. Если выполнены условия леммы 6 и теоремы 7 то при $n \rightarrow \infty$

$$E[\tilde{J}_n^{[v]}(x) - J(x)]^4 = O(\delta_{n,v}^2).$$

Согласно лемме 11 и лемме Бореля – Кантелли справедливо

Утверждение. Если ряд $\sum_{n=1}^\infty \delta_{n,v}^2$ сходится, то при $n \rightarrow \infty$ последовательность оценок $\tilde{J}_n^{[v]}(x)$ сходится к $J(x)$ с вероятностью 1, т.е.

$$P\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \tilde{J}_n^{[v]}(x) - J(x) \right| = 0\right\} = 1.$$

Аналогичное утверждение справедливо и для оценки $J_n(x)$.

Следствие 5. В условиях леммы 11 для оптимальной последовательности $h_n^o = O(n^{-1/(2v+1)})$, обеспечивающей одинаковую скорость сходимости к нулю дисперсии и квадрата смещения оценки $\tilde{J}_n^{[v]}(x)$ [6], имеет место равенство $P\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} |\tilde{J}_n^{o[v]}(x) - J(x)| = 0\right\} = 1$.

Следствие 5 справедливо, так как

$$\delta_{n,v}^o = \delta_{n,v} \big|_{h_n = h_n^o} = O(n^{-2v/(2v+1)}),$$

и ряд $\sum_{n=1}^\infty (\delta_{n,v}^o)^2$ сходится.

Введем два вида оптимальных оценок условных функционалов $J(x)$:

оценку подстановки $J_n^{[v]}(x; \beta_0^{o[v]}, \beta_1^{o[v]})$, для которой компоненты которой используется свое оптимальное значение параметра $h_{nr}^{o[v]} = \beta_r^{o[v]} n^{-1/(2v+1)}$, $r = 0, 1$, и соответствующую ей кусочно-гладкую аппроксимацию $\tilde{J}_n^{[v]}(x; \beta_0^{o[v]}, \beta_1^{o[v]})$;

оценку подстановки $J_n^{[v]}(x; \beta_0^{o[v]})$, для которой используется общее оптимальное значение параметра $h_n^{o[v]} = \beta^{o[v]} n^{-1/(2v+1)}$, и соответствующую ей кусочно-гладкую аппроксимацию $\tilde{J}_n^{[v]}(x; \beta_0^{o[v]})$.

Обозначим

$$\sigma_{[v]}^2(x; \beta_0^{[v]}, \beta_1^{[v]}) = \frac{L^{[v]}(1)}{p(x)\beta_1^{[v]}} \int g^2(y)f(y|x)dy +$$

$$+ \frac{J^2(x)}{p(x)} \left[\frac{L^{[v]}(1)}{\beta_0^{[v]}} - \left(\frac{L(\beta_0^{[v]}/\beta_1^{[v]})}{\beta_1^{[v]}} + \frac{L(\beta_1^{[v]}/\beta_0^{[v]})}{\beta_0^{[v]}} \right) \right],$$

$$\sigma_{[v]}^2(x; \beta_0^{[v]}) = \frac{L^{[v]}(1)}{p(x)\beta_0^{[v]}} \left[\int g^2(y)f(y|x)dy - J^2(x) \right].$$

Теорема 7. Если выполнены условия теоремы 7, то при $n \rightarrow \infty$

$$\left| n^{\frac{2v}{2v+1}} E(\tilde{J}_n^{[v]}(x; \beta_0^{[v]}, \beta_1^{[v]}) - J(x))^2 - \sigma_{[v]}^2(x; \beta_0^{[v]}, \beta_1^{[v]}) - \right.$$

$$\left. - \frac{T_v^2}{(p(x)v!)^2} \left[(\beta_1^{[v]})^{2v} (J(x)p(x))^{(v)} - (\beta_0^{[v]})^{2v} J(x)p^{(v)}(x) \right] \right| =$$

$$= o(1),$$

$$\left| n^{\frac{2v}{2v+1}} E(\tilde{J}_n^{[v]}(x; \beta_0^{[v]}) - J(x))^2 - \sigma_{[v]}^2(x; \beta_0^{[v]}) - \right.$$

$$\left. - \frac{T_v^2}{(p(x)v!)^2} (\beta_0^{[v]})^{2v} \left[(J(x)p(x))^{(v)} - J(x)p^{(v)}(x) \right] \right| =$$

$$= o(1).$$

Полагая во втором утверждении теоремы 8 $v=2$, получаем результат Г. Коломба [28], приведенный в [22].

8. НЕПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ АВТОРЕГРЕССИИ

Пусть случайная последовательность

$$\{X_t, t = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$$

генерируется нелинейной авторегрессией

$$X_t = \psi(X_{t-1}; \alpha_\psi) + \varepsilon_t \quad (21)$$

где $\{\varepsilon_t\}$ – последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним и дисперсией $D\varepsilon_t = 1$, ψ – неизвестная функция, такая, что

$$x, y \in \mathbf{R}^1, |\psi(y+x) - \psi(y)| \leq a_\psi |x|, \quad 0 < a_\psi < 1,$$

$$\psi(0) = 0; \quad (22)$$

условие (22), как показано в [23], обеспечивает стационарность процесса (21).

Заметим, что к авторегрессии типа (21) сводится и более сложная модель

$$g(X_t) = \psi(X_{t-1}; a) + \varepsilon_t,$$

когда известная функция $g(\cdot)$ и ее обратная функция $g^{-1}(\cdot)$ являются взаимно однозначными. Действительно, в этом случае, обозначив $Y_t = g(X_t)$, $\Phi(Y_t) = \psi[g^{-1}(Y_t)]$, приходим к модели вида

$$Y_t = \Phi(Y_{t-1}; a_\Phi) + \varepsilon_t.$$

Пусть $X_0, X_1, \dots, X_n$ – выборка, генерируемая процессом (21). Теперь функцию ψ в (21) можно оценить статистикой

$$\psi_n(x) = \sum_{t=1}^n X_t K\left(\frac{x - X_{t-1}}{h_n}\right) / \sum_{t=1}^n K\left(\frac{x - X_{t-1}}{h_n}\right), \quad (23)$$

которая по структуре аналогична известной регрессионной оценке Надарая – Ватсона, или ее кусочно-гладкой аппроксимацией

$$\tilde{\psi}_n^{[v]}(x) = \frac{\psi_n(x)}{(1 + \delta_{n,v} |\psi_n(x)|^r)^p}. \quad (24)$$

Оценка (24) и ее свойства сходимости в среднеквадратическом анонсировались в [25 – 27].

