ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 280 Декабрь 2003

ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

УДК 28.17.19

Д.В. Колоусов, А.А. Назаров

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУМЕРНОГО ВЫХОДЯЩЕГО ПОТОКА СЕТИ СВЯЗИ СЛУЧАЙНОГО ДОСТУПА С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТАНЦИЙ

Исследован двумерный выходящий поток успешно обслуженных заявок и сигналов оповещения о конфликте, сети связи с конечным числом станций, управляемой протоколом случайного множественного доступа. Показано, что число событий в двумерном потоке подчиняется нормальному распределению, найдены характеристики распределения.

Оценки параметров компьютерных сетей связи, таких, как интенсивность входящего потока, производительность сети, её пропускная способность и т.д., представляют большой интерес для исследования, поскольку эффективное функционирование компьютерной сети связи требует знания данных параметров. Поэтому оценка этих параметров является актуальной технической проблемой. Однако прежде чем оценивать параметры, необходимо изучить свойства выходящих потоков, на основе которых в дальнейшем будет возможно оценивание. В данной работе будет проведено исследование свойств двумерного потока успешно обслуженных сообщений и сигналов оповещения о конфликте. Функционирование сети связи будем моделировать системой массового обслуживания.

Можно отметить несколько работ, в которых проводится исследование выходящих потоков систем массового обслуживания. Это работы А.М. Александрова [1, 2], В.А. Ивницкого [3] и некоторых других. Однако видимо ввиду сложности проблемы интерес к этим вопросам угас, и в последнее время работ в этом направлении не появлялось.

Метод исследования математической модели выходящего потока аналогичен [4] с асимптотикой по времени наблюдения $T \to \infty$, где смысл параметра T будет определен ниже.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СЕТИ СВЯЗИ С ПРОТОКОЛОМ СЛУЧАЙНОГО МНОЖЕСТВЕННОГО ДОСТУПА ДЛЯ КОНЕЧНОГО ЧИСЛА СТАНЦИЙ

Опишем сеть связи с конечным N числом станций, управляемую протоколом случайного множественного доступа с оповещением о конфликте в виде однолинейной системы массового обслуживания, сервер которой может находиться в одном из трех состояний: $k = 0$, если он свободен; $k = 1$, когда он занят обслуживанием заявки; $k = 2$, когда на сервере реализуется этап оповещения о конфликте. Заявка, заставшая в момент поступления сервер свободным, начинает немедленно обслуживаться. Если за это время другие требования не поступали, то исходная заявка после завершения обслуживания покидает систему. Если во время обслуживания одной заявки поступает другая, то они вступают в конфликт. От этого момента начинается этап оповещения о конфликте. Заявки, попавшие в конфликт, а также поступившие на интервале оповещения о конфликте, переходят в источник повторных вызовов, из которого вновь обращаются к серверу с попыткой повторного обслуживания.

Повторное обращение происходит после случайной задержки, имеющей экспоненциальное распределение с параметром σ / N. Число заявок в источнике повторных вызовов обозначим i.

Будем считать, что обращение каждой станции к серверу происходит через интервал времени случайной длительности, распределенный по экспоненциальному закону с одинаковым для всех станций параметром λ / N. Таким образом, совокупный входящий поток является примитивным [5].

Время, в течение которого сервер осуществляет передачу сообщения, имеет экспоненциальное распределение с параметром μ. Длины интервалов, в течение которых в сети распространяется сигнал оповещения о конфликте, также имеют экспоненциальное распределение с параметром μ_1.

Состояние рассматриваемой системы определим вектором (k, i, n, s), изменение во времени которого образует неоднородный марковский процесс $\{k(t), i(t), n(t), s(t)\}$, где $n(t)$ − число успешно обслуженных заявок за время t, $s(t)$ − число сигналов оповещения о конфликте за время t. Проведем исследование этого процесса.

