

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВУХКАНАЛЬНОЙ СЕТИ СЛУЧАЙНОГО ДОСТУПА

В работе рассматривается двухканальная сеть случайного доступа. Предлагается ее математическая модель в виде двулинейной системы массового обслуживания, исследование которой выполнено методом асимптотического анализа с использованием общего подхода к исследованию марковских моделей сетей случайного доступа, который также описывается в данной работе.

Топология «шины» является, как правило, основной при создании компьютерных сетей связи, управляемых протоколами случайного множественного доступа [2,10]. При технической реализации таких сетей помимо основного канала связи прокладывается также резервный, который используется в исключительных случаях, путем переключения абонентских станций на резервный канал.

Несомненно представляют интерес теоретические исследования возможностей совместного использования двух каналов одновременно в сетях случайного доступа.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВУХКАНАЛЬНОЙ СЕТИ СЛУЧАЙНОГО ДОСТУПА

В качестве математической модели двухканальной сети случайного доступа рассмотрим двулинейную систему массового обслуживания (СМО) [4,9], на вход которой поступает простейший поток заявок интенсивности λ . Аналогичный подход рассмотрен в работах [5 – 8]. С вероятностью r поступившая заявка обращается к первому, а с вероятностью $(1 - r)$ – второму прибору. Если соответствующий прибор занят обслуживанием другой заявки, то обе попадают в конфликт и переходят в источник повторных вызовов (ИПВ). От этого момента в каналах начинается распространяться сигнал оповещения о конфликте случайной продолжительности, имеющей экспоненциальное распределение с параметрами $1/a_1$ и $1/a_2$ для первого и второго каналов соответственно. Здесь a_1 и a_2 – средние значения времени распространения сигнала оповещения.

При этом возможны две ситуации:

1. Сигналы оповещения о конфликтах на первом и втором приборах физически неразличимы.
2. Сигналы оповещения о конфликтах на первом и втором приборах различимы.

Естественно, что во втором случае поступившая заявка обращается к тому прибору, для которого отсутствует сигнал оповещения о конфликте.

Заявки, обратившиеся к прибору во время распространения сигнала оповещения, переходят в ИПВ. Если заявка принята к обслуживанию, и в течение этого времени другие заявки к данному прибору не обращались, то обслуженная заявка покидает систему. Будем полагать, что время обслуживания имеет экспоненциальное распределение с параметром μ_1 для первого и μ_2 – для второго приборов. После случайной задержки в ИПВ заявка вновь обращается к одному из приборов по вышеописанной схеме с повторной попыткой успешного обслуживания.

Состояния приборов определяется двумерным вектором (k_1, k_2) , где $k_v = 0$, если прибор свободен, $k_v = 1$, если в нем обслуживается заявка и $k_v = 2$, если

на приборе реализуется сигнал оповещения о конфликте. Состояние источника повторных вызовов определим величиной i – числом заявок в ИПВ. Состояние сети в целом определяется трехмерным вектором (k_1, k_2, i) . Процесс $(k_1(t), k_2(t), i(t))$ изменения во времени состояния сети является марковским [1], поэтому для его распределения вероятностей

$$P_{k_1 k_2}(i, t) = P(k_1(t) = k_1, k_2(t) = k_2, i(t) = i)$$

можно выписать равенства

$$P_{00}(i, t + \Delta t) = (1 - (\lambda + \sigma i)) P_{00}(i, t) + \mu_1 P_{10}(i, t) +$$

$$+ \mu_2 P_{01}(i, t) + \frac{1}{a_1} P_{20}(i, t) + \frac{1}{a_2} P_{02}(i, t) + o(\Delta t);$$

$$P_{10}(i, t + \Delta t) = (1 - (\lambda + \sigma i + \mu_1)) P_{10}(i, t) + \mu_2 P_{11}(i, t) +$$

$$+ r\sigma(i+1)P_{00}(i+1, t) + r\lambda P_{00}(i, t) + \frac{1}{a_2} P_{12}(i, t) + o(\Delta t),$$

$$P_{01}(i, t + \Delta t) = (1 - (\lambda + \sigma i + \mu_2)) P_{01}(i, t) + \mu_1 P_{11}(i, t) +$$

$$+ (1-r)\sigma(i+1)P_{00}(i+1, t) + \frac{1}{a_1} P_{21}(i, t) +$$

$$+ (1-r)\lambda P_{00}(i, t) + o(\Delta t);$$

$$P_{11}(i, t + \Delta t) = (1 - (\lambda + \sigma i + \mu_1 + \mu_2)) P_{11}(i, t) +$$

$$+ (1-r)\lambda P_{10}(i, t) + (1-r)\sigma(i+1)P_{10}(i+1, t) +$$

$$+ r\lambda P_{01}(i, t) + r\sigma(i+1)P_{01}(i+1, t) + o(\Delta t);$$

$$P_{02}(i, t + \Delta t) = (1 - (\lambda + r\sigma i + 1/a_2)) P_{02}(i, t) +$$

$$+ (1-r)\lambda P_{01}(i-2, t) + \mu_1 P_{12}(i, t) + \frac{1}{a_1} P_{22}(i, t) +$$

