

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

УДК 519.175.3

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ПОМЕЧЕННЫХ
ЭЙЛЕРОВЫХ ПЕНТАЦИКЛИЧЕСКИХ ГРАФОВ

В. А. Воблый

Всероссийский институт научной и технической информации РАН, г. Москва, Россия

Эйлеров граф — это связный граф, у которого все степени вершин — чётные числа. Пентациклическим графом называется связный граф с n вершинами и $n + 4$ рёбрами. Получена явная формула для числа помеченных эйлеровых пентациклических графов с заданным числом вершин, а также найдена соответствующая асимптотика для числа таких графов с большим числом вершин. Доказано, что при равномерном распределении вероятностей вероятность того, что помеченный эйлеров пентациклический граф является блоком (кактусом), асимптотически равна $53/272$ ($63/272$ соответственно).

Ключевые слова: *помеченный граф, эйлеров граф, пентациклический граф, блок, перечисление, асимптотика, вероятность.*

DOI 10.17223/20710410/50/6

ENUMERATION OF LABELED EULERIAN PENTACYCLIC GRAPHS

V. A. Voblyi

*All-Russian Institut for Scientific and Technical Information, Moscow, Russia***E-mail:** vitvobl@yandex.ru

An Euler graph is a connected graph in which all degrees of vertices are even numbers. A pentacyclic graph is a connected graph with n vertices and $n + 4$ edges. We obtain an explicit formula for the number of labeled Euler pentacyclic graphs with a given number of vertices, and found the corresponding asymptotics for the number of such graphs with a large number of vertices. We prove that, given a uniform probability distribution, the probability that a labeled pentacyclic Euler graph is a block (cactus) is asymptotically $53/272$ ($63/272$), respectively.

Keywords: *labeled graph, Eulerian graph, pentacyclic graph, block, enumeration, asymptotics, probability.*

Введение

Рассматриваются неориентированные простые связные графы.

Для связного графа *точкой сочленения* называется его вершина, после удаления которой вместе с инцидентными ей рёбрами граф становится несвязным, а *мостом* — ребро, удаление которого приводит к несвязности графа. *Блок* — это связный граф без точек сочленения, а также максимальный связный нетривиальный подграф, не имеющий точек сочленения. *Чётным* графом называется граф, у которого все степени

вершин — чётные числа. *Эйлеров граф* — это связный чётный граф [1, с. 22]. *Цикломатическим числом* связного графа называется увеличенная на единицу разность между числом рёбер графа и числом его вершин. *k-Циклический граф* — это связный граф с цикломатическим числом k .

Эйлеровы графы находят применение в исследовании операций (задача китайского почтальона) [2], биоинформатике [3] и криптографии [4].

Р. Рид [5] нашёл производящую функцию для числа помеченных чётных графов с заданными числами вершин и рёбер, из которой производящая функция для помеченных эйлеровых графов может быть получена логарифмированием. С. Тазава перечислил по числу вершин помеченные эйлеровы блоки [6]. В [7] найдены явные формулы и асимптотика для числа помеченных эйлеровых бициклических и трициклических графов с заданным числом вершин; в [8] перечислены по числу вершин помеченные эйлеровы тетрациклические графы. В [9] получена явная формула для числа помеченных эйлеровых пентациклических блоков.

В данной работе получена явная формула для числа помеченных эйлеровых пентациклических графов с заданным числом вершин и найдена асимптотика для числа таких графов с большим числом вершин. Доказано, что при равномерном распределении вероятностей помеченный эйлеров пентациклический граф является блоком (кактусом) с вероятностью, асимптотически равной $53/272$ ($63/272$).

1. Перечисление графов

Теорема 1. Число $E_5(n)$ помеченных эйлеровых пентациклических графов с n вершинами при $n \geq 7$ равно

$$E_5(n) = \frac{n!}{29030400} (1360n^7 - 21490n^6 + 101563n^5 + 83930n^4 - 1999655n^3 + 4004840n^2 + 2158812n + 3457440). \quad (1)$$

Доказательство. Пусть $B(n, k)$ — число помеченных k -циклических блоков с n вершинами; $B_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B(n, k) \frac{z^n}{n!}$ — соответствующая экспоненциальная производящая функция. В [10] для числа $\bar{S}(n, k)$ помеченных связных графов без мостов с n вершинами и цикломатическим числом k при $k \geq 1$ доказана формула

$$\bar{S}(n, k) = \frac{(n-1)!}{nk!} [z^{-1}] Y_k(nB'_1(z), \dots, nk!B'_k(z)) z^{-n}. \quad (2)$$

