УДК 519.872: 681.03

*Д.Ю. Кузнецов, А.А. Назаров*

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СОСТОЯНИЙ КАНАЛА И ИСТОЧНИКА ПОВТОРНЫХ ВЫЗОВОВ АДАПТИВНОЙ СЕТИ СВЯЗИ В УСЛОВИЯХ КРИТИЧЕСКОЙ ЗАГРУЗКИ

В работе рассматривается адаптивная сеть связи в условиях критической загрузки. Проводится исследование ее математической модели с целью определения асимптотической плотности распределения состояний канала передачи информации. Показывается, что в зависимости от рассматриваемых асимптотических условий данное распределение может иметь как нормальный, так и экспоненциальный вид.

Рассмотрим математическую модель адаптивной сети связи, на вход которой поступают заявки из $N$ внешних источников. Время генерирования заявки каждым источником случайное. Оно имеет экспоненциальную функцию распределения с параметром $\rho/N$. Заявка, поступившая в систему и заставшая канал передачи информации свободным, принимается к обслуживанию и начинает немедленно передаваться. Продолжительность передачи сообщения случайная с экспоненциальной функций распределения, параметр которой $\mu$ в данном случае положим равным 1. Если заявка поступила в систему в момент обслуживания другой, то обе заявки — вновь пришедшая и обслуживаемая считаются искаженными и требуют повторной передачи. Поэтому они поступают в источник повторных вызовов, а в сети некоторое случайное время, имеющее экспоненциальное распределение с параметром $\frac{1}{a}$, распространяется сигнал оповещения о конфликте, сообщая абонентским станциям, что в канале передачи информации возникла коллизия. Сообщения, поступившие на этапе оповещения о конфликте, сразу же поступают в источник повторных вызовов, не искажая сигнала оповещения о конфликте. После завершения распространения сигнала оповещения о конфликте канал вновь становится свободным.

Состояние канала можно определить величиной $k$, которая принимает одно из трех значений: $k=0$, если канал свободен; $k=1$, если он занят обслуживанием заявки; $k=2$, если в нем распространяется сигнал оповещения о конфликте. Число заявок, попавших в конфликтную ситуацию и требующих повторной, передачи равно $i$.

Обращение заявок, попавших в конфликтную ситуацию и требующих повторной передачи, происходит после случайной задержки с интенсивностью $\frac{1}{T}$ завершения задержки. Здесь $T$ совпадает с текущим значением адаптера. Процесс изменения состояния $T(t)$ адаптера, в отличие от работ [1, 2], здесь определяется следующим образом:

$$T(t+\Delta t)=\begin{cases}T(t)-\alpha\Delta t, \text{ если } k(t)=0,\\ T(t), \text{ если } k(t)=1,\\ T(t+\beta\Delta t, \text{ если } k(t)=2.\end{cases}$$

Процесс изменения состояний адаптивной сети связи определяется трехмерным случайным процессом $\{k(t),i(t),T(t)\}$. Проведем исследование данного процесса для определения распределения вероятностей состояний канала связи адаптивной сети. Для этого введем следующее обозначение:

$$P(k(t)=k,i(t)=i,T\le T(t)<T+dT)=P_k(i,T,t)dT.$$

Распределение вероятностей $P_k(i,T,t)$ в стационарном режиме $P_k(i,T,t)=P_k(i,T)$ удовлетворяет системе уравнений:

$$\left[\rho\left(1-\frac{i}{N}\right)+\frac{i}{T}\right]P_0(i,T)=\alpha\frac{\partial P_0(i,T)}{\partial T}+$$
$$+P_1(i,T)+\frac{1}{a}P_2(i,T);$$
$$\left[\rho\left(1-\frac{1}{N}-\frac{i}{N}\right)+\frac{i}{T}+1\right]P_1(i,T)= \qquad (1)$$
$$=\rho\left(1-\frac{i}{N}\right)P_0(i,T)+\frac{i+1}{T}P_0(i+1,T);$$
$$\left[\rho\left(1-\frac{i}{N}\right)+\frac{1}{a}\right]P_2(i,T)=-\beta\frac{\partial P_2(i,T)}{\partial T}+$$
$$+\rho\left(1-\frac{i-1}{N}\right)P_2(i-1,T)+$$
$$+\rho\left(1-\frac{1}{N}-\frac{i-2}{N}\right)P_1(i-2,T)+\frac{i-1}{T}P_1(i-1,T). \qquad (1)$$

