УДК 517.511

*С.С. Ломакина, В.И. Смагин*

# РОБАСТНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМАХ СО СЛУЧАЙНЫМИ СКАЧКООБРАЗНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассматривается алгоритм синтеза робастного фильтра, определяющего оценку вектора состояния непрерывной линейной динамической системы со случайными скачкообразными параметрами, описываемыми цепью Маркова с конечным числом состояний. Коэффициенты передачи фильтра предлагается выбирать по минимуму критерия, усредненного по вероятностям состояния скачкообразного параметра. Получены условия, гарантирующие устойчивость робастного фильтра.

Актуальной является задача разработки алгоритмов калмановской фильтрации для класса систем со случайными скачкообразно изменяющимися параметрами, которые могут использоваться в качестве моделей реальных физических объектов. Такой класс систем имеет две составляющие состояния. Первая изменяется непрерывно, ее моделью является дифференциальное уравнение, вторая изменяется дискретно, и для ее описания используется дискретная цепь Маркова с конечным числом состояний. К данному классу могут быть отнесены системы с возможными нарушениями, например вследствие внезапных отказов.

В работах [1,2] калмановская фильтрация применяется для объектов, зависящих от случайных скачкообразных параметров. В настоящей работе предлагается синтезировать робастный фильтр с коэффициентами передачи не зависящими от состояния скачкообразной составляющей.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть линейная динамическая система со случайными скачкообразными параметрами описывается следующим уравнением:

$$\dot{x}(t) = A(\gamma,t)x(t) + q(\gamma,t), \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $A(\gamma,t)$ – матрица порядка $n\times n$, $x(t)\in R^n$ – вектор состояния, $q(\gamma,t)\in R^n$ – белый гауссовский шум с характеристиками

$$\mathrm{M}\{q(\gamma,t)\} = 0\,,\ \mathrm{M}\{q(\gamma,t)q^T(\gamma,\tau)\} = Q(\gamma)\delta(t-\tau)\,, \tag{2}$$

$\gamma(t)$ – цепь Маркова с состояниями $\{\gamma_1, \gamma_2,\ldots,\gamma_r\}$ (вероятность перехода из $i$-го состояния в $j$-е ($i\neq j$) за время $\Delta t$ равна $\lambda_{ij}\Delta t + o(\Delta t)$), $x_0$ – начальные условия, при этом

$$\mathrm{M}\{x_0\} = \bar{x}_0\,,$$

$$\mathrm{M}\{(x_0-\bar{x}_0)(x_0-\bar{x}_0)^{\mathrm{T}} / \gamma(0)=\gamma_i\} = P_{0i}\,. \tag{3}$$

Здесь приняты следующие обозначения: М – оператор математического ожидания, т – транспонирование, $Q(\gamma) = Q(\gamma)^{\mathrm{T}} \geq 0$ – неотрицательно определенная матрица, $\delta(\cdot)$ – дельта функция Дирака.

Процесс $\gamma(t)$ задается уравнением

$$d\gamma(t) = \int u\Omega(dt,du)\,,\ \gamma(0) = \gamma_o, \tag{4}$$

где $\gamma_o$ – начальное состояние переменной $\gamma(t)$. В (4) пуассоновская случайная мера $\Omega(dt,du)$ характеризуется функцией

$$\Pi_{t,\gamma_i}(du) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \lambda_{ij}\delta(u+\gamma_i-\gamma_j)du\,. \tag{5}$$

Вектор вероятностей $p(t) = (p_1(t), p_2(t),\ldots, p_r(t))^{\mathrm{T}}$, где $p_i(t) = P\{\gamma(t)=i\}$ $(i=\overline{1,r})$ удовлетворяет прямому уравнению Колмогорова

$$\frac{dp(t)}{dt} = \Lambda^{\mathrm{T}} p(t)\,,\ p(0) = \rho_o,\ t\in[0,T]\,,$$

где $\rho_o$ – вектор начальных вероятностей, $\Lambda$ – матрица интенсивностей переходов с элементами $\lambda_{ij}$,

$$\lambda_{ii} = -\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} \lambda_{ij}\,.$$

Предполагается, что наблюдаемый вектор выхода измерителя $y\in R^l$ определяется соотношением

$$y(t) = S(\gamma,t)x(t) + \nu(\gamma,t)\,, \tag{6}$$

где $S(\gamma,t)$ – матрица канала наблюдений полного ранга, $\nu(\gamma,t)$ – белый гауссовский шум с характеристиками:

$$\mathrm{M}\{\nu(\gamma,t)\} = 0\,,\ \mathrm{M}\{\nu(\gamma,t)q^{\mathrm{T}}(\gamma,\tau)\} = 0\,,$$

$$\mathrm{M}\{\nu(\gamma,t)\nu^{\mathrm{T}}(\gamma,\tau)\} = V(\gamma,t)\delta(t-\tau)\,. \tag{7}$$