ИССЛЕДОВАНИЕ СЕТИ СВЯЗИ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТАНЦИЙ, УПРАВЛЯЕМОЙ ПРОТОКОЛОМ СЛУЧАЙНОГО МНОЖЕСТВЕННОГО ДОСТУПА

Для исследования построенной системы массового обслуживания обозначим

$$P(k(t) = k, i(t) = i, n(t) = n, s(t) = s) = P_k(i, n, s, t).$$

Выпишем систему уравнений, определяющую распределение вероятностей $P_k(i, n, s, t)$ состояний сети $(k(t), i(t))$ и двумерного потока $(n(t), s(t))$:

$$\frac{\partial P_0(i,n,s,t)}{\partial t} = \mu \cdot P_1(i, n-1, s, t) + \mu_1 \cdot P_2(i,n,s,t) - \left(\lambda \frac{N-i}{N} + \sigma \frac{i}{N}\right) \cdot P_0(i,n,s,t),$$

$$\frac{\partial P_1(i,n,s,t)}{\partial t} = \lambda \frac{N-i}{N} P_0(i,n,s,t) + \sigma \frac{i+1}{N} \times P_0(i+1,n,s,t) - \left(\mu + \lambda \frac{N-i-1}{N} + \sigma \frac{i}{N}\right) P_1(i,n,s,t),$$

$$\frac{\partial P_2(i,n,s,t)}{\partial t} = \sigma\frac{i-1}{N}P_1(i-1,n,s-1,t) + \lambda\frac{N-i+1}{N}\times$$
$$\times P_1(i-2,n,s-1,t) + \lambda\frac{N-i+1}{N}P_2(i-1,n,s,t) -$$
$$-\left(\mu_1 + \lambda\frac{N-i}{N}\right)P_2(i,n,s,t).$$

Для полного описания распределения $P_k(i, n, s, t)$ к данной системе необходимо добавить краевые условия при $i = 0, 1, 2, N–1, N$.

Классические методы решения не позволяют провести исследование этой системы, поэтому найдем ее асимптотическое решение аналогично [4]. Пусть T – длина интервала наблюдения за выходящим потоком успешно обслуженных заявок. Обозначим $1/T = \delta^2$ и будем полагать, что $T \to \infty$ ($\delta \to 0$). В системе выполним замены:

$$t\cdot\delta^2 = \tau, \quad \left(s - \frac{b(\tau)}{\delta^2}\right)\cdot\delta = y, \quad \left(n - \frac{a(\tau)}{\delta^2}\right)\cdot\delta = x,$$
$$\frac{1}{\delta^2}P_k(i,n,s,t) = \Pi_k(i,x,y,\tau,\delta).$$

Здесь $a(\tau)$ имеет смысл асимптотического среднего значения нормированного числа успешно обслуженных заявок, $b(\tau)$ – смысл асимптотического среднего значения нормированного числа сигналов оповещения о конфликте, произошедших за время $t = \tau/\delta^2$. Вид $a(\tau)$, $b(\tau)$ мы определим ниже.