Для определения распределения вероятностей сети связи исследуем данный случайный процесс в асимптотическом условии $N\to\infty$ и при загрузке $\rho$, сходящейся к $S$ ($S$ — значение критической загрузки) как сверху, так и снизу, что позволяет от первой модели [1] перейти ко второй [2], а также рассмотреть случай когда $\rho=S$.

В системе (1) выполним замену

$$i\varepsilon=x,\ T\varepsilon=y,\ \frac{1}{\varepsilon^2}P_k(i,T)=\Pi_k(x,y,\varepsilon),$$

здесь $\varepsilon$ – некоторый малый положительный параметр, такой, что $N\varepsilon\to\infty$, в результате получим

$$\left[\rho\left(1-\frac{x}{N\varepsilon}\right)+\frac{x}{y}\right]\Pi_0(x,y,\varepsilon)=\varepsilon\alpha\frac{\partial\Pi_0(x,y,\varepsilon)}{\partial y}+$$
$$+\Pi_1(x,y,\varepsilon)+\frac{1}{a}\Pi_2(x,y,\varepsilon);$$
$$\left[\rho\left(1-\frac{1}{N}-\frac{x}{N\varepsilon}\right)+\frac{x}{y}+1\right]\Pi_1(x,y,\varepsilon)=$$
$$=\rho\left(1-\frac{x}{N\varepsilon}\right)\Pi_0(x,y,\varepsilon)+\frac{x+\varepsilon}{y}\Pi_0(x+\varepsilon,y,\varepsilon);$$

$$\left[\rho\left(1-\frac{x}{N\varepsilon}\right)+\frac{1}{a}\right]\Pi_2(x,y,\varepsilon)=-\beta\frac{\partial\Pi_2(x,y,\varepsilon)}{\partial y}+$$

$$+\rho\left(1-\frac{x-\varepsilon}{N\varepsilon}\right)\Pi_2(x-\varepsilon,T,\varepsilon)+$$

$$+\rho\left(1-\frac{1}{N}-\frac{x-2\varepsilon}{N\varepsilon}\right)\Pi_1(x-2,y,\varepsilon)+$$

$$+\frac{x-\varepsilon}{y}\Pi_1(x-\varepsilon,y,\varepsilon). \qquad (2)$$

Так как переменные $x$ и $y$ связаны линейным соотношением [2] $x=(g-S)y$, асимптотическое распределение вероятностей можно определить в виде

$$\Pi_k(x,y,\varepsilon)=H_k(x,\varepsilon). \qquad (3)$$

Для определения асимптотического распределения вероятностей состояний канала в системе (2) функции $\Pi_k(x\pm\varepsilon,y,\varepsilon)$ разложим в ряд по приращениям аргумента $x$ с точностью до $o(\varepsilon^2)$, при этом получим

$$\left[\rho\left(1-\frac{x}{N\varepsilon}\right)+\frac{x}{y}\right]\Pi_0(x,y,\varepsilon)=\varepsilon\alpha\frac{\partial\Pi_0(x,y,\varepsilon)}{\partial y}+$$

$$+\Pi_1(x,y,\varepsilon)+\frac{1}{a}\Pi_2(x,y,\varepsilon);$$

$$\left[\rho\left(1-\frac{1}{N}-\frac{x}{N\varepsilon}\right)+\frac{x}{y}+1\right]\Pi_1(x,y,\varepsilon)=$$