Оценка условной дисперсии, характеризующей качество приближений (23) и (24) к функции ψ нелинейной авторегрессионной модели (21), выражается формулой

$$D_n = \frac{\sum_{t=1}^n X_t^2 K\left(\frac{x - X_{t-1}}{h_n}\right) - \left[\sum_{t=1}^n X_t K\left(\frac{x - X_{t-1}}{h_n}\right) \right]^2}{\sum_{t=1}^n K\left(\frac{x - X_{t-1}}{h_n}\right) - \left[\sum_{t=1}^n K\left(\frac{x - X_{t-1}}{h_n}\right) \right]^2}. \quad (25)$$

Если ϕ – плотность распределения случайной величины ε_t , $C < \infty$ и $\forall \Delta > 0$

$$\int |\phi(x + \Delta) - \phi(x)| dx \leq C\Delta,$$

то процесс нелинейной авторегрессии X_t , согласно [24], удовлетворяет условию с.п.: для любого $\tau > 0$

$$\alpha(\tau) \leq C(a_\phi) e^{-\delta(a_\phi)\tau}, \quad C(a_\phi) < \infty, \quad \delta(a_\psi) > 0. \quad (26)$$

Теперь, учитывая (26), нетрудно переформулировать все результаты пп. 3-7 данной работы для оценок (23), (25) и их кусочно-гладких аппроксимаций типа (24). Например, главная часть дисперсии оценки условной дисперсии (25) при выполнении требуемых условий выражается формулой

$$\frac{L(1)}{nh_n p^6(x)} \times$$

$$\times \int \left[y^2 p^2(x) - 2y a_1(x) p^2(x) - a_2(x) p(x) + 2a_1(x) \right]^2 f(x, y) dy.$$

Полученные результаты позволяют также исследовать более общие динамические системы, в том числе процессы авторегрессионного типа со свойствами с.п. [1. С. 244] (важные примеры с.п. последовательностей можно найти в [12] и [1. С. 146]). Из областей современной математики, где открываются новые возможности применения результатов исследований с.п. последовательностей, несомненный интерес представляет теория одномерных конечных автоматов [13].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для удобства будем отмечать знаком ■ конец доказательства.

Доказательство леммы 1. По определению математического ожидания имеем

$$Ea_{nr}(x) = \frac{1}{h_n} \iint g^r(y) K\left(\frac{x-t}{h_n}\right) f(t, y) dt dy. \quad (\text{П.1})$$

Так как по условиям леммы

$$\left| \int K\left(\frac{x-t}{h_n}\right) \int g^r(y) f(t, y) dy dt \right| < \infty, \quad (\text{П.2})$$

то в соответствии с замечанием [28. С. 299] об условиях равенства многократного интеграла повторному имеем $|Ea_{nr}(x)| < \infty$. Сделав в интеграле (П.2) замену

переменных $\frac{x-t}{h_n} = u$, получаем

$$Ea_{nr}(x) = \int K(u) \int g^r(y) f(x - uh_n, y) dy du = \\ = \int a_r(x - uh_n) K(u) du.$$

Разобьем пространство R^1 на непересекающиеся множества $R_n^1(\delta) = \{u: |u| < \delta/h_n\}$, $\bar{R}_n^1(\delta) = \{u: |u| \geq \delta/h_n\}$, $\delta > 0$ произвольное. Тогда

$$\left| \int [a_r(x - uh_n) - a_r(x)] K(u) du \right| \leq \\ \leq \sup_{|uh_n| < \delta} |a_r(x - uh_n) - a_r(x)| \int_{R_n^1(\delta)} |K(u)| du + \\ + \int_{\bar{R}_n^1(\delta)} |a_r(x - uh_n) + a_r(x)| |K(u)| du. \quad (\text{П.3})$$

Первое слагаемое в правой части неравенства (П.3) выбором δ можно сделать меньше $\varepsilon/3$.

Второе слагаемое этого же неравенства не больше $C \int_{\bar{R}_n^1(\delta)} |K(u)| du$, если взять $C \geq 2 \sup_x |b_r(x)|$. Выбором достаточно большого n его можно сделать меньше $2\varepsilon/3$, т.е. формула (2) справедлива.

Доказательство леммы 2. В интеграле (П.2) разложим функцию по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и получим

$$Ea_{nr}(x) = a_r(x) + \sum_{i=1}^{v-1} (-1)^i a_r^{(i)}(x) \frac{h_n^i}{i!} T_i + \\ + (-1)^v a_r^{(v)}(x) \frac{h_n^v}{v!} T_v + \gamma_{nr}, \quad (\text{П.4})$$

где

$$\gamma_{nr} = \frac{(-1)h_n^v}{v!} \int [a_r^{(v)}(x + (-1)^v uh_n \theta_r - a_r^{(v)}(x)) u^v K(u) du,$$

$$0 < \theta_r < 1.$$

Из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости (ее условия выполнены ввиду $\int u^v K(u) du < \infty$, $a_r^{(v)}(x + (-1)^v uh_n \theta_r) \rightarrow a_r^{(v)}(x)$ при $n \rightarrow \infty$ для каждого $x \in R^1$) следует, что $|\gamma_{nr}| = o(h_n^v)$. С учетом того, что $T_i = 0$, $i = 1, \dots, v-1$, сумма в (П.4) равна нулю, и, таким образом, имеет место утверждение (7). ■

Доказательство леммы 3. По определению ковариации, учитывая независимость двумерной выборки $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$, получаем

$$\text{cov}(a_{nr}(x), a_{ns}(y)) = \\ = \frac{1}{nh_n^2} \text{cov} \left(g^r(Y_1) K \left(\frac{x - X_1}{h_n} \right), g^s(Y_1) K \left(\frac{y - X_1}{h_n} \right) \right) = \\ = \frac{1}{nh_n^2} \left\{ \iint g^{r+s}(z) K \left(\frac{x-t}{h_n} \right) K \left(\frac{y-t}{h_n} \right) f(t, z) dt dz - \right. \\ \left. - \iint g^r(z) K \left(\frac{x-t}{h_n} \right) f(t, z) dt dz \iint g^s(z) K \left(\frac{y-t}{h_n} \right) f(t, z) dt dz \right\}.$$

Обозначим

$$G_r(x) = \iint g^r(z) K \left(\frac{x-t}{h_n} \right) f(t, z) dt dz = \int a_r(t) K \left(\frac{x-t}{h_n} \right) dt, \\ G_{r+s}(x, y) = \iint g^{r+s}(z) K \left(\frac{x-t}{h_n} \right) K \left(\frac{y-t}{h_n} \right) f(t, z) dt dz = \\ = \int a_{r+s}(t) K \left(\frac{x-t}{h_n} \right) K \left(\frac{y-t}{h_n} \right) dt. \quad (\text{П.5})$$

Тогда

$$\text{cov}(a_{nr}(x), a_{ns}(y)) = \frac{1}{nh_n^2} \{G_{r+s}(x, y) - G_r(x)G_s(y)\}. \quad (\text{П.6})$$