$$+ (1-r)\sigma(i-1)P_{01}(i-1, t) + (1-r)\lambda P_{02}(i-1, t) + o(\Delta t);$$

$$P_{20}(i, t + \Delta t) = (1 - (\lambda + (1-r)\sigma i + 1/a_1)) P_{20}(i, t) +$$

$$+ r\lambda P_{10}(i-2, t) + \mu_2 P_{21}(i, t) + \frac{1}{a_2} P_{22}(i, t) +$$

$$+ r\sigma(i-1)P_{10}(i-1, t) + r\lambda P_{20}(i-1, t) + o(\Delta t);$$

$$P_{12}(i, t + \Delta t) = (1 - (\lambda + r\sigma i + \mu_1 + 1/a_2)) P_{12}(i, t) +$$

$$+ r\lambda P_{02}(i, t) + r\sigma(i+1)P_{02}(i+1, t) + (1-r)\lambda P_{11}(i-2, t) +$$

$$+ (1-r)\sigma(i-1)P_{11}(i-1, t) + (1-r)\lambda P_{12}(i-1, t) + o(\Delta t);$$

$$P_{21}(i, t + \Delta t) = (1 - (\lambda + (1-r)\sigma i + \mu_2 + 1/a_1)) P_{21}(i, t) +$$

$$+ r\lambda P_{11}(i-2, t) + r\lambda P_{21}(i-1, t) + (1-r)\sigma(i+1)P_{20}(i+1, t) +$$

$$+ r\sigma(i-1)P_{11}(i-1, t) + (1-r)\lambda P_{20}(i, t) + o(\Delta t);$$

$$P_{22}(i, t + \Delta t) = (1 - (\lambda + 1/a_1 + 1/a_2)) P_{22}(i, t) +$$

$$+ r\lambda P_{12}(i-2, t) + r\sigma(i-1)P_{12}(i-1, t) + \lambda P_{22}(i-1, t) +$$

$$+ (1-r)\lambda P_{21}(i-2, t) + (1-r)\sigma(i-1)P_{21}(i-1, t) + o(\Delta t).$$

Выполнив несложные преобразования, получим, что распределение $P_{k_1 k_2}(i, t)$ удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial P_{00}(i, t)}{\partial t} + (\lambda + \sigma i) P_{00}(i, t) = \mu_1 P_{10}(i, t) + \mu_2 P_{01}(i, t) + \\
& \quad + \frac{1}{a_1} P_{20}(i, t) + \frac{1}{a_2} P_{02}(i, t); \\
& \frac{\partial P_{10}(i, t)}{\partial t} + (\lambda + \sigma i + \mu_1) P_{10}(i, t) = \mu_2 P_{11}(i, t) + \\
& \quad + r\sigma(i+1)P_{00}(i+1, t) + r\lambda P_{00}(i, t) + \frac{1}{a_2} P_{12}(i, t), \\
& \frac{\partial P_{01}(i, t)}{\partial t} + (\lambda + \sigma i + \mu_2) P_{01}(i, t) = \mu_1 P_{11}(i, t) + \\
& \quad + (1-r)\sigma(i+1)P_{00}(i+1, t) + \frac{1}{a_1} P_{21}(i, t) + \\
& \quad + (1-r)\lambda P_{00}(i, t); \\
& \frac{\partial P_{11}(i, t)}{\partial t} + (\lambda + \sigma i + \mu_1 + \mu_2) P_{11}(i, t) = (1-r)\lambda P_{10}(i, t) + \\
& \quad + (1-r)\sigma(i+1)P_{10}(i+1, t) + r\lambda P_{01}(i, t) + \\
& \quad + r\sigma(i+1)P_{01}(i+1, t); \\
& \frac{\partial P_{02}(i, t)}{\partial t} + (\lambda + r\sigma i + 1/a_2) P_{02}(i, t) = (1-r)\lambda P_{01}(i-2, t) + \\
& \quad + \mu_1 P_{12}(i, t) + \frac{1}{a_1} P_{22}(i, t) + (1-r)\sigma(i-1)P_{01}(i-1, t) + \\
& \quad + (1-r)\lambda P_{02}(i-1, t); \\
& \frac{\partial P_{20}(i, t)}{\partial t} + (\lambda + (1-r)\sigma i + 1/a_1) P_{20}(i, t) = r\lambda P_{10}(i-2, t) + \\
& \quad + \mu_2 P_{21}(i, t) + \frac{1}{a_2} P_{22}(i, t) + r\sigma(i-1)P_{10}(i-1, t) + \\
& \quad + r\lambda P_{20}(i-1, t); \\
& \frac{\partial P_{12}(i, t)}{\partial t} + (\lambda + r\sigma i + \mu_1 + 1/a_2) P_{12}(i, t) = r\lambda P_{02}(i, t) + \\
& \quad + r\sigma(i+1)P_{02}(i+1, t) + (1-r)\lambda P_{11}(i-2, t) + \\
& \quad + (1-r)\sigma(i-1)P_{11}(i-1, t) + (1-r)\lambda P_{12}(i-1, t); \\
& \frac{\partial P_{21}(i, t)}{\partial t} + (\lambda + (1-r)\sigma i + \mu_2 + 1/a_1) P_{21}(i, t) = \\
& \quad = r\lambda P_{11}(i-2, t) + r\lambda P_{21}(i-1, t) + (1-r)\lambda P_{20}(i, t) + \\
& \quad + (1-r)\sigma(i+1)P_{20}(i+1, t) + r\sigma(i-1)P_{11}(i-1, t); \\
& \frac{\partial P_{22}(i, t)}{\partial t} + (\lambda + 1/a_1 + 1/a_2) P_{22}(i, t) = r\lambda P_{12}(i-2, t) + \\
& \quad + r\sigma(i-1)P_{12}(i-1, t) + (1-r)\lambda P_{21}(i-2, t) + \\
& \quad + (1-r)\sigma(i-1)P_{21}(i-1, t) + \lambda P_{22}(i-1, t).
\end{aligned} \tag{1}$$