Здесь $[z^{-1}]$ — оператор формального вычета [11, с. 25]; а $Y_k(x_1, \dots, x_k)$ — многочлены разбиений (многочлены Белла), для которых известна формула [12, с. 173]

$$Y_m(x_1, \dots, x_m) = \sum_{\pi(m)} \frac{m!}{k_1! \dots k_m!} \left(\frac{x_1}{1!} \right)^{k_1} \dots \left(\frac{x_m}{m!} \right)^{k_m},$$

где суммирование проводится по всем разбиениям $\pi(m)$ числа m :

$$k_1 + 2k_2 + \dots + mk_m = m, \quad k_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Будем считать теперь, что числа $\bar{S}(n, k)$ и функции $B_k(z)$ относятся к классу помеченных эйлеровых графов. Формула (2) может быть неверна для подкласса связных графов [13]. Класс графов называется *блочно-устойчивым*, если граф принадлежит

этому классу тогда и только тогда, когда каждый блок графа принадлежит этому классу [14]. Для блочно-устойчивого класса графов формула (2) верна [13]. Известно, что класс эйлеровых графов является блочно-устойчивым [15].

Так как [9, с. 246]

$$\begin{aligned} Y_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= x_1^5 + 10x_2x_1^3 + 10x_3x_1^2 + 15x_2^2x_1 + 5x_4x_1 + 10x_3x_2 + x_5 = \\ &= x_1^5 + 10x_3x_1^2 + 5x_4x_1 + x_5 \end{aligned}$$

и $x_i = ni!B'_i(z)$, имеем

$$E_5(n) = \frac{(n-1)!}{120} [z^{-1}] \left(n^4 (B'_1(z))^5 + 60n^2 B'_3(z) (B'_1(z))^2 + 120n B'_1(z) B'_4(z) (z) + 120 B'_5(z) \right) z^{-n}.$$

Интегрируя по частям последнее слагаемое, найдём

$$E_5(n) = B(n, 5) + \frac{n!}{120} [z^{-1}] \left(n^3 (B'_1(z))^5 + 60n B'_3(z) (B'_1(z))^2 + 120 B'_1(z) B'_4(z) (z) \right) z^{-n}. \quad (3)$$

В [9] получена формула

$$B(n, 5) = \frac{n!(n-3)(n-5)}{29030400} (265n^5 + 2680n^4 - 17157n^3 - 82816n^2 + 335252n + 351456).$$

Так как эйлеров унициклический блок — это простой цикл, то $B(n, 1) = \frac{(n-1)!}{2}$. В [7]

доказано, что $B(n, 2) = 0$, $B(n, 3) = \frac{n!}{288} (n-3)(n-4)(n+7)$, а в [8] найдена формула

$$B(n, 4) = \frac{n!}{5760} (n-2)(n-4)(n-5)(n^2 + 11n + 18).$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} B_1(z) &= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2} (n-1)! \frac{z^n}{n!}, \quad B'_1(z) = \frac{z^2}{2(1-z)}, \quad B'_2(z) = 0, \\ B_3(z) &= \sum_{n=5}^{\infty} \frac{n!}{288} (n-3)(n-4)(n+7) \frac{z^n}{n!} = \frac{z^5(4-3z)}{48(1-z)^4}, \quad B'_3(z) = \frac{3z^6 - 11z^5 + 10z^4}{24(1-z)^5}, \\ B_4(z) &= \sum_{n=6}^{\infty} B(n, 4) \frac{z^n}{n!} = \frac{8z^6 - 12z^7 + 6z^8 - z^9}{48(1-z)^6}, \quad B'_4(z) = \frac{z^9 - 7z^8 + 20z^7 - 28z^6 + 16z^5}{16(1-z)^7}. \end{aligned}$$

Суммирование рядов для $B_3(z)$ и $B_4(z)$, а также дифференцирование выполнено с помощью пакета программ Maple.

Представляя выражение (3) в виде

$$E_5(n) = B(n, 5) + P(n) + Q(n) + R(n), \quad (4)$$

с помощью известного разложения $(1-z)^{-p-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+p}{p} z^i$ ([12, с. 141]) получим

