УДК 519.2

Е.Е. Сотникова

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ОТ СЛУЧАЙНОЙ ВОЛАТИЛЬНОСТИ В СЛУЧАЕ, КОГДА ОНА ОБРАЗУЕТ ЧИСТО РАЗРЫВНЫЙ МАРКОВСКИЙ ПРОЦЕСС С ДВУМЯ СОСТОЯНИЯМИ

Расчет справедливой цены производных ценных бумаг является одной из основных задач финансовой математики. Однако ее математическое ожидание зависит от интеграла квадрата волатильности процесса изменения цены. Найти плотность вероятностей этой величины удается очень редко. В данной статье рассмотрена одна из таких ситуаций.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим процесс следующего вида: процесс $\sigma(t)$ может принимать одно из двух значений σ_1 и σ_2, причем переходы между ними образуют дискретную марковскую цепь с двумя состояниями. Интенсивность перехода $\sigma_1 \to \sigma_2$ равна λ_1, интенсивность перехода $\sigma_2 \to \sigma_1$ равна λ_2. Граф переходов изображен на рис. 1.

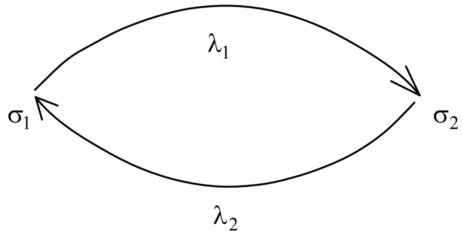

Рис. 1

На рис. 2 изображен вид траекторий процесса $\sigma(t)$.

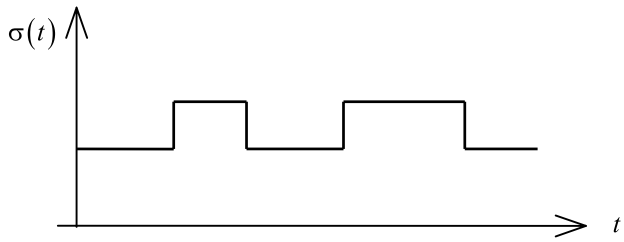

Рис. 2

Основной задачей данной статьи является нахождение плотности вероятностей величины

$$S = \int\limits_0^T \sigma^2(t)\,dt \qquad (1)$$

то есть интеграла от квадрата процесса случайной волатильности на интервале $[0,T]$ при условии, что $\sigma(0) = \sigma_1$. Эту плотность вероятностей будем обозначать $p_1(S)$. Для определенности будем считать, что $\sigma_1 < \sigma_2$.

РАСЧЕТ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ВЕЛИЧИН ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ВЕЛИЧИНЫ *S*

Обозначим через n число переходов из состояния в состояние на интервале $[0,T]$.

Рассмотрим три частных случая.

1. $n = 0$. В этом случае на интервале $[0,T]$ не произошло ни одного перехода из состояния в состояние и $\forall t \in [0,T]$ $\sigma(t) = \sigma_1$. Вероятность этого события равна $e^{-\lambda_1 T}$.

2. $n = 2m$, то есть на интервале $[0,T]$ имело место четное количество переходов. Временная структура состояний системы изображена на рис. 3.

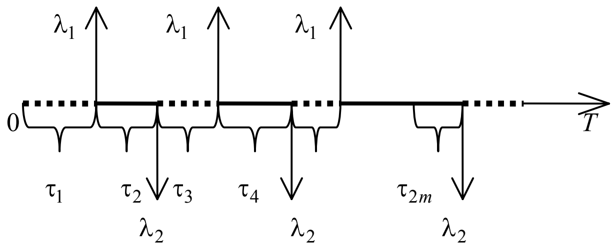

Рис. 3

На участках, обозначенных пунктиром, процесс $\sigma(t)$ был равен σ_1, на участках, обозначенных сплошными линиями, – σ_2. Стрелками вверх помечены моменты перехода процесса из состояния σ_1 в состояние σ_2, который осуществляется с интенсивностью λ_1, стрелками вниз – моменты перехода из σ_2 в σ_1 (с интенсивностью λ_2). Через τ_i, $i = \overline{1,2m}$, обозначены случайные времена пребывания в этих состояниях.