При исследовании одноканальных сетей случайного доступа, функционирующих в стационарном режиме, были получены аналогичные системы уравнений. Для их решения применялся метод асимптотического анализа марковизуемых систем. Использование этого метода для системы (1) приводит к громоздким записям, выходящим за рамки научной публикации, поэтому, переходя к векторной форме, обозначим вектор-столбец

$$P(i, t) = \{P_{00}(i, t), P_{01}(i, t), P_{02}(i, t), P_{10}(i, t), P_{11}(i, t), P_{12}(i, t), P_{20}(i, t), P_{21}(i, t), P_{22}(i, t)\}^T$$

и матрицы $A_0(i)$, $A_1(i)$, $B_1(i)$ и B_2 определим таким образом, что систему (1) представим в виде

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial P(i, t)}{\partial t} = A_0(i)P(i, t) + A_1(i+1)P(i+1, t) + \\
& \quad + B_1(i-1)P(i-1, t) + B_2P(i-2, t).
\end{aligned} \tag{2}$$

Отметим, что аналогично (2) можно записать соответствующие системы уравнений, определяющих функционирование математических моделей и других сетей связи случайного доступа, поэтому нижеприведенный подход к исследованию математических моделей сетей случайного доступа имеет достаточно общий характер.

ОБЩИЙ ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ МАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ СЕТЕЙ СЛУЧАЙНОГО ДОСТУПА

Обозначим $\sigma = \varepsilon^2$, $\varepsilon^2 t = \tau$ и покажем, что

$$x(\tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 i(\tau/\varepsilon^2)$$

является детерминированной функцией,

$$y(\tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^2 i(\tau/\varepsilon^2) - x(\tau)}{\varepsilon}$$

– диффузионным процессом авторегрессии. Процесс изменений состояний каналов $k(\tau/\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ является дискретным марковским процессом независимым от процесса $y(\tau)$.

Используя предельные процессы $x(\tau)$ и $y(\tau)$ для достаточно малых ε , рассмотрим процесс

$$z(\tau) = x(\tau) + \varepsilon y(\tau),$$

который с точностью до $o(\varepsilon)$ совпадает с процессом $\varepsilon^2 i(\tau/\varepsilon^2)$ и характеризует процесс изменения числа заявок в ИПВ. Покажем, что процесс $z(\tau)$ является диффузионным, и найдем его коэффициенты переноса и диффузии.

Сформулированные результаты получим с помощью исследования системы (2), которая имеет место не только для рассматриваемой СМО, но также и для других сетей случайного доступа, математические модели которых можно представить в виде марковских СМО с источником повторных вызовов и конечным числом состояний канала.

Для получения указанных результатов в системе (2) выполним замену

$$\varepsilon^2 t = \tau; \quad \varepsilon^2 i = x(\tau) + \varepsilon y; \quad \frac{1}{\varepsilon} P(i, t) = H(y, \tau, \varepsilon), \tag{3}$$

где $x(\tau)$ – некоторая заданная функция, вид которой будет определен ниже, тогда систему (2) перепишем следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^2 \frac{\partial H(y, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau) \frac{\partial H(y, \tau, \varepsilon)}{\partial y} = \\
& = A_0(x + \varepsilon y)H(y, \tau, \varepsilon) + A_1(x + \varepsilon(y + \varepsilon))H(y + \varepsilon, \tau, \varepsilon) + \\
& \quad + B_1(x + \varepsilon(y - \varepsilon))H(y - \varepsilon, \tau, \varepsilon) + B_2H(y - 2\varepsilon, \tau, \varepsilon).
\end{aligned} \tag{4}$$

Систему (4) будем решать в четыре этапа.

Первый этап

На первом этапе найдем распределения вероятностей значений процесса $k(\tau)$. Для этого в системе (4) перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, обозначив $H(y, \tau, 0) = H(y, \tau)$, и получим относительно вектора $H(y, \tau)$ однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$K(x)H(y, \tau) = 0, \quad (5)$$

где матрица $K(x)$ имеет вид

$$K(x) = A_0(x) + A_1(x) + B_1(x) + B_2 \quad (6)$$

и является инфинитезимальной матрицей интенсивностей переходов случайного процесса $k(\tau)$. Из свойств таких матриц следует, что их строки линейно зависимы, так как

$$E^T K(x) = 0, \quad (7)$$

где E – единичный вектор столбец. Следовательно, система (5) имеет нетривиальное решение, которое представим в виде

$$H(y, \tau) = R(x)F(y, \tau), \quad (8)$$

где $F(y, \tau)$ – скалярная функция, а вектор $R(x)$ определяется аналогично (5) однородной системой линейных алгебраических уравнений

$$K(x)R(x) = 0. \quad (9)$$

Положим, что вектор $R(x)$ удовлетворяет условию нормировки

$$E^T R(x) = 1. \quad (10)$$

Тогда $R(x)$ имеет смысл распределения вероятностей значений процесса $k(\tau)$, а $F(y, \tau)$ является плотностью распределения вероятностей значений процесса $y(\tau)$, ее вид будет определен ниже.

