

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

**УПРАВЛЕНИЕ,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И ИНФОРМАТИКА**

**TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE**

Научный журнал

2020

№ 53

**Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере
массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия
(свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-29497 от 27 сентября 2007 г.)**

Подписной индекс в объединённом каталоге «Пресса России» 44031

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий,
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций
на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук»,
Высшей аттестационной комиссии

Founder – Tomsk State University

EDITORIAL BOARD

Alexander Gortsev – Editor-in-Chief, Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied Mathematics Department Tomsk State University. Tel: +73822529599

Valery Smagin – Deputy Editor-in-Chief, Doctor of Sc., Prof. of the Applied Mathematics Department Tomsk State University. Tel: +73822529599

Lyudmila Nezhelskaya – Executive Editor, Doctor of Sc., Prof. of the Applied Mathematics Department Tomsk State University. E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

Sergey Vorobeychikov – Doctor of Sc., Prof. of the System Analysis and Mathematical Modeling Department Tomsk State University

Vladimir Vishnevsky – Doctor of Sc., Prof. Head of the laboratory Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia).

Gennady Koshkin – Doctor of Sc., Prof. of the System Analysis and Mathematical Modeling Department Tomsk State University

Yury Kostyuk – Doctor of Sc., Prof. of the Theoretical Informatics Department Tomsk State University

Anjela Matrosova – Doctor of Sc., Prof. of the Programming Department Tomsk State University

Anatoly Nazarov – Doctor of Sc., Prof., Head of the Probability Theory and Mathematical Statistics Department Tomsk State University

Konstantin Samouylov – Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied Probability and Informatics Department RUDN University (Moscow, Russia)

Eugene Semenkina – Doctor of Sc., Prof. System Analysis and Operations Research Department Reshetnev Siberian State University of Science and Technology (Krasnoyarsk, Russia)

Sergey Sushchenko – Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied of Information Department Tomsk State University

Mais Farkhadov – Doctor of Sc., Head of the laboratory Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia).

Gurami Tsitsiasvili – Doctor of Sc., Prof., Chief researcher Institute for Applied Mathematics Far Eastern Branch of RAS, Prof. Far Eastern Federal University (Vladivostok, Russia)

Editorial address:

Institute of Applied Mathematics and Computer Science, unit of Applied Mathematics

National Research Tomsk State University

36 Lenina Avenue, Tomsk, 634050

Telephone / fax: +73822529599

E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

EDITORIAL COUNCIL

Ana Rosa Cavalli

PhD, Prof.
University VII
Paris, France

Vladimir Dombrovskii

Doctor of Sc., Prof.
Tomsk State University
Russia

Alexander Dudin

Doctor of Sc., Prof.
Belarusian State University
Minsk, Republic Belorussia

Enco Orsingher

PhD, Prof.
University of Rome
Italy

Paolo Prinetto

Prof.
Politechnic Institute
Torino, Italy

Gilbert Saporta

PhD, Prof.
Pierre and Marie Curie
University, Paris, France

Raimund Ubar

Doctor of Sc., Prof.
University of Technology
Tallinn, Estonia

Reindert Nobel

Doctor of Sc., Associate Prof.
Vrije University of Amsterdam
Netherlands

Nina Yevtushenko

Doctor of Sc., Prof.
Ivannikov V.P. ISP RAS
Moscow, Russia

Yervant Zorian

PhD, Fellow & Chief Architect, Synopsys, Mountain View, CA, USA

JOURNAL INFO

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is an independent peer-reviewed research journal that welcomes submissions from across the world.

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is issued four times per year, and can be subscribed to in the Russian Press Joint Catalogue (Subscription Index 44031)

The publication in the journal is free of charge and may be in Russian or in English.

The topics of the journal are the following:

- control of dynamical systems,
- mathematical modeling,
- data processing,
- informatics and programming,
- discrete function and automation,
- designing and diagnostics of computer systems.

Rules of registration articles are given in a site:

<http://journals.tsu.ru/informatics/>

ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

Учредитель – Томский государственный университет

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Горцев Александр Михайлович – гл. редактор, проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной математики ТГУ. Тел. +73822529599

Смагин Валерий Иванович – зам. гл. редактора, проф., д-р техн. наук, проф. кафедры прикладной математики ТГУ. Тел. +73822529599

Нежелская Людмила Алексеевна – ответственный секретарь, доц., д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры прикладной математики ТГУ
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

Воробейчиков Сергей Эрикович – д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры системного анализа и математического моделирования ТГУ

Вишневский Владимир Миронович – проф., д-р техн. наук, зав. лабораторией Института проблем управления РАН (г. Москва)

Кошкин Геннадий Михайлович – проф., д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры системного анализа и математического моделирования ТГУ

Костюк Юрий Леонидович – проф., д-р техн. наук, проф. кафедры теоретической информатики ТГУ

Матросова Анжела Юрьевна – проф., д-р техн. наук, проф. кафедры программирования ТГУ

Назаров Анатолий Андреевич – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой теории вероятностей и математической статистики ТГУ

Самуйлов Константин Евгеньевич – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (г. Москва)

Семенин Евгений Станиславович – проф., д-р техн. наук, проф. каф. системного анализа и исследования операций, СибГУ им. акад. М.Ф. Решетнева (г. Красноярск)

Сущенко Сергей Петрович – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной информатики ТГУ

Фархадов Маис Паша Оглы – д-р техн. наук, зав. лабораторией Института проблем управления РАН (г. Москва)

Цицашвили Гурами Шалвович – проф., д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотр. Института прикладной математики ДВО РАН, проф. ДВФУ (г. Владивосток)

Адрес редакции и издателя: 634050, Томск, пр. Ленина, 36

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Институт прикладной математики и компьютерных наук,

отделение прикладной математики

Телефон / факс: +73822529599

E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Ана Роза Кавалли

д-р философии, проф.
Университет VII,
Париж, Франция
Владимир Домбровский
д-р техн. наук, проф.
ТГУ, Томск, Россия

Александр Дудин

д-р физ.-мат. наук, проф.
БГУ, Минск,
Республика Беларусь

Енцо Орзингер

д-р философии, проф.
Римский университет,
Италия

Паоло Принетто

проф.
Политехнический институт,
Турин, Италия

Жильберт Сапорта

д-р философии, проф.
Университет им. Пьера и Марии,
Кюри, Париж, Франция
Раймонд Убар
д-р проф.
Технологический университет,
Таллин, Эстония

Рейндерт Нобель

д-р, доцент
Свободный университет,
Амстердам, Нидерланды

Нина Евтушенко

д-р техн. наук, проф.
ИСП РАН им. Иваницова В.П.,
Москва, Россия

Ервант Зорян

д-р философии, гл. науч. сотр.
фирмы «Синописис», США

О ЖУРНАЛЕ

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика» выходит ежеквартально и распространяется по подписке

Статьи публикуются на русском и английском языках.

Тематика публикаций журнала:

- управление динамическими системами,
- математическое моделирование,
- обработка информации,
- информатика и программирование,
- дискретные функции и автоматы,
- проектирование и диагностика вычислительных систем.

Журнал входит в систему Российского Индекса Научного Цитирования (РИНЦ).

Правила оформления статей приведены на сайте:

<http://journals.tsu.ru/informatics/>

ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

CONTROL OF DYNAMICAL SYSTEMS

Коднянко В.А.
 Рациональная интерполяция передаточных функций
 линейных динамических систем
 с распределенными параметрами 4

Kodnyanko V.A.
 Rational interpolation of transfer functions
 of linear dynamic systems
 with distributed parameters 4

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MATHEMATICAL MODELING

Кетова К.В., Русяк И.Г., Вавилова Д.Д.
 Математическое моделирование и нейросетевое
 прогнозирование структуры и динамики
 человеческого капитала Российской Федерации 13

Меликов А.З., Мехбалиева Э.В.
 Численное исследование системы
 с гетерогенными серверами и
 рандомизированной N-политикой 25

Сеньченков В.И., Матюнин А.С.
 Развитие обучающих процедур
 при моделировании процессов
 диагностирования технических систем 38

Ketova K.V., Russyak I.G., Vavilova D.D.
 Mathematical modeling and neural network
 prediction of the structure and dynamics
 of human capital of the russian federation 13

Melikov A.Z., Mekhbaliyeva E.V.
 Numerical investigation of queue
 with heterogeneous servers
 and randomized N-policy 25

Senchenkov V.I., Matyunin A.S.
 The development of training procedures
 for modeling the processes
 of diagnosing technical systems 38

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

DATA PROCESSING

Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б.
 О влиянии ошибок округления на распределения
 статистик критериев согласия 47

Масловская А.Г., Афанасов Л.С.
 Алгоритмы мультифрактального вейвлет-анализа
 в задачах спецификации растровых изображений
 самоподобных структур 61

Медведев А.В., Ярещенко Д.И.
 Непараметрические алгоритмы идентификации
 и управления многомерными
 безынерционными процессами 72

Нежелская Л.А., Тумашкина Д.А.
 Оценка длительности непродлевающегося
 мертвого времени в рекуррентном полусинхронном
 потоке событий второго порядка методом моментов 82

Рудько И.М.
 Единое поле вероятностей обнаружения
 для разнородных средств наблюдения 93

Фейзиев Ф.Г., Абасва Н.Б.
 Задача оптимального синтеза двоичных
 4D-нелинейных модулярных динамических систем 102

Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B.
 About the influence of rounding errors
 on distributions of statistics of the goodness-of-fit tests 47

Maslovskaya A.G., Afanasov L.S.
 Algorithms of multifractal wavelet analysis
 in problems of specifying raster images
 of self-similar structures 61

Medvedev A.V., Yareschenko D.I.
 Nonparametric identification
 and control algorithms for multidimensional
 inertialess processes 72

Nezhel'skaya L.A., Tumashkina D.A.
 Estimation of the unextendable dead time duration
 in semi-synchronous events flow
 of the second order by the method of moments 82

Rudko I.M.
 Unified field of detection probabilities
 for heterogeneous means of observations 93

Feyziyev F.G., Abayeva N.B.
 The problem of optimal synthesis of binary
 4D-nonlinear modular dynamic systems 102

ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

INFORMATICS AND PROGRAMMING

Жуков И.А., Костюк Ю.Л.
 Модель представления многовариантных заданий
 для автоматизированного контроля знаний
 по программированию 110

Непомнящий В.А., Бодин Е.В., Веретнов С.О.
 Анализ и верификация SDL-спецификаций
 распределенных систем с помощью языка
 Dynamic-REAL 118

Zhukov I.A., Kostyuk Yu.L.
 Model of representation of multivariate tasks
 for automated control
 of programming knowledge 110

Nepomniaschy V.A., Bodin E.V., Veretnov S.O.
 The analysis and verification
 of SDL-specifications of distributed systems
 using Dynamic-REAL Language 118

**ХРОНИКИ: МЕМУАРЫ, ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ,
 ПЕРСОНАЛИИ**

**CHRONICLE: MEMOIRS, MEMORABLE DATE,
 PERSONALITIES**

Памяти Геннадия Алексеевича Медведева 127

Сведения об авторах 130

Memory Gennady A. Medvedev 127

Brief information about the authors 130

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 519.67

DOI: 10.17223/19988605/53/1

В.А. Коднянко

РАЦИОНАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Излагается метод рациональной интерполяции передаточной функции линейных динамических систем с распределенными параметрами, значения которой могут быть найдены численными методами либо расчетом трансцендентных функций переменной интегрального преобразования Лапласа. Метод позволяет определить в явном виде передаточную функцию и, в частности, характеристическое уравнение такой степени, которая достаточна для удовлетворения требований точности при расчете корневых критериев качества динамики систем автоматического управления. Согласно предложенному методу рациональная интерполяция сводится к решению системы линейных уравнений, порядок которой значительно ниже (более чем вдвое) порядка аналогичных систем, применяемых для рациональной интерполяции функций известными методами. Свойства данной системы таковы, что ее решение может быть получено специальными быстрыми методами квадратичного порядка сложности. Рассмотрен пример практического использования итерационного алгоритма рациональной интерполяции и вычисления с заданной точностью корневых критериев качества динамики опоры с газовой смазкой.

Ключевые слова: рациональная интерполяция; линейная динамическая система; передаточная функция; система с распределенными параметрами; дискретное преобразование Фурье.

При проектировании систем автоматического управления и регулирования находят применение методы исследования качества динамики, основанные на определении ее запаса устойчивости и быстродействия по корням характеристического уравнения [1, 2]. Последнее определяется полиномом знаменателя передаточной функции (ПФ)

$$\Phi(s) = \frac{\overline{\Delta Y_o}}{\overline{\Delta Y_i}} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n}, \quad (1)$$

где $\overline{\Delta Y_i}$, $\overline{\Delta Y_o}$ – лапласовы трансформанты отклонения динамических функций входного воздействия и целевой выходной функции от стационарного равновесного положения систем, $n > 0$, $m > 0$, $n > m$, s – переменная преобразования Лапласа [2, 3].

Определение коэффициентов (1) для систем с сосредоточенными параметрами обычно не вызывает затруднений. Однако существуют устройства, динамика которых описывается системами с распределенными параметрами. Примерами данных систем являются разнообразные радиоэлектронные устройства, трубчатые теплообменники, газостатические и газодинамические опоры скольжения и ряд других [4–7].

Для таких систем ПФ формулируются на основе использования одной или нескольких краевых задач для дифференциальных уравнений, аналитическое решение которых дается трансцендентными функциями, либо таковые могут быть получены лишь численными методами [8]. Для получения ПФ данных систем необходимо применение методов, которые бы обеспечивали их представление в форме (1) на основе расчета критериев запаса устойчивости и быстродействия устройств с наперед заданной точностью.

Представление ПФ в форме (1) подпадает под классическую задачу рациональной интерполяции [9], решение которой, однако, не дает исчерпывающего ответа на вопрос о точности критериев устойчивости системы, полученных корневыми методами с использованием характеристического уравнения, ибо значение степени n характеристического полинома (ХП) наперед неизвестно. Следовательно, рациональная интерполяция ПФ является лишь локальной процедурой в общем алгоритме определения критериев качества динамики систем.

Нередко при расчете упомянутых критериев требуется определить лишь вектор a коэффициентов ХП и его длину n с тем, чтобы иметь возможность определить корневые критерии с требуемой точностью. В этом случае задача несколько упрощается, поскольку необходимо найти лишь полином знаменателя (1), т.е. ХП.