Обозначим через $p_{2m}(\tau_1, \tau_2, \tau_3 ... \tau_{2m})$ плотность вероятностей величин $\tau_1, \tau_2, \tau_3 ... \tau_{2m}$ вместе с вероятностью того, что $n = 2m$. Тогда, пользуясь свойствами цепей Маркова с непрерывным временем и дискретным числом состояний, можем записать

$$\begin{gathered} p_{2m}(\tau_1, \tau_2, \tau_3 ... \tau_{2m}) = \\ = e^{-\lambda_1 \tau_1} \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau_2} \lambda_2 e^{-\lambda_1 \tau_3} \lambda_1 e^{-\lambda_2 \tau_4} \lambda_2 \cdot ... \times \\ \times e^{-\lambda_2 \tau_{2m}} \lambda_1 e^{-\lambda_1 (T - \tau_1 - \tau_2 - .. - \tau_{2m})} \end{gathered} \qquad (2)$$

или, после упрощений

$$\begin{gathered} p_{2m}(\tau_1, \tau_2, \tau_3 ... \tau_{2m}) = \\ = \lambda_1^m \lambda_2^m e^{-\lambda_1 T} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)(\tau_2 + \tau_4 + .. + \tau_{2m})}. \end{gathered} \qquad (3)$$

Очевидны ограничения

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + .. + \tau_{2m} \le T, \quad \forall i = \overline{1,2m}, \quad \tau_i \ge 0\,. \qquad (4)$$

Найдем $p_{2m}(\tau_2, \tau_4, ... \tau_{2m})$, то есть плотность вероятностей только интервалов τ_i с четными индексами. Очевидно, что

$$\begin{gathered} p_{2m}(\tau_2, \tau_4, ... \tau_{2m}) = \\ = \underset{\tau_1 + \tau_3 + .. + \tau_{2m-1} \le T - (\tau_2 + \tau_4 + .. + \tau_{2m})}{\int\limits_{\tau_1 \ge 0} ... \int\limits_{\tau_{2m-1} \ge 0}} p_{2m}(\tau_1, \tau_2, ... \tau_{2m})\, d\tau_1 d\tau_3 ... d\tau_{2m-1} = \\ = \lambda_1^m \lambda_2^m e^{-\lambda_1 T} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)(\tau_2 + \tau_4 + .. + \tau_{2m})} \times \\ \times \underset{\tau_1 + \tau_3 + .. + \tau_{2m-1} \le T - (\tau_2 + \tau_4 + .. + \tau_{2m})}{\int\limits_{\tau_1 \ge 0} ... \int\limits_{\tau_{2m-1} \ge 0}} d\tau_1 d\tau_3 ... d\tau_{2m-1}\,. \end{gathered} \qquad (5)$$

Входящий в выражение (5) интеграл есть объем m-мерного симплекса. Известно, что

$$p_{2m}\left(\tau_2,\tau_4,...\tau_{2m}\right)= =\frac{\lambda_1^m\lambda_2^m}{m!}e^{-\lambda_1 T}e^{(\lambda_1-\lambda_2)(\tau_2+\tau_4+..+\tau_{2m})}\left[T-\left(\tau_2+\tau_4+..+\tau_{2m}\right)\right]^m.$$

Обозначим $\tau_2+\tau_4+..+\tau_{2m}=t_{\text{chet}}$ и найдем ее плотность вероятностей. Тогда при $0\le x\le T$

$$P\{t_{\text{chet}}\le x\}=\int\limits_{\substack{\tau_2\ge 0\\ \tau_2+\tau_4+..+\tau_{2m}\le x}}\dots\int\limits_{\tau_{2m}\ge 0} p_{2m}\left(\tau_2,\tau_4,...\tau_{2m}\right)d\tau_2...d\tau_{2m}= =\frac{\lambda_1^m\lambda_2^m}{m!}e^{-\lambda_1 T}\times$$

$$\times\int\limits_{\substack{\tau_2\ge 0\\ \tau_2+\tau_4+..+\tau_{2m}\le x}}\dots\int\limits_{\tau_{2m}\ge 0}\left[T-\left(\tau_2+..+\tau_{2m}\right)\right]^m e^{(\lambda_1-\lambda_2)(\tau_2+..+\tau_{2m})}d\tau_2..d\tau_{2m}=$$

$$=\frac{\lambda_1^m\lambda_2^m}{m!(m-1)!}e^{-\lambda_1 T}\int_0^x\left[T-u\right]^m e^{(\lambda_1-\lambda_2)u}u^{m-1}du. \qquad (7)$$