Отметим, что в силу равенства (8), процессы $k(\tau)$ и $y(\tau)$ стохастически независимы.

Покажем, что решение $R(x)$ системы (9), удовлетворяющее условию нормировки (10), существует и единственно.

Теорема 1. Решение $R(x)$ системы (9), удовлетворяющее условию нормировки (10), существует и единственно.

Доказательство. Для доказательства теоремы формально воспользуемся теоремой эргодичности. По инфинитезимальной матрице построим матрицу переходных вероятностей вложенной цепи Маркова с дискретным временем. Это реализуется исключением диагональных элементов матрицы $K(x)$ и нормированием ее строк. Полученная матрица неприводима и неперiodична, поэтому выполнены условия теоремы эргодичности, то есть, выполнены условия эргодичности для цепей Маркова с конечным числом состояний. Следовательно, существует единственное эргодическое распределение, которое для процесса с непрерывным временем определяется системой (9) и условием нормировки (10). Таким образом, решение

$R(x)$ однородной системы линейных алгебраических уравнений (9), удовлетворяющее условию (10), существует и единственно.

Теорема доказана.

Еще раз подчеркнем, что приведенное доказательство использует теорему эргодичности не по существу, а чисто формально, так как распределение $R(x)$ зависит от значений функции $x(\tau)$, следовательно, не является, вообще говоря, стационарным.

Второй этап

На втором этапе решения системы (4) найдем вид функции $x = x(\tau)$.

Теорема 2. Функция $x = x(\tau)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения [11]

$$x'(\tau) = E^T V(x)R(x), \quad (11)$$

где матрица $V(x)$ имеет вид

$$V(x) = B_1(x) + 2B_2 - A_1(x). \quad (12)$$

Доказательство. Функции в правой части системы (4) разложим в ряд по приращениям аргумента y с точностью до $o(\varepsilon)$ и перепишем эту систему в виде

$$\begin{aligned} -\varepsilon x'(\tau) \frac{\partial H(y, \tau, \varepsilon)}{\partial y} &= K(x + \varepsilon y)H(y, \tau, \varepsilon) - \\ &- \varepsilon V(x) \frac{\partial H(y, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + o(\varepsilon), \end{aligned} \quad (13)$$

где матрица $V(x)$, очевидно, имеет вид (12). Просуммируем все уравнения системы (13) и, учитывая свойство (7) матрицы K , получим

$$-\varepsilon x'(\tau) E^T \frac{\partial H(y, \tau, \varepsilon)}{\partial y} = -\varepsilon E^T V(x) \frac{\partial H(y, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + o(\varepsilon).$$

Поделив левую и правую части этого равенства на ε и полагая $\varepsilon \rightarrow 0$, запишем

$$x'(\tau) E^T \frac{\partial H(y, \tau, \varepsilon)}{\partial y} = E^T V(x) \frac{\partial H(y, \tau, \varepsilon)}{\partial y}.$$

Подставляя в это равенство $H(y, \tau)$ в виде (8), получим

$$x'(\tau) E^T R(x) \frac{\partial F(y, \tau)}{\partial y} = E^T V(x) R(x) \frac{\partial F(y, \tau)}{\partial y},$$

откуда, учитывая условие нормировки (10), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$x'(\tau) = E^T V(x)R(x), \quad (14)$$

определяющее вид функции $x = x(\tau)$.

Теорема доказана.

Третий этап

На третьем этапе найдем разложение функции $H(y, \tau, \varepsilon)$ в виде

$$H(y, \tau, \varepsilon) = R(x)F(y, \tau) + \varepsilon h(y, \tau) + o(\varepsilon). \quad (15)$$

Теорема 3. Вектор $h(y, \tau)$ является решением однородной системы линейных алгебраических уравнений

$$K(x)h(y, \tau) = [V(x) - x'(\tau)I]R(x)\frac{\partial F(y, \tau)}{\partial y} - K'(x)R(x)yF(y, \tau), \quad (16)$$

где I – диагональная единичная матрица, а $x'(\tau)$ определяется равенством (16).

