УДК 512.552 MSC: 15B99, 16S50
DOI 10.17223/19988621/67/5

Ц.Д. Норбосамбуев, Е.А. Тимошенко

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ 3-ХОРОШИХ КОЛЕЦ ФОРМАЛЬНЫХ МАТРИЦ[1]

Исследуются кольца формальных матриц со значениями в данном кольце и с матрицей множителей, состоящей из 0 и 1. При указанных ограничениях кольцо формальных матриц может быть представлено как расщепляющееся расширение одного своего нильпотентного идеала с помощью произведения обычных колец матриц, а вопрос об обратимости формальной матрицы сводится к вопросу об обратимости обычных матриц над кольцом. При некоторых дополнительных условиях, наложенных на матрицу множителей, удается воспользоваться известной теоремой Хенриксена и доказать, что всякий элемент кольца формальных матриц представляет собой сумму трех обратимых элементов этого кольца. В конце мы приводим примеры таких колец формальных матриц порядка 4 и 5.

Ключевые слова: *кольцо*, *хорошее кольцо*, *кольцо формальных матриц.*

В [1] и [2] рассматривался класс колец формальных матриц, для которых было описано строение их групп автоморфизмов. В данной статье показано, что кольца формальных матриц этого (и даже в некотором смысле более широкого) класса будут 3-хорошими.

Пусть k – натуральное число, $k \geq 2$. Напомним [3], что элемент кольца называется *k-хорошим*, если он представим в виде суммы k обратимых элементов этого кольца; кольцо называют *k-хорошим*, если все его элементы k-хорошие. Изучению колец, которые аддитивно порождаются своими обратимыми элементами, посвящено большое количество работ. Хороший обзор исследований по этой теме дан в статье [4].

Далее R – произвольное ассоциативное кольцо с единицей, $M(n, R)$ – кольцо всех $(n \times n)$-матриц над R.

1. Кольца формальных матриц

Изучению произвольных колец формальных матриц также посвящено множество работ (см., например, [1, 2, 5–12]).

Понятия формальной матрицы и кольца формальных матриц берут свое начало в работах японского математика К. Мориты. В 1958 году в статье [8] он ввел объект, который позже был назван *контекстом Мориты*.

Контекст Мориты – это набор $(R, M, N, S, \varphi, \psi)$, состоящий из произвольных колец R и S, бимодулей ${}_RM_S$ и ${}_SN_R$ и определенным образом связанных между собой бимодульных гомоморфизмов φ и ψ. Морита пришел к нему при изучении контравариантных функторов D_1 и D_2 между категориями модулей *Mod-R* и *Mod-S*, таких, что выполняются условия $D_1D_2 \approx Id_{Mod\text{-}R}$ и $D_2D_1 \approx Id_{Mod\text{-}S}$ (позже им было

[1] Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для молодых ученых – докторов наук МД-108.2020.1.

доказано, что на самом деле это функторы Hom). Контексты Мориты интересны и сами по себе, и как очень полезный инструмент обобщения в теории колец. Эта тема заслуженно привлекает внимание алгебраистов уже более полувека. Подробнее с историей развития данного направления исследований можно познакомиться в обзорной статье [9]; в ней же можно найти ссылки на наиболее важные работы по теме.

По данному контексту Мориты всегда можно построить кольцо матриц вида

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \,\middle|\, r \in R, m \in M, n \in N, s \in S \right\},$$

называемое *кольцом контекста Мориты* или *кольцом формальных матриц*. Понятия формальной матрицы и кольца формальных матриц естественным образом можно расширить на случай произвольного порядка ≥ 2.

Нас интересует лишь один частный случай – кольца формальных матриц со значениями в данном кольце R. Впервые такие кольца появились в работе П.А. Крылова [7]. Они устроены следующим образом.