Согласно лемме 1, при $n \rightarrow \infty$ $\frac{G_r(x)}{h_n} = a_r(x) + o(1)$,

$$\frac{G_s(y)}{h_n} = a_s(y) + o(1).$$

Если $y = x$, то рассуждая аналогично (П.3), получим при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{G_{r+s}(x, x)}{h_n} = \int a_{r+s}(x - uh_n) K^2(u) du = L(1)a_{r+s}(x) + o(1).$$

При $y \neq x$, выполнив в интеграле $G_{r+s}(x, y)$ в (П.5) замену переменных $\frac{x-t}{h_n} = u$, приходим к равенству

$$\frac{G_{r+s}(x, y)}{h_n} = \int a_{r+s}(x - uh_n) K(u) K \left(u + \frac{y-x}{h_n} \right) du.$$

Пусть ε – любое сколь угодно малое число, $|\varepsilon| < 1$, $\varepsilon \neq (y-x)^{-1}$, $\text{sign}(y-x) = \text{sign } \varepsilon$, $\mu_n = (y-x)/h_n$. Тогда (ср. [29])

$$\int K(u) K(u + \mu_n) a_{r+s}(x - uh_n) du = \int_{|u| \leq \varepsilon \mu_n} (...) + \int_{|u| > \varepsilon \mu_n} (...) \leq \\ \leq \sup_{|u| \leq \varepsilon \mu_n} |K(u + \mu_n)| \int |K(u) a_{r+s}(x - uh_n)| du + \\ + \sup_{|u| > \varepsilon \mu_n} |K(u)| \int |K(u + \mu_n) a_{r+s}(x - uh_n)| du = \\ = \sup_{(1-\varepsilon)\mu_n \leq u + \mu_n \leq (1+\varepsilon)\mu_n} |K(u + \mu_n)| \int |K(u) a_{r+s}(x - uh_n)| du + \\ + \sup_{|u| > \varepsilon \mu_n} |K(u) u| u^{-1} \int |K(z) a_{r+s}(y - zh_n)| dz \leq \\ = \sup_{(1-\varepsilon)\mu_n \leq z \leq (1+\varepsilon)\mu_n} |K(z)| \int |K(u) a_{r+s}(x - uh_n)| du + \\ + \frac{C_r h_n}{|\varepsilon| |y-x|} \int |K(z) a_{r+s}(y - zh_n)| dz = U_n + W_n.$$

При достаточно больших n и достаточно малом $|\varepsilon| < 1$ $U_n \leq \sup_{(1-\varepsilon)\mu_n \leq z \leq (1+\varepsilon)\mu_n} |K(z) z| z^{-1} \int |K(u) a_{r+s}(x - uh_n)| du \leq$

$$\leq \frac{C_r h_n}{(1-|\varepsilon|)|y-x|} \int |K(z) a_{r+s}(y - zh_n)| dz = Z_n.$$

Применяя лемму 1 имеем, что $Z_n = O(h_n)$, $W_n = O(h_n)$ и, таким образом,

$$\frac{G_{r+s}(x, y)}{h_n} = \begin{cases} L(1)a_{r+s}(x) + o(1), & \text{если } y = x, \\ o(1) & \text{если } y \neq x. \end{cases}$$

Выполнив в том же интеграле $C_{r+s}(x, y)$ в (П.5) замену переменных $\frac{y-z}{h_n} = u$, имеем

$$\frac{C_{r+s}(x, y)}{h_n} = L(1)a_{r+s}(y)\delta_{x,y} + o(1) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Так как ковариация является симметричной функцией случайных величин, то необходимо, чтобы этим свойством обладала и ее оценка. Поэтому, представив $C_{r+s}(x, y) = \frac{C_{r+s}(x, y) + C_{r+s}(y, x)}{2}$, с учетом изложенного выше, получаем

$$\frac{C_{r+s}(x, y)}{h_n} = \frac{\delta_{x,y}}{2} L(1)[a_{r+s}(x) + a_{r+s}(y)] + o(1).$$

Подставив $C_{r+s}(x, y)$, $C_r(x)$, $C_s(y)$ в выражение (П.12), приходим к необходимому результату. ■

Доказательство теоремы 1. В силу леммы 2 и следствия 1 СКО можно представить в виде суммы дисперсий (9) и квадрата смещения $b(a_{nr})$

$$u^2(a_{nr}(x)) = \frac{L(1)a_{2r}(x)}{nh_n} + \left[\omega_r^{(v)}(x) \right]^2 h_n^{2v} + o\left(\frac{1}{nh_n^{1+2r}} + h_n^{2v} \right). \quad (\text{П.7})$$

Продифференцировав главную часть СКО (П.7) по h_n и приравняв полученное выражение к нулю, получаем, что

$$h_{nr}^o \sim \left[\frac{L(1)a_{2r}(x)}{2n\omega_r^{(v)}(x)^2} \right]^{\frac{1}{2v+1}} = O(n^{-\frac{1}{2v+1}}). \quad (\text{П.8})$$

Заменяя в (П.7) h_{nr} на h_{nr}^o согласно (П.8), приходим к утверждению теоремы (10). ■

Введем обозначения, которые понадобятся в дальнейшем: $\xi_{ir}(x) = \frac{1}{h_n} g^r(Y_i) K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right)$, $U = \xi_{1r}(x)$, $V = \xi_{1r}(y)$.

Доказательство леммы 5. Воспользуемся методом доказательства теоремы 3 из [30]. Представим ковариацию в виде

$$\begin{aligned} \text{cov}(a_{nr}(x), a_{ns}(y)) &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{cov}(\xi_{ir}(x), \xi_{js}(y)) = \\ &= \frac{1}{n} \text{cov}(\xi_{1r}(x), \xi_{1s}(y)) + \frac{2}{n^2} \sum_{\tau=2}^n (n-\tau+1) \text{cov}(\xi_{1r}(x), \xi_{\tau s}(y)) = \\ &= \frac{1}{nh_n^2} \{G_{r+s}(x, y) - G_r(x)G_s(y)\} + \\ &+ \frac{2}{n^2} \sum_{\tau=2}^n (n-\tau+1) \text{cov}(\xi_{1r}(x), \xi_{\tau s}(y)) = \\ &= A_n(x, y) + R_n(x, y). \end{aligned} \quad (\text{П.9})$$

По лемме 3 первое слагаемое в правой части последнего равенства (П.9) при $n \rightarrow \infty$ равно

$$A_n(x, y) = \frac{\delta_{x,y}}{2nh_n} L(1)[a_{r+s}(x) + a_{r+s}(y)] + o\left(\frac{1}{nh_n}\right) \quad (\text{П.10})$$