Поэтому плотность вероятностей величины t_{chet} вместе с вероятностью того, что $n = 2m$ равна

$$P_{2m}(x)=\frac{d}{dx}P\{t_{chet}\le x\}= =\lambda_1\frac{(\lambda_1 x)^{m-1}\left(\lambda_2\left[T-x\right]\right)^m}{m!(m-1)!}e^{-\lambda_1 T}e^{(\lambda_1-\lambda_2)x} \qquad (8)$$

3. $n = 2m + 1$, то есть на интервале $[0,T]$ имело место нечетное количество переходов. Временная структура состояний системы изображена на рис. 4.

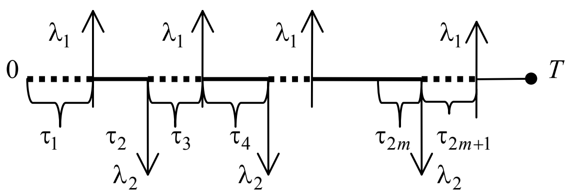

Рис. 4

Аналогично символике, примененной в рис. 3, на участках, обозначенных пунктиром, процесс $\sigma(t)$ равен σ_1, на участках, обозначенных сплошными линиями, – σ_2. Стрелками вверх помечены моменты перехода процесса из состояния σ_1 в состояние σ_2, который осуществляется с интенсивностью λ_1, стрелками вниз – моменты перехода из σ_2 в σ_1 (с интенсивностью λ_2). Через τ_i, $i=\overline{1,2m}$, обозначены случайные времена пребывания в состояниях σ_1 и σ_2.

Обозначим через $p_{2m+1}\left(\tau_1,\tau_2,\tau_3...\tau_{2m+1}\right)$ плотность вероятностей величин $\tau_1,\tau_2,\tau_3,...,\tau_{2m+1}$ вместе с вероятностью того, что $n=2m+1$. Тогда можем записать после упрощений

$$p_{2m+1}\left(\tau_1,\tau_2,\tau_3...\tau_{2m+1}\right)= =\lambda_1^{m+1}\lambda_2^m e^{-\lambda_2 T}e^{(\lambda_2-\lambda_1)(\tau_1+\tau_3+..+\tau_{2m+1})} \qquad (9)$$

с очевидными ограничениями

$$\tau_i\ge 0,\ \forall i=\overline{1,\quad 2m+1},$$
$$\tau_1+\tau_2+\tau_3+..+\tau_{2m+1}\le T.$$

Найдем $p_{2m+1}\left(\tau_1,\tau_3,...\tau_{2m+1}\right)$, то есть плотность вероятностей только интервалов τ_i с нечетными индексами. (6)

$$p_{2m+1}\left(\tau_1,\tau_3,...\tau_{2m+1}\right)= =\int\limits_{\substack{\tau_2\ge 0\\ \tau_2+\tau_4+..+\tau_{2m}\le T-(\tau_1+\tau_3+..+\tau_{2m+1})}}\dots\int\limits_{\tau_{2m}\ge 0}p_{2m+1}\left(\tau_1,\tau_2,...\tau_{2m+1}\right)d\tau_2 d\tau_4...d\tau_{2m}=$$

$$=\frac{\lambda_1^{m+1}\lambda_2^m}{m!}e^{-\lambda_2 T}e^{(\lambda_2-\lambda_1)(\tau_1+\tau_3+..+\tau_{2m+1})}\times \times\left[T-\left(\tau_1+\tau_3+..+\tau_{2m+1}\right)\right]^m \qquad (10)$$

Обозначим $\tau_1+\tau_3+..+\tau_{2m+1}=t_{\text{nech}}$ и найдем ее плотность вероятностей. Тогда при $0\le x\le T$

$$P\{t_{nech}\le x\}= =\int\limits_{\substack{\tau_1\ge 0\\ \tau_1+\tau_3+..+\tau_{2m+1}\le x}}\dots\int\limits_{\tau_{2m+1}\ge 0}p_{2m+1}\left(\tau_1,\tau_3,...\tau_{2m+1}\right)d\tau_1...d\tau_{m+1}= \qquad (11)$$

$$=\frac{\lambda_1^{m+1}\lambda_2^m}{(m!)^2}e^{-\lambda_2 T}\int_0^x e^{(\lambda_2-\lambda_1)u}\left(T-u\right)^m u^m du$$