$$\begin{aligned} P(n) &= \frac{n!}{120} n^3 [z^{-1}] (B'_1(z))^5 z^{-n} = \frac{n!n^3}{120} [z^{-1}] \frac{z^{10}}{32(1-z)^5} z^{-n} = \\ &= \frac{n!n^3}{3840} [z^{-1}] \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+4}{4} z^{i+10-n} = \frac{n!n^3}{3840} \binom{n-7}{4} = \frac{n!n^3}{92160} (n-7)(n-8)(n-9)(n-10); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q(n) &= \frac{n!}{120} [z^{-1}] 60n B'_3(z) (B'_1(z))^2 z^{-n} = \frac{n!n}{192} [z^{-1}] \frac{3z^{10} - 11z^9 + 10z^8}{(1-z)^9} z^{-n} = \\
&= \frac{n!n}{192} [z^{-1}] \sum_{i=0}^{\infty} \left(3 \binom{i+6}{6} z^{i+10-n} - 11 \binom{i+6}{6} z^{i+9-n} + 10 \binom{i+6}{6} z^{i+8-n} \right) = \\
&= \frac{n!n}{192} \left(3 \binom{n-5}{6} - 11 \binom{n-4}{6} + 10 \binom{n-3}{6} \right) = \\
&= \frac{n!n}{69120} (n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n^2 + 8n - 3);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(n) &= \frac{n!}{120} [z^{-1}] 120 B'_1(z) B'_4(z) (z) z^{-n} = \frac{n!}{32} [z^{-1}] \frac{z^{11} - 7z^{10} + 20z^9 - 28z^8 + 16z^7}{(1-z)^8} z^{-n} = \\
&= \frac{n!}{32} [z^{-1}] \sum_{i=0}^{\infty} \left(\binom{i+7}{7} z^{i+11-n} - 7 \binom{i+7}{7} z^{i+10-n} + 20 \binom{i+7}{7} z^{i+9-n} - \right. \\
&\quad \left. - 28 \binom{i+7}{7} z^{i+8-n} + 16 \binom{i+7}{7} z^{i+7-n} \right) = \frac{n!}{32} \left(\binom{n-5}{7} - 7 \binom{n-4}{7} + \right. \\
&\quad \left. + 20 \binom{n-3}{7} - 28 \binom{n-2}{7} + 16 \binom{n-1}{7} \right) = \\
&= \frac{n!}{161280} (n-5)(n-6)(n-7)(2n^4 + 15n^3 - 35n^2 - 30n + 48).
\end{aligned}$$

Подставляя в (4) выражения для $B(n, 5)$, $P(n)$, $Q(n)$, $R(n)$, получим формулу (1). ■

В таблице представлены числа $E_5(n)$, вычисленные с помощью теоремы 1 и пакета программ Maple. При $n = 6$ пентациклический граф является блоком, поэтому $E_5(6) = B(6, 5) = 90$.

n	6	7	8	9	10	11	12
$E_5(n)$	90	5061	199528	6519492	191434320	5317946855	143972662680

2. Асимптотика и вероятность

Из теоремы 1 сразу получаем следствие 1.

Следствие 1. При $n \rightarrow \infty$ верно асимптотическое равенство

$$E_5(n) \sim \frac{17n^7}{362880} n!.$$

Зададим на множестве помеченных эйлеровых графов с n вершинами равномерное распределение вероятностей.

Следствие 2. Пусть P_n — вероятность того, что помеченный эйлеров пентациклический граф с n вершинами является блоком. При $n \rightarrow \infty$ верна асимптотика $P_n \sim \frac{53}{272}$.

Доказательство. $P_n = \frac{B(n, 5)}{E_5(n)} \sim \frac{265}{29030400} \frac{362880}{17} = \frac{53}{272}$ при $n \rightarrow \infty$. ■

Кактусом называется связный граф, в котором нет рёбер, лежащих более чем на одном простом цикле [1, с. 93]. Все блоки кактуса — рёбра или простые циклы.

Следствие 3. Пусть $\bar{P}_n$ — вероятность того, что помеченный эйлеров пентациклический граф с n вершинами является кактусом. При $n \rightarrow \infty$ верна асимптотика $\bar{P}_n \sim \frac{63}{272}$.

Доказательство. Пусть $Ca(n, k)$ — число помеченных эйлеровых k -циклических кактусов с n вершинами. В [10] получена формула