Применив лемму 4 при $r = \frac{2+\delta}{\delta}$, $p = q = 2 + \delta$, получим

$$|\text{cov}(U, V)| \leq 2\pi [\alpha(\tau-1)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} \left[E|U|^{2+\delta} E|V|^{2+\delta} \right]^{\frac{1}{2+\delta}}. \quad (\text{П.11})$$

По теореме о мажорируемой сходимости имеем для любого $\delta > 0$

$$\begin{aligned} E|U|^{2+\delta} &= \frac{1}{h_n^{2+\delta}} \iint \left| g^r(z) K\left(\frac{x-t}{h_n}\right) \right|^{2+\delta} f(t, z) dt dz = \\ &= \frac{1+o(1)}{h_n^{1+\delta}} a_{(2+\delta)s}^+(y) \int |K(u)|^{2+\delta} du. \end{aligned} \quad (\text{П.12})$$

Так как $\alpha(\tau) \downarrow 0$, то для любого $\delta > 0$ справедливы неравенства:

$$\begin{aligned} \sum_{\tau=2}^{\infty} [\alpha(\tau-1)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} &\leq \int_2^3 [\alpha(\tau-1)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} d\tau + \int_3^4 [\alpha(\tau-1)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} d\tau + \dots = \\ &= \int_2^{\infty} [\alpha(\tau-1)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} d\tau = \int_1^{\infty} [\alpha(\tau-1)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} d\tau \end{aligned} \quad (\text{П.13})$$

Учитывая соотношения (П.11) – (П.13), получаем оценку для $R_n(x, y)$:

$$\begin{aligned} |R_n(x, y)| &= \left| \frac{2}{n^2} \sum_{\tau=2}^n (n-\tau+1) \text{cov}(\xi_{1r}(x), \xi_{\tau s}(y)) \right| \leq \\ &\leq \frac{4\pi(1+o(1))}{nh_n^{2(1+\delta)/(2+\delta)}} \left[a_{(2+\delta)r}^+(x) a_{(2+\delta)s}^+(y) \right]^{\frac{1}{2+\delta}} \times \\ &\times \left[\int |K(u)|^{2+\delta} du \right]^{\frac{2}{2+\delta}} \sum_{\tau=2}^{\infty} [\alpha(\tau-1)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} \leq \\ &\leq \frac{4\pi(1+o(1))}{nh_n^{2(1+\delta)/(2+\delta)}} \left[a_{(2+\delta)r}^+(x) a_{(2+\delta)s}^+(y) \right]^{\frac{1}{2+\delta}} \times \\ &\times \left[\int |K(u)|^{2+\delta} du \right]^{\frac{2}{2+\delta}} \int_1^{\infty} [\alpha(\tau)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} d\tau. \end{aligned} \quad (\text{П.14})$$

Обозначив $\frac{\delta}{2+\delta} = q$, $0 < q < 1$, получим

$$\begin{aligned} \frac{2(1+\delta)}{2+\delta} &= \frac{(2+\delta)+\delta}{2+\delta} = 1+\delta, \\ \frac{1}{2+\delta} &= \frac{1}{2+2q/(1-q)} = \frac{1-q}{2}, \\ 2+\delta &= \frac{2}{1-q}, \end{aligned}$$

откуда и следует неравенство (14).

Из (П.9) и (П.10) вытекает, что для доказательства второго утверждения леммы (15) достаточно доказать, что слагаемое $R_n(x, y)$ в (П.9) имеет порядок

$o\left(\frac{1}{nh_n}\right)$. Для этого представим

$$\begin{aligned} |R_n(x, y)| &\leq \frac{2}{n} \sum_{\tau=2}^{c(n)} \text{cov}|\xi_{1r}(x), \xi_{\tau s}(y)| + \\ &+ \frac{2}{n} \sum_{c(n)+1}^{\infty} \text{cov}|\xi_{1r}(x), \xi_{\tau s}(y)| = J_1 + J_2, \end{aligned}$$

где $c(n)$ – положительные целые числа такие, что $c(n) \rightarrow \infty$, $c(n)h_n \rightarrow 0$, $c(n)h_n^{2q} \rightarrow \infty$; при $n \rightarrow \infty$ (например, можно взять $c(n) \sim h_n^{\varepsilon-1}$, $0 < \varepsilon < 1-2q$).

Теперь, учитывая условие б) леммы, имеем

$$\begin{aligned} J_1 &\leq \frac{2}{nh_n^2} \sum_{\tau=2}^{c(n)} \int_{R^4} \left| g^r(z) K\left(\frac{x-u}{h_n}\right) g^s(p) K\left(\frac{y-u}{h_n}\right) \right| \times \\ &\quad \times |f_{1\tau}(u, y, v, p) - f(u, y)f(v, p)| dudzdvdp \leq \\ &\leq \frac{2}{nh_n^2} \sum_{\tau=2}^{c(n)} \left[a_{1\tau,rs}^+(x, y) + a_r^+(x) a_s^+(y) \right] \times \\ &\quad \times \iint \left| K\left(\frac{x-u}{h_n}\right) K\left(\frac{y-u}{h_n}\right) \right| dudv \leq \frac{2C^{c(n)}}{n} \sum_{\tau=2}^{c(n)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |K(u)| du \right]^2 = \\ &= \frac{Cc(n)}{n} = O\left(\frac{h_n c(n)}{nh_n}\right) = o\left(\frac{1}{nh_n}\right), \end{aligned}$$

если $c(n) \rightarrow \infty$ и $c(n)h_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Для J_2 , согласно (П.14), имеем

$$\begin{aligned} J_2 &\leq \frac{4\pi(1+o(1))}{nh_n^{2(1+\delta)/(2+\delta)}} \left[a_{(2+\delta)r}^+(x) a_{(2+\delta)s}^+(y) \right]^{\frac{1}{2+\delta}} \times \\ &\quad \times \left[\int |K(v)|^{2+\delta} dv \right]^{\frac{2}{2+\delta}} \sum_{\tau=c(n)+1}^{\infty} [\alpha(\tau-1)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}, \quad (\text{П.15}) \end{aligned}$$

для любого $\delta > 0$.