и плотность вероятностей величины t_{nech} вместе с вероятностью того, что $n=2m+1$, равна

$$P_{2m+1}(x)=\frac{d}{dx}P\{t_{nech}\le x\}= =\lambda_1\frac{(\lambda_1 x)^m\left(\lambda_2\left[T-x\right]\right)^m}{(m!)^2}e^{-\lambda_2 T}e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} \qquad (12)$$

НАХОЖДЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ВЕЛИЧИНЫ *S*

Найдем $g(p)=\mathrm{M}\left\{e^{-pS}\right\}$, то есть преобразование Лапласа от плотности вероятностей величины S. Рассмотрим отдельные слагаемые, входящие в данную функцию.

$n=0$. В этом случае $\forall t\in[0,T]$ $\sigma(t)=\sigma_1$ и поэтому

$$S=\int_0^T\sigma^2(t)dt=\sigma_1^2 T.$$

Следовательно, соответствующее слагаемое в $g(p)$ имеет вид

$$e^{-p\sigma_1^2 T}\cdot e^{-\lambda_1 T}; \qquad (13)$$

$n=2m$. Из рис. 3 видно, что в данном случае

$$\begin{aligned}S&=\sigma_1^2\tau_1+\sigma_2^2\tau_2+\sigma_1^2\tau_3+\sigma_2^2\tau_4+...+\\&+\sigma_2^2\tau_{2m}+\sigma_1^2\left(T-\tau_1-\tau_2-..-\tau_{2m}\right)=\\&=\sigma_1^2 T+\left(\sigma_2^2-\sigma_1^2\right)\left(\tau_2+\tau_4+..+\tau_{2m}\right)=\\&=\sigma_1^2 T+\left(\sigma_2^2-\sigma_1^2\right)t_{\text{chet}}.\end{aligned} \qquad (14)$$

Поэтому соответствующее слагаемое в $g(p)$ есть

$$e^{-p\sigma_1^2 T}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^T e^{-p\left(\sigma_2^2-\sigma_1^2\right)x}p_{2m}(x)dx=e^{-p\sigma_1^2 T}\lambda_1\times$$
$$\times\int_0^T e^{-p\left(\sigma_2^2-\sigma_1^2\right)x}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(\lambda_1 x)^{m-1}\left(\lambda_2(T-x)\right)^m}{(m-1)!m!}e^{-\lambda_1 T}e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}dx. \qquad (15)$$

Но с другой стороны,

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(\lambda_1 x)^{m-1}(\lambda_2(T-x))^m}{(m-1)!m!}=$$

$$=\lambda_2(T-x)\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(\lambda_1\lambda_2 x(T-x))^s}{s!(s+1)!}=$$

$$=\frac{\lambda_2(T-x)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2 x(T-x)}}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{2\sqrt{\lambda_1\lambda_2 x(T-x)}}{2}\right)^{2s+1}}{s!(s+1)!}= \qquad (16)$$

$$=\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{T-x}{x}}\cdot I_1\left(2\sqrt{\lambda_1\lambda_2 x(T-x)}\right),$$

где $I_1(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода первого порядка. Поэтому соответствующее слагаемое в $g(p)$ имеет вид

$$e^{-\lambda_1 T}\cdot\lambda_1\int_0^T e^{-p\sigma_1^2 T-p(\sigma_2^2-\sigma_1^2)x}e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{T-x}{x}}\times$$
$$\times I_1\left(2\sqrt{\lambda_1\lambda_2 x(T-x)}\right)dx; \qquad (17)$$

$n=2m+1$. Из рис. 4 видно, что в данном случае

$$\begin{aligned}S&=\sigma_1^2\tau_1+\sigma_2^2\tau_2+\sigma_1^2\tau_3+\sigma_2^2\tau_4+\ldots+\\&+\sigma_1^2\tau_{2m+1}+\sigma_2^2(T-\tau_1-\tau_2-..-\tau_{2m+1})=\\&=\sigma_2^2T+(\sigma_2^2-\sigma_1^2)(\tau_1+\tau_3+..+\tau_{2m+1})=\\&=\sigma_2^2T+(\sigma_2^2-\sigma_1^2)t_{\text{nech}}.\end{aligned} \qquad (18)$$