Пусть K – кольцо формальных матриц порядка $n \geq 2$ (см. [5, 6]), в котором все стоящие на главной диагонали кольца $R_1, R_2, \ldots, R_n$ совпадают с некоторым кольцом R, а в качестве R_i-R_j-бимодулей M_{ij} берется R-R-бимодуль ${}_RR_R$. Далее, пусть $\varphi_{ijk}: R \otimes_R R \to R$, где $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, – бимодульные гомоморфизмы, определяющие K (в произвольных кольцах формальных матриц отображение φ_{ijk} представляет собой гомоморфизм $M_{ij} \otimes_{R_j} M_{jk} \to M_{ik}$). Обозначим $s_{ijk} = \varphi_{ijk}(1 \otimes 1)$ для любых $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Тогда $x \circ y = \varphi_{ijk}(x \otimes y) = x\varphi_{ijk}(1 \otimes 1)y = xs_{ijk}y$ (здесь мы считаем, что элементы x и y стоят в своих матрицах в позициях (i, j) и (j, k) соответственно). Справедливы также равенства $xs_{ijk} = \varphi_{ijk}(x \otimes 1) = \varphi_{ijk}(1 \otimes x) = s_{ijk}x$, т.е. s_{ijk} – центральный элемент кольца R. В итоге мы получаем, что $x \circ y = s_{ijk}xy$. Далее, несложно убедиться в том, что $s_{iij} = 1 = s_{ijj}$ для любых $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Полагая $x = y = z = 1$ в соотношении ассоциативности $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$, получаем, что $s_{ijl} \cdot s_{jkl} = s_{ijk} \cdot s_{ikl}$ для всех $i, j, k, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Полученные равенства

$$s_{iij} = 1 = s_{ijj} \text{ и } s_{ijl} \cdot s_{jkl} = s_{ijk} \cdot s_{ikl} \tag{1}$$

будем называть *основными тождествами*.

Пусть теперь $\Sigma = \{s_{ijk} \mid i, j, k = 1, 2, \ldots, n\}$ – некоторое множество центральных элементов кольца R, удовлетворяющих равенствам (1). Для произвольных индексов $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ можно задать бимодульный гомоморфизм $\varphi_{ijk}: R \otimes_R R \to R$, полагая $x \circ y = \varphi_{ijk}(x \otimes y) = s_{ijk}xy$. Указанные гомоморфизмы определяют кольцо формальных матриц порядка n. Таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие между кольцами рассматриваемого вида и множествами центральных элементов, удовлетворяющих основным тождествам (1). Подобные кольца формальных матриц называем *кольцами формальных матриц со значениями в данном кольце* R. Будем обозначать их через $M(n, R, \Sigma)$; множество Σ будем называть *системой множителей кольца* $M(n, R, \Sigma)$, а сами элементы s_{ijk} – *множителями кольца* $M(n, R, \Sigma)$. Легко убедиться, что если кольцо R коммутативно, то $M(n, R, \Sigma)$ представляет собой R-алгебру.

Для произвольных матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ из $M(n, R, \Sigma)$ имеем

$$AB = C = (c_{ij}), \text{ где } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} s_{ikj}a_{ik}b_{kj}.$$

Если все множители s_{ijk} равны 1, то, как несложно видеть, получается кольцо обычных матриц $M(n,R)$.

Полагая $k=i$ в основных тождествах (1), мы получаем равенство $s_{iji}=s_{ijl}\cdot s_{jil}$. Значит, $s_{jij}=s_{jil}\cdot s_{ijl}$ и поэтому $s_{iji}=s_{jij}$. Теперь, взяв $l=j$ в тождествах (1), получаем $s_{jkj}=s_{ijk}\cdot s_{ikj}$. Следовательно, $s_{iji}=s_{lij}\cdot s_{lji}$. Таким образом, справедливы соотношения $s_{iji}=s_{jij}=s_{ijl}\cdot s_{jil}=s_{lij}\cdot s_{lji}$. Из них можно при помощи перестановки индексов получить следующие тождества:

$$\begin{aligned} s_{iji}=s_{jij}=s_{ijk}\cdot s_{jik}=s_{kij}\cdot s_{kji},\\ s_{jkj}=s_{kjk}=s_{jki}\cdot s_{kji}=s_{ijk}\cdot s_{ikj},\\ s_{kik}=s_{iki}=s_{kij}\cdot s_{ikj}=s_{jki}\cdot s_{jik}. \end{aligned} \tag{2}$$

Если s_{iji} и s_{jkj} – неделители нуля, то, исходя из (2), элементы s_{jik} и s_{jki} тоже будут неделителями нуля, а значит, s_{kik} – неделитель нуля. Таким образом, справедлив следующий факт:

Лемма 1. Для множителей s_{iji}, s_{jkj} и s_{kik} (где $i,j,k\in\{1,2,\ldots,n\}$) из системы Σ имеет место ровно одна из следующих возможностей:

1) все три элемента – неделители нуля;

2) какие-то два из трех элементов – делители нуля, а третий – неделитель нуля;

3) все три элемента – делители нуля. ■

С данным кольцом формальных матриц $M(n,R,\Sigma)$ мы можем связать *матрицу множителей* $S=(s_{iji})$. Из (2) следует, что матрица S является симметрической.