Определим оценку состояния $\hat{x}(t)$ с помощью фильтра, по своей структуре совпадающему с фильтром Калмана [1]:

$$\hat{x}(t) = A(\gamma,t)\hat{x}(t) + \xi(t), \quad \hat{x}(0) = \bar{x}_0\,. \tag{8}$$

В (8) $\xi(t)$ – обновляющийся процесс:

$$\xi(t) = K(t)(y(t) - S(\gamma,t)\hat{x}(t))\,. \tag{9}$$

Коэффициенты передачи нестационарного фильтра (8), (9) $K(t)$ на интервале времени $[0, T]$ будем определять из условия минимума критерия:

$$J[0,T] = \mathrm{M}\{\int_0^T \sum_{i=1}^{r} p_i(t)(e^{\mathrm{T}}(t)R_i e(t))\,dt +$$

$$+\sum_{i=1}^{r} p_i(T)(e^{\mathrm{T}}(T)Y_{Ti}e(T)) / \gamma(0)=\gamma_0\}, \tag{10}$$

где $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ – вектор ошибок фильтрации, $R_i \geq 0$ и $Y_{T_i} \geq 0$ – весовые матрицы.

## ФИЛЬТРАЦИЯ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА

Алгоритм синтеза робастного фильтра для нестационарного процесса может быть представлен в виде следующей теоремы.

**Теорема 1.** Если существуют матрицы $Y_i > 0$ и $P_i(t) > 0$, являющиеся решением двухточечной краевой задачи:

$$\dot{P}_i = (A_i - KS_i)P_i + P_i(A_i - KS_i)^{\mathrm{T}} + Q_i + KV_iK^{\mathrm{T}} +$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} \lambda_{ij}(P_j - P_i), \quad P_i(0) = P_{0i}; \tag{11}$$

$$-\dot{Y}_i = Y_i(A_i - KS_i) + (A_i - KS_i)^{\mathrm{T}} Y_i + R_i +$$

$$+\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} \lambda_{ij}(Y_j - Y_i), \quad Y_i(T) = Y_{Ti}, \qquad (12)$$

то элементы матрицы оптимальных коэффициентов передачи определятся по формуле

$$ctK(t) = \left[\sum_{i=1}^{r} p_i \quad Y_i \otimes V_i\right]^{-1} ct\sum_{i=1}^{r} p_i (Y_i P_i S_i^{\mathrm{T}}). \qquad (13)$$

Здесь: $\otimes$ – кронекеровское произведение; $ct(\cdot)$ – вектор-столбец, составленный из элементов строк матрицы;

$$A_i = A(\gamma_i),\ Q_i = Q(\gamma_i), \qquad (14)$$

$$S_i = S(\gamma_i),\ V_i = V(\gamma_i).$$

***Доказательство.*** Дисперсия ошибки фильтрации

$$P_i(t) = \mathrm{M}\{e(t)e^{\mathrm{T}}(t) / \gamma(t) = \gamma_i\} \qquad (15)$$

удовлетворяет дифференциальному матричному уравнению

$$\dot{P}_i = (A_i - KS_i)P_i + P_i(A_i - KS_i)^{\mathrm{T}} + Q_i +$$

$$+KV_iK^{\mathrm{T}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} \lambda_{ij}(P_j - P_i), \quad P_i(0) = P_{0i}. \qquad (16)$$

Уравнение для ошибки $e(t)$ при оптимальных коэффициентах передачи фильтра должно быть устойчивым в среднеквадратическом. Поэтому для уравнений (16) ($i = \overline{1, \ r}$) должна существовать функция Ляпунова, которую будем искать в виде

$$W(t, P_i(t)) = p_i(t)\,\mathrm{tr}\,P_i(t)Y_i(t) +$$

$$+\int_t^T p_i(Q_i + \bar{Q}_i + KV_iK^{\mathrm{T}})Y_i d\tau, \qquad (17)$$

где $\bar{Q}_i \geq 0$ – некоторые матрицы, $Y_i(t) > 0$ – матрица, удовлетворяющая дифференциальному уравнению, двойственному уравнению (16)

$$-\dot{Y}_i = Y_i(A_i - KS_i) + (A_i - KS_i)^{\mathrm{T}} Y_i + \bar{C}_i +$$

$$+\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} \lambda_{ij}(Y_j - Y_i), \quad Y_i(T) = Y_{Ti}. \qquad (18)$$