Выполняя замену, можно записать равенства

$$\delta^2\frac{\partial\Pi_0(i,x,y,\tau,\delta)}{\partial\tau} - \delta a'(\tau)\frac{\partial\Pi_0(i,x,y,\tau,\delta)}{\partial x} -$$
$$-\delta b'(\tau)\frac{\partial\Pi_0(i,x,y,\tau,\delta)}{\partial y} = \mu\Pi_1(i,x-\delta,y,\tau,\delta) +$$
$$+\mu_1\Pi_2(i,x,y,\tau,\delta) - \left(\lambda\frac{N-i}{N} + \sigma\frac{i}{N}\right)\Pi_0(i,x,y,\tau,\delta);$$
$$\delta^2\frac{\partial\Pi_1(i,x,y,\tau,\delta)}{\partial\tau} - \delta a'(\tau)\frac{\partial\Pi_1(i,x,y,\tau,\delta)}{\partial x} -$$
$$-\delta b'(\tau)\frac{\partial\Pi_1(i,x,y,\tau,\delta)}{\partial y} = \lambda\frac{N-i}{N}\Pi_0(i,x,y,\tau,\delta) +$$
$$+\sigma\frac{i+1}{N}\Pi_0(i+1,x,y,\tau,\delta) - \left(\mu + \lambda\frac{N-i-1}{N} + \sigma\frac{i}{N}\right)\times$$
$$\times\Pi_1(i,x,y,\tau,\delta);$$
$$\delta^2\frac{\partial\Pi_2(i,x,y,\tau,\delta)}{\partial\tau} - \delta a'(\tau)\frac{\partial\Pi_2(i,x,y,\tau,\delta)}{\partial x} -$$
$$-\delta b'(\tau)\frac{\partial\Pi_2(i,x,y,\tau,\delta)}{\partial y} = \sigma\frac{i-1}{N}\times$$
$$\times\Pi_1(i-1,x,y-\delta,\tau,\delta) + \lambda\frac{N-i+1}{N}\times$$
$$\times\Pi_1(i-2,x,y-\delta,\tau,\delta) + \lambda\frac{N-i+1}{N}\times$$
$$\times\Pi_2(i-1,x,y,\tau,\delta) - \left(\mu_1 + \lambda\frac{N-i}{N}\right)\Pi_2(i,x,y,\tau,\delta). \quad (1)$$

Асимптотическое при $\delta \to 0$ решение

$$\Pi_k(i,x,y,\tau) = \lim_{\delta\to 0}\Pi_k(i,x,y,\tau,\delta)$$

системы (1) определяет маргинальное распределение

$$\Pi(x,y,\tau) = \sum_k\sum_i\Pi_k(i,x,y,\tau)$$

нормированного числа успешно обслуженных заявок и числа сигналов оповещения о конфликте в двумерном исследуемом потоке за время τ.

Систему (1) будем решать в три этапа. На первом в системе (1) выполним предельный переход при $\delta \to 0$, тогда для $\Pi_k(i, x, y, \tau)$ получим систему уравнений:

$$\left(\lambda\frac{N-i}{N} + \sigma\frac{i}{N}\right)\Pi_0(i,x,y,\tau) = \mu\Pi_1(i,x,y,\tau) +$$
$$+\mu_1\Pi_2(i,x,y,\tau);$$
$$\left(\mu + \lambda\frac{N-i-1}{N} + \sigma\frac{i}{N}\right)\Pi_1(i,x,y,\tau) = \lambda\frac{N-i}{N}\times$$
$$\times\Pi_0(i,x,y,\tau) + \sigma\frac{i+1}{N}\Pi_0(i+1,x,y,\tau);$$
$$\left(\mu_1 + \lambda\frac{N-i}{N}\right)\Pi_2(i,x,y,\tau) = \sigma\frac{i-1}{N}\Pi_1(i-1,x,y,\tau) +$$
$$+\lambda\frac{N-i+1}{N}\Pi_1(i-2,x,y,\tau) + \lambda\frac{N-i+1}{N}\times$$
$$\times\Pi_2(i-1,x,y,\tau).$$

Поскольку полученная система однородна, ее решение содержит мультипликативную составляющую, поэтому $\Pi_k(i,x,y,\tau)$ можно представить в виде

$$\Pi_k(i,x,y,\tau) = P_k(i)\cdot\Pi(x,y,\tau). \quad (2)$$

Подставляя это выражение в (7), получим систему для нахождения $P_k(i)$.