2. Один класс 3-хороших колец формальных матриц над данным кольцом

В работах [1] и [2] был выделен один класс алгебр формальных матриц, у которых оказалось возможным дать описание их групп автоморфизмов. Это достигалось за счет того, что алгебра формальных матриц представлялась как расщепляющееся расширение нильпотентного идеала I с помощью прямой суммы обычных колец матриц. Ниже мы рассмотрим близкий класс колец формальных матриц, отказавшись от требования коммутативности R и ограничения $I\cdot I=0$.

Существует несколько способов получения систем множителей из уже имеющихся для колец формальных матриц со значениями в данном кольце. Приведем один такой способ. Пусть $\Sigma=\{s_{ijk}\mid i,j,k=1,2,\ldots,n\}$ – система множителей кольца формальных матриц $K=M(n,R,\Sigma)$, а τ – произвольная подстановка на множестве $\{1,2,\ldots,n\}$. Как определить действие подстановки τ на системе множителей Σ так, чтобы получившееся множество оказалось системой множителей для некоторого кольца K'?

Для матрицы $A=(a_{ij})$ из кольца $K=M(n,R,\Sigma)$ положим $\tau A=(a_{\tau(i)\tau(j)})$; таким образом, мы считаем, что в матрице τA в позиции (i,j) стоит элемент $a_{\tau(i)\tau(j)}$. Далее рассмотрим множество $\{s_{\tau(i)\tau(j)\tau(k)}\mid i,j,k=1,2,\ldots,n\}$. Можно заметить, что данное множество тоже будет системой множителей, поскольку оно удовлетворяет тождествам (1). Обозначим получившуюся новую систему множителей через $\tau\Sigma$. Для этой системы можно построить новое кольцо формальных матриц $\tau K=M(n,R,\tau\Sigma)$. Нетрудно видеть, что сопоставление $A\to\tau A$, где $A=(a_{ij})$ и $\tau A=(a_{\tau(i)\tau(j)})$, осуществляет изоморфизм между кольцами K и τK.

Далее будем рассматривать более узкий класс колец формальных матриц: нас интересуют только такие кольца $K=M(n,R,\Sigma)$, у которых система множителей Σ может содержать лишь 1 и 0.

Введем на множестве чисел $\{1,2,\dots,n\}$ бинарное отношение «~», полагая $i\sim j$ тогда и только тогда, когда множитель s_{iji} равен единице. Из леммы 1 следует, что ситуация $s_{iji}=s_{jkj}=1$, $s_{kik}=0$ невозможна, а значит, это бинарное отношение является отношением эквивалентности.

Построим подстановку τ следующим образом: в верхней строке расположим числа $1,2,\dots,n$ в порядке возрастания, а нижнюю строку составим из классов эквивалентности отношения «~», записанных в произвольном порядке (внутри классов входящие в них индексы располагаем также в произвольном порядке). Тогда в матрице $\tau S=(s_{\tau(i)\tau(j)\tau(i)})$ на главной диагонали стоят квадратные блоки, состоящие только из единиц; эти блоки находятся во взаимно однозначном соответствии с классами эквивалентности относительно «~» (порядок такого блока равен числу элементов в соответствующем классе эквивалентности). Все позиции в матрице τS вне рассматриваемых блоков заняты нулями.

Сопоставление $A\to\tau A$, где $A\in K$, задает изоморфизм между кольцами K и τK. Таким образом, мы можем с самого начала считать, что матрица множителей S кольца K имеет указанный выше блочный вид. Пусть количество блоков на главной диагонали матрицы S равно m и эти блоки имеют порядки n_1, n_2, …, n_m. Ясно, что $n_1+n_2+\ldots+n_m=n$.

Нам понадобится следующий простой факт:

Лемма 2. а) Если индексы $i,j\in\{1,2,\dots,n\}$ таковы, что $i\sim j$, то $s_{ijk}=1=s_{kij}$ для всех $k\in\{1,2,\dots,n\}$.