$$Ca(n, k) = \frac{(n-1)!n^{k-1}}{k!2^k} \binom{n-k-1}{k-1},$$

из которой имеем $Ca(n, 5) = \frac{n^3 n!}{3840} \binom{n-7}{4} = \frac{n!n^3}{92160} (n-7)(n-8)(n-9)(n-10) \sim \frac{n!n^7}{92160}$,
 $\bar{P}_n = \frac{Ca(n, 5)}{E_5(n)} \sim \frac{n!n^7}{92160} \frac{362880}{17n!n^7} = \frac{63}{272}$ при $n \rightarrow \infty$. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. М.: Мир, 1977. 324 с.
2. Kumar A. A study on Euler graph and it's applications // Int. J. Math. Trends Technol. 2017. V. 43. No. 1. P. 9–14.
3. Pancoska P., Moravek Z., and Moll U. M. Rational design of DNA sequences for nanotechnology, microarrays and molecular computers using Eulerian graphs // Nucleic Acids Res. 2004. V. 32. No. 15. P. 4630–4645.
4. Amudha P., Sagayaraj A. C. C., and Sheela A. C. S. An application of graph theory in cryptography // Int. J. Pure Appl. Math. 2018. V. 119. No. 13. P. 375–383.
5. Read R. C. Euler graphs on labelled nodes // Canad. J. Math. 1962. V. 14. P. 482–486.
6. Tazawa S. Enumeration of labelled 2-connected Euler graphs // J. Combinat. Inform. System Sci. 1998. V. 23. No. 1–4. P. 407–414.
7. Воблый В. А. Перечисление помеченных связных бициклических и трициклических эйлеровых графов // Матем. заметки. 2012. Т. 92. № 5. С. 678–683.
8. Воблый В. А., Мелешко А. К. Перечисление помеченных эйлеровых тетрациклических графов // Дискретн. анализ и исслед. операций. 2014. Т. 21. № 5. С. 17–22.
9. Воблый В. А. О числе помеченных эйлеровых пентациклических блоков // Материалы заочного семинара XIX Международ. конф. «Проблемы теоретической кибернетики». Казань, 2020. С. 41–44.
10. Воблый В. А. О перечислении помеченных связных графов с заданными числами вершин и ребер // Дискретн. анализ и исслед. операций. 2016. Т. 3. № 2. С. 5–20.
11. Гульдден Я., Джексон Д. Перечислительная комбинаторика. М.: Наука, 1990. 504 с.
12. Риордан Дж. Комбинаторные тождества. М.: Наука, 1981. 256 с.
13. Воблый В. А. Второе соотношение Риддела и следствия из него // Дискретн. анализ и исслед. операций. 2019. Т. 26. № 1. С. 20–32.
14. Mc Diarmid C. and Scott A. A random graphs from a block stable class. II // Europ. J. Combin. 2016. V. 58. P. 96–106.
15. Воблый В. А., Мелешко А. К. Перечисление помеченных полноблочно-кактусных графов // Дискретн. анализ и исслед. операций. 2014. Т. 21. № 2. С. 24–32.

REFERENCES

1. Harary F. and Palmer E. M. Graphical Enumeration. N.Y., London, Academic Press, 1973.
2. Kumar A. A study on Euler graph and it's applications. Int. J. Math. Trends Technol., 2017, vol. 43, no. 1, pp. 9–14.

3. *Pancoska P., Moravek Z., and Moll U. M.* Rational design of DNA sequences for nanotechnology, microarrays and molecular computers using Eulerian graphs. *Nucleic Acids Res.*, 2004, vol. 32, no. 15, pp. 4630–4645.
4. *Amudha P., Sagayaraj A. C. C., and Sheela A. C. S.* An application of graph theory in cryptography. *Int. J. Pure Appl. Math.*, 2018, vol. 119, no. 13, pp. 375–383.
5. *Read R. C.* Euler graphs on labelled nodes. *Canad. J. Math.*, 1962, vol. 14, pp. 482–486.
6. *Tazawa S.* Enumeration of labelled 2-connected Euler graphs. *J. Combinat. Inform. System Sci.*, 1998, vol. 23, no. 1–4, pp. 407–414.
7. *Voblyi V. A.* Perechislenie pomechennyh svjaznyh biciklicheskih i triciklicheskih jejleryovyh grafov [Enumeration of labeled connected bicyclic and tricyclic Eulerian graphs]. *Matematicheskie Zametki*, 2012, vol. 92, no. 5, pp. 678–683. (in Russian)
8. *Voblyi V. A. and Meleshko A. K.* Perechislenie pomechennyh jejleryovyh tetraciklicheskih grafov [Enumeration of labeled Eulerian tetracyclic graphs]. *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, 2014, vol. 21, no. 5, pp. 17–22. (in Russian)
9. *Voblyi V. A.* O chisle pomechennyh jejleryovyh pentaciklicheskih blokov [On the number of labeled Eulerian pentacyclic blocks]. *Proc. Intern. Conf. “Problemy Teoreticheskoy Kibernetiki”*, Kazan’, 2020, pp. 41–44. (in Russian)
10. *Voblyi V. A.* Enumeration of labeled connected graphs with given order and size. *J. Appl. Ind. Math.*, 2016, vol. 10, no. 2, pp. 302–310.
11. *Goulden I. P. and Jackson D. M.* *Combinatorial Enumeration*. Dover Publ., 2004.
12. *Riordan J.* *Combinatorial Identities*. New York, Wiley, 1968.
13. *Voblyi V. A.* The second Riddell relation and its consequences. *J. Appl. Ind. Math.*, 2019, vol. 13, no. 1, pp. 168–174.
14. *Mc Diarmid C. and Scott A.* A random graphs from a block stable class. II. *Europ. J. Combin.*, 2016, vol. 58, pp. 96–106.
15. *Voblyi V. A. and Meleshko A. K.* The number of labeled block-cactus graphs. *J. Appl. Industr. Math.*, 2014, vol. 8, no. 3, pp. 422–427.