Так как функция $a_{(2+\delta)r}^+(x)$ ограничена, а $\int |K(u)|^{2+\delta} du < \infty$ для любого $\delta \geq 0$, то в силу монотонного убывания $\alpha(\tau)$ для любого $\delta > 0$ имеем

$$\begin{aligned} J_2 &\leq \frac{C}{c(n)nh_n^{2(1+\delta)/(2+\delta)}} \sum_{\tau=c(n)}^{\infty} c(n) [\alpha(\tau)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} \leq \\ &\leq \frac{C}{c(n)nh_n^{2(1+\delta)/(2+\delta)}} \sum_{\tau=c(n)}^{\infty} \tau [\alpha(\tau)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} \leq \\ &\leq \frac{C}{c(n)nh_n^{2(1+\delta)/(2+\delta)}} \sum_{\tau=2}^{\infty} \tau [\alpha(\tau)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}. \end{aligned}$$

Теперь выберем $\delta = \frac{4q}{1-2q}$, $0 < q < \frac{1}{2}$, и получим

$$J_2 \leq \frac{C}{c(n)nh_n^{1+2q}} \sum_{\tau=2}^{\infty} \tau [\alpha(\tau)]^{2q}.$$

Функция $\alpha(\tau)$ не возрастает, т.е. $1 \geq \alpha(1) \geq \alpha(2) \geq \alpha(3) \dots$, поэтому $\sum_{\tau=2}^{\infty} \tau [\alpha(\tau)]^{2q} < \infty$, так как из $\sum_{\tau=2}^{\infty} [\alpha(\tau)]^q < \infty$, $0 < q < \frac{1}{2}$, следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{\tau=2}^{\infty} \tau [\alpha(\tau)]^{2q} &= \sum_{\gamma=2}^{\infty} \sum_{t=\gamma}^{\infty} [\alpha(t)]^{2q} + \sum_{\tau=2}^{\infty} [\alpha(\tau)]^{2q} \leq \\ &\leq \sum_{\gamma=2}^{\infty} [\alpha(\gamma)]^q \sum_{t=\gamma}^{\infty} [\alpha(t)]^q + \sum_{\tau=2}^{\infty} [\alpha(\tau)]^{2q} \leq \\ &\leq \left[\sum_{\tau=2}^{\infty} [\alpha(\tau)]^q \right]^2 + \sum_{\tau=2}^{\infty} [\alpha(\tau)]^{2q} < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом

$$J_2 = O\left(\frac{1}{c(n)nh_n^{1+2q}}\right) = O\left(\frac{1}{nh_n c(n)h_n^{2q}}\right) = o\left(\frac{1}{nh_n}\right),$$

так как $c(n)h_n^{2q} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство леммы 6. Воспользуемся методикой доказательств леммы 4 [31] и леммы 5 [31]. Последовательность $\{Z_j\}_{j \geq 1}$ является стационарной, поэтому

$$\begin{aligned} E(S_{nr})^4 &= \frac{1}{n^4 h_n^4} E\left(\sum_{i=1}^n \eta_{ir}\right)^4 \leq \\ &\leq \frac{4!n}{n^4 h_n^4} \sum_{i,j,k} \left| E \eta_{ir} \eta_{ir} \eta_{(i+j)r} \eta_{(i+j+k)r} \right|, \quad (\text{П.16}) \end{aligned}$$

где сумма берется по тем i, j, k , для которых

$$i, j, k \geq 1, \quad i+j+k \leq n. \quad (\text{П.17})$$

По лемме 4 при $r = \frac{2+\delta}{\delta}$, $p = q = 2+\delta$, учитывая,

что $E \eta_{ir} = 0$ после замены переменных в интегралах, получим

$$\begin{aligned} \left| E \left\{ \eta_{ir} (\eta_{ir} \eta_{(i+j)r} \eta_{(i+j+k)r}) \right\} \right| &\leq 2\pi [\alpha(i-1)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} \left[E |\eta_{ir}|^{2+\delta} \times \right. \\ &\times \left. E |\eta_{ir} \eta_{(i+j)r} \eta_{(i+j+k)r}|^{2+\delta} \right]^{\frac{1}{2+\delta}} \leq C [\alpha(i-1)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} (1+o(1)) h_n^{\frac{4}{2+\delta}} \times \\ &\times \left[a_{(2+\delta)r}^+(x) \left(\int |K(u)|^{2+\delta} du \right)^4 a_{(1+j)(1+j+k),r}^+(x, x, x) \right]^{\frac{1}{2+\delta}} \leq \\ &\leq C h_n^{\frac{4}{2+\delta}} [\alpha(i-1)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}, \quad (\text{П.18}) \end{aligned}$$

$$\text{и} \quad \left| E \left\{ \eta_{ir} (\eta_{ir} \eta_{(i+j)r} \eta_{(i+j+k)r}) \right\} \right| \leq C h_n^{\frac{4}{2+\delta}} [\alpha(k)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}. \quad (\text{П.19})$$

Используя повторно лемму 4 и условие стационарности, получим

$$\begin{aligned} \left| E \left\{ \eta_{ir} (\eta_{ir} \eta_{(i+j)r} \eta_{(i+j+k)r}) \right\} \right| &= \left| E \left\{ \eta_{ir} (\eta_{ir} \eta_{(i+j)r} \eta_{(i+j+k)r}) \right\} - \right. \\ &- E(\eta_{ir} \eta_{ir}) E(\eta_{(i+j)r} \eta_{(i+j+k)r}) + E(\eta_{ir} \eta_{ir}) E(\eta_{(i+j)r} \eta_{(i+j+k)r}) \left. \right| \leq \\ &\leq C h_n^{\frac{4}{2+\delta}} [\alpha(k)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} + |E(\eta_{ir} \eta_{ir}) E(\eta_{ir} \eta_{(k+1)r})|. \end{aligned}$$

Еще дважды применяя лемму 4, получаем

$$\begin{aligned} |E(\eta_{ir} \eta_{ir})| &\leq C h_n^{\frac{2}{2+\delta}} [\alpha(i-1)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}, \\ |E(\eta_{ir} \eta_{(k+1)r})| &\leq C h_n^{\frac{2}{2+\delta}} [\alpha(k)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}. \end{aligned}$$

Подставляя эти два неравенства в предыдущее неравенство, находим

$$\begin{aligned} & \left| E \left\{ \eta_{1r} (\eta_{ir} \eta_{(i+j)r} \eta_{(i+j+k)r}) \right\} \right| \leq \\ & \leq Ch_n^{\frac{4}{2+\delta}} \left([\alpha(i-1)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} [\alpha(k)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} + [\alpha(j)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} \right); \quad (\text{П.20}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left| E \left\{ \eta_{1r} (\eta_{ir} \eta_{(i+j)r} \eta_{(i+j+k)r}) \right\} \right| \leq \\ & \leq Ch_n^{\frac{4}{2+\delta}} \left([\alpha(i-1)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} [\alpha(k)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} + [\alpha(j)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} \right). \quad (\text{П.21}) \end{aligned}$$

Согласно полученным неравенствам, сумма в (П.16) не превосходит произведения $Ch_n^{\frac{4}{2+\delta}}$ на

$$\begin{aligned} & \sum_{i,k \leq j} [\alpha(i-1)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} [\alpha(k)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} + 2 \sum_{j,k \leq i} [\alpha(i)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} + \\ & + \sum_{j,k \leq i} [\alpha(i-1)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}, \quad (\text{П.22}) \end{aligned}$$

где индексы суммирования, кроме указанных ограничений, подчиняются и (П.17).