б) Если индексы $i,j,k\in\{1,2,\dots,n\}$ таковы, что $i\sim j$ и k не эквивалентно i и j, то справедливо равенство $s_{ikj}=0$.

Доказательство. Воспользуемся тождествами (2).

а) Поскольку $s_{iji}=1$, то с учетом первого из тождеств мы имеем $s_{ijk}\neq 0$ и $s_{kij}\neq 0$, отсюда $s_{ijk}=1=s_{kij}$.

б) Так как $1=s_{iji}=s_{kij}\cdot s_{kji}$, то $s_{kij}\neq 0$, т.е. $s_{kij}=1$. Тогда $0=s_{kik}=s_{kij}\cdot s_{ikj}=s_{ikj}$. ■

На главной диагонали каждой матрицы $A\in K$ мы выделим блоки A_1, A_2, …, A_m того же порядка, что и блоки на главной диагонали матрицы S (и в той же последовательности). Тогда, как видно из пункта а) леммы 2, для всякого фиксированного v блоки A_v всех матриц из K образуют кольцо обычных матриц $K_v=M(n_v,R)$.

Через I обозначим множество всех матриц $A\in K$, у которых описанные выше блоки A_1, A_2, …, A_m целиком состоят из нулей; через L – множество всех матриц $A\in K$, у которых все элементы, находящиеся за пределами блоков A_1, A_2, …, A_m, равны 0. Легко видеть, что L – подкольцо кольца K, изоморфное прямой сумме $K_1\oplus K_2\oplus\ldots\oplus K_m$ (далее будем отождествлять L с этой прямой суммой). Заметим также, что $K=L\oplus I$, т.е. всякая матрица $A\in K$ единственным образом представима в виде суммы $A=C+D$, где $C\in L$ и $D\in I$.

Предложение 3. Множество I является идеалом кольца K.

Доказательство. Ясно, что $(I,+)$ является подгруппой в $(K,+)$. Зафиксируем произвольные матрицы $A=(a_{ij})\in I$ и $X=(x_{ij})\in K$.

Допустим, что $XA\notin I$. Тогда существуют индексы $i,j\in\{1,2,\dots,n\}$, такие, что позиция (i,j) находится в одном из блоков A_1, A_2, …, A_m и элемент матрицы XA, стоящий в позиции (i,j), отличен от 0. В свою очередь, это означает, что для некоторого $k\in\{1,2,\dots,n\}$ выполнено $s_{ikj}x_{ik}a_{kj}\neq 0$. Из неравенства $a_{kj}\neq 0$ следует, что индексы j и k не эквивалентны. Так как $i\sim j$, то ввиду пункта б) леммы 2 получаем $s_{ikj}=0$, что невозможно. Итак, I – левый идеал в K.

Если $AX\notin I$, то аналогичным образом показывается, что существуют индексы $i,j,k\in\{1,2,\dots,n\}$, такие, что $i\sim j$ и $s_{ikj}a_{ik}x_{kj}\neq 0$. Из $a_{ik}\neq 0$ вытекает, что индексы i

и k не эквивалентны. Поэтому в силу леммы 2 вновь имеем $s_{ikj} = 0$, что приводит к противоречию. Следовательно, I – правый идеал в K. ■

Предложение 4. Справедливо равенство $I^m = 0$.

Доказательство. Допустим, что выполняется $B_1, B_2, \dots, B_m \in I$ и $B_1 B_2 \dots B_m \neq 0$. В силу дистрибутивности операции умножения относительно сложения найдутся индексы $i_0, i_1, \dots, i_m \in \{1, 2, \dots, n\}$, такие, что для элементов $b_1, b_2, \dots, b_m \in R$, стоящих в матрицах B_1, B_2, $\dots$, B_m в позициях (i_0, i_1), (i_1, i_2), ..., (i_{m-1}, i_m) соответственно, выполнено $b_1 \circ b_2 \circ \dots \circ b_m \neq 0$ (тогда, в частности, при всех $q \in \{1, 2, \dots, m\}$ имеем $b_q \neq 0$). Поскольку количество классов эквивалентности в $\{1, 2, \dots, n\}$ равно m, то найдутся числа u и v, для которых $0 \le u < v \le m$ и $i_u \sim i_v$. Из $b_v \neq 0$ следует, что i_{v-1} не эквивалентно i_v и $u < v - 1$.