Основной задачей при расчете критериев качества динамики систем с распределенными параметрами при фиксированных значениях n и m является рациональная интерполяция. Существующие методы опираются на решение линейной системы уравнений относительно коэффициентов (1), которая содержит $n + m$ уравнений [5]. Такие системы могут быть решены общими методами, например методом Гаусса–Жордана, который имеет кубический порядок сложности $(n + m)^3$ (здесь и далее под порядком сложности вычислительного метода подразумевается временная сложность реализующего его алгоритма [1, 7]). При больших n и m это может повлечь значительные затраты машинного времени в процессе многопараметрической оптимизации динамических систем.

В настоящей статье предложен быстрый метод нахождения коэффициентов (1). Он основан на решении систем линейных уравнений специального вида существенно меньшего порядка, что позволяет найти их решение быстрыми методами с квадратичным порядком сложности $m(n + m)$; это способствует существенному ускорению процедуры оптимизации динамических систем. Если требуется найти лишь коэффициенты ХП, то порядок сложности метода равен n^2 .

1. Определение разности $n - m$ степеней полиномов передаточной функции

При проведении рациональной интерполяции методом, который изложен ниже, степени n и m полиномов (1) должны быть известны. Однако приемлемые их значения могут быть получены лишь на основе удовлетворительной точности определения критериев качества динамики системы.

Если определить значения этих параметров без расчета упомянутых критериев нельзя, то нахождение их разности не представляет затруднений.

Действительно, если $a_n \neq 0$ и $b_m \neq 0$, то бесконечный предел

$$s^p \Phi(s) \rightarrow \frac{b_m}{a_n} \neq 0, \quad (2)$$

где $p = n - m$.

Обычно разность p исчисляется несколькими единицами, чаще она равна одному или двум, поэтому найти данный предел и p можно довольно быстро.

2. Методика рациональной интерполяции

Зададим значение m , определим $n = m + p$ и найдем коэффициент

$$b_0 = \Phi(0).$$

Перепишем (1) в форме

$$a_1 + a_2 s + \dots + a_n s^{n-1} + \Gamma(s) (b_1 + b_2 s + \dots + b_m s^{m-1}) = \frac{\Lambda(s)}{s}, \quad (3)$$

где $\Gamma(s) = -\Phi^{-1}(s)$, $\Lambda(s) = -b_0 - \Gamma(s)$.

Уравнение (3) содержит $k = n + m$ неизвестных коэффициентов.

Вычислим $e = \exp\left(-\frac{2\pi i}{k}\right)$, где i – мнимая единица.

Положим $s_1 = 1$, найдем $s_j = e s_{j-1}$, $j = 2, 3, \dots, k$, $\Psi_j = \Phi(s_j)$, $\Gamma_j = \Gamma(s_j)$, $\Lambda_j = \Lambda(s_j)$, $j = 1, 2, \dots, k$.

Обратим внимание, что $s_j = s_{k+1-j}^*$, $j = 1, 2, \dots, k$, следовательно, $\Phi(s_{k-j+1}) = \Phi^*(s_j)$, что позволяет сократить вычисления и найти Γ_j, Λ_j за $[(k+1)/2]$ обращение к ПФ.

Последовательно подставив $s = s_j$, ($j = 1, 2, \dots, k$) в (3), получим систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов (1)

$$Mx = y, \quad (4)$$

где

$$M = \begin{bmatrix} s_1 & s_1 & s_1 & \dots & \Gamma_1 s_1 & \dots \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & \Gamma_2 s_1 & \dots \\ s_1 & s_3 & s_5 & \dots & \Gamma_3 s_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_1 & s_k & s_1 & \dots & \Gamma_k s_1 & \dots \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ b_{m-1} \\ b_m \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} \Lambda_1 / s_1 \\ \Lambda_2 / s_2 \\ \dots \\ \Lambda_{k-1} / s_{k-1} \\ \Lambda_k / s_k \end{bmatrix}.$$

Представим матрицу системы (4) в виде

$$M = FK, \quad (5)$$

где K – матрица, F – матрица дискретного преобразования Фурье [10, 11]

$$F_{i,j} = S(i, j),$$

$$S(i, j) = s_{1+q((i-1)(j-1))}, \quad i = 1, 2, \dots, k-1; \quad j = 1, 2, \dots, k-1, \quad q(x) = x \bmod k.$$

Ее обратная матрица определяется формулой

$$F_{i,j}^{-1} = \frac{1}{k} \bar{S}(i, j).$$

Умножив F^{-1} на (4), приведем систему к виду

$$Kx = z, \quad (6)$$

где $K = F^{-1}M$, $z = F^{-1}y$.

При $m > 0$ матрица K имеет клеточную структуру вида

$$K = \begin{bmatrix} E & C \\ 0 & D \end{bmatrix}.$$

где E и 0 – единичная и нулевая матрицы размера $n \times n$ и $m \times n$, C и D – тёплицевы матрицы размера $n \times m$ и $m \times m$ соответственно.

Действительно, блоки матриц F^{-1} и M клеток $1 \times 1 \dots n \times n$ являются взаимно обратными матрицами дискретного преобразования Фурье, следовательно, их произведение даст единичную матрицу E . Элементы блока клеток $m+1, k \dots 1 \times n$ получены перемножением строк матрицы F^{-1} и столбцов матрицы M , которые также являются элементами прямой и обратной матриц преобразования Фурье. Суммы их произведений, дающие недиагональные элементы единичной матрицы, будут нулями по аналогии с тем, как это имеет место для нулевых элементов расположенного над ними блока E .

Характер матриц C и D объясняется тем, что элементы столбцов матрицы M для $j > n$ образованы суммами произведений смещенных элементов матриц F и элементов вектора Γ , которые отличны от единицы. В таких случаях их скалярные произведения дают тёплицевы матрицы [12].

Аналогично можно показать, что матрица

$$L = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}_{n \times m} \quad (7)$$

является прямоугольным циркулянтном вида

$$L = \begin{bmatrix} l_1 & l_k & \dots & l_{n+3} & l_{n+2} \\ l_2 & l_1 & \dots & l_{n+4} & l_{n+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{k-1} & l_{k-2} & \dots & l_{n+1} & l_n \\ l_k & l_{k-1} & \dots & l_{n+2} & l_{n+1} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

а C и D персимметричными тѐплицевыми матрицами

$$C_{n \times m} = \begin{bmatrix} l_1 & l_k & \dots & l_{n+3} & l_{n+2} \\ l_2 & l_1 & \dots & l_{n+4} & l_{n+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n-1} & l_{n-2} & \dots & l_2 & l_1 \\ l_n & l_{n-1} & \dots & l_3 & l_2 \end{bmatrix}, \quad D_{m \times m} = \begin{bmatrix} l_{n+1} & l_n & \dots & l_{m+1} & l_m \\ l_{n+2} & l_{n+1} & \dots & l_{m+2} & l_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{k-2} & l_{k-3} & \dots & l_{n+1} & l_n \\ l_{k-1} & l_{k-2} & \dots & l_{n+2} & l_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Вектор l совпадает с $(n + 1)$ -м столбцом матрицы K :

$$l_i = \sum_{j=1}^k F_{i,j}^{-1} M_{j,n+1} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \Gamma_j \bar{S}(i, j), \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Аналогично можно показать, что первые $k - 1$ элементов вектора z

$$z_j = -b_0 l_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, k - 1,$$

а последний элемент

$$z_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \Gamma_j. \quad (9)$$

Таким образом, векторы l и z , матрицы C и D можно получить с помощью векторов s и Ψ без использования матриц K , F^{-1} и M .

В случае $m = 0$, система (4) принимает вид:

$$Fa = y,$$

следовательно, $a = z$ и задача рациональной интерполяции ПФ решена.

Из (5)–(8) следует, что при $m > 0$ вектор b коэффициентов ПФ (1) удовлетворяет системе уравнений

$$Db = d, \quad (10)$$

где d – вектор, составленный из последних m элементов вектора z :

$$d_i = z_{n+i}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

В сравнении с исходным уравнением (3), имеющим порядок $k = n + m$, уравнение (10) имеет существенно меньший порядок: $m < k/2$. Следовательно, его решение может быть получено значительно быстрее.

Уравнение (10) является стандартной задачей с несимметричной тѐплицевой матрицей специального вида [13–15], и оно может быть решено как общими методами, сложность которых пропорциональна m^3 , например методом Гаусса–Жордана [16], так и специальными быстрыми методами, учитывающими особенности уравнения (10) и имеющими сложность, пропорциональную m^2 . К числу последних относятся методы Тренча, Берлекэмп–Мессе, Евклида [11, 13–18].

Элементы матрицы C могут быть выражены через вектор l :

$$C_{i,j} = l_{q(k+i-j)}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

С учетом этого можно обойтись без матрицы C и, используя решение системы (10), быстро найти коэффициенты ХП по формуле сложности nm :

$$a_i = l_i - \sum_{j=1}^m l_{q(k+i-j)} b_j, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (11)$$

С учетом этого суммарный порядок сложности данного метода нахождения коэффициентов (1) составляет $m(n + m)$.

В тех случаях, когда $s = s_j$ является нулем ПФ или необходимо найти лишь коэффициенты ХП, можно применить другой подход.

Перепишем уравнение (3) форме

$$b_1 + b_2s + \dots + b_ms^{m-1} - \Phi(s)(a_1 + a_2s + \dots + a_ns^{n-1}) = \frac{\Phi(s) - b_0}{s}.$$

Следуя изложенному методу, процедуру нахождения коэффициентов ХП можно свести к решению системы уравнений более низкого порядка $n < k$

$$Da = d, \tag{12}$$

где

$$D_{n \times n} = - \begin{bmatrix} l_{m-1} & l_{m-2} & \dots & l_{2m+1} & l_{2m} \\ l_m & l_{m-1} & \dots & l_{2m+2} & l_{2m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{k-3} & l_{k-4} & \dots & l_{m-1} & l_{m-2} \\ l_{k-2} & l_{k-3} & \dots & l_m & l_{m-1} \end{bmatrix}, \quad l_{i-1} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \Phi(s_j) S(i, j), \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

$$l_k = l_{k-1} - b_0, d_i = l_{m+i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, d_n = l_k.$$

В сравнении с (10) система (12), как правило, имеет несколько больший порядок $n > m$, однако ее решение позволяет сразу найти коэффициенты ХП, минуя процедуру нахождения полинома числителя ПФ. Система (12) также может быть решена упомянутыми быстрыми методами с порядком сложности n^2 .

3. Методика расчета корневых критериев качества динамической системы с распределенными параметрами

Для оценки качества динамики линейных систем автоматического управления часто используются корневые критерии [2, 19]:

– степень устойчивости $\eta = \text{Max Re}\{s_i\}$, где s_i – нули характеристического полинома динамической системы, которым является полином – знаменатель ПФ (1);

– затухание колебаний за период $\xi = 100[1 - \text{Exp}(-|2\pi\beta/\eta|)]\%$, где β – мнимая часть корня характеристического уравнения с наибольшей действительной частью.

Степень устойчивости η характеризует быстродействие системы, т.е. быстроту затухания ее свободных колебаний.

Критерий ξ затухания колебаний за период может быть применен к оценке запаса устойчивости системы. Чем меньше ξ , тем бóльшую колебательность будет иметь переходная характеристика, а система – меньший запас устойчивости. Считается, что динамическая система хорошо демпфирована, если $\xi \geq 90\%$ [2].

Вначале, используя алгоритм расчета значений передаточной функции, необходимо определить разность степеней полиномом ПФ $p = n - m$ на основании (2).

Дальнейшие вычисления ведутся при помощи следующего итерационного процесса.

Шаг 1. Положить $i = 1$ и $m = 1$, $\eta_0 = \text{inf}$, $\xi_0 = \text{inf}$, где inf – большое число (например, $\text{inf} = 10^{10}$), задать точность определения степени устойчивости ε_η и затухания колебаний за период ε_ξ .

Шаг 2. Вычислить $n = p + m$ и, выполнив рациональную интерполяцию по формуле (11), найти вектор a коэффициентов ХП.

Шаг 3. Определить корни характеристического уравнения, найти среди них корень с наибольшей действительной частью и вычислить критерии η_i и ξ_i .

Шаг 4. Проверить выполнение условий сходимости итерационного процесса к решению

$$|\eta_i - \eta_{i-1}| < \varepsilon_\eta, \quad |\xi_i - \xi_{i-1}| < \varepsilon_\xi. \tag{12}$$

Шаг 5. Если условия (12) выполнены, то критерии качества динамики системы определены с требуемой точностью, иначе процесс следует продолжить. Для этого необходимо увеличить значения счетчика итераций i и степени m на единицу и перейти к шагу 2.

4. Пример расчета корневых критериев качества динамической системы с распределенными параметрами

В качестве тестовой задачи для определения критериев качества динамики системы с распределенными параметрами была рассмотрена модель нестационарного движения осевой опоры с газовой смазкой [20].

После линеаризации и применения к линейной модели интегрального преобразования Лапласа получена необходимая для расчетов передаточная функция, вычисление значения которой включает численное решение нескольких краевых задач для дифференциального уравнения Рейнольдса [21] вида

$$\begin{cases} \frac{d}{dR} \left[R \frac{d(Pu)}{dR} \right] = \frac{\sigma s}{H^3} R (Hu + \alpha P), \\ u(r_b, s) = u_b, \quad u(r_e, s) = u_e, \end{cases} \quad (13)$$

где $u(R, s)$ – искомая функция, $P(R) = \sqrt{\left(P_e^2 - P_b^2 \right) \frac{\ln(R/R_b)}{\ln(R_e/R_b)} + P_b^2}$ – функция статического давления газа в смазочном слое, $\alpha, H, r_b, r_e, P_b, P_e$ – постоянные величины, s – переменная преобразования Лапласа.

Задача (13) не имеет точного аналитического решения, поэтому к ней применялся численный конечно-разностный метод прогонки, где переменная s выступала в роли комплексного параметра [22].

Численное решение задач (13) дает результат высокой точности, однако данный подход не позволяет в явном виде получить передаточную функцию, и в частности ХП.

Выход найден в последовательной итерационной рациональной интерполяции, по результатам которой производился расчет критериев качества динамики опоры с заданной точностью.

Алгоритм расчетов таков. Для принятого варианта сочетания значений входных параметров сначала вычисляли $b_0 = \Phi(0) = 0,15934$, затем определяли разность степеней полиномов ПФ $p = n - m$. Результат представлен в таблице, из которой следует, что наименьшее $p > 0$, при котором $s^p \Phi(s)$ сходится к отличному от нуля пределу, $p = 2$.

Определение разности $p = n - m$

N	s	$s\Phi(s)$	$s^2\Phi(s)$
1	1	0,15934	0,15904
2	10	0,09345	0,93415
3	100	0,00996	0,99926
4	1 000	0,00099	0,99999

Приняв $\varepsilon_\eta = 10^{-3}$, $\varepsilon_\xi = 0,1$ и порядок полинома числителя ПФ $m = 0$, нашли начальный порядок характеристического полинома $n = p + m = 2$.