Поскольку $1 = \alpha(0) \geq \alpha(1) \geq \alpha(2) \dots$, то

$$\begin{aligned} & \sum_{i,k \leq j} [\alpha(i-1)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} [\alpha(k)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} \leq \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha(i-1)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} [\alpha(k)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} \leq \\ & \leq 2n \sum_{i=1}^{\infty} [\alpha(i-1)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha(k)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} \leq 2n \left(\sum_{i=1}^{\infty} [\alpha(i-1)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} \right)^2 \leq \\ & \leq \left(\int_1^{\infty} [\alpha(\tau-1)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} d\tau \right)^2 = \left(\int_0^{\infty} [\alpha(\tau)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} d\tau \right)^2. \quad (\text{П.23}) \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} & \sum_{j,k \leq i} [\alpha(i)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} \leq \sum_{j,k \leq i} [\alpha(i-1)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j,k=i}^i [\alpha(i-1)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^2 [\alpha(k-1)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} \leq \int_1^{\infty} \tau^2 [\alpha(\tau-1)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} d\tau = \\ & = \int_0^{\infty} (\tau+1)^2 \alpha(\tau)^{\frac{\delta}{2+\delta}} d\tau. \quad (\text{П.24}) \end{aligned}$$

Из этих двух цепочек неравенств вытекает, что

$$\begin{aligned} & E(S_{nr})^4 = \frac{4! n Ch_n^{\frac{4}{2+\delta}}}{n^4 h_n^4} \left[n \left(\sum_{i=1}^{\infty} [\alpha(i-1)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} \right)^2 + \right. \\ & + 3 \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 [\alpha(k-1)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} \right) \left. \right] \leq \frac{Ch_n^{\frac{4}{2+\delta}}}{n^2 h_n^2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} [\alpha(i-1)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} \right) + \\ & + \frac{Ch_n^{\frac{2-\delta}{2+\delta}}}{n^2 h_n^2 n h_n} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 [\alpha(k-1)]^{\frac{\delta}{2+\delta}}. \quad (\text{П.25}) \end{aligned}$$

Второе слагаемое в правой части последнего неравенства (П.25) при $0 < \delta < 2$ имеет порядок $o\left(\frac{1}{n^2 h_n^2}\right)$, а

первое слагаемое – скорость сходимости меньшую, чем это необходимо для справедливости утверждения леммы.

Займемся первым слагаемым. Выберем последовательность целых положительных чисел так, чтобы $c(n) = o(n)$, $c(n) = O(h_n^{-1})$, т.е. $c(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. При таком выборе $c(n)$ имеем

$$c^2(n) h_n^{\frac{2\delta}{2+\delta}} = O(h_n^{\frac{4}{2+\delta}}) \rightarrow \infty$$

при $n \rightarrow \infty$, поэтому

$$\begin{aligned} & \frac{h_n^{\frac{2\delta}{2+\delta}}}{n^2 h_n^2} \left(\sum_{i=c(n)+1}^{\infty} [\alpha(i-1)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} \right)^2 \leq \frac{h_n^{\frac{2\delta}{2+\delta}}}{n^2 h_n^2 c(n)} \left(\sum_{i=c(n)}^{\infty} c(n) [\alpha(i)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} \right)^2 \leq \\ & \leq \frac{C}{n^2 h_n^2 c^2(n) h_n^{\frac{2\delta}{2+\delta}}} \left(\sum_{i=2}^{\infty} \tau [\alpha(\tau)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} \right)^2 = o\left(\frac{1}{n^2 h_n^{2(1+2r)}}\right). \quad (\text{П.26}) \end{aligned}$$

Теперь покажем, что в условиях леммы величина

$$I = \frac{Ch_n^{\frac{2\delta}{2+\delta}}}{n^2 h_n^2} \left(\sum_{i=2}^{c(n)} [\alpha(i-1)]^{\frac{\delta}{2+\delta}} \right)^2$$

имеет, по крайней мере, порядок $O\left(\frac{1}{n^2 h_n^2}\right)$. Для этого

получим для величин из (П.18) – (П.20) другие неравенства. Сделав замены переменных, имеем

$$\begin{aligned} & \left| E \left\{ \eta_{1r} (\eta_{ir} \eta_{(i+j)r} \eta_{(i+j+k)r}) \right\} \right| \leq \\ & \leq Ch_n^4 \left(\int |K(u)| du \right)^4 a_{l(i+j)(i+j+k),r}^+(x, x, x, x) \leq \\ & \leq Ch_n^4 \bar{f}_{li(\cdot),r}, \quad (\text{П.27}) \end{aligned}$$

где $\bar{f}_{li(\cdot),r} = \max_{j,k} f_{l(i+j)(i+j+k),r}$.

Обозначив

$$\bar{f}_{(\cdot)0k,r} = \max_{i,j} f_{l(i+j)(i+j+k),r}$$

и

$$\bar{f}_{(\cdot)0j(\cdot),r} = \max_{i,k} f_{l(i+j)(i+j+k),r},$$

аналогично получаем

$$\left| E \left\{ (\eta_{1r} \eta_{ir} \eta_{(i+j)r}) (\eta_{(i+j+k)r}) \right\} \right| \leq Ch_n^4 \bar{f}_{(\cdot)0k,r}; \quad (\text{П.28})$$

$$\left| E \left\{ (\eta_{1r} \eta_{ir}) (\eta_{(i+j)r} \eta_{(i+j+k)r}) \right\} \right| \leq Ch_n^4 \bar{f}_{(\cdot)0j(\cdot),r}. \quad (\text{П.29})$$

Согласно неравенствам (П.27) – (П.29), слагаемые в (П.16) не превосходят произведения Ch_n^4 на

$$\sum_{j,k \leq i} \bar{f}_{li(\cdot),r} + \sum_{i,j \leq k} \bar{f}_{(\cdot)0k,r} + \sum_{i,k \leq j} \bar{f}_{(\cdot)0j(\cdot),r} \leq 3 \sum_{j,k \leq i} \bar{f}_{i,r}, \quad (\text{П.30})$$

где $\bar{f}_{i,r} = \max(\bar{f}_{li(\cdot),r}, \bar{f}_{(\cdot)0i,r}, \bar{f}_{(\cdot)0i(\cdot),r})$. Далее имеем

$$\sum_{j,k \leq i} \bar{f}_{i,r} \leq \sum_{i=0}^n \sum_{j,k=0}^i \bar{f}_{i,r} \leq \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \bar{f}_{k,r} = \sum_{k=0}^{c(n)} k^2 \bar{f}_{k,r} + \sum_{k=c(n)+1}^{\infty} k^2 \bar{f}_{k,r}.$$