В (18) $\bar{C}_i \geq 0$ – матрица, подлежащая определению. Очевидно, что функция Ляпунова (17) неотрицательна. Проинтегрируем от $t$ до $T$ полную производную функции Ляпунова:

$$\int_t^T \frac{d}{d\tau} W(\tau, P_i(\tau)) d\tau = \int_t^T [\dot{p}_i\,\mathrm{tr}\,P_iY_i + p_i\,\mathrm{tr}(\dot{P}_iY_i + P_i\dot{Y}_i) -$$

$$-p_i\,\mathrm{tr}(Q_i + \bar{Q}_i + KV_iK^{\mathrm{T}})Y_i]d\tau =$$

$$= \int_t^T [\dot{p}_i\,\mathrm{tr}\,P_iY_i + p_i\,\mathrm{tr}((A_i - KS_i)P_iY_i + P_i(A_i - KS_i)^{\mathrm{T}} Y_i +$$

$$+\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} \lambda_{ij}(P_j - P_i)Y_i + p_i\,\mathrm{tr}(P_i\dot{Y}_i - \bar{Q}_iY_i)]d\tau =$$

$$= p_i(T)\,\mathrm{tr}\,P_i(T)Y_i(T) - p_i(t)\,\mathrm{tr}\,P_i(t)Y_i(t) -$$

$$-\int_t^T p_i\,\mathrm{tr}(Q_i + \bar{Q}_i + KV_iK^{\mathrm{T}})Y_i d\tau. \qquad (19)$$

Вычислим значение критерия

$$J_i[t, T] = \mathrm{M}\{\int_t^T p_i(\tau)(e^{\mathrm{T}}(\tau)R_ie(\tau))\,d\tau +$$

$$+p_i(T)e^{\mathrm{T}}(T)Y_{Ti}e(T)\}. \qquad (20)$$

В результате получим

$$J_i[t, T] = \int_t^T p_i(\tau)\,\mathrm{tr}\,P_i(\tau)R_i d\tau + p_i(T)\,\mathrm{tr}\,P_i(T)Y_{Ti}. \quad (21)$$

Учитывая (19), критерий (21) представим в эквивалентной форме

$$J_i[t, T] = \int_t^T [p_i\,\mathrm{tr}\,P_iR_i + \dot{p}_i\,\mathrm{tr}\,P_iY_i + p_i\,\mathrm{tr}((A_i - KS_i)P_i +$$

$$+P_i(A_i - KS_i)^{\mathrm{T}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} \lambda_{ij}(P_j - P_i))Y_i + p_i\,\mathrm{tr}(P_i\dot{Y}_i +$$

$$+(Q_i + KV_iK^{\mathrm{T}})Y_i)]d\tau + p_i(T)\,\mathrm{tr}\,P_i(T)Y_{Ti} -$$

$$-p_i(T)\,\mathrm{tr}\,P_i(T)Y_i(T) + p_i(t)\,\mathrm{tr}\,P_i(t)Y_i(t). \qquad (22)$$

Критерий (10) можно представить в виде суммы критериев (22) при $t = 0$:

$$J[0, T] = \sum_{i=1}^{r} J_i[0, T]. \qquad (23)$$

Приравнивая к нулю градиент функции (23) по $K$ и используя правила дифференцирования скалярной функции по матричному аргументу [3], получим матричное уравнение

$$\sum_{i=1}^{r} p_i(\ Y_iKV_i - Y_iP_iS_i^{\mathrm{T}}) = 0. \qquad (24)$$

Решение уравнения (24) относительно матрицы $K$ представляется в виде (13) [4].

Найдем в уравнении для $Y_i$ (18) выражение для матрицы $\bar{C}_i$ такое, чтобы критерий (22) был минимальным. Для этого с учетом (18) выполним преобразования в (22) и получим

$$J_i[t, T] = \int_t^T p_i\,\mathrm{tr}[P_i(R_i - \bar{C}_i) +$$

$$+(Q_i + KV_iK^{\mathrm{T}})Y_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} \lambda_{ij}(P_j - P_i)Y_i -$$

$$-P_i\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} \lambda_{ij}(Y_j - Y_i)]d\tau + p_i(t)\,\mathrm{tr}\,P_i(t)Y_i(t). \qquad (25)$$

Так как значение критерия (25) должно быть всегда неотрицательным, то его минимум достигается при

$$\bar{C}_i = R_i. \qquad (26)$$

Покажем, что полная производная функции Ляпунова (17) при матрице $K(t)$, равной (13), отрицательна.