Поэтому соответствующее слагаемое в $g(p)$ есть

$$e^{-p\sigma_2^2T}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^T e^{p(\sigma_2^2-\sigma_1^2)x}p_{2m+1}(x)dx=e^{-p\sigma_2^2T}\cdot e^{-\lambda_2 T}\times$$
$$\times\lambda_1\int_0^T\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda_1 x)^m(\lambda_2(T-x))^m}{(m!)^2}e^{p(\sigma_2^2-\sigma_1^2)x}e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}dx. \qquad (19)$$

В то же время

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(\lambda_1 x)^m(\lambda_2(T-x))^m}{(m!)^2}=I_0\left(2\sqrt{\lambda_1\lambda_2 x(T-x)}\right), \qquad (20)$$

где $I_0(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Поэтому соответствующее слагаемое в функции $g(p)$ имеет вид

$$e^{-\lambda_2 T}\cdot\lambda_1\int_0^T e^{-p\sigma_2^2T+p(\sigma_2^2-\sigma_1^2)x}\cdot e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}\times$$
$$\times I_0\left(2\sqrt{\lambda_1\lambda_2 x(T-x)}\right)dx. \qquad (21)$$

Таким образом, объединяя результаты (13), (17) и (21), получим $g(p)$ в виде

$$g(p)=e^{-p\sigma_1^2T}e^{-\lambda_1 T}+e^{-\lambda_1 T}\lambda_1\times \qquad (22)$$
$$\times\int_0^T e^{-p\sigma_1^2T-p(\sigma_2^2-\sigma_1^2)x}e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{T-x}{x}}I_1\left(2\sqrt{\lambda_1\lambda_2 x(T-x)}\right)dx+$$
$$+e^{-\lambda_2 T}\lambda_1\int_0^T e^{-p\sigma_2^2T+p(\sigma_2^2-\sigma_1^2)x}e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}I_0\left(2\sqrt{\lambda_1\lambda_2 x(T-x)}\right)dx.$$

НАХОЖДЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ *p*(S) ВЕЛИЧИНЫ *S*

Согласно свойствам преобразования Лапласа,

$$e^{-p\sigma_1^2T}\leftrightarrow\delta\left(S-\sigma_1^2T\right),$$
$$e^{-p\sigma_2^2T+p(\sigma_2^2-\sigma_1^2)x}\leftrightarrow\delta\left(S-\sigma_2^2T+p(\sigma_2^2-\sigma_1^2)x\right),$$
$$e^{-p\sigma_1^2T-p(\sigma_2^2-\sigma_1^2)x}\leftrightarrow\delta\left(S-\sigma_1^2T-p(\sigma_2^2-\sigma_1^2)x\right),$$

где $\delta(\cdot)$ – дельта функция Дирака.

Поэтому $p(S\,|\,\sigma_1)$ можно записать в виде

$$p(S/\sigma_1)=e^{-\lambda_1 T}\delta\left(S-\sigma_1^2T\right)+e^{-\lambda_1 T}\lambda_1\times$$
$$\times\int_0^T\delta\left(S-\sigma_1^2T-p(\sigma_2^2-\sigma_1^2)x\right)e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{T-x}{x}}\times$$
$$\times I_1\left(2\sqrt{\lambda_1\lambda_2 x(T-x)}\right)dx+ \qquad (23)$$
$$+e^{-\lambda_2 T}\lambda_1\int_0^T\delta\left(S-\sigma_2^2T+p(\sigma_2^2-\sigma_1^2)x\right)e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}\times$$
$$\times I_0\left(2\sqrt{\lambda_1\lambda_2 x(T-x)}\right)dx.$$

Учитывая свойство δ-функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(a+bx)f(x)dx=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(u)f\left(\frac{u-b}{a}\right)du=\frac{1}{a}f\left(-\frac{b}{a}\right),$$