Доказательство. Систему (13) перепишем в виде

$$K(x + \varepsilon y)H(y, \tau, \varepsilon) = \varepsilon[V(x) - x'(\tau)I]\frac{\partial H(y, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + o(\varepsilon)$$

и, подставив в это равенство разложение матрицы $K(x + \varepsilon y)$ вида $K(x + \varepsilon y) = K(x) + \varepsilon y K'(x)$, получим

$$K(x)H(y, \tau, \varepsilon) + \varepsilon y K'(x)H(y, \tau, \varepsilon) = \varepsilon[V(x) - x'(\tau)I]\frac{\partial H(y, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + o(\varepsilon).$$

В это равенство подставим разложение (15), тогда

$$K(x)R(x)F(y, \tau) + \varepsilon K(x)h(y, \tau) + \varepsilon y K'(x)R(x)F(y, \tau) = \varepsilon[V(x) - x'(\tau)I]R(x)\frac{\partial F(y, \tau)}{\partial y} + o(\varepsilon).$$

Учитывая равенство (9) и выполнив несложные преобразования, последнее равенство перепишем в виде

$$K(x)h(y, \tau) = [V(x) - x'(\tau)I]R(x)\frac{\partial F(y, \tau)}{\partial y} - yK'(x)R(x)F(y, \tau),$$

совпадающем с (16). Матрица $K(x)$ неоднородной системы (16) имеет определитель, равный нулю, поэтому данная система линейных алгебраических уравнений имеет решение только тогда, когда ранг собственной матрицы $K(x)$ системы совпадает с рангом расширенной матрицы.

В силу теоремы 1 ранг матрицы $K(x)$ на единицу меньше ее размерности. Покажем, что уравнения неоднородной системы (16) линейно зависимы.

Суммируя все уравнения системы (16), получим

$$\begin{aligned} E^T K(x)h(y, \tau) &= E^T [V(x) - x'(\tau)I]R(x)\frac{\partial F(y, \tau)}{\partial y} - \\ &- E^T K'(x)R(x)yF(y, \tau) = \\ &= [E^T V(x) - E^T x'(\tau)I]R(x)\frac{\partial F(y, \tau)}{\partial y} - \\ &- \frac{d}{dx}\{E^T K(x)\}R(x)yF(y, \tau). \end{aligned}$$

В силу равенства (7) левая часть равна нулю. В силу равенств (10) и (14) правая часть также равна нулю, следовательно, ранги соответствующих матриц совпадают, а система (16) имеет решение, определяемое с точностью до однопараметрического семейства векторов вида $R(x)C$, где C – произвольная скалярная величина.

Теорема доказана.

Следствие 1. Решение $h(y, \tau)$ системы (16) имеет вид

$$h(y, \tau) = h^{(1)}(x)\frac{\partial F(y, \tau)}{\partial y} + R'(x)yF(y, \tau) + R(x)C, \quad (17)$$

где вектор $h^{(1)}(x)$ является решением системы

$$K(x)h^{(1)}(x) = [V(x) - x'(\tau)I]R(x). \quad (18)$$

Доказательство. Выражение (17) подставим в систему (16), получим

$$\begin{aligned} K(x)h^{(1)}(x)\frac{\partial F(y, \tau)}{\partial y} + K(x)R'(x)yF(y, \tau) + \\ + K(x)R(x)C = \\ = [V(x) - x'(\tau)I]R(x)\frac{\partial F(y, \tau)}{\partial y} - K'(x)R(x)yF(y, \tau). \end{aligned}$$

В силу (9) и (18) это можно переписать в виде

$$K(x)R'(x)yF(y, \tau) = -K(x)'R(x)yF(y, \tau),$$

откуда получим

$$(K(x)R(x))' = 0,$$

которое выполняется тождественно в силу равенства (9).

Следствие доказано.

Четвертый этап

На четвертом этапе найдем вид функции $F(y, \tau)$.

Теорема 4. Функция $F(y, \tau)$ является плотностью распределения вероятностей значений диффузионного процесса авторегрессии и определяется уравнением Фоккера – Планка вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(y, \tau)}{\partial \tau} &= -\left(E^T V(x)R(x)\right)' \frac{\partial (yF(y, \tau))}{\partial y} + \\ &+ \frac{1}{2}E^T \left\{ D(x)R(x) - 2(V(x) - x'(\tau)I)h^{(1)}(x) \right\} \times \\ &\times \frac{\partial^2 F(y, \tau)}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (19)$$

где матрица $D(x)$ имеет вид

$$D(x) = B_1(x) + 4B_2 + A_1(x), \quad (20)$$

а вектор $h^{(1)}(x)$ является решением системы (18).

Доказательство. Функции в правой части системы (4) разложим в ряд по приращениям аргумента y с точностью до $o(\varepsilon^2)$, получим

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial H(y, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau) \frac{\partial H(y, \tau, \varepsilon)}{\partial y} &= K(x + \varepsilon y)H(y, \tau, \varepsilon) - \\ &- \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \{V(x + \varepsilon y)H(y, \tau, \varepsilon)\} + \frac{\varepsilon^2}{2} D(x) \frac{\partial^2 H(y, \tau, \varepsilon)}{\partial y^2} + \\ &+ o(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

где матрица $D(x)$, очевидно, имеет вид (20).