Так как в условиях леммы

$$\sum_{k=0}^{c(n)} k^2 \bar{f}_{k,r} \leq C n c^2(n),$$

то, учитывая (П.25), (П.26) и существование $\lim_{n \rightarrow \infty} c(n) h_n = O(1)$, получаем

$$E(S_{nr})^4 \leq \frac{n^2 C c^2(n) h_n^4}{n^4 h_n^4} + o\left(\frac{1}{n^2 h_n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2 h_n^2}\right).$$

Доказательство леммы 7. Привлекая при $p = 4$ и $m = 2$ неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^m |a_i| \right)^p \leq m^{p-1} \sum_{i=1}^m |a_i|^p, \quad p > 1, \quad (\text{П.31})$$

имеем

$$M_4(a_{nr}) = E[S_{nr} + b(a_{nr})]^4 \leq 2^3 [E[S_{nr}]^4 + b^4(a_{nr})].$$

Доказательство леммы 9. Используя, как при доказательстве леммы 3, приемы замены переменных в интегралах, получаем для $r, s = 0, 1$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2v}{2v+1}} \text{cov}(a_{nr}^{o[v]}, a_{ns}^{o[v]}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{2v}{2v+1}}}{nh_{nr}^{o[v]} h_{ns}^{o[v]}} \left[\int a_{r+s}(t) K\left(\frac{x-t}{h_{nr}^{o[v]}}\right) \times \right. \\ &\times K\left(\frac{x-t}{h_{ns}^{o[v]}}\right) dt - \int a_r(t) K\left(\frac{x-t}{h_{nr}^{o[v]}}\right) dt \int a_s(t) K\left(\frac{x-t}{h_{ns}^{o[v]}}\right) dt \Big] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{2v}{2v+1}}}{nh_{nr}^{o[v]} h_{ns}^{o[v]}} \left[\int a_{r+s}(x - uh_{nr}^{o[v]}) K(u) K\left(u \frac{h_{nr}^{o[v]}}{h_{ns}^{o[v]}}\right) du - \right. \\ &\left. - h_{nr}^{o[v]} \int a_r(x - uh_{nr}^{o[v]}) K(u) du \int a_s(x - uh_{ns}^{o[v]}) K(u) du \right]. \end{aligned}$$

Доказательство следствия 3 теоремы 4. Полагая в утверждении теоремы 4 $k = 2$ получаем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} u^2(H(t_n)) &= E \left[\sum_{j=1}^s H_j(t_{nj} - t_j) \right]^2 + O(d_n^{-3/2}) = \\ &= \sum_{j,p=1}^s H_j H_p E[(t_{nj} - t_j)(t_{np} - t_p)] + O(d_n^{-3/2}) = \\ &= \sum_{j,p=1}^s H_j H_p E[\{(t_{nj} - Et_{nj}) + b(t_{nj})\} \{(t_{np} - Et_{np}) + b(t_{np})\}] + \\ &+ O(d_n^{-3/2}) = \sum_{j,p=1}^s H_j H_p [\text{cov}(t_{nj}, t_{np}) + b(t_{nj})b(t_{np})] + \\ &+ O(d_n^{-3/2}). \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 6. В обозначениях следствия 3 имеем

$$\begin{aligned} s &= 2, \quad z = (z_1, z_2), \quad H(z) = z_1 / z_2, \\ t_n &= (t_{1n}, t_{2n}) = (a_{n1}, a_{n0}) = (a_{n1}, p_n), \quad t = (t_1, t_2), \\ t_1 &= a_1(x) = J(x)p(x), \quad t_2 = a_0(x) = p(x), \\ d_n &= O(h_n^{-4} + nh_n), \quad H_1 = 1/p(x), \\ H_2 &= -a_1(x)/p^2(x) = -J(x)/p(x). \end{aligned}$$

Покажем, что $M_4\|a_{n1}, p_n\| = O(d_n^{-2})$. Действительно,

$$\begin{aligned} M_4\|a_{n1}, p_n\| &\leq 2[M_4\|a_{n1}\| + M_4\|p_n\|] = \\ &= 2[E(a_{n1} - a_1)^4 + E(p_n - p)^4]. \end{aligned}$$

Оба слагаемых в правой части последнего равенства, согласно лемме 7, имеют порядок

$$O((nh_n)^{-2} + h_n^{2v}).$$

Далее все необходимые ковариации находятся в соответствии с леммой 8:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} nh_n B(a_{n1}, a_{n0}) &= \begin{bmatrix} \text{cov}(a_{n1}, a_{n1}) & \text{cov}(a_{n1}, a_{n0}) \\ \text{cov}(a_{n0}, a_{n1}) & \text{cov}(a_{n0}, a_{n0}) \end{bmatrix} = \\ &= L(1) \begin{bmatrix} a_2(x) & a_1(x) \\ a_1(x) & a_0(x) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{П.38})$$

Выполняется и условие 2) следствия 3. В самом деле, учитывая, что $K(u) > 0$, получаем

$$|J_n(x)| = \left| \sum_{i=1}^n g(Y_i) K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right) \right|$$

$$\left/ \left[\sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right) \right] \right| \leq \max_{j \in 1, n} (|g(Y_j)|) \leq C = Cd_n^0,$$

т.е. $\gamma = 0$.

Так как $p(x) > 0$, а при $z_2 \neq 0$ функция z_1/z_2 принадлежит классу $N_{2,2}(a_1(x), p(x))$, то, используя при нахождении смещений лемму 2 ($v=2$), получаем

$$\begin{aligned} \left| H_1 b(a_{n1}) - \frac{h_n^2 T_2}{2p(x)v!} (J(x)p(x))^{(2)} \right| &= o(h_n^2), \\ \left| H_2 b(a_{n0}) - \frac{h_n^2 T_2}{2p(x)} J(x)p^{(2)}(x) \right| &= o(h_n^2). \end{aligned}$$

Теперь, собирая вместе найденные выше выражения, после элементарных преобразований приходим к утверждению теоремы.

Доказательство теоремы 7. Сначала доказательство данной теоремы полностью совпадает с доказательством теоремы 6.

Отличия начинаются после формулы (П.38). Во-первых, теперь отсутствует необходимость в нахождении мажорантной последовательности. Во-вторых, при $z_2 \neq 0$, как следствие аналитичности функции z_1/z_2 , записываем, что $z_1/z_2 \in N_{v,2}(a_1(x), p(x))$, $v \in \mathbb{N}^+$.

При нахождении смещений используем лемму 2 в общем случае:

$$\begin{aligned} \left| H_1 b(a_{n1}) - \frac{h_n^v T_v}{(p(x)v!)} (J(x)p(x))^{(v)} \right| &= o(h_n^v), \\ \left| H_2 b(a_{n0}) - \frac{h_n^v T_v}{(p(x)v!)} J(x)p^{(v)}(x) \right| &= o(h_n^v). \end{aligned}$$

Далее нетрудно убедиться, что все условия следствия 4 для оценки

$$\tilde{J}_n^{[v]}(x) \text{ при } q \geq q_0 = 4$$

выполняются.