Далее выполняли итерационный процесс, на каждом шаге которого увеличивали m на единицу, находили $n = p + m$, решали задачу рациональной интерполяции ПФ и вычисляли критерии качества динамики системы.

Условия (12) сходимости итерационного процесса выполнилось на четвертой итерации. При этом система (10) приняла вид:

$$\begin{pmatrix} -0,026 & 0,057 & -0,161 \\ 0,056 & -0,026 & 0,057 \\ -0,405 & 0,056 & -0,026 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,008 \\ 0,056 \\ -0,457 \end{pmatrix}.$$

Ее решение

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,202 \\ 0,560 \\ 0,055 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

При рациональной интерполяции ПФ самая трудоёмкая часть процедуры поиска восьми неизвестных коэффициентов $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3$ ПФ свелась к решению системы (14) третьего порядка.

Таким образом, с помощью рациональной интерполяции рассмотренная передаточная функция может быть представлена с достаточной для практики точностью в виде

$$\Phi(s) = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + b_3s^3}{1 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + b_4s^4 + b_5s^5}.$$

Критерий быстродействия системы $\eta = 0,233 > 0$, критерий затухания колебаний за период $\xi = 100\%$. Это значит, что система устойчива и характеризуется отсутствием колебательности, что свидетельствует о высоком качестве ее динамики.

Заключение

В работе предложен метод рациональной интерполяции передаточной функции линейных систем с распределенными параметрами, значения которой могут быть найдены численными методами либо иным образом, например расчетом трансцендентных функций переменной интегрального преобразования Лапласа. Метод позволяет определить в явном виде характеристическое уравнение такой степени, которая достаточна для удовлетворения требований точности при расчете корневых критериев качества динамики систем автоматического управления.

Согласно предложенному методу рациональная интерполяция сводится к решению системы линейных уравнений, порядок которой значительно ниже (более чем вдвое) порядка аналогичных систем, применяемых для рациональной интерполяции функций известными методами. Свойства данной системы таковы, что при необходимости ее решение может быть получено специальными быстрыми методами квадратичного порядка сложности.

Рассмотрен демонстрационный алгоритм вычисления корневых критериев качества системы автоматического управления на примере оценки качества динамики опоры с газовой смазкой. Алгоритм позволил вычислить критерии качества с требуемой точностью за четыре итерации, на каждой из которых последовательно выполнялась рациональная интерполяция передаточной функции, полученной решением нескольких задач для дифференциальных уравнений конечно-разностным методом прогонки высокой точности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fraleigh J.B., Beaugregard R.A. Linear Algebra. Reading, MA : Addison-Wesley, 1995. 608 p.
2. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. Спб. : Профессия, 2003. 752 с.
3. Riley K.F., Hobson M.P., Bence S.J. Mathematical methods for physics and engineering. Cambridge University Press, 2010. 455 p.
4. Middlebrook R.D. Input filter considerations in design and application of switching regulators // IEEE Industry Applications Society Annual Meeting. 1976. P. 366–382.
5. Carrol J. An input impedance stability criterion allowing more flexibility for multiple loads which are independently designed // Naval Air Warfare Center, Aircraft Division, Indianapolis. B/812. 1992. Jan. 22.
6. Wildrick C.M., Lee F.C., Cho B.H., Choi B. A method of defining the load impedance specification for a stable distributed power system // IEEE Transactions on Power Electronics. 1995. P. 280–285.
7. Коднянко В.А. Устойчивость энергосберегающей адаптивной радиальной гидростатической опоры с ограничением выходного потока смазки // Журнал Сибирского федерального университета. Техника и технологии. 2011. Т. 6, № 4. С. 907–914.
8. Bradie B.A. Friendly Introduction to Numerical Analysis. Upper Saddle River, NJ : Pearson Prentice Hall, 2006. 933 p.
9. Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. Numerical Recipes in C : the Art of Scientific Computing. Cambridge : Cambridge University Press, 2002. 1262 p.

10. Golub G.H., Van Loan C.F. Matrix computations. Baltimore, MD : Johns Hopkins University Press, 1996. 694 p. (John Hopkins Studies in the Mathematical Sciences).
11. Heinig G., Rost K. Efficient inversion formulas for Toeplitz-plus-Hankelmatrices using trigonometric transformations // Structured Matrices in Mathematics, Computer Science, and Engineering / V. Olshevsky (ed.). Providence, RI, 2001. P. 247–264. (AMS-Series Contemporary Mathematics; vol. 281)
12. Smith S.W. The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing. San Diego, CA : California Technical Publishing, 1999. 630 p.
13. Trench W.F. An algorithm for the inversion of finite Hankel matrices // SIAMJ. Appl. Math. 1965. V. 13. P. 1102–1107.
14. Zohar S. Toeplitz matrix inversion: The algorithm of W.F. Trench // J. Assoc.Comput. Mach. 1967. V. 16. P. 592–601.
15. Blahut R.E. Fast algorithms for signal processing. Cambridge University Press. 2010. 469 p. DOI: 10.1017/CBO9780511760921
16. Beale E.M.L. Cycling in the dual simplex algorithm // Naval Research LogisticsQuarterly. 1955. V. 2 (4). P. 269–276. DOI: 10.1002/nav.3800020406
17. Voevodin V.V., Tyrtysnikov E.E. Toeplitz matrices and their applications // Computing Methods in Applied Sciences and Engineering. Amsterdam : North-Holland, 1984. P. 75–85.
18. Петров О.А. Быстрый алгоритм решения систем уравнения с теплицевой матрицей // Инфокоммуникационные технологии. 2006. Т. 4, №1. С. 57–59.
19. Rahman Q.I., Schmeisser G. Analytic theory of polynomials. Oxford: Oxford University Press, 2002. XIV, 742 p. (London Mathematical Society Monographs. New Series; 26).
20. Коднянко В.А. Численный расчет статических характеристик однорядного щелевого газостатического подвеса // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2002. № 2. С. 17–19.
21. Constantinescu V.N. Gas Lubrication. New York : American Society of Mechanical Engineers, 1969. 621 с.
22. Muir T. A treatise on the theory of determinants. New York : Dover Publications, 1960. 766 p.

Поступила в редакцию 31 января 2020 г.

Kodnyanko V.A. (2020) RATIONAL INTERPOLATION OF TRANSFER FUNCTIONS OF LINEAR DYNAMIC SYSTEMS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 53. pp. 4–12

DOI: 10.17223/19988605/53/1

The paper proposes a method of rational interpolation of the transfer function of linear dynamic systems with distributed parameters, the values of which can be found by numerical methods or by calculating the transcendental functions of the Laplace integral transform variable. The method allows you to determine the transfer function in explicit form

$$\Phi(s) = \frac{\overline{\Delta Y}_o}{\overline{\Delta Y}_i} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n},$$

where $\overline{\Delta Y}_i, \overline{\Delta Y}_o$ are the Laplace transformants of dynamic functions deviations of the input action and the target output function from the stationary equilibrium position of the system, $n > 0, m > 0, n > m, s$ is the Laplace transform variable.

Application of the discrete Fourier transform to the function $\Phi(s)$ made it possible to reduce the problem of finding the unknown coefficients of the function to a system of linear equations $Db = d$ for an asymmetric Toeplitz matrix

$$D_{n \times n} = - \begin{bmatrix} l_{m-1} & l_{m-2} & \dots & l_{2m+1} & l_{2m} \\ l_m & l_{m-1} & \dots & l_{2m+2} & l_{2m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{k-3} & l_{k-4} & \dots & l_{m-1} & l_{m-2} \\ l_{k-2} & l_{k-3} & \dots & l_m & l_{m-1} \end{bmatrix},$$

where

$$l_i = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \Gamma_j \bar{S}(i, j), \Gamma(s) = -\Phi^{-1}(s), k = n + m, S(i, j) = s_{1+q((i-1)(j-1))}, q(x) = x \bmod k,$$

$$s_1 = 1, s_j = e s_{j-1}, e = \exp\left(-\frac{2\pi i}{k}\right), i = 1, 2, \dots, k-1; j = 1, 2, \dots, k-1,$$

$$d_i = z_{n+i}, i = 1, 2, \dots, m, z_j = -\Phi(0)l_{j+1}, j = 1, 2, \dots, k-1, z_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \Gamma_j.$$

Unlike well-known methods having cubic computational complexity $(n + m)^3$, this linear system can be solved by special fast methods of Trench, Berlekamp–Massey or Euclid, having quadratic computational complexity $m(n + m)$.

An example of the practical use of an iterative algorithm for rational interpolation of a linear dynamic system with distributed parameters and calculation with a given accuracy of the root quality criteria for the dynamics of a bearing with gas lubrication are considered.

Keywords: rational interpolation; linear dynamic system; transfer function; system with distributed parameters; discrete Fourier transform.

KODNYANKO Vladimir Aleksandrovich (Doctor of Technical Sciences, Polytechnic Institute of the Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation).
E-mail: kowlad@rambler.ru

REFERENCES

1. Fraleigh, J.B. & Bearegard, R.A. (1995) *Linear Algebra*. Reading, MA: Addison-Wesley.
2. Besekersky, V.A. & Popov, E.P. (2002) *Teoriya sistem avtomaticheskogo regulirovaniya* [Theory of Automatic Control Systems]. St. Petersburg: Professiya.
3. Riley, K.F., Hobson, M.P. & Bence, S.J. (2010) *Mathematical Methods for Physics and Engineering*. Cambridge University Press.
4. Middlebrook, R.D. (1976) Input filter considerations in design and application of switching regulators. *IEEE Industry Applications Society Annual Meeting*. pp. 366–382.
5. Carrol, J. (1992) An input impedance stability criterion allowing more flexibility for multiple loads which are independently designed. *Naval Air Warfare Center, Aircraft Division, Indianapolis*. B / 812.
6. Wildrick, C.M., Lee, F.C., Cho, B.H. & Choi, B. (1995) A method of defining the load impedance specification for a stable distributed power system. *IEEE Transactions on Power Electronics*. pp. 280–285.
7. Kodnyanko, V.A. (2011) Stability of Energy-Saving Adaptive Hydrostatic Bearing with a Restriction of the Output Lubricant Stream. *Zhurnal Sibirskogo federal'nogo universiteta. Tekhnika i tekhnologii – Journal of the Siberian Federal University. Engineering and Technologies*. 6(4). pp. 907–914.
8. Bradie, B.A. (2006) *Friendly Introduction to Numerical Analysis*. Upper Saddle River, New Jersey: Pearson Prentice Hall.
9. Press, W.H., Teukolsky, S.A., William, T. & Vetterling, B.P. (1994) *Numerical Recipes in C: the Art of Scientific Computing*. Cambridge: Cambridge University Press.
10. Golub, G.H. & Van Loan, C.F. (1996) *Matrix computations*. Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press.
11. Heinig, G. & Rost, K. (2001) Efficient inversion formulas for Toeplitz-plus-Hankelmatrices using trigonometric transformations. In: Olshevsky, V. (ed.) *Structured Matrices in Mathematics, Computer Science, and Engineering*. Providence, RI: Amer Mathematical Society. pp. 247–264.
12. Smith, S.W. (1999) *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing*. Vol. 30. San Diego, CA : California Technical Publishing.
13. Trench, W.F. (1965) An algorithm for the inversion of finite Hankel matrices. *Society for Industrial and Applied Mathematics*. 13. pp. 1102–1107. DOI: 10.1137/0113078
14. Zohar, S. (1967) Toeplitz matrix inversion: The algorithm of W.F. Trench. *Journal of Association for Computing Machinery*. 16. pp. 592–601. DOI: 10.1145/321541.321549
15. Blahut, R.E. (2010) *Fast algorithms for signal processing*. Cambridge University Press. DOI: 10.1017/CBO9780511760921
16. Beale, E.M.L. (1955) Cycling in the dual simplex algorithm. *Naval Research Logistics Quarterly*. 2(4). pp. 269–276. DOI: 10.1002 / nav.3800020406
17. Voevodin, V.V. & Tyrtshnikov, E.E. (1984) Toeplitz matrices and their applications. In: Glowinski, R. & Lions, J. L. (eds) *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering*. Amsterdam: North-Holland. pp. 75–85.
18. Petrov, O.A. (2006) Bystryy algoritm resheniya sistem uravneniya s teplitsevoy matritsey [Fast algorithm for solving linear equations with Toeplitz matrix]. *Infokommunikatsionnye tekhnologii*. 4(1). pp. 57–59.
19. Rahman, Q.I. & Schmeisser, G. (2002) *Analytic theory of polynomials*. Oxford: Oxford University Press.
20. Kodnyanko, V.A. (2002) Chislennyi raschet staticheskikh kharakteristik odnoryadnogo shchelevogo gazostaticheskogo podvesa [Numerical calculation of the static characteristics of a single-row slotted gas-static suspension]. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin*. 2. pp. 17–19.
21. Constantinescu, V.N. (1969) *Gas Lubrication*. New York: American Society of Mechanical Engineers.
22. Muir, T. (1960) *A Treatise on the Theory of Determinants*. New York : Dover Publications. pp. 516–525.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 004.942

DOI: 10.17223/19988605/53/2

К.В. Кетова, И.Г. Русяк, Д.Д. Вавилова

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И НЕЙРОСЕТЕВОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ СТРУКТУРЫ И ДИНАМИКИ ЧЕЛОВЕЧЕСКОГО КАПИТАЛА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Выполнено математическое моделирование величины и структуры человеческого капитала РФ. Построен прогноз его динамики до 2025 г. с использованием двумерного уравнения переноса, в котором учтены время и возраст демографических элементов, а также прогнозные объемы бюджетных и частных инвестиций в человеческий капитал, полученные по многослойной нейросетевой модели. Построенные прогнозы удовлетворяют заданной точности.

Keywords: математическое моделирование; прогнозирование; человеческий капитал; нейросетевой алгоритм.

О понятии «человеческий капитал» (ЧК) стали рассуждать достаточно давно. Еще в XVII–XVIII вв. этот вопрос поднимали такие известные ученые, как У. Петти [1] и А. Смит [2]. В дальнейшем, в XIX в., этой теме были посвящены работы Д. Рикардо [3], А. Маршалла [4] и И. Фишера [5]. Современная теория ЧК получила развитие в начале 50-х гг. XX в. Здесь можно отметить исследования Т. Шульца [6], Г. Беккера [7], Бен-Порэта [8]. Также оценка ЧК содержится в трудах А. Добрынина [9], Р. Капелюшниковой [10], А. Корицкого [11].