Сложив все уравнения этой системы и используя свойство (7) матрицы K , имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 E^T \frac{\partial H(y, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau) E^T \frac{\partial H(y, \tau, \varepsilon)}{\partial y} &= \\ &= -\varepsilon E^T \frac{\partial}{\partial y} \{V(x + \varepsilon y)H(y, \tau, \varepsilon)\} + \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{2} E^T D(x) \frac{\partial^2 H(y, \tau, \varepsilon)}{\partial y^2} + o(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Используя разложение $V(x + \varepsilon y) = V(x) + \varepsilon y V'(x)$, перепишем это равенство следующим образом:

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 E^T \frac{\partial H(y, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau) E^T \frac{\partial H(y, \tau, \varepsilon)}{\partial y} = \\ & = -\varepsilon E^T V(x) \frac{\partial H(y, \tau, \varepsilon)}{\partial y} - \varepsilon^2 E^T V'(x) \frac{\partial \{yH(y, \tau, \varepsilon)\}}{\partial y} + \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2} E^T D(x) \frac{\partial^2 H(y, \tau, \varepsilon)}{\partial y^2} + o(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Подставляя разложение (17) функции $H(y, \tau, \varepsilon)$, получим

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \frac{\partial \{E^T R(x) F(y, \tau)\}}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau) E^T R(x) \frac{\partial F(y, \tau)}{\partial y} - \\ & - \varepsilon^2 x'(\tau) E^T \frac{\partial h(y, \tau)}{\partial y} = \\ & = -\varepsilon E^T V(x) R(x) \frac{\partial F(y, \tau)}{\partial y} - \varepsilon^2 E^T V(x) \frac{\partial h(y, \tau)}{\partial y} - \\ & - \varepsilon^2 E^T V'(x) R(x) \frac{\partial \{yF(y, \tau)\}}{\partial y} + \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2} E^T D(x) R(x) \frac{\partial^2 F(y, \tau)}{\partial y^2} + o(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

которое в силу условия нормировки (10) и дифференциального уравнения (14) перепишем следующим образом:

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \frac{\partial F(y, \tau)}{\partial \tau} - \varepsilon^2 x'(\tau) E^T \frac{\partial h(y, \tau)}{\partial y} = \\ & = -\varepsilon^2 E^T V(x) \frac{\partial h(y, \tau)}{\partial y} - \varepsilon^2 E^T V'(x) R(x) \frac{\partial \{yF(y, \tau)\}}{\partial y} + \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2} E^T D(x) R(x) \frac{\partial^2 F(y, \tau)}{\partial y^2} + o(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Выполнив несложные преобразования, получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F(y, \tau)}{\partial \tau} = -E^T (V(x) - x'(\tau)I) \frac{\partial h(y, \tau)}{\partial y} - \\ & - \varepsilon^2 E^T V'(x) R(x) \frac{\partial \{yF(y, \tau)\}}{\partial y} + \\ & + \frac{1}{2} E^T D(x) R(x) \frac{\partial^2 F(y, \tau)}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Рассмотрев первое слагаемое в правой части этого равенства и подставив в него представление (17) вектора $h(y, \tau)$, имеем

$$\begin{aligned} & E^T (V(x) - x'(\tau)I) \frac{\partial h(y, \tau)}{\partial y} = \\ & = E^T (V(x) - x'(\tau)I) h^{(1)}(x) \frac{\partial^2 F(y, \tau)}{\partial y^2} + \\ & + E^T (V(x) - x'(\tau)I) R'(x) \frac{\partial \{yF(y, \tau)\}}{\partial y}. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (21), получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F(y, \tau)}{\partial \tau} = -E^T V(x) R'(x) \frac{\partial \{yF(y, \tau)\}}{\partial y} - \\ & - E^T V'(x) R(x) \frac{\partial \{yF(y, \tau)\}}{\partial y} - \\ & - E^T (V(x) - x'(\tau)I) h^{(1)}(x) \frac{\partial^2 F(y, \tau)}{\partial y^2} + \\ & + \frac{1}{2} E^T D(x) R(x) \frac{\partial^2 F(y, \tau)}{\partial y^2}, \end{aligned}$$

что, очевидно, совпадает с уравнением (19).

Теорема доказана.

Используя (11), коэффициент диффузии случайного процесса $B(x)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} B^2(x) &= E^T \{D(x) R(x) - \\ & - 2(V(x) - E^T V(x) R(x) I) h^{(1)}(x)\}, \end{aligned} \quad (22)$$

а для диффузионного процесса $y(\tau)$ имеет место стохастическое дифференциальное уравнение [3]

$$dy(\tau) = (E^T V(x) R(x))' y(\tau) d\tau + B(x) dw(\tau), \quad (23)$$

где $w(\tau)$ – стандартный винеровский процесс.

Теперь рассмотрим для достаточно малых значений параметра ε случайный процесс

$$z(\tau) = x(\tau) + \varepsilon y(\tau), \quad z(\tau) = \varepsilon^2 i(\tau/\varepsilon^2) \quad (24)$$

и докажем следующую теорему.

Теорема 5. С точностью до $o(\varepsilon)$ случайный процесс $z(\tau)$ является решением стохастического дифференциального уравнения

$$dz(\tau) = E^T V(z) R(z) d\tau + \varepsilon B(z) dw(\tau), \quad (25)$$

т.е. $z(\tau)$ является однородным диффузионным процессом с коэффициентом переноса $E^T V(z) R(z)$ и диффузии $\varepsilon^2 B^2(z)$.