$$=\rho\left(1-\frac{x}{N\varepsilon}\right)\Pi_0(x,y,\varepsilon)+\frac{x}{y}\Pi_0(x,y,\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{x}{y}\Pi_0(x,y,\varepsilon)\right\}+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\frac{x}{y}\Pi_0(x,y,\varepsilon)\right\}+o(\varepsilon^2);$$

$$\frac{1}{a}\Pi_2(x,y,\varepsilon)=-\varepsilon\beta\frac{\partial\Pi_2(x,y,\varepsilon)}{\partial y}-$$

$$-\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left\{\rho\left(1-\frac{x}{N\varepsilon}\right)\Pi_2(x,y,\varepsilon)\right\}+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\{\rho\Pi_2(x,y,\varepsilon)\}+$$

$$+\rho\left(1-\frac{1}{N}-\frac{x}{N\varepsilon}\right)\Pi_1(x,y,\varepsilon)-$$

$$-2\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left\{\rho\left(1-\frac{x}{N\varepsilon}\right)\Pi_1(x,y,\varepsilon)\right\}+\frac{4\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\{\rho\Pi_1(x,y,\varepsilon\}+$$

$$+\frac{x}{y}\Pi_1(x,y,\varepsilon)-\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{x}{y}\Pi_1(x,y,\varepsilon)\right\}+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\frac{x}{y}\Pi_1(x,y,\varepsilon)\right\}+o(\varepsilon^2).$$

Учитывая, что $\frac{x}{y}=g-S$, в последней системе выполним замену (3). При этом получим

$$\left[\rho\left(1-\frac{x}{N\varepsilon}\right)+g-S\right]H_0(x,\varepsilon)=\varepsilon\alpha(g-S)\frac{\partial H_0(x,\varepsilon)}{\partial x}+$$

$$+H_1(x,\varepsilon)+\frac{1}{a}H_2(x,\varepsilon);$$

$$\left[\rho\left(1-\frac{1}{N}-\frac{x}{N\varepsilon}\right)+g-S+1\right]H_1(x,\varepsilon)=$$

$$=\left[\rho\left(1-\frac{x}{N\varepsilon}\right)+g-S\right]H_0(x,\varepsilon)+\varepsilon(g-S)\frac{\partial H_0(x,\varepsilon)}{\partial x}+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}(g-S)\frac{\partial^2 H_0(x,\varepsilon)}{\partial x^2}+o(\varepsilon^2);$$

$$\frac{1}{a}H_2(x,\varepsilon)=-\varepsilon\beta(g-S)\frac{\partial H_2(x,\varepsilon)}{\partial x}-$$

$$-\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left\{\rho\left(1-\frac{x}{N\varepsilon}\right)H_2(x,\varepsilon)\right\}+\frac{\varepsilon^2}{2}\rho\frac{\partial^2 H_2(x,\varepsilon)}{\partial x^2}+$$

$$+\left[\rho\left(1-\frac{1}{N}-\frac{x}{N\varepsilon}\right)+g-S\right]H_1(x,\varepsilon)-$$

$$-\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[2\rho\left(1-\frac{x}{N\varepsilon}\right)+g-S\right]H_1(x,\varepsilon)\right\}+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}(4\rho+g-S)\frac{\partial^2 H_1(x,\varepsilon)}{\partial x^2}+o(\varepsilon^2). \qquad (4)$$

Выполнив в этой системе предельный переход при $\varepsilon\to 0$, получим систему трех линейных алгебраических уравнений:

$$gH_0(x)=H_1(x)+\frac{1}{a}H_2(x);$$

$$(g+1)H_1(x)=gH_0(x);$$

$$\frac{1}{a}H_2(x)=gH_1(x)$$

относительно $H_k(x)$, нетривиальное решение которой можно записать в виде

$$H_k(x)=R_kH(x),$$

где $R_k$ удовлетворяют условию нормировки

$$R_0+R_1+R_2=1$$

и имеют вид

$$R_0=\frac{g+1}{ag^2+2g+1};$$

$$R_1=\frac{g}{ag^2+2g+1};$$

$$R_2=\frac{ag^2}{ag^2+2g+1}.$$

Сложив все три уравнения системы (4), получим

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\{\alpha(g-S)H_0(x,\varepsilon)+(g-S)H_0-\beta(g-S)H_2(x,\varepsilon)-$$