Для получения улучшенной скорости сходимости среднеквадратической ошибки оценки $\tilde{J}_n^{[v]}(x)$ порядка $O(n^{-2v/(2v+1)})$ по сравнению с обычной скоростью порядка $O(n^{-4/5})$ для $J_n(x)$ (ср. п. 6 в [6]) согласно теореме 7 необходимо применить знакопеременные ядра $K(u)$, принадлежащие к классу A_v для $v > 2$.

Применение полученных в этой работе новых результатов, изложенных в теоремах 6 и 7, в случае конкретной $g(\cdot)$ в (2), (4) и зависимости наблюдений требует проверки следующих простых условий:

$$E(a_n(x) - a(x))^4 = O((nh_n)^{-2}),$$

$$E(p_n(x) - p(x))^4 = O((nh_n)^{-2}).$$

Сравнительные преимущества теоремы 7 по сравнению с теоремой 6 открывают особые возможности применения кусочно-гладких аппроксимаций оценок подстановок:

Улучшается скорость сходимости СКО при использовании знакопеременных ядер для кусочно-гладкой аппроксимации $\tilde{J}_n^{[v]}(x)$ при $v \geq 4$.

Снимается ограничительное условие $|g(Y)| < \infty$.

СКО для кусочно-гладкой аппроксимации $\tilde{J}_n^{[v]}(x)$ вычисляется даже в тех случаях, когда ранее это было невозможно, т.е. при $\sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right) \leq 0$ и $K(u) \leq 0$ на

некоторых множествах из R^1 (например, в области определения знакопеременных финитных ядер...).

Доказательство теоремы 8. Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательствам теорем 6 и 7 с использованием ковариационной матрицы леммы 9 вместо матрицы леммы 8.

ЛИТЕРАТУРА

1. Добровидов А.В., Кошкин Г.М. Непараметрическое оценивание сигналов. М.: Наука. Физматлит, 1977.
2. Боровков А.А. Математическая статистика. Новосибирск: Наука, 1997.
3. Надарая Э.А. Об оценке регрессии // Теория вероятностей и ее применения. 1964. Т. 19. Вып. 1. С. 147–149.
4. Watson G.S. Smooth regression analysis // Sankhya. Indian J. Statist. 1964. V. A26. P. 359–372.
5. Gasser T., Muller H.-G. Kernel estimation of regression functions // Lect. Notes Math. V. 757. P. 23–68.
6. Кошкин Г.М. Асимптотические свойства функций от статистик и их применения к непараметрическому оцениванию // Автоматика и телемеханика. 1990. № 3. С. 82–97.
7. Кошкин Г.М. Моменты отклонений оценки подстановки и ее кусочно-гладких аппроксимаций // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40. № 3. С. 605–618.
8. Алексеев В.Г. О непараметрических оценках кривых и поверхностей регрессии // Автоматика и телемеханика. 1988. № 7. С. 81–87.
9. Bosq D., Cheze-Payaud N. Optimal asymptotic quadratic error of nonparametric regression function estimates for a continuous-time process from sampled-data // Statistics. 1999. V. 32. P. 229–247.
10. Stone C.J. Consistent nonparametric regression // Ann. Math. Statist. 1977. V. 5. No. 4. P. 595–645.
11. Masry E. Nonparametric estimation of conditional probability densities and expectations of stationary processes: strong consistency and rates // Stochastic Processes and Appl. 1989. V. 32. No. 1. P. 109–127.
12. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965.
13. Боровков А.А. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1972. С. 19.
14. Rosenblatt M. Remarks on some nonparametric estimates of a density function // Ann. Math. Statist. 1956. V. 27. No. 3. P. 832–837.
15. Parzen E. On estimation of a probability density function and mode // Ann. Math. Statist. 1962. V. 33. No. 3. P. 1065–1076.
16. Деврой Л., Дьерфи Л. Непараметрическое оценивание плотности. М.: Мир, 1988. 408 с.
17. Надарая Э.А. непараметрическое оценивание плотности вероятностей и кривой регрессии. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1983.
18. Кошкин Г.М. Улучшенная неотрицательная ядерная оценка плотности // Теор. вероятн. и ее примен. 1988. Т. 33. Вып. 4. С. 817–822.
19. Давыдов Ю.А. О сходимости распределений, порожденных стационарными случайными процессами // Теор. вероятн. и ее примен. 1988. Т. XIII. Вып. 4. С. 730–737.
20. Надарая Э.А. Непараметрические оценки кривой регрессии // Тр. ВЦ АН ГССР. Тбилиси: Мецниереба, 1965. № 5:1. С. 56–68.
21. Цыбаков А.Б. О выборе ширины окна в ядерной непараметрической регрессии // Теор. вероятн. и ее примен. 1987. Т. 32. Вып. 1. С. 153–159.
22. Балтрунас Й.Й., Рудзкене В.Ю. Нелинейные стохастические процессы авторегрессии // Тр. АН ЛитССР. Сер. Б. 1984. Т. 3(142). С. 81–90.
23. Балтрунас Й.Й., Рудзкене В.Ю. Регулярность процесса нелинейной авторегрессии // Тр. АН ЛитССР. Сер. Б. 1986. Т. 2(153). С. 118–122.
24. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.
25. Билингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.
26. Koshkin G.M., Piven I.G. Nonparametric estimation in nonlinear autoregression processes // Обозр. прикл. и промышл. матем. 2001. Т. 8. Вып. 1. С. 385–386.
27. Bradley R., Bryc W. Multilinear forms and measures of dependence between random variables // J. Mult. Anal. 1985. V. 16. No. 3. P. 335–367.
28. Collomb G. Estimation non parametrique de la regression par la metode du noyau: These Docteur Ingenieur. Toulouse: Univ. Paul-Sabatier, 1976.
29. Kitaeva A.V., Koshkin G.M., Piven I.G., Ryumkin V.I. Nonparametric identification of dynamic systems // Пробл. синт. и проект. сист. автомат. упр.: Матер. науч.-практич. сем. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2001. С. 97–100.
30. Kitaeva A.V., Koshkin G.M., Piven I.G., Ryumkin V.I. On nonparametric kernel identification of nonlinear autoregression process // The 5th Korea-Russian Intern. Symp. on Science and Techn.: Proceed. KORUS 2001. V. 2. Tomsk: Tomsk Polytechnic University. P. 208–211.
31. Schuster E.F. Joint asymptotic distribution of the estimated regression function at a finite number of distinct points // Ann. Math. Statist. 1972. V. 43. № 1. P. 84–88.
32. Masry E. Probability density estimation from sampled data // IEEE Trans. Inf. Theory. 1983. V. IT-29. No. 5. P. 696–706.

Статья представлена кафедрой теоретической кибернетики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Кибернетика и информатика» 30 апреля 2003 г.