Построение общей методики расчета ЧК затруднено наличием большой доли субъективных оценок. ЧК можно рассматривать как качество жизни [12], объем инвестиций [13], способность к инновационной деятельности [14], как стоимость произведенных товаров и услуг [15], как объем доходов человека [16]. Какой бы подход ни был выбран исследователем, в любом случае с позиции нарастающего усложнения применяемых технологий ЧК следует рассматривать в качестве одного из наиболее важных факторов, обеспечивающих рост социально-экономического развития страны.

В данной работе была поставлена задача оценить ЧК с помощью методов математического моделирования и спрогнозировать его динамику и структуру на примере статистических данных РФ. Используется экономико-математическая модель ЧК, включающая количественные и качественные характеристики. Количественной характеристикой является распределение демографических элементов по возрастам. К качественным характеристикам относятся составляющие ЧК: образование, здоровье и культура. Новизной использованного подхода является учет величины частных и бюджетных инвестиций, направленных на развитие образования, здоровья и культуры.

Решение задачи прогноза динамики ЧК получено на основе двумерного временно-возрастного уравнения. Прогнозные значения инвестиций в ЧК, входящие в уравнение, построены с помощью нейросетевого алгоритма. Примененный адаптивный алгоритм нейросетевого моделирования позволил построить прогноз ЧК РФ до 2025 г. Такой подход является новым, поскольку он учитывает влияние основных системных макроэкономических показателей на развитие ЧК и вследствие адап-

тивного выбора весовых коэффициентов позволяет достичь высокой точности его расчета. Все расчеты при решении поставленной задачи были выполнены по ежемесячным данным на интервале 2000–2018 гг.

1. Задача моделирования величины человеческого капитала

Основные принципы подхода к постановке задачи моделирования ЧК изложены в работе [17], где рассмотрены его составляющие: капиталы здоровья, образования, культуры. Носителями ЧК являются демографические элементы, следовательно, ЧК имеет две характеристики: количественную демографическую и качественную. Основным элементом количественной характеристики является численное воспроизводство населения. Под демографическим элементом будем понимать отдельного человека, который в момент времени t характеризуется возрастом τ .

Капиталовложения в здравоохранение повышают общий уровень здоровья, что способствует продлению экономически активной жизни. Инвестиции в образование повышают уровень квалификации, открывая резервы для повышения эффективности функционирования экономики. Вложения в культуру формируют нравственные ценности, повышают творческий потенциал личности.

Повышение качества ЧК в РФ является приоритетной задачей. На ее реализацию направлены национальные проекты в области образования, здравоохранения, культуры¹.

Для оценки экономической эффективности финансовых вложений в ЧК используется инструментальный математического моделирования. Анализ данного вопроса имеет существенное прикладное значение, позволяя определять экономически обоснованный объем инвестиций, направляемых на развитие ЧК как основного фактора экономического роста страны.

Оценку ЧК необходимо проводить с учетом демографической структуры. Важное значение имеет распределение демографических элементов по возрастам $\rho(t, \tau)$. Задача моделирования и прогнозирования демографической динамики подробно представлена в [17].

Удельное (на одну демографическую единицу) среднестатистическое значение ЧК определяется линейной комбинацией его составляющих здоровья ($i = 1$), образования ($i = 2$), культуры ($i = 3$):

$$h(t, \tau) = \alpha_1 h_1(t, \tau) + \alpha_2 h_2(t, \tau) + \alpha_3 h_3(t, \tau), \quad \alpha_i \in (0, 1); \quad \sum_{i=1}^3 \alpha_i = 1, \quad (1)$$

α_i – весовые коэффициенты составляющих ЧК; $h_i = h_i(t, \tau)$ измеряются в денежных единицах.

Эволюция каждой из составляющих ЧК $h_i(t, \tau)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial h_i(t, \tau)}{\partial t} + \frac{\partial h_i(t, \tau)}{\partial \tau} = -v_i h_i(t, \tau) + s_i(t, \tau) + p_i(t, \tau). \quad (2)$$

В формуле (2) используются следующие обозначения для каждой i -й составляющей ЧК: $s_i = s_i(t, \tau)$ – удельные расходы государства; $p_i = p_i(t, \tau)$ – удельные частные инвестиции; v_i – коэффициент выживания, который оценивается с использованием алгоритма идентификации [18].

Начальные условия при $t = t_0$ имеют вид:

$$h_i(t_0, \tau) = h_{i0}(\tau), \quad (i = 1, 2, 3), \quad (3)$$

где $h_{i0}(\tau)$ – известные функции. Алгоритм их определения подробно изложен в работе [19].

На левом конце демографической кривой граничные условия имеют вид:

$$h_i(t, 0) = 0, \quad (i = 1, 2, 3); \quad (4)$$

на правом конце при $i = 1, 2$, очевидно, следует записать

$$h_i(t, \infty) \approx h_i(t, \tau_m) = 0, \quad (5)$$

где $\tau_m = \tau_m(t)$ – возраст дожития $m\%$ населения (в расчетах принималось $m = 5$).

¹ См.: <http://static.government.ru/media/files/9gFM4FHj4PsB79I5v7yLVuPgu4bvR7M0.pdf>

Зависимость от возраста для функций $v_i = v_i(\tau)$, ($i = 1, 2$) примем в виде:

$$v_i(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \leq \tau_{ai}, \\ b_i \{ \exp[a_i(\tau - \tau_{ai})] - 1 \}, & \tau_{ai} \leq \tau \leq \tau_m, \end{cases} \quad (6)$$

где неизвестные параметры (b_i, a_i) определяются из условий

$$b_i \{ \exp[a_i(\tau_m - \tau_{ai})] - 1 \} = 1, \quad (7)$$

$$\int_0^{\tau_m} [s_i(t, \tau) + p_i(t, \tau)] d\tau = \int_{\tau_{ai}}^{\tau_m} \{ b_i (\exp[a_i(\tau - \tau_{ai})] - 1) \} h_i(t, \tau) d\tau. \quad (8)$$

Здесь τ_{ai} – верхняя граница активного периода физического состояния ($i = 1$) или трудовой деятельности ($i = 2$). В отличие от других составляющих, культура не подвержена износу, $v_3 \equiv 0$.

Решение задачи моделирования и прогнозирования демографической динамики позволяет определить функцию $a = a(t, \tau)$, которая задает долю населения возраста τ , участвующую в общественном производстве в год t . Суммарная величина ЧК населения определится из выражения

$$H(t) = \int \sum_{i=1}^3 \alpha_i h_i(t, \tau) a(t, \tau) \rho(t, \tau) d\tau. \quad (9)$$

2. Задача прогнозирования объемов инвестиций в человеческий капитал

Рассмотрим задающее эволюцию составляющих ЧК уравнение (2), в правой части которого присутствуют удельные расходы бюджета $s_i = s_i(t, \tau)$ и удельные частные инвестиции $p_i = p_i(t, \tau)$.

Распределение по возрастам удельных составляющих бюджетных расходов государства $s_i(t, \tau)$, направленных на приращение ЧК, определим по формулам

$$s_i(t, \tau) = \frac{S_{Ni}(t)}{\int_{\tau_{1Ni}}^{\tau_{2Ni}} \rho(t, \tau) d\tau}, \quad S_{Ni}(t) = \begin{cases} S_{Ni}(t, \tau), & \tau \in [\tau_{1Ni}, \tau_{2Ni}], \\ 0, & \tau \notin [\tau_{1Ni}, \tau_{2Ni}]. \end{cases} \quad (10)$$

$S_{Ni}(t)$ – суммы, закладываемые в бюджете на статью расходов N_i (N_i – нумерация статей бюджета на здравоохранение ($i = 1$), образование ($i = 2$) и культуру ($i = 3$)). В соответствии с (10) эти суммы будем распределять на периоды жизни человека $[\tau_{1Ni}, \tau_{2Ni}]$ и на численность людей в соответствующих возрастных группах.

Распределение по возрастам удельных составляющих частных расходов $p_i(t, \tau)$, направленных на приращение ЧК, запишем по аналогии с (10):

$$p_i(t, \tau) = \frac{P_i(t)}{\int_{\tau_{1i}}^{\tau_{2i}} \rho(t, \tau) d\tau}, \quad P_i(t) = \begin{cases} P_i(t, \tau), & \tau \in [\tau_{1i}, \tau_{2i}], \\ 0, & \tau \notin [\tau_{1i}, \tau_{2i}]. \end{cases} \quad (11)$$

В табл. 1 представлены годовые бюджетные и частные инвестиции, направленные на развитие человеческого капитала РФ за период 2000–2018 гг., по данным Федерального казначейства РФ и Федеральной службы государственной статистики.

На рис. 1 представлена структура исследования, направленного на решение задачи прогнозирования величины и динамики человеческого капитала.

Для решения задачи прогнозирования объемов бюджетных и частных инвестиций в ЧК будем использовать алгоритм нейросетевого моделирования. Преимущества, связанные с использованием нейросетевых моделей и их модификаций при анализе социально-экономических процессов и явлений, представлены в работах [20, 21]. Показано, что нейросетевые модели обладают свойством учитывать влияние неявных факторов и включать в исследование неочевидные математические связи, которые сложно выявить при использовании классических эконометрических моделей.

**Бюджетные и частные инвестиции, направленные на развитие человеческого капитала РФ
за период 2000–2018 гг., в текущих ценах**

Показатели	Временной интервал, год	Год, млрд руб.									
		2000	2002	2005	2007	2010	2012	2015	2016	2017	2018
Расходы консолидированного бюджета РФ и территориальных государственных внебюджетных фондов РФ¹											
<i>Бюджетные инвестиции в здравоохранение и спорт</i>		136,5	204,8	714,3	1197,1	1361,4	2382,8	3018,2	2995,9	2702,8	3174,5
Здравоохранение	$1 \leq \tau \leq \tau_m$	128,5	193,2	690,6	1117,7	1244,8	2226,5	2825,1	2784,1	2449,1	2891,7
Спорт и физическая культура	$3 \leq \tau \leq \tau_m$	8,0	11,6	23,7	79,4	116,6	156,3	193,1	211,8	253,7	282,8
<i>Бюджетные инвестиции в образование</i>		176,7	326,3	628,6	1060,7	1450,9	2047,1	2472,5	2546,9	2690,1	3015,6
Дошкольное образование	$3 \leq \tau \leq 6$	33,8	62,5	111,1	191,9	317,0	464,5	688,4	675,6	719,3	838,1
Общее образование	$7 \leq \tau \leq 17$	110,9	204,8	354,2	609,8	821,6	1176,0	1385,7	1460,9	1315,2	1451,3
Начальное профессиональное образование	$14 \leq \tau \leq 17$	4,2	7,7	34,2	49,6	58,6	53,8	–	–	219,8	237,8
Среднее профессиональное образование	$18 \leq \tau \leq 21$	5,3	9,9	24,6	45,1	70,0	126,4	189,0	191,2	202,6	221,6
Переподготовка и повышение квалификации	$25 \leq \tau \leq 59$	1,1	2,1	3,7	5,9	7,6	10,1	12,1	14,6	16,6	22,6
Высшее профессиональное образование	$18 \leq \tau \leq 24$	2,0	3,6	6,7	12,5	13,3	16,2	18,6	19,5	19,0	21,8
Молодежная политика и оздоровление детей	$3 \leq \tau \leq 5$	–	–	13,8	22,9	48,9	62,2	57,3	63,2	61,2	67,9
Прикладные научные исследования в образовании	$3 \leq \tau \leq 5$	–	–	0,1	0,1	0,1	0,1	0,4	0,2	0,2	0,4
Другие вопросы в области образования	$3 \leq \tau \leq \tau_m$	19,4	35,7	80,2	122,9	113,8	137,8	121,1	121,8	136,2	154,2
<i>Бюджетные инвестиции в культуру</i>		26,5	48,9	106,2	181,2	227,8	295,3	354,2	383,7	454,2	489,4
Культура	$3 \leq \tau \leq \tau_m$	20,7	38,2	68,3	138,4	179,0	229,4	279,3	306,9	369,9	389,6
Кинематография	$3 \leq \tau \leq \tau_m$	0,4	0,7	1,0	1,2	1,2	27,6	31,3	33,5	40,3	51,7
Телевидение и радиовещание	$3 \leq \tau \leq \tau_m$	2,4	4,4	6,6	11,7	13,6	16,5	19,4	18,9	19,7	21,3
Периодическая печать и издательства	$7 \leq \tau \leq \tau_m$	1,8	3,4	5,4	8,2	9,3	12,2	12,8	12,8	12,4	13,0
Прочие расходы в области культуры и СМИ	$3 \leq \tau \leq \tau_m$	1,3	2,3	24,9	21,7	24,7	9,6	11,4	11,6	11,9	13,8
<i>Итого</i>		339,7	580,0	1449,1	2439,0	3040,1	4725,2	5844,9	5926,5	5847,1	6679,5
Расходы из федерального бюджета РФ и государственных внебюджетных фондов РФ²											
Бюджетные инвестиции в здравоохранение и спорт	$1 \leq \tau \leq \tau_m$	16,9	26,0	159,6	354,5	347,4	1545,3	2227,1	2155,5	2190,3	2589,2
Бюджетные инвестиции в образование	$1 \leq \tau \leq \tau_m$	38,1	81,7	173,1	310,4	442,9	603,9	610,8	598,1	615,1	772,8
Бюджетные инвестиции в культуру	$1 \leq \tau \leq \tau_m$	10,6	21,0	47,6	71,0	125,6	167,4	172,0	163,9	185,8	183,3
<i>Итого</i>		65,6	128,7	380,3	735,9	915,9	2316,6	3009,9	2917,5	2991,2	3545,3
Частные инвестиции населения РФ³											
Частные инвестиции в здравоохранение и спорт	$1 \leq \tau \leq \tau_m$	39,6	83,3	221,5	362,1	561,1	733,8	942,4	1030,5	1120,0	1149,5
Частные инвестиции в образование	$1 \leq \tau \leq \tau_m$	23,0	33,5	62,4	102,1	226,1	274,8	258,6	233,4	226,8	248,3
Частные инвестиции в культуру и отдых	$1 \leq \tau \leq \tau_m$	40,6	118,9	432,5	707,3	1172,0	1504,0	1830,8	1879,3	2036,1	2378,0
<i>Итого</i>		103,3	235,7	716,4	1171,5	1959,2	2512,5	3031,8	3143,2	3382,9	3775,7

¹ <http://www.roskazna.ru/ispolnenie-byudzheto/konsolidirovannyj-byudzheto/>

² <http://www.roskazna.ru/ispolnenie-byudzheto/federalnyj-byudzheto/>

³ <https://www.gks.ru/compendium/document/13271>



Рис. 1. Структура исследования
Fig. 1. Research structure

Как любой социально-экономический показатель, объемы инвестирования в ЧК зависят от множества факторов и окружающих условий. В работе С.А. Айвазяна [22] было исследовано восемь основных направлений, влияющих на качество социально-экономической среды (табл. 2).