$$-\rho\left(1-\frac{x}{N\varepsilon}\right)H_2(x,\varepsilon)-\left[2\rho\left(1-\frac{x}{N\varepsilon}\right)+g-S\right]H_1(x,\varepsilon)\Big\}+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\{(g-S)H_0(x,\varepsilon)+\rho H_2(x,\varepsilon)+$$

$$+(4\rho+g-S)H_1(x,\varepsilon)\}=o(\varepsilon^2). \qquad (5)$$

Для дальнейшего исследования введем обозначение $\rho=S-\varepsilon\gamma$, где $\gamma$ – некоторая константа, больше или равная нулю, и выражение $\rho\left(1-\frac{x}{N\varepsilon}\right)$ перепишем следующим образом:

$$\rho\left(1-\frac{x}{N\varepsilon}\right)=S-\varepsilon\left(S\frac{x}{N\varepsilon^2}+\gamma\right)+o(\varepsilon).$$

Обозначив $\eta=\frac{N\varepsilon^2}{S}$, последнее равенство представим в виде

$$\rho\left(1-\frac{x}{N\varepsilon}\right)=S-\varepsilon\left(\frac{x}{\eta}+\gamma\right)+o(\varepsilon) \qquad (6)$$

и, подставив это выражение в (5), получим

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\{(g-S)[\alpha H_0(x,\varepsilon)-\beta H_2(x,\varepsilon)]+(g-S)H_0(x,\varepsilon)-$$

$$-(S+g)H_1(x,\varepsilon)\}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(\frac{x}{\eta}+\gamma\right)(H_2(x,\varepsilon)+\right. \qquad (7)$$

$$\left.+2H_1(x,\varepsilon))\right\}+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\{(g-S)H_0(x,\varepsilon)+SH_2(x,\varepsilon)+$$

$$(3S+g)H_1(x,\varepsilon)\}=o(\varepsilon^2).$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках, первого слагаемого этого равенства, при $\varepsilon\to 0$ стремится к нулю [1], т.е. является величиной бесконечно малой. Определим порядок этой величины относительно параметра ε. Для этого систему (4) перепишем с точностью до $o(\varepsilon)$, получим систему

$$\left[\rho\left(1-\frac{x}{N\varepsilon}\right)+g-S\right]H_0(x,\varepsilon)-H_1(x,\varepsilon)-\frac{1}{a}H_2(x,\varepsilon)=$$

$$=\varepsilon\alpha(g-S)\frac{\partial H_0(x,\varepsilon)}{\partial x},$$

$$\left[\rho\left(1-\frac{1}{N}-\frac{x}{N\varepsilon}\right)+g-S+1\right]H_1(x,\varepsilon)-$$

$$-\left[\rho\left(1-\frac{x}{N\varepsilon}\right)+g-S\right]H_0(x,\varepsilon)=$$

$$=\varepsilon(g-S)\frac{\partial H_0(x,\varepsilon)}{\partial x}+o(\varepsilon);$$

$$\frac{1}{a}H_2(x,\varepsilon)-\left[\rho\left(1-\frac{x}{N\varepsilon}\right)+g-S\right]H_1(x,\varepsilon)=$$

$$=-\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\{\beta(g-S)H_2(x,\varepsilon)+\rho H_2(x,\varepsilon)+$$

$$+(S-g)H_1(x,\varepsilon)\}+o(\varepsilon),$$

в которую подставим выражение (6). В результате будем иметь

$$gH_0(x,\varepsilon)-H_1(x,\varepsilon)-\frac{1}{a}H_2(x,\varepsilon)=$$

$$=\varepsilon\left(\frac{x}{\eta}+\gamma\right)H_0(x,\varepsilon)+\varepsilon\alpha(g-s)\frac{\partial H_0(x,\varepsilon)}{\partial x}+o(\varepsilon);$$