Доказательство. Дифференцируя равенство (24), получим

$$dz(\tau) = x'(\tau) d\tau + \varepsilon dy(\tau).$$

В силу (13) и (25) его правую часть перепишем в виде

$$\begin{aligned} & x'(\tau) d\tau + \varepsilon dy(\tau) = E^T V(x) R(x) d\tau + \\ & + \varepsilon (E^T V(x) R(x))' y d\tau + \varepsilon B(x) dw(\tau) = \\ & = \left\{ E^T V(x) R(x) + \varepsilon y (E^T V(x) R(x))' \right\} d\tau + \varepsilon B(x) dw(\tau) = \\ & = E^T V(x + \varepsilon y) R(x + \varepsilon y) d\tau + \varepsilon B(x + \varepsilon y) dw(\tau) + o(\varepsilon) = \\ & = E^T V(z) R(z) d\tau + \varepsilon B(z) dw(\tau) + o(\varepsilon), \end{aligned}$$

следовательно, процесс $z(\tau)$ с точностью до $o(\varepsilon)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению (25).

Теорема доказана.

Таким образом, для достаточно малых значений параметра ε случайный процесс $\varepsilon^2 i(\tau/\varepsilon^2)$ можно аппроксимировать однородным диффузионным процессом $z(\tau)$, удовлетворяющим стохастическому дифференциальному уравнению (25).

Далее полученные результаты применим к исследованию вышеописанной двулинейной сети.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ КАНАЛОВ В ДВУХКАНАЛЬНОЙ СЕТИ СЛУЧАЙНОГО ДОСТУПА

Для рассматриваемой системы (2) найдем компоненты $R_{k_1 k_2}$ вектора $R(x)$. Для этого в явном виде выпишем уравнение (9)

$$\begin{aligned}
 (\lambda + x)R_{00} &= \mu_1 R_{10} + \mu_2 R_{01} + \frac{1}{a_1} R_{20} + \frac{1}{a_2} R_{02}, \\
 (\lambda + x + \mu_2)R_{01} &= \mu_1 R_{11} + \frac{1}{a_1} R_{21} + (1-r)\lambda R_{00} + \\
 &\quad + (1-r)xR_{00}, \\
 \left(\lambda + rx + \frac{1}{a_2}\right)R_{02} &= (1-r)\lambda R_{01} + (1-r)xR_{01} + \mu_1 R_{12} + \\
 &\quad + \frac{1}{a_1} R_{22} + (1-r)\lambda R_{02}, \\
 (\lambda + x + \mu_1)R_{10} &= \mu_2 R_{11} + \frac{1}{a_2} R_{12} + r\lambda R_{00} + rxR_{00}, \\
 (\lambda + x + \mu_1 + \mu_2)R_{11} &= (1-r)\lambda R_{10} + r\lambda R_{01} + \\
 &\quad + (1-r)xR_{10} + rxR_{01}, \\
 \left(\lambda + rx + \mu_1 + \frac{1}{a_2}\right)R_{12} &= r\lambda R_{02} + rxR_{02} + (1-r)\lambda R_{11} + \\
 &\quad + (1-r)xR_{11} + (1-r)\lambda R_{12}, \\
 \left(\lambda + (1-r)x + \frac{1}{a_1}\right)R_{20} &= r\lambda R_{10} + rxR_{10} + \mu_2 R_{21} + \\
 &\quad + \frac{1}{a_2} R_{22} + r\lambda R_{20}, \\
 \left(\lambda + (1-r)x + \mu_2 + \frac{1}{a_1}\right)R_{21} &= (1-r)\lambda R_{20} + (1-r)xR_{20} + \\
 &\quad + r\lambda R_{11} + rxR_{11} + r\lambda R_{21}, \\
 \left(\lambda + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right)R_{22} &= r\lambda R_{12} + rxR_{12} + (1-r)\lambda R_{21} + \\
 &\quad + (1-r)xR_{21} + \lambda R_{22}.
 \end{aligned} \tag{26}$$

Для решения системы (26) преобразуем ее к следующему виду, с учетом замены $g = \lambda + x$:

$$\begin{cases}
 rgR_{00} = \mu_1 R_{10} + \frac{1}{a_1} R_{20}, \\
 rgR_{10} + \mu_1 R_{10} = rgR_{00}, \\
 \frac{1}{a_1} R_{20} = rgR_{10};
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 rgR_{01} = \mu_1 R_{11} + \frac{1}{a_1} R_{21}, \\
 rgR_{11} + \mu_1 R_{11} = rgR_{01}, \\
 \frac{1}{a_1} R_{21} = rgR_{11};
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 rgR_{02} = \mu_1 R_{12} + \frac{1}{a_1} R_{22}, \\
 rgR_{12} + \mu_1 R_{12} = rgR_{02}, \\
 \frac{1}{a_1} R_{22} = rgR_{12};
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 (1-r)gR_{00} = \mu_2 R_{01} + \frac{1}{a_2} R_{02}, \\
 (1-r)gR_{01} + \mu_2 R_{01} = (1-r)gR_{00}, \\
 \frac{1}{a_2} R_{02} = (1-r)gR_{01};
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 (1-r)gR_{10} = \mu_2 R_{11} + \frac{1}{a_2} R_{12}, \\
 (1-r)gR_{11} + \mu_2 R_{11} = (1-r)gR_{10}, \\
 \frac{1}{a_2} R_{12} = (1-r)gR_{11};
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 (1-r)gR_{20} = \mu_2 R_{21} + \frac{1}{a_2} R_{22}, \\
 (1-r)gR_{21} + \mu_2 R_{21} = (1-r)gR_{20}, \\
 \frac{1}{a_2} R_{22} = (1-r)gR_{21}.
 \end{cases}$$