Таблица 2

Динамика базовых индикаторов основных направлений социально-экономического развития РФ за 2000–2018 гг.

Направление соц.-экон. развития	Индикатор, характеризующий данное направление	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Производство товаров и услуг	Валовой внутренний продукт ¹ (в текущих ценах), млрд руб.	7 305,6	8 943,6	10 830,5	13 208,2	17 027,2	21 609,8	26 917,2	33 247,5	41 276,8	38 807,2
Материальное благосостояние	Среднедушевые денежные доходы ² (в текущих ценах), тыс. руб./мес.	2,3	3,1	4,0	5,2	6,4	8,1	10,2	12,6	14,9	17,9
Производство товаров и услуг на душу населения	Производство товаров и услуг на душу населения ⁵ (в текущих ценах), тыс. руб./чел.	36,0	44,5	53,5	61,2	69,5	94,9	119,3	144,3	173,1	157,4
Качество социальной сферы	Ввод жилья ³ , млн кв. м.	30,3	31,7	33,8	36,4	41,0	43,6	50,6	61,2	64,1	59,9

¹ <https://gks.ru/accounts>

² <https://gks.ru/folder/13397>

³ https://gks.ru/enterprise_industrial

Направление соц.-экон. развития	Индикатор, характеризующий данное направление	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Социальная безопасность	Количество зарег. преступлений ¹ , тыс. ед.	2 952	2 968	2 526	2 756	2 894	3 555	3 855	3 583	3 210	2 995
Демография	Естественный прирост населения ² , на 1 000 чел.	-6,6	-6,6	-6,5	-6,2	-5,5	-5,9	-4,8	-3,3	-2,5	-1,8
Здоровье	Смертность населения ³ , на 1 000 чел.	15,3	15,6	16,2	16,4	15,9	16,1	15,1	14,6	14,5	14,1
Материальное благосостояние	Минимально необходимый месячный доход (в среднем на домохозяйство) ³ , тыс. руб./мес.	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
Индекс-дефлятор ⁵ (к предыдущему году), %		137,6	116,5	115,6	113,8	120,3	119,3	115,2	113,8	118,0	102,0

Направление соц.-экон. развития	Индикатор, характеризующий данное направление	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Производство товаров и услуг	Валовой региональный продукт (в текущих ценах), млн руб.	46 308,5	60 282,5	68 163,9	73 133,9	79 030,0	83 087,4	85 616,1	91 843,2	104 335,0
Материальное благосостояние	Среднедушевые денежные доходы (в текущих ценах), тыс. руб./мес.	18,9	20,8	23,2	25,9	27,8	30,5	30,9	31,7	33,0
Производство товаров и услуг на душу	Производство товаров и услуг на душу населения (в текущих ценах), тыс. руб./чел.	201,4	245,2	266,9	282,5	301,6	350,2	362,6	395,0	463,2
Качество социальной сферы	Ввод жилья, тыс. кв. м.	58,4	62,3	65,7	70,5	84,2	85,3	80,2	79,2	75,7
Социальная безопасность	Количество зарег. преступлений, тыс. ед.	2629	2405	2302	2206	2191	2388	2160	2058	1992
Демография	Естественный прирост населения, на 1 000 чел.	-1,7	-0,9	0,0	0,2	0,2	0,3	-0,0	-0,9	-1,6
Здоровье	Смертность населения, на 1 000 чел.	14,2	13,5	13,3	13	13,1	13	12,9	12,4	12,5
Материальное благосостояние	Минимально необходимый месячный доход (в среднем на домохозяйство), тыс. руб./мес.	*	45,0	51,1	57,7	60,6	65,1	67,5	68,0	71,4
Индекс-дефлятор (к предыдущему году), %		114,2	115,9	109,1	105,4	107,5	107,6	103,2	105,4	110,3

* – отсутствуют статистические данные.

Для каждого из восьми направлений был выбран базовый индикатор, наиболее полно характеризующий это направление. Динамика индикаторов направлений социально-экономического развития РФ за период 2000–2018 гг. по данным Федеральной службы государственной статистики и федеральных статистических наблюдений по социально-демографическим проблемам показана в табл. 2.

3. Результаты прогнозирования объемов инвестиций в человеческий капитал

Рассмотрим результаты решения задачи прогнозирования объемов бюджетных и частных инвестиций в ЧК страны. В качестве факторов, влияющих на определение объемов инвестиций в будущем, используются индикаторы, представленные в табл. 2. Модель используемой в расчетах нейрон-

¹ <https://www.gks.ru/folder/210/document/13205>

² <https://gks.ru/folder/12781>

³ https://www.gks.ru/free_doc/new_site/inspection/itog_inspect1.htm

ной сети приведена на рис. 2. Сеть является полносвязной многослойной; её структура определяется количеством скрытых слоев и числом нейронов на них. Нейросетевая модель представляет собой многослойный персептрон с сигмоидальной логистической функцией активации.

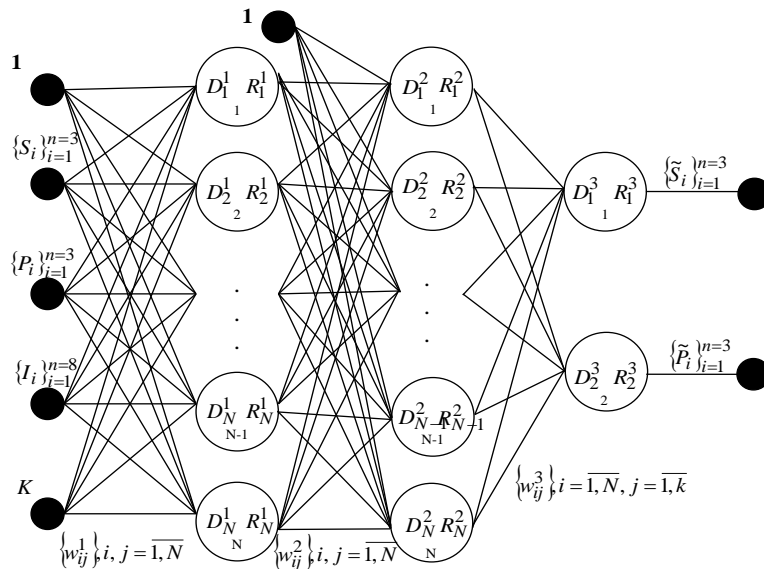


Рис. 2. Нейросетевая модель прогнозирования инвестиций в ЧК (D– входной сигнал, R– выходной сигнал)
Fig. 2. Neural network model for forecasting investments in human capital (D– input signal, R– output signal)

Входными данными в нейросетевой модели являются объемы бюджетных $\{S_i\}_{i=1}^{n=3}$ и частных инвестиций $\{P_i\}_{i=1}^{n=3}$ в ЧК, индикаторы направлений социально-экономического развития $\{I_i\}_{i=1}^{n=8}$. Для учета инфляционных процессов используется индекс-дефлятор K . Выходные данные нейронной сети – это прогнозные ежемесячные объемы бюджетных и частных инвестиций в ЧК: $\{\tilde{S}_i\}_{i=1}^{n=3}$ и $\{\tilde{P}_i\}_{i=1}^{n=3}$.

Для обучения нейронной сети производится нормировка входных и выходных данных в диапазоне $[0; 1]$. Для выбора структуры нейросетевой модели используется теорема А.Н. Колмогорова, согласно которой при N входах будет достаточно использовать при обучении $(2N + 1)$ нейронов; максимальное количество скрытых слоев не должно превышать двух [23]. В используемой нейросетевой модели количество входных нейронов $N = 16$ ($1, \{S_i\}_{i=1}^{n=3}, \{P_i\}_{i=1}^{n=3}, \{I_i\}_{i=1}^{n=8}, K$), количество скрытых слоев равно двум (см. рис. 2).

На основе информации о значениях переменных в известные моменты времени сеть вырабатывает решение о наиболее вероятном значении последовательности в будущем. Для прогнозирования исходная статистическая база делится на обучающее множество $\Omega_1 = \{2000, 2001, \dots, 2014\}$ и тестовое множество $\Omega_2 = \{2015, 2016, 2017, 2018\}$ – участок ретропрогноза. На множестве Ω_1 проводится обучение сети методом обратного распространения ошибок [24]. Для адаптации весовых коэффициентов \vec{W} используется погрешность обучения

$$E_q(\vec{W}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^l (y_{qj} - d_{qj})^2, \quad q = 1, \dots, n, \quad (12)$$

где y_{qj} – реальное значение j -го выхода при подаче на вход q -го образа, d_{qj} – модельное значение j -го выхода при подаче на вход q -го образа, l – выходы, n – количество элементов обучающей выборки.

Качество обучения нейронной сети определяется по формуле

$$\tilde{E}(\vec{W}) = \sqrt{\frac{2}{l \cdot n} \sum_{q=1}^n E_q(\vec{W})} \cdot 100\%. \quad (13)$$

На рис. 3, *a–c* представлена динамика бюджетных и частных инвестиций составляющие в ЧК в текущих ценах за период 2000–2018 гг. и их прогноз, полученный с использованием обученной по ежемесячным данным нейросетевой модели, на период до 2025 г. Временной лаг задержки поступления инвестиций в составляющие ЧК на основе исследований [25] был выбран 12 месяцев. На рис. 3, *d* показана зависимость показателя качества обучения нейронной сети от числа итераций.

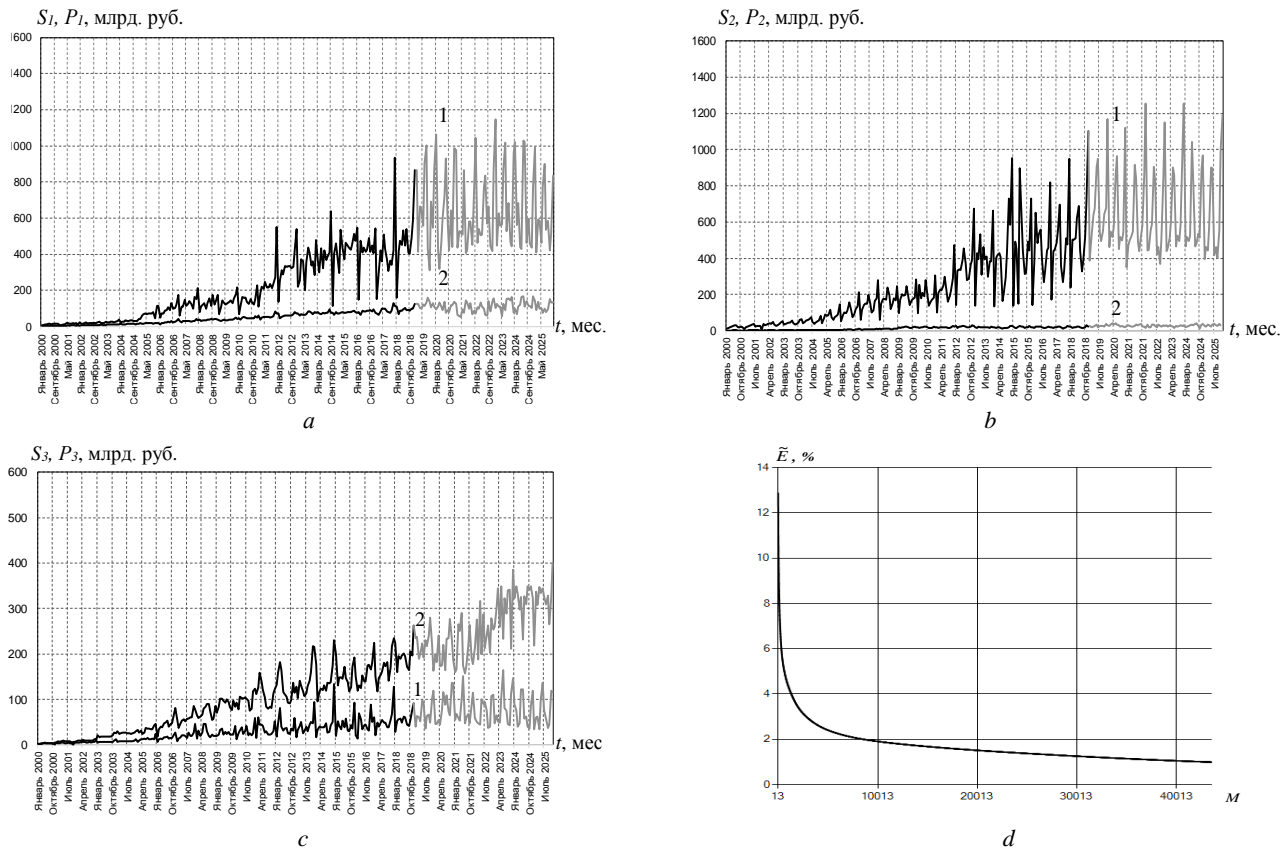


Рис. 3. Динамика бюджетных (1) и частных (2) инвестиций РФ за 2000–2018 гг. и их прогноз на 2019–2025 гг. в составляющие ЧК: *a* – здравоохранение, *b* – образование, *c* – культуру; *d* – зависимость показателя качества обучения нейронной сети от числа итераций

Fig. 3. Dynamics of budget (1) and private (2) investments of the Russian Federation for 2000–2018 and its forecast for 2019–2025 in the components of the human capital: *a* – healthcare, *b* – education, *c* – culture; *d* – the dependence of the quality indicator of learning a neural network from the number of iterations

Отклонение модельных значений инвестиций в составляющие ЧК РФ от фактических данных на тестовом множестве составило 1,6%.

4. Результаты прогнозирования величины и динамики человеческого капитала

По формуле (9) с использованием данных табл. 1 была рассчитана величина ЧК РФ в сопоставимых ценах 2018 г. за период 2000–2018 гг. Показано, что с 2000 по 2004 г. величина ЧК практически не менялась и была равна 50 трлн руб., что в удельных переменных в расчете на одного человека составило 350 тыс. руб./чел. Начиная с 2005 г. ЧК возрастал с ежегодным средним темпом 5,5% и достиг к 2018 г. величины 110 трлн руб. (752 тыс. руб./чел.). При этом за период 2000–2018 гг. ежегодные средние темпы роста инвестиций в составляющие ЧК также возрастали (здоровье – 9,2%, образование – 7,2%, культура – 9,8%). В абсолютном выражении удельные инвестиции в капитал здоровья выросли с 9,7 тыс. руб./чел. в 2000 г. до 47,2 тыс. руб./чел. в 2018 г., в капитал образования за этот же период – с 13,3 тыс. руб./чел. до 46,4 тыс. руб./чел., в капитал культуры – с 3,9 тыс. руб./чел. до 20,8 тыс. руб./чел.