Применяя пункт б) леммы 2 к $i = i_u$, $j = i_v$, $k = i_{v-1}$, мы получаем, что множитель $w = s_{i_u i_{v-1} i_v}$ равен 0. Тогда $b_{u+1} \circ \dots \circ b_{v-1} \circ b_v = w(b_{u+1} \circ \dots \circ b_{v-1}) b_v = 0$, что противоречит условию $b_1 \circ b_2 \circ \dots \circ b_m \neq 0$. Таким образом, $I^m = 0$. ■

Мы получили, что кольцо K представляет собой расщепляющееся расширение нильпотентного идеала I с помощью кольца L.

Теорема 5. Пусть $A \in K$ и $A = C + D$, где $C \in L$ и $D \in I$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) Матрица A обратима в кольце K.

2) Матрица C обратима в кольце L.

Доказательство. $1) \Rightarrow 2)$. Запишем $A^{-1} = C' + D'$, где $C' \in L$ и $D' \in I$. Заметим, что $CC' + (CD' + DC' + DD') = AA^{-1} = E \in L$ (здесь E – единичная матрица). Так как L и I являются соответственно подкольцом и идеалом в K, то $CD' + DC' + DD' \in I$ и $CC' \in L$, а значит, $CC' = E$. Аналогично доказывается, что $C'C = E$. Следовательно, C – обратимая в L матрица.

$2) \Rightarrow 1)$. Положим $B = C^{-1} - C^{-1}(DC^{-1}) + C^{-1}(DC^{-1})^2 - \dots + (-1)^{m-1} C^{-1}(DC^{-1})^{m-1}$. Поскольку матрицы DC^{-1} и $C^{-1}D$ лежат в I, то $(DC^{-1})^m = 0 = (C^{-1}D)^m$ и, значит,

$$AB = AC^{-1}\big(E - DC^{-1} + (DC^{-1})^2 - \dots + (-1)^{m-1}(DC^{-1})^{m-1}\big) =$$
$$= (E + DC^{-1})\big(E - DC^{-1} + (DC^{-1})^2 - \dots + (-1)^{m-1}(DC^{-1})^{m-1}\big) = E,$$

$$BA = \big(E - C^{-1}D + (C^{-1}D)^2 - \dots + (-1)^{m-1}(C^{-1}D)^{m-1}\big)C^{-1}A =$$
$$= \big(E - C^{-1}D + (C^{-1}D)^2 - \dots + (-1)^{m-1}(C^{-1}D)^{m-1}\big)(E + C^{-1}D) = E.$$

Следовательно, матрица A обратима в K. ■

В прямой сумме $L = K_1 \oplus K_2 \oplus \dots \oplus K_m$ каждое K_v – это обычное кольцо матриц, $K_v = M(n_v, R)$. С учетом результатов М. Хенриксена [13] мы получаем следующее утверждение:

Теорема 6. Пусть у всех колец-блоков K_v из разложения $L = K_1 \oplus K_2 \oplus \dots \oplus K_m$ порядки n_v строго больше единицы. Тогда K – 3-хорошее кольцо.

Доказательство. Пусть $A \in K$ и $A = C + D$, где $C \in L$ и $D \in I$. Поскольку все K_v являются 3-хорошими кольцами [13, теорема 3], то $C = C_1 + C_2 + C_3$, где C_1, C_2, C_3 – обратимые в L матрицы. Тогда матрицу A можно представить в виде суммы трех матриц C_1, C_2 и $C_3 + D$, каждая из которых обратима в K ввиду теоремы 5. ■

Но если порядок хотя бы одного из слагаемых K_v равен 1 (т.е. когда мы имеем само кольцо R в качестве одного из блоков), то все будет зависеть от «хорошести» кольца R. Например, как показано в [10, теорема 1], если R – k-хорошее кольцо, то и кольцо K будет таковым.

В завершение мы рассмотрим некоторые частные случаи (по-прежнему считая, что система множителей Σ содержит только 1 и 0).