$$\left(\lambda\frac{N-i}{N} + \sigma\frac{i}{N}\right)\cdot P_0(i) = \mu\cdot P_1(i) + \mu_1\cdot P_2(i);$$
$$\left(\mu + \lambda\frac{N-i-1}{N} + \sigma\frac{i}{N}\right)\cdot P_1(i) = \lambda\frac{N-i}{N}\cdot P_0(i) +$$
$$+\sigma\frac{i+1}{N}\cdot P_0(i+1);$$
$$\left(\mu_1 + \lambda\frac{N-i}{N}\right)\cdot P_2(i) = \sigma\frac{i-1}{N}\cdot P_1(i-1) +$$
$$+\lambda\frac{N-i+1}{N}\cdot P_1(i-2) + \lambda\frac{N-i+1}{N}\cdot P_2(i-1). \quad (3)$$

Очевидно, данная система определяет стационарное распределение вероятностей $P_k(i)$ состояний $(i(t), k(t))$ рассматриваемой системы массового обслуживания. Отметим, что равенство (2) показывает асимптотическую независимость компонент $(n(t), s(t))$ от $(i(t), k(t))$ в четырехмерном векторе $(i(t), k(t), n(t), s(t))$.

Данная система с учетом краевых условий при $i = 0, 1, 2, N–1, N$ и условия нормировки $\sum_k\sum_i P_k(i) = 1$ решается численно практически для любых N следующим образом: произвольно задается значение параметра $z_0(0)$, далее рекуррентно вычисляются все $z_k(i)$ по формулам (3) при замене $P_k(i)$ на $z_k(i)$. Для выполнения условия нормировки все параметры нормируются на их сумму. Таким образом, получаем

$$P_k(i) = \frac{z_k(i)}{\sum_k \sum_i z_k(i)}.$$

Искомое решение найдено.

Второй этап решения системы (1) заключается в следующем. Функцию $\Pi_k(i, x-\delta, y-\delta, \tau, \delta)$ разложим в ряд по приращению δ аргумента x и y. Перепишем систему (1), сохраняя слагаемые порядка δ и отбрасывая слагаемые более высоких порядков, получим

$$\left(\lambda\frac{N-i}{N}+\sigma\frac{i}{N}\right)\Pi_0(i,x,y,\tau,\delta)-\delta a'(\tau)\times$$
$$\times\frac{\partial\Pi_0(i,x,y,\tau,\delta)}{\partial x}-\delta b'(\tau)\frac{\partial\Pi_0(i,x,y,\tau,\delta)}{\partial y}+$$
$$+\delta\mu\frac{\partial\Pi_1(i,x,y,\tau,\delta)}{\partial x}=$$
$$=\mu\Pi_1(i,x,y,\tau,\delta)+\mu_1\Pi_2(i,x,y,\tau,\delta);$$
$$\left(\mu+\lambda\frac{N-i-1}{N}+\sigma\frac{i}{N}\right)\Pi_1(i,x,y,\tau,\delta)-$$
$$-\delta a'(\tau)\frac{\partial\Pi_1(i,x,y,\tau,\delta)}{\partial x}-\delta b'(\tau)\frac{\partial\Pi_1(i,x,y,\tau,\delta)}{\partial y}=$$
$$=\lambda\frac{N-i}{N}\Pi_0(i,x,y,\tau,\delta)+\sigma\frac{i+1}{N}\Pi_0(i+1,x,y,\tau,\delta);$$
$$\left(\mu_1+\lambda\frac{N-i}{N}\right)\Pi_2(i,x,y,\tau,\delta)-\delta a'(\tau)\times$$
$$\times\frac{\partial\Pi_2(i,x,y,\tau,\delta)}{\partial x}-\delta b'(\tau)\frac{\partial\Pi_2(i,x,y,\tau,\delta)}{\partial y}+$$
$$+\delta\sigma\frac{i-1}{N}\frac{\partial\Pi_1(i-1,x,y,\tau,\delta)}{\partial y}+\delta\lambda\frac{N-i+1}{N}\times$$
$$\times\frac{\partial\Pi_1(i-2,x,y,\tau,\delta)}{\partial y}=\sigma\frac{i-1}{N}\Pi_1(i-1,x,y,\tau,\delta)+$$
$$+\lambda\frac{N-i+1}{N}\Pi_1(i-2,x,y,\tau,\delta)+\lambda\frac{N-i+1}{N}\times$$
$$\times\Pi_2(i-1,x,y,\tau,\delta).$$