Очевидно, что если некоторое решение $R_{k_1 k_2}$ будет удовлетворять данным системам, то это же решение будет удовлетворять системе (26). Все системы имеют нетривиальное решение, определенное с точностью до мультипликативной составляющей, в силу того, что их определители равны 0. Будем искать решение в виде произведения $R_{k_1 k_2} = R_{k_1}^{(1)} R_{k_2}^{(2)}$. Разрешая эти системы и добавляя условие нормировки (10):

$$\sum_{k_1=0}^2 R_{k_1}^{(1)} = 1 \text{ и } \sum_{k_2=0}^2 R_{k_2}^{(2)} = 1,$$

получаем

$$R_0^{(1)} = \frac{rg + \mu_1}{(rg)^2 a_1 + 2rg + \mu_1};$$

$$R_1^{(1)} = \frac{rg}{(rg)^2 a_1 + 2rg + \mu_1};$$

$$R_2^{(1)} = \frac{(rg)^2 a_1}{(rg)^2 a_1 + 2rg + \mu_1};$$

$$R_0^{(2)} = \frac{(1-r)g + \mu_2}{((1-r)g)^2 a_2 + 2(1-r)g + \mu_2};$$

$$R_1^{(2)} = \frac{(1-r)g}{((1-r)g)^2 a_2 + 2(1-r)g + \mu_2};$$

$$R_2^{(2)} = \frac{((1-r)g)^2 a_2}{((1-r)g)^2 a_2 + 2(1-r)g + \mu_2}.$$

ИССЛЕДОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО СРЕДНЕГО ЧИСЛА ЗАЯВОК В ИПВ ДЛЯ ДВУХКАНАЛЬНОЙ СЕТИ

По Теореме 2 процесс $x(\tau)$, имеющий смысл асимптотического среднего нормированного числа заявок в ИПВ, является детерминированным, удовлетворяющим обыкновенному дифференциальному уравнению (11). Запишем данное уравнение для описанной двулинейной сети в явном виде

$$x'(\tau) = \lambda - \left(\frac{r(\lambda + x)\mu_1}{(r(\lambda + x))^2 a_1 + 2r(\lambda + x) + \mu_1} + \frac{(1-r)(\lambda + x)\mu_2}{((1-r)(\lambda + x))^2 a_2 + 2(1-r)(\lambda + x) + \mu_2} \right). \quad (27)$$

Данное дифференциальное уравнение в зависимости от параметров может иметь до 4 точек покоя. Особый интерес представляет ситуация, в которой уравнение имеет 4 точки покоя, две из которых будут

устойчивы. Устойчивые точки покоя будем называть точками стабилизации сети связи, а сеть связи бистабильной.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИФFUЗИОННОЙ АП- ПРОКСИМАЦИИ ПРОЦЕССА ИЗМЕНЕНИЯ ЧИСЛА ЗАЯВОК В ИПВ ДЛЯ ДВУХКАНАЛЬНОЙ СЕТИ

По Теореме 5 процесс $z(\tau)$, аппроксимирующий случайный процесс $\varepsilon^2 i(\tau/\varepsilon^2)$ – нормированное число заявок в ИПВ, является диффузионным и удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению (25). Коэффициент диффузии для данного процесса определяется уравнением (22). Аналитическое выражение для него очень громоздко, поэтому в данной работе оно не приводится. Для задач большой размерности уравнение (22) позволяет определить коэффициент диффузии численно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баруча-Рид А.Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения. М.: Наука, 1969. 511 с.
2. Бертсекас Д., Галагер Р. Сети передачи данных. М.: Мир, 1989. 544 с.
3. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова думка, 1968. 353 с.
4. Гнеденко Б.В. Введение в теорию массового обслуживания. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1987. 336 с.
5. Назаров А.А. Асимптотический анализ марковизируемых систем. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. 157 с.
6. Назаров А.А., Одышев Ю.Д. Исследование сетей связи с протоколом «синхронная Алоха» в условиях большой загрузки // Автоматика и вычислительная техника. 2001. № 1. С. 77–84.
7. Назаров А.А. Устойчивое функционирование нестабильных сетей связи с протоколом случайного доступа // Проблемы передачи информации. 1997. № 2. С. 101–111.
8. Назаров А.А., Шохор С.Л. Исследование управляемого несинхронного множественного доступа в спутниковых сетях связи с оповещением о конфликте // Проблемы передачи информации. 2000. № 1. С. 77–89.
9. Саати Т.Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. 2-е изд. М.: Сов. радио, 1971. 519 с.
10. Флинт Д. Локальные сети ЭВМ. М.: Финансы и статистика, 1986. 357 с.
11. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление: Учебник для физических и физико-математических факультетов университетов. 4-е изд. М.: Эдиториал УРСС, 2000. 320 с.

Статья представлена кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и кибернетики Томского государственного университета, поступила в научную редакцию 30 апреля 2003 г.