Если $K = M(n, R, \Sigma)$ и множество $\{1, 2, \ldots, n\}$ представляет собой единственный класс эквивалентности, то K совпадает с обычным матричным кольцом $M(n, R)$ и ввиду теоремы Хенриксена является 3-хорошим для каждого $n \geq 2$. Наименьшее n, для которого возможно нетривиальное разбиение множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ на классы эквивалентности, каждый из которых содержит хотя бы два индекса, очевидно, равно 4. Если $K = M(4, R, \Sigma)$ или $K = M(5, R, \Sigma)$, а матрица множителей S кольца K может быть представлена в виде

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ или } S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

то по теореме 6 кольцо K является 3-хорошим.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крылов П.А.*, *Норбосамбуев Ц.Д.* Автоморфизмы алгебр формальных матриц // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59. № 5. С. 1116–1127. DOI: 10.17377/smzh.2018.59.512.
2. *Крылов П.А.*, *Норбосамбуев Ц.Д.* Группа автоморфизмов одного класса алгебр формальных матриц // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 53. С. 16–21. DOI: 10.17223/19988621/53/2.
3. *Vámos P.* 2-good rings // Quart. J. Math. 2005. V. 56. P. 417–430. DOI: 10.1093/qmath/hah046.
4. *Srivastava A.K.* A survey of rings generated by units // Ann. Fac. Sci. Toulouse, Math. 2010. V. 19. P. 203–213. DOI: 10.5802/afst.1281.
5. *Крылов П.А.*, *Туганбаев А.А.* Формальные матрицы и их определители // Фундам. и прикл. математика. 2014. Т. 19. № 1. С. 65–119.
6. *Крылов П.А.*, *Туганбаев А.А.* Кольца формальных матриц и модули над ними. М.: МЦНМО, 2017.
7. *Крылов П.А.* Об изоморфизме колец обобщенных матриц // Алгебра и логика. 2008. Т. 47. № 4. С. 456–463.
8. *Morita K.* Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition // Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A. 1958. V. 6. P. 83–142.
9. *Loustaunau P.*, *Shapiro J.* Morita contexts // Non-Commutative Ring Theory (Lecture Notes in Mathematics, V. 1448). Springer, 1990. P. 80–92. DOI: 10.1007/BFb0091253.
10. *Норбосамбуев Ц.Д.* О суммах диагональных и обратимых обобщенных матриц // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 4(36). С. 34–40. DOI: 10.17223/19988621/36/4.
11. *Норбосамбуев Ц.Д.* 2-хорошие диагональные формальные матрицы над кольцом целых чисел // Всероссийская молодежная научная конференция «Все грани математики и механики». Сборник статей. Томск: Изд. дом ТГУ, 2016. С. 6–12.
12. *Норбосамбуев Ц.Д.* Ранг формальной матрицы. Система формальных линейных уравнений. Делители нуля // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 52. С. 5–12. DOI: 10.17223/19988621/52/1.
13. *Henriksen M.* Two classes of rings generated by their units // J. Algebra. 1974. V. 31. No. 1. P. 182–193. DOI: 10.1016/0021-8693(74)90013-1.

Статья поступила 08.04.2020 г.

Norbosambuev T.D., Timoshenko E.A. (2020) ON A CLASS OF 3-GOOD FORMAL MATRIX RINGS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 67. pp. 55–62

DOI 10.17223/19988621/67/5

Keywords: ring, good ring, formal matrix ring

Let R be an associative ring with unity. An element $b \in R$ is said to be *k-good* if it can be represented as a sum of k invertible elements of R; if all elements of R are *k-good*, we say that R is a *k-good ring*. We show that, under certain conditions, formal matrix rings over a given ring are 3-good.

Let $n \geq 2$. Suppose that $\Sigma = \{s_{ijk} \mid i,j,k = 1,2,\ldots,n\}$ is a set of central elements of R such that $s_{iij} = 1 = s_{ijj}$ and $s_{ijl} \cdot s_{jkl} = s_{ijk} \cdot s_{ikl}$ for all $i,j,k,l \in \{1,2,\ldots,n\}$. If $A = (a_{ij})$ and $B = (b_{ij})$ are two matrices of order n over R, we define

$$AB = C = (c_{ij}), \text{ where } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} s_{ikj} a_{ik} b_{kj} .$$

All matrices of order n over R form an associative ring with unity under the usual addition and the multiplication defined above; this ring is denoted by K. We say that K is a *formal matrix ring of order n over R* (such rings were first introduced by P.A. Krylov).