Решение данной системы будем искать в виде

$$\Pi_k(i,x,y,\tau,\delta)=P_k(i)\Pi(x,y,\tau)+\delta\cdot\varphi_k(i,x,y,\tau). \quad (4)$$

Подставим это решение в систему и, учитывая равенства (3), получим

$$\left(\lambda\frac{N-i}{N}+\sigma\frac{i}{N}\right)\cdot\varphi_0(i,x,y,\tau)-\mu\cdot\varphi_1(i,x,y,\tau)-$$
$$-\mu_1\cdot\varphi_2(i,x,y,\tau)=(a'(\tau)P_0(i)-\mu P_1(i))\frac{\partial\Pi(x,y,\tau)}{\partial x}+$$
$$+b'(\tau)P_0(i)\frac{\partial\Pi(x,y,\tau)}{\partial y};$$
$$\left(\mu+\lambda\frac{N-i-1}{N}+\sigma\frac{i}{N}\right)\varphi_1(i,x,y,\tau)-\lambda\frac{N-i}{N}\times$$
$$\times\varphi_0(i,x,y,\tau)-\sigma\frac{i+1}{N}\varphi_0(i+1,x,y,\tau)=$$
$$=a'(\tau)P_1(i)\frac{\partial\Pi(x,y,\tau)}{\partial x}+b'(\tau)P_1(i)\frac{\partial\Pi(x,y,\tau)}{\partial y};$$
$$\left(\mu_1+\lambda\frac{N-i}{N}\right)\varphi_2(i,x,y,\tau)-\sigma\frac{i-1}{N}\cdot\varphi_1(i-1,x,y,\tau)-$$
$$-\lambda\frac{N-i+1}{N}\varphi_1(i-2,x,y,\tau)-\lambda\frac{N-i+1}{N}\times \quad (5)$$
$$\times\varphi_2(i-1,x,y,\tau)=a'(\tau)P_2(i)\frac{\partial\Pi(x,y,\tau)}{\partial x}+$$
$$+\left(b'(\tau)P_2(i)-\sigma\frac{i-1}{N}P_1(i-1)-\lambda\frac{N-i+1}{N}P_1(i-2)\right)\times$$
$$\times\frac{\partial\Pi(x,y,\tau)}{\partial y}.$$

Так как определитель этой системы равен нулю, то решение существует тогда и только тогда, когда равны ранги расширенной матрицы и матрицы системы, а это условие выполняется только при выполнении равенства

$$0=(a'(\tau)-\mu P_1)\frac{\partial\Pi(x,y,\tau)}{\partial x}+$$
$$+\left(b'(\tau)-\sum_{i=0}^{N-1}P_1(i)\left(\sigma\frac{i}{N}+\lambda\frac{N-i-1}{N}\right)\right)\frac{\partial\Pi(x,y,\tau)}{\partial y}, \quad (6)$$

где $$P_1=\sum_{i=0}^{N-1}P_1(i).$$

Поскольку коэффициенты в скобках не содержат x и y, то решение получается приравниванием соответствующих коэффициентов при производных, т.е.

$$a'(\tau)=\mu P_1;$$
$$b'(\tau)=\sum_{i=0}^{N-1}P_1(i)\left(\sigma\frac{i}{N}+\lambda\frac{N-i-1}{N}\right). \quad (7)$$

Полученные равенства определяют значения параметров $a'(\tau)$ и $b'(\tau)$, которые имеют смысл интенсивности потока успешно обслуженных заявок и сигналов оповещения о конфликте соответственно.