получаем

$$\int_0^T\delta\left(S-\sigma_2^2T+p(\sigma_2^2-\sigma_1^2)x\right)\cdot e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}\times$$
$$\times I_0\left(2\sqrt{\lambda_1\lambda_2 x(T-x)}\right)dx=\frac{1}{\sigma_2^2-\sigma_1^2}e^{\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\sigma_2^2T-S)}{\sigma_2^2-\sigma_1^2}}\times \qquad (24)$$
$$\times I_0\left(\frac{2}{\sigma_2^2-\sigma_1^2}\sqrt{\lambda_1\lambda_2(\sigma_2^2T-S)(S-\sigma_1^2T)}\right).$$

С учетом четности δ-функции, имеем

$$\int_0^T\delta\left(\sigma_1^2T+p(\sigma_2^2-\sigma_1^2)x-S\right)\cdot e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}\times$$
$$\times\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{T-x}{x}}\cdot I_1\left(2\sqrt{\lambda_1\lambda_2 x(T-x)}\right)dx=$$
$$=\frac{1}{\sigma_2^2-\sigma_1^2}e^{\frac{(\lambda_1-\lambda_2)(S-\sigma_1^2T)}{\sigma_2^2-\sigma_1^2}}\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\cdot\frac{\sigma_2^2T-S}{S-\sigma_1^2T}}\times \qquad (25)$$
$$\times I_1\left(\frac{2}{\sigma_2^2-\sigma_1^2}\sqrt{\lambda_1\lambda_2(\sigma_2^2T-S)(S-\sigma_1^2T)}\right).$$

Итак,

$$p(S\,|\,\sigma_1)=e^{-\lambda_1 T}\cdot\delta\left(S-\sigma_1^2T\right)+$$
$$+\frac{\lambda_1}{\sigma_2^2-\sigma_1^2}e^{-\lambda_1 T}e^{\frac{(\lambda_1-\lambda_2)(S-\sigma_1^2T)}{\sigma_2^2-\sigma_1^2}}\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\cdot\frac{\sigma_2^2T-S}{S-\sigma_1^2T}}\times$$
$$\times I_1\left(\frac{2}{\sigma_2^2-\sigma_1^2}\sqrt{\lambda_1\lambda_2(\sigma_2^2T-S)(S-\sigma_1^2T)}\right)+ \qquad (26)$$
$$+\frac{\lambda_1}{\sigma_2^2-\sigma_1^2}e^{-\lambda_2 T}\cdot e^{\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\sigma_2^2T-S)}{\sigma_2^2-\sigma_1^2}}\times$$
$$\times I_0\left(\frac{2}{\sigma_2^2-\sigma_1^2}\sqrt{\lambda_1\lambda_2(\sigma_2^2T-S)(S-\sigma_1^2T)}\right),$$

где S меняется в пределах $\sigma_1^2 T \le S \le \sigma_2^2 T$. Чтобы привести формулу (26) к более простому виду, перейдем к безразмерной величине

$$\xi = \frac{S - \sigma_1^2 T}{\left(\sigma_2^2 - \sigma_1^2\right) T}. \qquad (27)$$

Так как $\sigma_1^2 T \le S \le \sigma_2^2 T$, то $0 \le \xi \le 1$. Учитывая, что

$$\frac{dS}{d\xi} = \left(\sigma_2^2 - \sigma_1^2 T\right),$$

получим

$$p(\xi \mid \sigma_1) = e^{-\lambda_1 T}\left[\delta(\xi) + \lambda_1 T e^{(\lambda_1 - \lambda_2)T\xi} \times \right.$$
$$\times\left(\sqrt{\frac{\lambda_2 T}{\lambda_1 T}\cdot\frac{1-\xi}{\xi}}\cdot I_1\left(2\sqrt{\lambda_1\lambda_2 T^2 \xi(1-\xi)}\right) + \right. \qquad (28)$$
$$\left.\left. + I_0\left(2\sqrt{\lambda_1\lambda_2 T^2 \xi(1-\xi)}\right)\right)\right].$$

Заметим, что $\lambda_1 T$ и $\lambda_2 T$ – безразмерные.

АСИМПТОТИКА ПРИ БОЛЬШИХ $\lambda_1 T$ И $\lambda_2 T$

Рассмотрим асимптотику $p(\xi \mid \sigma_1)$ при больших $\lambda_1 T$ и $\lambda_2 T$. Применим эргодические соображения для вычисления значения, около которого при данных условиях колеблется величина ξ. Пусть τ_1 есть случайная длительность пребывания процесса $\sigma(t)$ в состоянии $\sigma(t) = \sigma_1$, τ_2 – случайная длительность пребывания процесса $\sigma(t)$ в состоянии $\sigma(t) = \sigma_2$. Тогда значение S за один период, включающий пребывание $\sigma(t)$ в состоянии σ_1 и σ_2, равно $S_1 = \sigma_1^2\tau_1 + \sigma_2^2\tau_2$.