В дальнейшем прогнозируется замедление темпов роста ЧК РФ до 1,0% в год, и к 2025 г. ЧК достигнет величины 123 трлн руб. (865 тыс. руб./чел.).

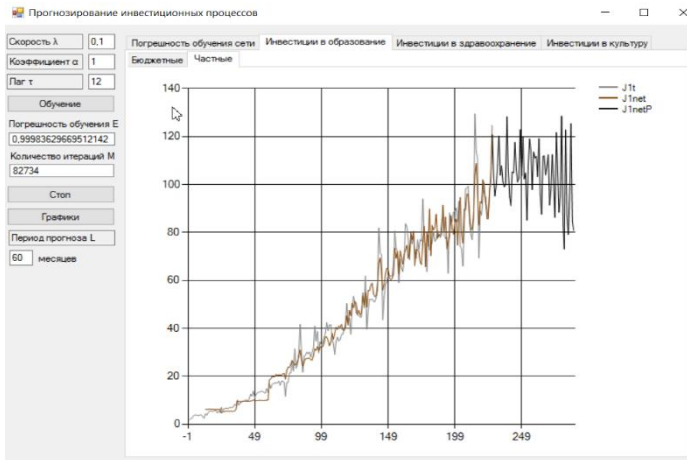


Рис. 4. Интерфейс программно-вычислительного комплекса
Fig. 4. Interface software complex

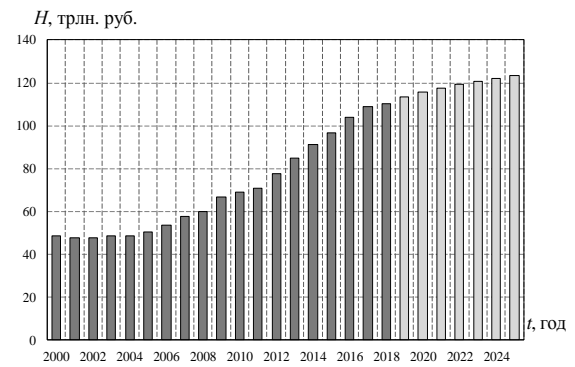


Рис. 5. Динамика ЧК РФ за 2000–2018 гг. и его прогноз на 2019–2025 гг.
Fig. 5. The dynamics of the human capital of the Russian Federation for 2000–2018 and its forecast for 2019–2025

Алгоритм нейросетевого прогнозирования социально-экономических процессов реализован авторами в программно-вычислительном комплексе (рис. 4) [26]. Результаты расчета ЧК РФ за 2000–2018 гг. и его прогноз до 2025 г. получены с использованием результатов решения задачи прогнозирования объемов инвестиций в составляющие ЧК методом нейросетевого моделирования (рис. 5).

Заключение

Предложен подход к решению задачи моделирования и прогнозирования ЧК с использованием нейросетевого алгоритма на основе статистических данных экономики РФ, который позволяет проводить анализ динамики ЧК и его составляющих: здоровья, образования и культуры, – по времени и по возрасту демографических элементов.

Расчеты показали, что для величины человеческого капитала Российской Федерации период 2000–2005 гг. являлся периодом стабилизации, далее, вплоть до 2018 г., наблюдался рост этого показателя. Наибольшие темпы роста приходятся на 2013–2017 гг. Прогнозируется замедление средних ежегодных темпов роста ЧК РФ с 4,4% в 2000–2018 гг. до 1,0% в дальнейшем до 2025 г.

Нейросетевое моделирование прогнозных значений объемов инвестиций в ЧК показало свою эффективность. Так, отклонение модельных значений инвестиций от фактических в составляющие ЧК на участке ретропрогноза составило 1,6%.

Предложенная методика расчета величины и динамики ЧК может быть использована для оценки и сравнения социально-экономического положения регионов РФ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Petty W. Political Arithmetick. London, 1690.
2. Smith A. An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations. Scotland, 1776.
3. Ricardo D. On the Principles of Political Economy and Taxation. England, 1817.
4. Marshall A. Principles of Economics. London, 1860.
5. Fisher I. Senses of "Capital" // The Journal of Political Economy. 1897. V. 7, No. 26. P. 199–213.
6. Schultz T.W. Economic value of education. New York : Columbia University Press, 1963. XII, 92 p.
7. Becker G.S. Human capital: a Theoretical and Empirical Analysis with Special Reference to Education. New York : Columbia University Press, 1975. XVI, 187 p.
8. Ben-Porath Y. The production of Human Capital and the Life Cycle of Earning // Journal of Political Economy. 1967. No. 4 (75). P. 352–365.
9. Добрынин А.И., Дятлов С.А., Цыренова Е.Д. Человеческий капитал в транзитивной экономике: формирование, оценка, эффективность использования. СПб. : Наука, 1999. 310 с.

10. Капелюшников Р.И. Записка об отечественном человеческом капитале. М. : ГУ ВШЭ, 2008. 56 с.
11. Корицкий А.В. Введение в теорию человеческого капитала. Новосибирск : СибУПК, 2000. 112 с.
12. Айвазян С.А. Анализ синтетических категорий качества жизни населения субъектов РФ: их измерение, динамика, основные тенденции // Уровень жизни населения регионов России. 2002. № 11. С. 5–40.
13. Keskin K., Saglam C. Investment on human capital in a dynamic contest model // Studies in nonlinear dynamics and econometrics. 2019. Vol. 23, No. 1. DOI: 10.1515/snde-2017-0095
14. Макаров В.Л., Айвазян С.А., Афанасьев М.Ю., Бахтизин А.Р., Нанавян А.М. Оценка эффективности регионов РФ с учетом интеллектуального капитала // Экономика региона. 2014. № 4. С. 9–30.
15. Fedotova M.A., Loseva O.V., Kontorovich O.I. Monetary Valuation of Intellectual Human Capital in Innovative Activity // Equilibrium-quarterly journal of economics and economic policy. 2016. Vol. 11, No. 2. P. 369–385. DOI: 10.12775/EQUIL.2016.017
16. Xu Y., Li A. The relationship between innovative human capital and interprovincial economic growth based on panel data model and spatial econometrics // Journal of computational and applied mathematics. 2020. V. 365. DOI :10.1016/j.cam.2019.112381
17. Кетова К.В. Математические модели экономической динамики. Ижевск : ИжГТУ, 2013. 284 с.
18. Русяк И.Г., Кетова К.В. Анализ экономических характеристик демографических потерь // Вестник Томского государственного университета. 2008. № 310. С. 153–160.
19. Кетова К.В., Русяк И.Г. Идентификация и прогнозирование обобщающих показателей развития региональной экономической системы // Прикладная эконометрика. 2009. № 3 (15). С. 56–71.
20. Cavarretta F., Naldi G. Mathematical study of a nonlinear neuron model with active dendrites // Aims Mathematics. 2019. V. 4, No. 3. P. 831–846. DOI: 10.3934/math.2019.3.831
21. Nguyen G., Dlugolinsky S., Bobk M. Machine Learning and Deep Learning frameworks and libraries for large-scale data mining: a survey // Artificial Intelligence Review. 2019. No. 52. P. 77–124. DOI: 10.1007/s10462-018-09679-z
22. Айвазян С.А., Афанасьев М.Ю., Кудров А.В. Индикаторы основных направлений социально-экономического развития и их агрегаты в пространстве характеристик региональной дифференциации // Прикладная эконометрика. 2019. № 2 (54). С. 51–62.
23. Осовский С. Нейронные сети для обработки информации. М. : Финансы и статистика, 2004. 343 с.
24. Рутковская Д., Пилинский М., Рутковский Л. Нейронные сети. генетические алгоритмы и нечеткие системы. М. : Горячая линия – Телеком, 2006. 383 с.
25. Кетова К.В., Касаткина Е.В., Насридинова Д.Д. Прогнозирование динамики инвестиционных процессов // Вестник Ижевского государственного технического университета. 2013. № 3 (59). С. 150–154.
26. Вавилова Д.Д. Программа нейросетевого моделирования и прогнозирования инвестиционных процессов. Св-во о регистрации программы для ЭВМ 2019667497. Заявка № 2019666706 от 16.12.2019.

Поступила в редакцию 25 марта 2020 г.

Ketova K.V., Russyak I.G., Vavilova D.D. (2020) MATHEMATICAL MODELING AND NEURAL NETWORK PREDICTION OF THE STRUCTURE AND DYNAMICS OF HUMAN CAPITAL OF THE RUSSIAN FEDERATION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 53. pp. 13–24

DOI: 10.17223/19988605/53/2

The problem of mathematical modeling and forecasting the values, structure and dynamics of human capital using the neural network algorithm is solved. The paper is used an integrated economic and mathematical model of human capital, which includes quantitative and qualitative characteristics. A quantitative characteristic is the distribution of demographic elements by ages. Qualitative characteristics include such components of human capital as educational capital, health, and cultural capital.

The forecast of the dynamics of human capital is based on the two-dimensional transport equation, which takes into account the time and age of demographic elements, as well as the forecast values of the volume of budgetary and private investments in human capital, built on a multilayer neural network model.

The calculations were made on the basis of statistical information for the Russian Federation, including data on demographics, volumes of investments in human capital of the economic system of the Russian Federation, as well as indicators of directions of socio-economic development. Volumes of investments in human capital determine budget expenditures and private expenses of citizens. To forecast the dynamics of human capital, the values of the volumes of investments in it are used, the forecast of which, in turn, is built using the neural network model.

The period 2000-2018 was chosen as the studied one. The adaptive neural network modeling algorithm used in the work made it possible to construct a forecast of human capital of the Russian Federation until 2025.

The neural network model used in this study is a multilayer fully connected perceptron with a sigmoidal logistic activation function. Neural network modeling of investment values has been shown to be effective. The constructed forecasts satisfy the given accuracy. So, the deviation of the model values of investments from the actual in the components of human capital for the period of retrospective forecast 2015-2018. amounted to 1.6%.

Calculations of the human capital of the Russian Federation in the interval 2000-2018 showed that it began to increase since 2005 with an annual average rate of 5.5%. Since that moment in time, the average annual investment rate in the components of human

capital has increased: health - 3.7%, education - 3.8%, culture - 2.6%. In the future, until 2025, a slowdown in the growth of human capital of the Russian Federation to 1.0% per year is forecasted.

The proposed methodology for calculating the magnitude and dynamics of human capital can be used to assess and compare the socio-economic situation of the Russian Federation regions.

Keywords: mathematical modeling; forecasting; human capital; neural network algorithm.

KETOVA Karolina Vyacheslavovna (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation).

E-mail: ketova_k@mail.ru

RUSYAK Ivan Grigoryevich (Doctor of Technical Sciences, Professor, Russian Academy of Missile and Artillery Sciences, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation).

E-mail: primat@istu.ru

VAVILOVA Daiana Damirovna (Post-graduate Student, Assistant, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation).

E-mail: vavilova_dd@mail.ru

REFERENCES

1. Petty, W. (1690) *Political Arithmetick*. London: Printed for Robert Clavel ... and Hen. Mortlock.
2. Smith, A. (1776) *An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations*. Scotland: [s.n.].
3. Ricardo, D. (1817) *On the Principles of Political Economy and Taxation*. London: John Murray, Albemarle-Street.
4. Marshall A. (1860) *Principles of Economics*. London: [s.n.].
5. Fisher, I. (1897) Senses of Capital. *The Journal of Political Economy*. 7(26). pp. 199–213.
6. Schultz, T.W. (1963) *Economic value of education*. New York: Columbia University Press.
7. Becker, G.S. (1975) *Human capital: A Theoretical and Empirical Analysis with Special Reference to Education*. New York: Columbia University Press.
8. Ben-Porath, Y. (1967) The production of Human Capital and the Life Cycle of Earning. *Journal of Political Economy*. 4(75). pp. 352–365.
9. Dobrynin, A.I., Dyatlov, S.A. & Tsyrenova, E.D. (1999) *Chelovecheskiy kapital v tranzitivnoy ekonomike: formirovaniye, otsenka, effektivnost' ispol'zovaniya* [Human capital in a transitive economy: formation, evaluation, use efficiency]. St. Petersburg: Nauka.
10. Kapelyushnikov, R.I. (2008). *Zapiska ob otechestvennom chelovecheskom kapitale* [A note on domestic human capital]. Moscow: HSE.
11. Koritsky, A.V. (2000) *Vvedeniye v teoriyu chelovecheskogo kapitala* [Introduction to the theory of human capital]. Novosibirsk: SibUPK.
12. Ayzvazyan, S.A. (2002) Analiz sinteticheskikh kategoriy kachestva zhizni naseleniya sub"ektov RF: ikh izmereniye, dinamika, osnovnyye tendentsii [Analysis of synthetic categories of quality of life of the population of the constituent entities of the Russian Federation: their measurement, dynamics, and main trends]. *Uroven' zhizni naseleniya regionov Rossii – Living Standards of the Population in the Regions of Russia*. 11. pp. 5–40.
13. Keskin K. & Saglam C. (2019) Investment on human capital in a dynamic contest model. *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*. 23(1). DOI: 10.1515/snde-2017-0095
14. Makarov, V.L., Ayzvazyan, S.A., Afanasiev, M.Yu., Bakhtizin, A.R. & Nanavyan, A.M. (2014) The estimation of the regions' efficiency of the Russian Federation including the intellectual capital, the characteristics of readiness for innovation, level of well-being, and quality of life. *Ekonomika regiona – Economy of Region*. 4. pp. 9–30.
15. Fedotova, M.A., Loseva, O.V. & Kontorovich, O.I. (2016) Monetary Valuation of Intellectual Human Capital in Innovative Activity. *Equilibrium-Quarterly Journal of Economics and Economic Policy*. 11(2). pp. 369–385. DOI: 10.12775/EQUIL.2016.017
16. Xu, Y. & Li, A. (2020) The relationship between innovative human capital and interprovincial economic growth based on panel data model and spatial econometrics. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 365. DOI: 10.1016/j.cam.2019.112381
17. Ketova, K.V. (2013) *Matematicheskie modeli ekonomicheskoy dinamiki* [Mathematical models of economic dynamics]. Izhevsk: IzhSTU.
18. Russyak, I.G. & Ketova, K.V. (2008) Analiz ekonomicheskikh kharakteristik demograficheskikh poter' [Analysis of the economic characteristics of demographic losses]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 310. pp. 153–160.
19. Russyak, I.G. & Ketova, K.V. (2009) Identification and Forecast of Generalized Indicators of Regional Economic System Development. *Prikladnaya ekonometrika – Applied Econometrics*. 15(3). pp. 56–71.
20. Cavarretta, F. & Naldi, G. (2019) Mathematical study of a nonlinear neuron model with active dendrites. *Aims Mathematics*. 4(3). pp. 831–846. DOI:10.3934/math.2019.3.831
21. Nguyen, G., Dlugolinsky, S. & Bobk, M. (2019) Machine Learning and Deep Learning frameworks and libraries for large-scale data mining: a survey. *Artificial Intelligence Review*. 52. pp. 77–124. DOI: 10.1007/s10462-018-09679-z

22. Aivazian, S.A., Afanasiev, M.Yu. & Kudrov, A.V. (2019) Indicators of the main directions of socio-economic development in the space of characteristics of regional differentiation. *Prikladnaya ekonometrika – Applied Econometrics*. 54(2). pp. 51–62.
23. Osovsky, S. (2004) *Neyronnye seti dlya obrabotki informatsii* [Neural networks for information processing]. Moscow: Finansy i statistika.
24. Rutkovskaya, D., Pilinsky, M. & Rutkovsky, L. (2006) *Neyronnye seti. geneticheskie algoritmy i nechetkie sistemy* [Neural networks, genetic algorithms and fuzzy systems]. Moscow: Goryachaya liniya – Telekom.
25. Kasatkina, E.V., Ketova, K.V. & Nasridinova, D.D. (2013) Forecasting the dynamics of investment processes. *Vestnik Izhevskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Bulletin of Kalashnikov ISTU*. 59(3). pp. 150–154.
26. Vavilova, D.D. (2019) *Programma neyrosetevogo modelirovaniya i prognozirovaniya investitsionnykh protsessov* [The program of neural network modeling and forecasting of investment processes]. Certificate of Computer Program Registration 2019667497. Application No. 2019666706 dated December 16, 2019.