Так как левые части системы (5) являются линейной суммой с постоянными коэффициентами, то и решение можно искать в виде линейной суммы, т.е.

$$\varphi_k(i,x,y,\tau)=\psi_k(i)\frac{\partial\Pi(x,y,\tau)}{\partial x}+\omega_k(i)\frac{\partial\Pi(x,y,\tau)}{\partial y}, \quad (8)$$

разделяя коэффициенты, стоящие при соответствующих производных, получим две следующие системы уравнений для определения $\psi_k(i)$ и $\omega_k(i)$

$$\left(\lambda\frac{N-i}{N}+\sigma\frac{i}{N}\right)\psi_0(i)-\mu\psi_1(i)-\mu_1\psi_2(i)=$$
$$=a'(\tau)P_0(i)-\mu P_1(i);$$

$$\left(\mu+\lambda\frac{N-i-1}{N}+\sigma\frac{i}{N}\right)\psi_1(i)-\lambda\frac{N-i}{N}\psi_0(i)-$$

$$-\sigma\frac{i+1}{N}\psi_0(i+1)=a'(\tau)P_1(i);$$

$$\left(\mu_1+\lambda\frac{N-i}{N}\right)\psi_2(i)-\sigma\frac{i-1}{N}\psi_1(i-1)- \qquad (9)$$

$$-\lambda\frac{N-i+1}{N}\psi_1(i-2)-\lambda\frac{N-i+1}{N}\psi_2(i-1)=a'(\tau)P_2(i);$$

$$\left(\lambda\frac{N-i}{N}+\sigma\frac{i}{N}\right)\omega_0(i)-\mu\omega_1(i)-\mu_1\omega_2(i)=$$

$$=b'(\tau)P_0(i);$$

$$\left(\mu+\lambda\frac{N-i-1}{N}+\sigma\frac{i}{N}\right)\omega_1(i)-\lambda\frac{N-i}{N}\omega_0(i)-$$

$$-\sigma\frac{i+1}{N}\omega_0(i+1)=b'(\tau)P_1(i); \qquad (10)$$

$$\left(\mu_1+\lambda\frac{N-i}{N}\right)\omega_2(i)-\sigma\frac{i-1}{N}\omega_1(i-1)-$$

$$-\lambda\frac{N-i+1}{N}\omega_1(i-2)-\lambda\frac{N-i+1}{N}\omega_2(i-1)=$$

$$=b'(\tau)P_2(i)-\sigma\frac{i-1}{N}P_1(i-1)-\lambda\frac{N-i+1}{N}P_1(i-2).$$

Решение систем (9) и (10) с учетом краевых условий при $i = 0, 1, 2, N\text{-}1, N$ возможно только с точностью до аддитивной константы и легко осуществимо численно практически для любых значений N. Метод нахождения численного решения системы уравнений заключается в рекуррентном вычислении параметров $\psi_k(i)$ и $\omega_k(i)$ через произвольно заданное значение $\psi_0(0)$ и $\omega_0(0)$.

Наконец рассмотрим третий этап решения системы (1). Функцию $\Pi_k(i, x-\delta, y-\delta, \tau, \delta)$ разложим в ряд по приращению δ аргумента x и y с точностью до $o(\delta^2)$.

Просуммируем уравнения системы по i =0, 1, 2… , учитывая краевые условия при $i = 0, 1, 2, N-1, N,$ далее просуммируем все уравнения системы между собой, получим равенство

$$\delta^2\frac{\partial\Pi(x,y,\tau,\delta)}{\partial\tau}-\delta a'(\tau)\frac{\partial\Pi(x,y,\tau,\delta)}{\partial x}-\delta b'(\tau)\times$$

$$\times\frac{\partial\Pi(x,y,\tau,\delta)}{\partial y}=-\delta\mu\frac{\partial\Pi_1(x,y,\tau,\delta)}{\partial x}+$$

$$+\frac{\delta^2}{2}\mu\frac{\partial^2\Pi_1(x,y,\tau,\delta)}{\partial x^2}-$$

$$-\delta\sum_{i=0}^{N-1}\left(\sigma\frac{i}{N}+\lambda\frac{N-i-1}{N}\right)\frac{\partial\Pi_1(i,x,y,\tau,\delta)}{\partial y}+$$

$$+\frac{\delta^2}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\sigma\frac{i}{N}+\lambda\frac{N-i-1}{N}\right)\frac{\partial^2\Pi_1(i,x,y,\tau,\delta)}{\partial y^2},$$