$$(g+1)H_1(x,\varepsilon)-gH_0(x,\varepsilon)=\varepsilon\left(\frac{x}{\eta}+\gamma\right)(H_1(x,\varepsilon)-$$

$$-H_0(x,\varepsilon))+\varepsilon(g-S)\frac{\partial H_0(x,\varepsilon)}{\partial x}+o(\varepsilon);$$

$$\frac{1}{a}H_2(x,\varepsilon)-gH_1(x,\varepsilon)=-\varepsilon\left(\frac{x}{\eta}+\gamma\right)H_1(x,\varepsilon)-$$

$$-\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\{\beta(g-S)H_2(x,\varepsilon)+SH_2(x,\varepsilon)+(S+g)H_1(x,\varepsilon)\}+$$

$$+o(\varepsilon). \qquad (8)$$

Решение этой системы будем искать в виде

$$H_k(x,\varepsilon)=R_kH(x)+\varepsilon h_k(x)+o(\varepsilon). \qquad (9)$$

Для этого систему (8) перепишем следующим образом

$$gh_0(x)-h_1(x)-\frac{1}{a}h_2(x)=\left(\frac{x}{\eta}+\gamma\right)R_0H(x,\varepsilon)+$$

$$+\alpha(g-s)R_0H'(x);$$

$$(g+1)h_1(x)-gh_0(x)=\left(\frac{x}{\eta}+\gamma\right)(R_1H(x)-R_0H(x))+$$

$$+(g-S)R_0H'(x);$$

$$\frac{1}{a}h_2(x)-gh_1(x)=-\left(\frac{x}{\eta}+\gamma\right)R_1H(x)-$$

$$-\{\beta(g-S)R_2+SR_2+(S+g)R_1\}H'(x). \qquad (10)$$

То есть относительно $h_k$ получена неоднородная система линейных алгебраических уравнений с определителем системы, равным нулю, но в силу результатов, полученных в [1], ранги расширенной и собственной матриц системы (10) совпадают, поэтому для системы (10) существует решение $h_k$, определяемое с точностью до произвольной составляющей, в качестве которой выберем $h_1$. Определим $h_0$ из второго уравнения системы (10) в виде

$$h_0(x)=\frac{g+1}{g}h_1(x)+\left(\frac{x}{\eta}+\gamma\right)\frac{R_0-R_1}{g}H(x)-$$

$$-\frac{g-S}{g}R_0H'(x). \qquad (11)$$

Подставляя это выражение в первое уравнение системы (10), определим $h_2$ в виде

$$h_2(x)=agh_1(x)-a\left(\frac{x}{\eta}+\gamma\right)R_1H(x)-$$

$$-a(\alpha+1)(g-S)R_0H'(x). \qquad (12)$$

Подставляя разложение (9) в (7), после преобразования, запишем

$$\frac{d}{dx}\{(g-S)[\alpha h_0(x)-\beta h_2(x)]+(g-s)h_0(x)-Sh_2(x)-$$

$$-(S+g)h_1(x)\}+(R_2+2R_1)\frac{d}{dx}\left\{\left(\frac{x}{\eta}+\gamma\right)H(x)\right\}+$$

$$+\frac{1}{2}\{(g-S)R_0+SR_2+(3S+g)R_1\}\frac{d^2H(x)}{dx^2}=0.$$

Добавив в это равенство в выражения (11) и (12) для $h_0$ и $h_2$, получим для функции $H(x)$ обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$b\frac{d^2H(x)}{dx^2}+\frac{d}{dx}\left\{\left(\frac{x}{\eta}+\gamma\right)H(x)\right\}=0,$$