Так как $p(\tau_i) = \lambda_i e^{-\lambda_i \tau_i}, i = \overline{1,2}$, то $\mathrm{M}\{\tau_i\} = \frac{1}{\lambda_i}$.

Если рассматривать $T >> 1$, то за это время в среднем будет

$$n = \frac{T}{\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right)} = \frac{T\cdot\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \qquad (29)$$

периодов. За каждый период в среднем будет $S_1 = \frac{\sigma_1^2}{\lambda_1} + \frac{\sigma_2^2}{\lambda_2}$. Поэтому при $T \to \infty$

$$\overline{S} = \left(\frac{\sigma_1^2}{\lambda_1} + \frac{\sigma_2^2}{\lambda_2}\right)\cdot n = \frac{\sigma_1^2\lambda_2 + \sigma_2^2\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} T. \qquad (30)$$

Соответственно при $T \to \infty$

$$\overline{\xi} = \frac{\overline{S} - \sigma_1^2 T}{\sigma_2^2 T - \sigma_1^2 T} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}. \qquad (31)$$

Поэтому представим величину ξ в виде

$$\xi = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \eta. \qquad (32)$$

Тогда при $\min(\lambda_1 T, \lambda_2 T) >> 1$ флуктуации величины η будут малы.

Рассмотрим асимптотику выражения

$$2\sqrt{\lambda_1\lambda_2 T^2 \xi(1-\xi)},$$

стоящего в аргументе функции Бесселя. Имеем

$$2\sqrt{\lambda_1\lambda_2\xi(1-\xi)} =$$
$$= 2\sqrt{\lambda_1\lambda_2\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} + \eta\right)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} - \eta\right)} = \qquad (33)$$
$$= 2\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\sqrt{1 + \frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2+\lambda_1)}{\lambda_1\lambda_2}\eta - \frac{(\lambda_2+\lambda_1)^2}{\lambda_1\lambda_2}\eta^2}.$$

Используя разложение $\sqrt{1+x}$ в ряд Тейлора, можно получить, что

$$2\sqrt{\lambda_1\lambda_2\xi(1-\xi)} =$$
$$= 2\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} + (\lambda_2-\lambda_1)\eta - \frac{(\lambda_2+\lambda_1)^3}{4\lambda_1\lambda_2}\eta^2 + \ldots \qquad (34)$$

Для дальнейшего вывода используем асимптотику

$$I_\nu(z) \approx \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}},$$

верную при $z >> 1$. Тогда в формуле (28) в показателе экспоненты окажется выражение

$$-\lambda_1 T + (\lambda_1 - \lambda_2)\cdot\frac{T\cdot\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} + (\lambda_1+\lambda_2)T\eta + 2\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}T +$$
$$+ (\lambda_2-\lambda_1)T\eta - \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^3}{4\lambda_1\lambda_2}T\eta^2 + \ldots =$$
$$= -\eta^2\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^3 T}{4\lambda_1\lambda_2} + o\left(\eta^2\right).$$

Собирая сомножитель перед экспонентами, в результате громоздких преобразований можно получить

$$p(\eta \mid \sigma_1) = \sqrt{\frac{T(\lambda_1+\lambda_2)^3}{4\pi\cdot\lambda_1\lambda_2}}\exp\left\{-\eta^2\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^3 T}{4\lambda_1\lambda_2}\right\},$$

что говорит о том, что при $\min(\lambda_1 T,\ \lambda_2 T) >> 1$ случайная величина η является асимптотически нормальной со следующими статистическими характеристиками:

$$\mathrm{M}\{\eta\} = 0,\ D\left\{\frac{2\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2)^3 T}\right\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сотникова Е.Е.* Расчет средней цены производных ценных бумаг при случайной волатильности и процентной ставке: Матер. четвертой Всероссийской конф. с международн. участ. «Нов. информ. технол. в исслед. сложн. структ.». Томск: Изд-во Том. ун-та, 2002.

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики Факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 30 апреля 2003 г.