где
$$\sum_k\sum_i\Pi_k(i,x,y,\tau,\delta)=\Pi(x,y,\tau,\delta),$$

$$\sum_i\Pi_k(i,x,y,\tau,\delta)=\Pi_k(x,y,\tau,\delta).$$

Подставим в это равенство выражение (4), которое в данном случае с учетом (8), примет вид

$$\Pi_k(i,x,y,\tau,\delta)=P_k(i)\Pi(x,y,\tau)+\delta\psi_k(i)\times$$

$$\times\frac{\partial\Pi(x,y,\tau)}{\partial x}+\delta\omega_k(i)\frac{\partial\Pi(x,y,\tau)}{\partial y};$$

$$\Pi_1(x,y,\tau,\delta)=P_1\Pi(x,y,\tau)+\delta\psi_1\frac{\partial\Pi(x,y,\tau)}{\partial x}+$$

$$+\delta\omega_1\frac{\partial\Pi(x,y,\tau)}{\partial y};$$

$$\Pi(x,y,\tau,\delta)=\Pi(y,\tau)+\delta\varphi\frac{\partial\Pi(y,\tau)}{\partial x}+\delta\omega\frac{\partial\Pi(y,\tau)}{\partial x},$$

где P_1 определяется (6), а

$$\psi=\sum_k\sum_i\psi_k(i),\ \ \omega=\sum_k\sum_i\omega_k(i);$$

$$\psi_1=\sum_i\psi_1(i),\ \omega_1=\sum_i\omega_1(i).$$

Получим, что $\Pi(x, y, \tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\Pi(x,y,\tau)}{\partial\tau}=\big(b'(\tau)(\omega+0.5)-$$

$$-\sum_{i=0}^{N-1}\left(\sigma\frac{i}{N}+\lambda\frac{N-i-1}{N}\right)\omega_1(i)\Bigg)\frac{\partial^2\Pi(x,y,\tau)}{\partial y^2}+$$

$$+\left(a'(\tau)\psi+\frac{\mu}{2}P_1-\mu\psi_1\right)\frac{\partial^2\Pi(x,y,\tau)}{\partial x^2}+$$

$$+\Bigg(a'(\tau)\omega+b'(\tau)\psi-\mu\omega_1-\sum_{i=0}^{N-1}\left(\sigma\frac{i}{N}+\lambda\frac{N-i-1}{N}\right)\times$$

$$\times\psi_1(i)\Bigg)\frac{\partial^2\Pi(x,y,\tau)}{\partial x\partial y}. \qquad (11)$$

Так как $\Pi(x, y, \tau)$ удовлетворяет уравнению Фоккера – Планка, то ее можно интерпретировать как плотность распределения вероятностей значений некоторого двумерного дифференциального процесса, который обозначим $\{x(\tau), y(\tau)\}$ и для которого коэффициенты переноса равны 0, а коэффициенты диффузии определяются уравнением (11), поэтому полученный случайный процесс удовлетворяет системе двух стохастических дифференциальных уравнений вида

$$dx(\tau)=\beta_{11}dw_1(\tau)+\beta_{12}dw_2(\tau);$$

$$dy(\tau)=\beta_{21}dw_1(\tau)+\beta_{22}dw_2(\tau),$$

где коэффициенты β_{ik} определяются решением системы

$$\beta_{11}{}^2+\beta_{12}{}^2=2(a'(\tau)\psi+\mu P_1/2-\mu\psi_1);$$

$$\beta_{21}{}^2+\beta_{22}{}^2=2\big(b'(\tau)(\omega+0,5)-$$

$$-\sum_{г=0}^{N-1}\left(\sigma\frac{i}{N}-\lambda\frac{N-i-1}{N}\right)\omega_1(i)\Big); \qquad (12)$$