где $b=\dfrac{B}{A}$, а положительные константы $A$ и $B$ определяются равенствами

$$A=(g-S)\frac{\alpha}{g}(2R_0-R_1)+2R_1\frac{1-R_0}{g}+R_2+2R_1,$$

$$B=\frac{\alpha}{g^2}(g+\alpha(g+1))(g-S)^2R_0+$$

$$+R_1\frac{1+ag(\alpha+1)}{g}(g-S)R_0+SR_1.$$

Так как $N\varepsilon\to\infty$, а для $x=i\varepsilon$ очевидно выполняются равенства

$$0\le i\varepsilon=x\le N\varepsilon\to\infty,$$

то для плотности распределения вероятностей $H(x)$ условие нормировки имеет вид

$$\int_0^\infty H(x)dx=1, \qquad (13)$$

а в силу необходимого условия сходимости несобственного интеграла в (13) для $H(x)$ выполняется соотношение

$$\lim_{x\to\infty}H(x)=0.$$

Поэтому, интегрируя (13) по $x$ для $H(x)$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$bH'(x)+\left(\frac{x}{\eta}+\gamma\right)H(x)=0,$$

решение которого имеет вид

$$H(x)=C\exp\left\{-\frac{(x+\eta\gamma)^2}{2b\eta}\right\},\quad \text{при } x\ge 0\,.$$

Здесь $$C=1/\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{(x+\eta\gamma)^2}{2b\eta}\right\}dx.$$

Теперь уточним значение нормирующего параметра ε, определяемого двумя равенствами:

$$\rho=S-\varepsilon\gamma,\quad \eta=\frac{N\varepsilon^2}{S}.$$

Из рассуждений данной работы следует, что асимптотические условия

$$\rho\to S \quad \text{и} \quad N\to\infty \qquad (14)$$

должны быть согласованы следующим образом:

- если η конечно, то ε можно положить равным $1/\sqrt{N}$, при этом $\eta=1/S$, параметр γ может принимать любое значение, а величина $\rho=S-\dfrac{\gamma}{\sqrt{N}}$, т. е. загрузка ρ может быть больше, меньше либо равной критическому значению *S*. Отметим, что в работе [1] рассматривалось условие постоянного значения $\rho>S$ — условие перегрузки, значение нормирующего параметра $\varepsilon=\dfrac{1}{N}$, при этом асимптотическом распределении $H(x)$ являлось безусловно нормальным;

- если η неограниченно возрастает, то есть $N\varepsilon^2\to\infty$, то асимптотическое распределение $H(x)$ существует лишь при условии $\gamma>0$, и в этом случае, полагая $\gamma=1$, в качестве малого параметра ε можно выбрать $\varepsilon=S-\rho$, как это было определено в работе [2]. А так как в данной работе показано, что для асимптотических условий (14) должно выполняться соотношение

$$\lim_{\substack{N\to\infty\\ \rho\to S}} N(S-\rho)^2=\infty\,,$$

асимптотическое распределение $H(x)$ будет экспоненциальным:

$$H(x)=\frac{\gamma}{b}\exp\left\{-\frac{\gamma}{b}x\right\},$$

при $x\ge 0$, что совпадает с результатами работы [2].

Таким образом, в работе рассмотрена адаптивная сеть связи в условиях критической загрузки. Для данной сети определено асимптотическое распределений состояний канала связи и показано, что в зависимости от рассматриваемых асимптотических условий данное распределение может иметь как нормальный, так и экспоненциальный вид.

ЛИТЕРАТУРА


1. *Кузнецов Д.Ю., Назаров А.А.* Исследование сетей связи с конечным числом абонентских станций, управляемых адаптивными протоколами случайного множественного доступа в условиях перегрузки // Автоматика и телемеханика. 1999. № 12. С. 99–113.
2. *Кузнецов Д.Ю., Назаров А.А.* Исследование немарковских моделей сетей связи с адаптивными протоколами случайного множественного доступа // Автоматика и телемеханика. 2001. № 5. С. 124–146.



Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 15 мая 2003 года.