УДК 519.872

DOI: 10.17223/19988605/53/3

А.З. Меликов, Э.В. Мехбалыева

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ С ГЕТЕРОГЕННЫМИ СЕРВЕРАМИ
И РАНДОМИЗИРОВАННОЙ N -ПОЛИТИКОЙ**

Изучаются марковские модели систем с двумя гетерогенными серверами. Предлагается рандомизированная N -политика включения медленного сервера, согласно которой при достижении длины очереди заявок величины N медленный сервер включается с определенной вероятностью. Рассматриваются модели двух типов: с неограниченным и ограниченным размером буфера для ожидания заявок. Разработан численный метод расчета распределения вероятностей состояний и характеристик изучаемых систем и решена задача их оптимизации. Даны результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: система с гетерогенными серверами; рандомизированная N -политика; численный анализ.

Одним из основных допущений в классических моделях систем массового обслуживания (СМО) является то, что серверы являются идентичными. Однако это допущение плохо соотносится с действительностью, так как в реальных СМО серверы отличаются друг от друга по различным показателям, например по скорости обработки заявок, надежности, стоимости эксплуатации и т.д.

В литературе СМО с неидентичными серверами получили название систем с гетерогенными серверами (Queue with Heterogeneous Servers, QHS). Такие системы часто встречаются при моделировании компьютерных и телекоммуникационных систем, так как в процессе их расширения приходится использовать гетерогенные компьютеры (серверы). Кроме компьютерных и телекоммуникационных систем серверы с различными скоростями встречаются в колл-центрах с многими операторами, которые имеют различные квалификации, а также в производственных системах, где в процессе обслуживания заявок участвуют не машины, а люди.

Первая серьезная работа, посвященная изучению моделей QHS, описана в [1]. В ней изучается марковская СМО с бесконечной очередью, в которой для обслуживания заявок с равными вероятностями назначается один из свободных серверов (эта схема называется рандомизированным доступом). Предложен алгоритм вычисления стационарных вероятностей состояний системы, а также найдены формулы для нахождения среднего числа заявок в системе. Доказано, что из результатов данной работы в частных случаях получаются классические результаты для СМО с идентичными серверами.

Анализ доступной литературы показал, что в подавляющем большинстве работ изучены проблемы расчета характеристик QHS, в которых приняты схемы рандомизированного [1–5] и упорядоченного доступа [6–14]. Обзор этих работ можно найти в [15, 16].

В QHS важными являются проблемы определения оптимальных стратегий доступа заявок, а также схем включения серверов в зависимости от текущего состояния системы. Отметим, что в целях оптимизации QHS зачастую используется FSF-схема доступа (Fast Server First), т.е. в момент поступления заявки для обслуживания всегда выбирается сервер, который имеет наивысшую скорость среди свободных серверов. Это объясняется тем, что вероятность потери в системе $M/M/k/k$ имеет минимальное значение при использовании FSF-схемы доступа [17]. Однако FSF-схема доступа не всегда является оптимальной и даже субоптимальной для QHS с очередями. Так, в работе [18] доказано, что для QHS с неограниченной очередью оптимальной для минимизации среднего числа заявок в системе является N -политика. Согласно данной политике в двух серверных QHS быстрый сервер работает всегда, если в системе имеется хотя одна заявка, а медленный сервер включается лишь тогда, когда длина очереди достигает определенного (порогового) значения N . С использованием

разных подходов этот результат доказан различными авторами (см., напр.: [19–24]). Справедливости ради отметим, что задачи оптимизации СМО с однотипными резервными серверами (homogeneous servers), в которых моменты включения и отключения резервных серверов зависят от длины очереди, были изучены еще в 70-е гг. прошлого века [25] (после выхода в свет этой монографии в русскоязычной литературе появилась серия публикаций на эту тему; заинтересованный читатель может найти их в интернет-ресурсах).

В дальнейшем в работах [26–28] с помощью известного алгоритма Ховарда эти результаты были распространены на системы с дополнительной структурой штрафов, а в работе [29] исследована система с повторными заявками в предположении, что интервалы между их поступлениями и длительности их обслуживания имеют распределения фазового типа. Обобщения этой схемы для моделей QHS с ненадежными серверами рассмотрены в [30, 31].

В настоящей работе изучается QHS с двумя гетерогенными серверами и предлагается рандомизированная N -политика включения медленного сервера, согласно которой при достижении длины очереди заявок величины N медленный сервер включается с определенной вероятностью, а с дополнительной вероятностью он остается в спящем режиме. Данная политика является обобщением классической N -политики. Кроме того, здесь предлагается численный метод нахождения стационарных вероятностей состояний системы, а также вычисляются характеристики системы с неограниченным и ограниченным размером буфера для ожидания заявок. Отметим, что время выполнения алгоритма реализации предложенного метода практически равно нулю.

1. Описание моделей и постановка задачи

Рассмотрим QHS с неограниченным буфером для ожидания заявок, которая содержит два сервера: быстрый (F-сервер) и медленный (S-сервер). Здесь приняты следующие допущения:

(i) В систему поступает пуассоновский поток идентичных заявок с интенсивностью λ , причем эта величина не зависит от состояния серверов.

(ii) Время обслуживания заявок в обоих серверах являются случайной величиной с показательной функцией распределения; средние времена обслуживания в F-сервере и S-сервере равны μ_F^{-1} и μ_S^{-1} соответственно, при этом $\mu_F > \mu_S$.

(iii) F-сервер всегда является активным, а S-сервер может включаться лишь тогда, когда длина очереди не меньше определенной пороговой величины N , $N < \infty$. Схемы включения и отключения S-сервера определяются следующим образом. Если в момент поступления заявки длина очереди не меньше величины N , то S-сервер включается с вероятностью α , $0 < \alpha < 1$ и одна заявка выбирается из очереди для обслуживания в этом сервере; с дополнительной вероятностью $1 - \alpha$ он остается в спящем режиме, т.е. в отключенном состоянии. По завершении обслуживания заявки в S-сервере он выбирает для обслуживания одну заявку из очереди, если длина очереди в этот момент больше величины N ; иначе S-сервер уходит в спящий режим, т.е. отключается.

(iv) В системе с ограниченным буфером поступившая заявка теряется с вероятностью, равной единице, если в этот момент буфер заполнен полностью и S-сервер является включенным; если в момент поступления заявки буфер заполнен полностью и S-сервер является отключенным, то либо с вероятностью α S-сервер включается либо с дополнительной вероятностью $1 - \alpha$ поступившая заявка теряется.

Задача состоит в нахождении совместного распределения числа заявок в системе и статуса S-сервера, а также в разработке методов вычисления ее характеристик.

2. Методы расчета вероятностей состояний и характеристик изучаемых систем

Сначала рассмотрим модель QHS с неограниченным буфером. Состояние этой системы в произвольный момент времени определяется двумерным вектором (n, k) , где n – число заявок в системе,

k – состояние S-сервера, т.е. $k = 0$, если S-сервер является отключенным, и $k = 1$ в противном случае. Следовательно, работа системы описывается двумерной цепью Маркова (ЦМ) со следующим пространством состояний:

$$E = E_0 \cup E_1, \text{ где } E_k = \{(n, k): n = 0, 1, 2, \dots\}, k = 0, 1. \quad (1)$$

Элементы производящей матрицы этой ЦМ обозначаются через $q((n, k), (n', k'))$, т.е. $q((n, k), (n', k'))$ обозначает интенсивность перехода из состояния (n, k) в состояние (n', k') .

Исходя из описанного механизма работы системы заключаем, что эти величины определяются следующим образом (рис. 1):

– случаи $(n, 0) \in E_0$:

$$q((n, 0), (n', k')) = \begin{cases} \lambda, & \text{если } n < N, n' = n + 1, k' = 0, \\ \lambda(1 - \alpha), & \text{если } n \geq N, n' = n + 1, k' = 0, \\ \lambda\alpha, & \text{если } n \geq N, n' = n, k' = 1, \\ \mu_F, & \text{если } n > 0, n' = n - 1, k' = 0; \end{cases} \quad (2)$$

– случаи $(n, 1) \in E_1$:

$$q((n, 1), (n', k')) = \begin{cases} \lambda, & \text{если } n' = n + 1, k' = 1, \\ \mu_F, & \text{если } 0 < n \leq N, n' = n - 1, k' = 1, \\ \mu_F + \mu_S, & \text{если } n > N, n' = n - 1, k' = 1, \\ \mu_S, & \text{если } n \leq N, n' = n, k' = 0. \end{cases} \quad (3)$$

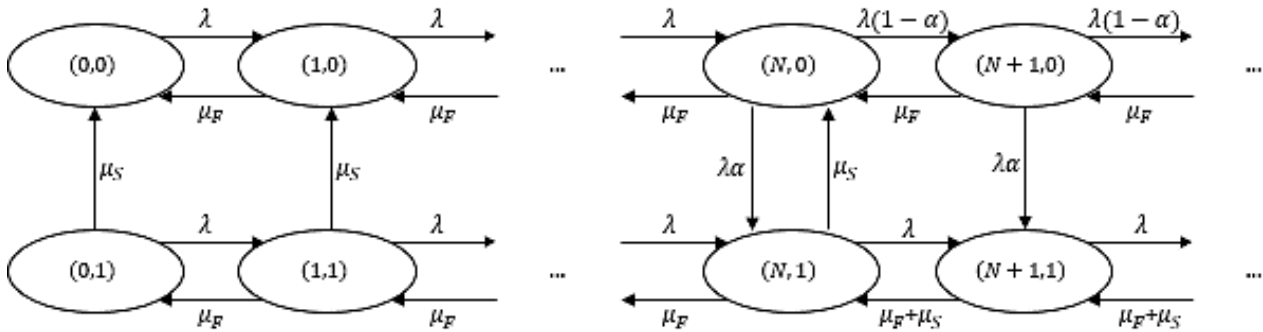


Рис. 1. Граф переходов между состояниями системы
Fig. 1. Graph of transitions between states of the systems

Стационарную вероятность состояния $(n, k) \in E$ обозначим через $p(n, k)$. Условием существования стационарного режима является $\lambda < \mu_F + \mu_S$.

Основными характеристиками данной модели QHS являются среднее число заявок в системе (L_s), среднее время пребывания заявки в системе (W_s) и интенсивность включения S-сервера (RS). Среднее число заявок в системе определяются как математическое ожидание соответствующей случайной величины, т.е.

$$L_s = \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{k=0}^1 p(n, k). \quad (4)$$

Среднее время пребывания заявок вычисляется с помощью известной формулы Литтла:

$$W_s = \frac{1}{\lambda} L_s. \quad (5)$$

Поскольку S-сервер включается с вероятностью α , то если в момент поступления заявки число заявок в системе не меньше величины N , то интенсивность включения S-сервера вычисляется следующим образом:

$$RS = \lambda \alpha \sum_{n=N}^{\infty} p(n, 0). \quad (6)$$

Для нахождения стационарных вероятностей состояний $p(n, k)$ может быть использован метод производящих функций. Однако его применение связано с определенными методологическими и техническими трудностями из-за сложной структуры производящей матрицы изучаемой цепи Маркова. Поэтому рассмотрим приближенный метод расчета вероятностей состояний и характеристик системы, основанный на принципах фазового укрупнения состояний многомерных цепей Маркова [15, 16]. Применение этого метода в изучаемой системе является корректным, так как согласно нашим допущениям скорость работы F-сервера много больше, чем скорость работы S-сервера. Кроме того, предположим, что $\alpha \ll 1 - \alpha$, т.е. $\alpha \ll 0,5$. Тогда в период работы изучаемая система долгое время пребывает в состояниях из классов E_0 и E_1 , и редко происходят переходы между этими классами (см. рис. 1).

Исходя из этого факта, все состояния внутри каждого класса E_k объединяются в одно укрупненное состояние $\langle k \rangle$, и, таким образом, определяется множество укрупненных состояний $\Omega = \{\langle k \rangle : k = 0, 1\}$.

Приближенные значения вероятностей состояний $\tilde{p}(n, k)$, $(n, k) \in E$ исходной модели определяются как [15, 16]

$$\tilde{p}(n, k) = \rho_k(n) \pi(\langle k \rangle), \quad (7)$$

где $\rho_k(n)$ – вероятность состояния (n, k) внутри расщепленной модели с пространством состояний E_k , а $\pi(\langle k \rangle)$ – вероятность укрупненного состояния $\langle k \rangle \in \Omega$.

Из соотношений (2) заключаем, что интенсивности переходов между состояниями расщепленной модели с пространством состояний E_0 определяются следующим образом:

$$q_0(n, n') = \begin{cases} \lambda, & \text{если } n < N, \quad n' = n + 1, \\ \lambda(1 - \alpha), & \text{если } n \geq N, \quad n' = n + 1, \\ \mu_F, & \text{если } n' = n - 1. \end{cases} \quad (8)$$

Из (8) получаем, что если выполняется условие $\tilde{v}_F < 1$, где $v_F = \lambda/\mu_F$, $\tilde{v}_F = (1 - \alpha)v_F$, то вероятности состояний расщепленной модели с пространством состояний E_0 вычисляются как

$$\rho_0(n) = \begin{cases} v_F^n \rho_0(0), & \text{если } 0 \leq n \leq N, \\ (1 - \alpha)^{-N} \tilde{v}_F^n \rho_0(0), & \text{если } n > N, \end{cases} \quad (9)$$

где $\rho_0(0)$ определяется из условия нормировки, т.е. $\rho_0(0) = \left(\sum_{n=0}^N v_F^n + v_F^N \frac{\tilde{v}_F}{1 - \tilde{v}_F} \right)^{-1}$.