$$\beta_{11}\beta_{21}+\beta_{12}\beta_{22}=\big(b'(\tau)\psi+a'(\tau)\omega-\mu\omega_1-$$

$$-\sum_{i=0}^{N-1}\left(\sigma\frac{i}{N}-\lambda\frac{N-i-1}{N}\right)\psi_1(i)\Big).$$

Данная система решается с точностью до константы. Пусть $\beta_{12}=0$, тогда система просто решается и можно записать

$$x(\tau) = \beta_{11} w_1(\tau);$$

$$y(\tau) = \beta_{21} w_1(\tau) + \beta_{22} w_2(\tau).$$

Отсюда можно легко получить матрицу ковариаций

$$R_{11}(\tau_1,\tau_2) = \mathrm{M}\{x(\tau_1)x(\tau_2)\} = \beta_{11}{}^2 \min(\tau_1,\tau_2)\,;$$

$$R_{12}(\tau_1,\tau_2) = \mathrm{M}\{x(\tau_1)y(\tau_2)\} = \beta_{11}\beta_{21} \min(\tau_1,\tau_2)\,; \quad (13)$$

$$R_{22}(\tau_1,\tau_2) = \mathrm{M}\{y(\tau_1)y(\tau_2)\} = (\beta_{21}^2+\beta_{22}^2)\min(\tau_1,\tau_2)\,.$$

Из вышесказанного следует вывод, что двумерный процесс $\{x(\tau),y(\tau)\}$ имеет нормальное распределение с нулевыми средними и матрицей ковариаций, определяемой равенствами (13), где коэффициенты β_{ik} получены как решение системы (12) при $\beta_{12}=0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Доказана асимптотическая нормальность процесса $\{s(t),\ n(t)\}$ при $T\to\infty$ для двумерного потока успешно обслуженных заявок и сигналов оповещения о конфликте сети связи с конечным числом станций, управляемой протоколом случайного множественного доступа. При имитационном моделировании рассматриваемой сети случайного доступа с целью определения области применимости для конечных T полученных асимптотических результатов было обнаружено, что для значительного большинства различных наборов параметров сети λ, μ, μ_1, σ, N значение T может быть достаточно небольшим для приемлемости оценок параметров потока. Однако встречались такие наборы параметров сети, при которых рассматриваемый поток обладал свойством существенной нерегулярности. В связи с чем требовалось аномально большое время моделирования T для получения приемлемых оценок его параметров. Нерегулярность рассматриваемого потока обладает свойством, аналогичным свойствам дважды стохастических потоков, управляемых цепью Маркова с двумя состояниями. Это явление бистабильности выходящего потока требует дополнительных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А.М.* Некоторые свойства однолинейных СМО с ограниченным ожиданием // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. 1966. Т.275. С.22–29.
2. *Александров А.М.* О выходящих потоках некоторых систем массового обслуживания // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. 1966. Т.275. С.18–21.
3. *Ивницкий В.А.* О восстановлении по наблюдениям над выходящим потоком характеристик СМО с ограничением на время пребывания // Изв. АН СССР. Техн. киберн. 1969. № 3. С 60–65.
4. *Колоусов Д.В., Назаров А.А.* Исследование выходящего потока локальной вычислительной сети с протоколом случайного доступа // Вестник ТГУ. 2002. Приложение 1. Матер. IV Всерос. конф. «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур». С. 68–72.
5. *Лившиц Б.С., Пшеничников А.П., Харкевич А.Д.* Теория телетрафика. М.: Связь, 1979. 224 с.

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 30 апреля 2003 г.