Это необходимо для обеспечения устойчивости в среднеквадратическом [5]. С учетом (11), (12) полная производная функции Ляпунова примет вид

$$\frac{d}{dt}W(t,P_i(t)) = -p_i\ \mathrm{tr}(Q_i + KV_iK^{\mathrm{T}}) - \alpha_i\,, \qquad (27)$$

где $\qquad \alpha_i = p_i\ \mathrm{tr}(\bar{Q}_i Y_i - \dot{P}Y - P\dot{Y}) - \dot{p}_i\ \mathrm{tr}\,P_iY_i\,. \qquad (28)$

Очевидно, что выражение (27) будет отрицательным, так как значения $\alpha_i$ в (28) всегда можно сделать положительными, задав соответствующим образом матрицы $\bar{Q}_i \geq 0$ . Теорема доказана.

## ФИЛЬТРАЦИЯ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА

В стационарном случае вместо критерия (10) необходимо минимизировать критерий

$$\lim_{T\to\infty}\sup\frac{1}{T}J[0,T]\,. \qquad (29)$$

Будем предполагать, что пара матриц $S_i$, $A_i$ ( $i=\overline{1,r}$ ) детектируема, $A_i$ – устойчивые матрицы и в критерии (10) $Y_{Ti} = 0$. Задача синтеза робастного фильтра при этом упрощается, так как уравнения (11), (12) становятся алгебраическими:

$$(A_i - KS_i)P_i + P_i(A_i - KS_i)^{\mathrm{T}} + Q_i +$$

$$+KV_iK^{\mathrm{T}} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}\lambda_{ij}(P_j - P_i) = 0; \qquad (30)$$

$$Y_i(A_i - KS_i) + (A_i - KS_i)^{\mathrm{T}}Y_i +$$

$$+R_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}\lambda_{ij}(Y_j - Y_i) = 0\,. \qquad (31)$$

Постоянные оптимальные коэффициенты передачи определятся по формуле:

$$ctK = [\sum_{i=1}^{r} p_i \quad Y_i \otimes V_i]^{-1} ct\sum_{i=1}^{r} p_i \quad (Y_iP_iS_i^{\mathrm{T}})\,, \qquad (32)$$

где $p_i$ – установившиеся вероятности состояний дискретной переменной γ.

**Теорема 2.** Если существует решение уравнений (30), (31) и существуют числа $\beta_i$ ( $0<\beta_i<1$ ) такие, что

$$Y_i > 0\ ,\ M_i = \beta_i R_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}\lambda_{ij}(Y_j - Y_i) \geq 0, \qquad (33)$$

пара матриц

$$\sqrt{R_i}\ ,\ A_i \qquad (34)$$

детектируема, то матрица $A_i$ - $KS_i$ асимптотически устойчива ( $i=\overline{1,r}$ ).

***Доказательство.*** Из условия детектируемости матриц (34) следует детектируемость пары матриц

$$\sqrt{(1-\beta_i)R_i}\ ,\ A_i\,. \qquad (35)$$

Тогда учитывая, что $M_i \geq 0$ и применяя теорему 3.6 [6] будет детектируема пара матриц

$$\sqrt{(1-\beta_i)R_i + M_i}\ ,\ A_i - KS_i\,. \qquad (36)$$

В силу того, что уравнение (31) эквивалентно матричному алгебраическому уравнению Ляпунова

$$Y_i(A_i - KS_i) + (A_i - KS_i)^{\mathrm{T}}Y_i +$$

$$+(1-\beta_i)R_i + M_i = 0, \qquad (37)$$

по лемме 12.2 [6] при $Y_i > 0$ и условии детектируемости пары матриц (36) следует, что матрица $A_i - KS_i$ асимптотически устойчива для всех $i=\overline{1,r}$ . Теорема доказана.

Очевидно, что при выполнении условий теоремы 2 уравнение для вектора ошибок фильтрации $e(t)$ будет устойчивым в среднеквадратическом.

ЛИТЕРАТУРА


1. *Mariton M.* On the influence of noise on jump linear systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1987. V. AC-32. No. 12. P. 1094–1097.
2. *Dufour P., Bertrand P.* The filtering problem for continuous-time systems with Markovian switching coefficients // Systems and Control Letters. 1994. V. 25. No. 5. P.453–461.
3. *Athans M.* The matrix minimum principle // Information and Control. 1968. V.11. P. 592–606.
4. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1978.
5. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970.
6. *Уонем М.* Линейные многомерные системы управления. М.: Наука, 1980.



Статья представлена кафедрой прикладной математики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Кибернетика и информатика» 20 мая 2003 г.