We restrict ourselves to the case when $s_{ijk} \in \{0,1\}$ for every $i,j,k \in \{1,2,\ldots,n\}$ and let $i \sim j$ if and only if we have $s_{iji} = 1$. It can be shown that "$\sim$" is an equivalence relation on $\{1,2,\ldots,n\}$. Without loss of generality we may assume that if $i \sim j$ and $i < k < j$, then $i \sim k$. Let I be the set of all matrices $A = (a_{ij}) \in K$ such that $a_{ij} = 0$ when $i \sim j$ and L be the set of all matrices $A \in K$ such that $a_{ij} = 0$ when i and j are not equivalent. It is easy to see that $K = L \oplus I$.

Proposition 3. I is an ideal of the ring K.

Proposition 4. $I^m = 0$.

Theorem 5. Suppose that $A \in K$ and $A = C + D$ with $C \in L$, $D \in I$. Then the following are equivalent:

1) A is invertible in the ring K.

2) C is invertible in the ring L.

Theorem 6. If all equivalence classes of "$\sim$" have cardinalities ≥ 2, then K is a 3-good ring.

AMS Mathematical Subject Classification: 15B99, 16S50

Financial support. The research was supported by the President of the Russian Federation Grant for young Russian scientists MD-108.2020.1.

Tsyrendorzhi D. NORBOSAMBUEV (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: nstsddts@yandex.ru

Egor A. TIMOSHENKO (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tea471@mail.tsu.ru

REFERENCES

1. Krylov P.A., Norbosambuev T.D. (2018) Automorphisms of formal matrix algebras. *Siberian Mathematical Journal*. 59(5). pp. 885–893. DOI: 10.1134/S0037446618050129.
2. Krylov P.A., Norbosambuev T.D. (2018) Gruppa avtomorfizmov odnogo klassa algebr formal'nykh matrits [Group of automorphisms of one class of formal matrix algebras]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 53. pp. 16–21. DOI: 10.17223/19988621/53/2.
3. Vámos P. (2005) 2-good rings. *Quarterly Journal of Mathematics.* 56(3). pp. 417–430. DOI: 10.1093/qmath/hah046.

4. Srivastava A.K. (2010) A survey of rings generated by units. *Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse. Mathematiques.* 19. pp. 203–213. DOI: 10.5802/afst.1281.
5. Krylov P.A., Tuganbaev A.A. (2015) Formal matrices and their determinants. *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*). 211(3). pp. 341–380. DOI: 10.1007/s10958-015-2610-3.
6. Krylov P., Tuganbaev A. (2017) *Formal Matrices* (Algebra and Applications, V. 23). Springer. DOI: 10.1007/978-3-319-53907-2.
7. Krylov P.A. (2008) Isomorphism of generalized matrix rings. *Algebra and Logic.* 47(4). pp. 258–262. DOI: 10.1007/s10469-008-9016-y.
8. Morita K. (1958) Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition. *Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku*, *Section A*. 6. pp. 83–142.
9. Loustaunau P., Shapiro J. (1990) Morita contexts. *Non-Commutative Ring Theory* (*Lecture Notes in Mathematics, V. 1448*). Springer. pp. 80–92. DOI: 10.1007/BFb0091253.
10. Norbosambuev T.D. (2015) O summakh diagonal'nykh i obratimykh obobshchennykh matrits [On sums of diagonal and invertible formal matrices]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 4(36). pp. 34–40. DOI: 10.17223/19988621/36/4.
11. Norbosambuev T.D. (2016) 2-khoroshie diagonal’nye formal’nye matritsy nad kol'tsom tselykh chisel [2-good diagonal formal matrices over the ring of integers]. *All-Russia Youth Scientific Conference “Vse grani matematiki i mekhaniki”* (*sbornik statey*). *Tomsk*: *Izd. dom TGU*. pp. 6–12.
12. Norbosambuev T.D. (2018) Rang formal'noy matritsy. Sistema formal'nykh lineynykh uravneniy. Deliteli nulya [Rank of a formal matrix. System of formal linear equations. Zero divisors]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 52. pp. 5–12. DOI: 10.17223/19988621/52/1.
13. Henriksen M. (1974) Two classes of rings generated by their units. *Journal of Algebra.* 31(1). pp. 182–193. DOI: 10.1016/0021-8693(74)90013-1.

Received: April 8, 2020