Аналогичным образом из соотношений (3) заключаем, что интенсивности переходов между состояниями расщепленной модели с пространством состояний E_1 определяются следующим образом (см. рис. 1):

$$q_1(n, n') = \begin{cases} \lambda, & \text{если } n' = n + 1, \\ \mu_F, & \text{если } n \leq N, \quad n' = n - 1, \\ \mu_F + \mu_S, & \text{если } n > N, \quad n' = n - 1. \end{cases} \quad (10)$$

Поскольку выполняется условие $v_{FS} < 1$, где $v_{FS} = \lambda/(\mu_F + \mu_S)$, то из (10) получаем, что вероятности состояний расщепленной модели с пространством состояний E_1 находятся как

$$\rho_1(n) = \begin{cases} v_{FS}^n \rho_1(0), & \text{если } 0 \leq n \leq N, \\ \left(1 + \frac{\mu_S}{\mu_F} \right)^N \tilde{v}_{FS}^n \rho_1(0), & \text{если } n > N, \end{cases} \quad (11)$$

где $\rho_1(0)$ определяется из условия нормировки, т.е. $\rho_1(0) = \left(\sum_{n=0}^N v_F^n + v_F^N \frac{\tilde{v}_{FS}}{1 - \tilde{v}_{FS}} \right)^{-1}$.

Тогда, объединяя условия $\tilde{v}_F < 1$ и $v_{FS} < 1$, получаем, что необходимым условием, при котором предложенный метод может корректно применяться для изучаемой модели QHS, является выполнение следующего соотношения:

$$\lambda < \min \left\{ (1 - \alpha)^{-1} \mu_F; \mu_F + \mu_S \right\}. \quad (12)$$

Пусть $q_{kk'}, \langle k \rangle, \langle k' \rangle \in \Omega$, обозначает интенсивность перехода из укрупненного состояния $\langle k \rangle$ в укрупненное состояние $\langle k' \rangle$. Указанные интенсивности переходов вычисляются следующим образом:

$$q_{01} = \lambda \alpha \sum_{n=N}^{\infty} \rho_0(n) = \lambda \alpha \left(1 - \sum_{n=0}^{N-1} \rho_0(n) \right); \quad (13)$$

$$q_{10} = \mu_S \sum_{n=0}^N \rho_1(n). \quad (14)$$

Следовательно, из (13) и (14) имеем

$$\pi(\langle 0 \rangle) = \frac{q_{10}}{q_{01} + q_{10}}, \pi(\langle 1 \rangle) = 1 - \pi(\langle 0 \rangle). \quad (15)$$

Таким образом, с учетом соотношений (8)–(15) из (7) вычисляются приближенные значения вероятностей состояний. После стандартных преобразований определяется приближенное значение среднего числа заявок в системе:

$$L_s \approx \sum_{k=0}^1 \pi(\langle k \rangle) \sum_{n=1}^{\infty} n \rho_k(n) = \pi(\langle 0 \rangle) \rho_0(0) \left(\sum_{n=1}^N n v_F^n + (1 - \alpha)^{-N} G(v_F) \right) + \pi(\langle 1 \rangle) \rho_1(0) \left(\sum_{n=1}^N n v_F^n + \left(1 + \frac{\mu_S}{\mu_F} \right)^N G(v_{FS}) \right), \quad (16)$$

где $G(x) = \frac{x^{N+1} ((N+1)(1-x) + x)}{(1-x)^2}$.

Приближенное значение интенсивности включения S-сервера вычисляется как

$$RS \approx \lambda \alpha \pi(\langle 0 \rangle) \sum_{n=N}^{\infty} \rho_0(n) = \lambda \alpha \pi(\langle 0 \rangle) \left(1 - \sum_{n=0}^{N-1} \rho_0(n) \right). \quad (17)$$

Отметим, что разработанный приближенный подход может быть использован и для изучения модели QHS с ограниченным размером буфера. Так, пусть общая вместимость системы равна M , где $M > N$ (т.е. размер буфера равен $M - 1$). С этой целью во второй строке формул (9) и (11) верхняя граница изменения параметра n (бесконечность) заменяется конечной величиной M . При этом соответствующим образом изменяются формулы для нахождения величин $\rho_k(0), k = 0, 1$, т.е. в данной модели QHS имеем

$$\rho_0(0) = \left(\sum_{n=0}^N v_F^n + (1 - \alpha)^{-N} \sum_{n=N+1}^M \tilde{v}_F^n \right)^{-1}; \rho_1(0) = \left(\sum_{n=0}^N v_F^n + \left(1 + \frac{\mu_S}{\mu_F} \right)^N \sum_{n=N+1}^M \tilde{v}_{FS}^n \right)^{-1}. \quad (18)$$

Вероятности укрупненных состояний вычисляются по формулам (13)–(15). Далее из формулы (16) и (17) заключаем, что в данной модели QHS приближенные значения характеристик системы вычисляются так:

$$L_s \approx \sum_{k=0}^1 \pi(\langle k \rangle) \sum_{n=1}^M n \rho_k(n); \quad (19)$$

$$RS \approx \lambda \alpha \pi(\langle 0 \rangle) \sum_{n=N}^M \rho_0(n). \quad (20)$$

В данной модели QHS появляется новая характеристика – вероятность потери заявок (PB). Точное значение этой величины определяется как

$$PB = (1 - \alpha) p(M, 0) + p(M, 1). \quad (21)$$

Среднее время пребывания заявок в данной системе вычисляется следующим образом:

$$W_s = \frac{1}{\lambda(1 - PB)} L_s; \quad (22)$$

Исходя из (6) заключаем, что приближенное значение этой величины определяется так:

$$PB \approx (1 - \alpha) \rho_0(M) \pi(<0>) + \rho_1(M) \pi(<1>). \quad (23)$$

3. Численные результаты

Рассмотрим результаты численных экспериментов для изучаемых моделей. Проводимые эксперименты имеют три цели:

- 1) оценить точность разработанных приближенных формул для расчета стационарных вероятностей состояний и характеристик изучаемых систем;
- 2) изучить зависимости характеристик системы от значений порогового параметра N и вероятности включения медленного сервера;
- 3) решить задачи нахождения оптимального значения порогового параметра N .

Относительно первой цели отметим, что точность разработанных приближенных формул для расчета стационарных вероятностей состояний оценивается с помощью двух мер близости (подобие косинуса (24), евклидово расстояние (25)):

$$\|N\|_1 = \frac{\sum_{(n,k) \in E} p(n,k) \tilde{p}(n,k)}{\left(\sum_{(n,k) \in E} (p(n,k))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{(n,k) \in E} (\tilde{p}(n,k))^2 \right)^{\frac{1}{2}}}; \quad (24)$$

$$\|N\|_2 = \left(\sum_{(n,k) \in E} (p(n,k) - \tilde{p}(n,k))^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (25)$$

Некоторые результаты для модели с неограниченным размером буфера показаны в табл. 1. Из этой таблицы видно, что во всех экспериментах значения нормы (24) практически равны 1, а значения нормы (25) находятся в приемлемых для инженерных расчетов пределах. Иными словами, эти результаты показывают, что стационарные вероятности состояний вычисляются с высокой точностью.

Таблица 1

Оценка точности вычисления вероятностей состояний относительно различных норм близости для модели с бесконечным буфером; $\alpha = 0,3$; $N = 5$

λ	(μf, μs)	Значения нормы		λ	(μf, μs)	Значения нормы	
		(24)	(25)			(24)	(25)
20	(40, 20)	0,959	0,181	25	(40, 20)	0,942	0,183
	(45, 30)	0,981	0,145		(45, 30)	0,972	0,150
	(50, 35)	0,986	0,135		(50, 35)	0,979	0,143
	(55, 40)	0,989	0,126		(55, 40)	0,983	0,136

Сравнительный анализ результатов вычисления характеристик данной модели с применением различных подходов показан в табл. 2. Здесь и далее приняты следующие сокращения: ТЗ – точные значения, ПЗ – приближенные значения, ОП – относительная погрешность.

Таблица 2

Оценка точности вычисления характеристик модели с бесконечным буфером; $\alpha = 0,3$; $N = 5$

λ	(μ_F, μ_S)	W_S			R_S		
		ТЗ	ПЗ	ОП	ТЗ	ПЗ	ОП
20	(40, 20)	0,0474	0,0476	0,0037	0,1131	0,1122	0,0085
	(45, 30)	0,0388	0,0389	0,0024	0,0699	0,0703	0,0052
	(50, 35)	0,0327	0,0328	0,0014	0,044	0,0438	0,0046
	(55, 40)	0,0282	0,0283	0,0008	0,0287	0,0284	0,0106
25	(40, 20)	0,0570	0,0576	0,0109	0,3378	0,3622	0,0722
	(45, 30)	0,0456	0,0460	0,0081	0,2220	0,2356	0,0611
	(50, 35)	0,0378	0,0380	0,0048	0,1450	0,1500	0,0347
	(55, 40)	0,0322	0,0323	0,0030	0,0969	0,0986	0,0179

Замечание. Поскольку для модели с неограниченным размером буфера система является бесконечномерной, то при вычислении норм (24) и (25) максимальное число заявок в системе сверху ограничивается достаточно большой конечной величиной. Такая замена является оправданной, так как при превышении этой величины определенного (достаточно большого) значения соответствующие вероятности состояний становятся бесконечно малыми величинами, т.е. практически равными машинному нулю.

Важно отметить, что разработанные приближенные формулы имеют высокую точность и при вычислении характеристик системы. Так, из табл. 2 заключаем, что точные и приближенные значения характеристики (5) в худшем случае отличаются друг от друга в третьем знаке после десятичной точки. Иными словами, здесь максимальное значение ОП составляет меньше 1% (аналогичные результаты получены при вычислении характеристики (4), потому эти результаты здесь не приводятся; этого следовало ожидать, так как характеристики (4) и (5) отличаются друг от друга постоянным множителем). Точность вычисления характеристики (6) также является достаточно высокой для инженерных расчетов, так как при вычислении данной характеристики максимальное значение ОП составляет 7%.

Таблица 3

Оценка точности вычисления вероятностей состояний относительно различных норм близости для модели с ограниченным буфером; $\alpha = 0,3$; $M = 7$; $N = 5$

λ	(μ_F, μ_S)	Значения нормы		λ	(μ_F, μ_S)	Значения нормы	
		(24)	(25)			(24)	(25)
20	(40, 20)	0,929	0,169	25	(40, 20)	0,924	0,128
	(45, 30)	0,963	0,146		(45, 30)	0,950	0,124
	(50, 35)	0,971	0,144		(50, 35)	0,958	0,143
	(55, 40)	0,977	0,140		(55, 40)	0,965	0,130

Результаты численных экспериментов для модели с ограниченным размером буфера показаны в табл. 3 и 4. Из табл. 3 заключаем, что и для этой модели разработанные приближенные формулы имеют высокую точность при вычислении стационарных вероятностей состояний. Отметим, что здесь также все характеристики вычисляются с высокой точностью для выбранных данных, так как максимальное значение ОП при вычислении характеристики (5) составляет меньше 1% и значения ОП при вычислении характеристик (6) и (21) составляют меньше 7% (см. табл. 4). Однако для тех же исходных данных при $\lambda = 25$ максимальное значение ОП при вычислении характеристики (6) составляет целых 26% (эти результаты отмечены жирным шрифтом в табл. 4). Отметим, что такие

результаты в вычислительных экспериментах объясняются тем, что рассматриваемая здесь гипотетическая модель имеет слишком малую размерность ($M = 7$) и, кроме того, в данных экспериментах те вероятности состояний, которые участвуют в определении характеристики (6), вычисляются с большими погрешностями (нами сейчас проводятся исследования для разработки алгоритмов устранения подобных погрешностей в проводимых экспериментах). С другой стороны, предложенный подход предназначен для моделей большой и сверхбольшой размерности (для моделей малой размерности могут быть использованы балансовые уравнения для вероятностей состояний), и для таких моделей подобные (нежелательные) случаи нами не обнаружены.

Таблица 4

Оценка точности вычисления характеристик модели с ограниченным буфером; $\alpha = 0,3; M = 7; N = 5$

λ	(μ_F, μ_S)	W_S			RS			PB		
		ТЗ	ПЗ	ОП	ТЗ	ПЗ	ОП	ТЗ	ПЗ	ОП
20	(40, 20)	0,0644	0,065	0,0093	0,7313	0,7808	0,0677	0,0139	0,0143	0,0312
	(45, 30)	0,052	0,0524	0,0083	0,5174	0,5501	0,0631	0,0068	0,0072	0,0649
	(50, 35)	0,0431	0,0433	0,0059	0,3544	0,3685	0,0398	0,0037	0,0040	0,0683
	(55, 40)	0,0364	0,0366	0,0041	0,2453	0,2512	0,0240	0,0021	0,0023	0,0688
25	(40, 20)	0,0771	0,0784	0,0161	1,9402	2,4457	0,2605	0,0523	0,0526	0,0052
	(45, 30)	0,0638	0,065	0,0185	1,6253	1,9442	0,1962	0,0281	0,0299	0,0632
	(50, 35)	0,0536	0,0544	0,0151	1,2419	1,4171	0,1411	0,0169	0,0182	0,0748
	(55, 40)	0,0454	0,046	0,0119	0,934	1,0302	0,1030	0,0104	0,0112	0,0806

Теперь рассмотрим вторую цель. На рис. 2 показаны зависимости характеристик модели с неограниченным буфером от порогового параметра N при различных значениях вероятности включения медленного сервера (α). Как и следовало ожидать, среднее время пребывания заявок в системе является возрастающей функцией относительно указанного параметра (см. рис. 2, а), в то время как интенсивность включения медленного сервера убывает с ростом указанного параметра (см. рис. 2, б). Эти графики также показывают, что введение рандомизированной N -политики позволяет существенным образом влиять на характеристики системы, особенно при малых значениях порогового параметра N . Так, при трехкратном увеличении вероятности включения медленного сервера удастся более чем на 70% уменьшить среднее время пребывания заявок в системе (см. рис. 2, а), при этом почти в два раза увеличивается интенсивность включения этого сервера (см. рис. 2, б). С ростом порогового параметра N влияние вероятности включения медленного сервера на характеристики системы почти исчезает.

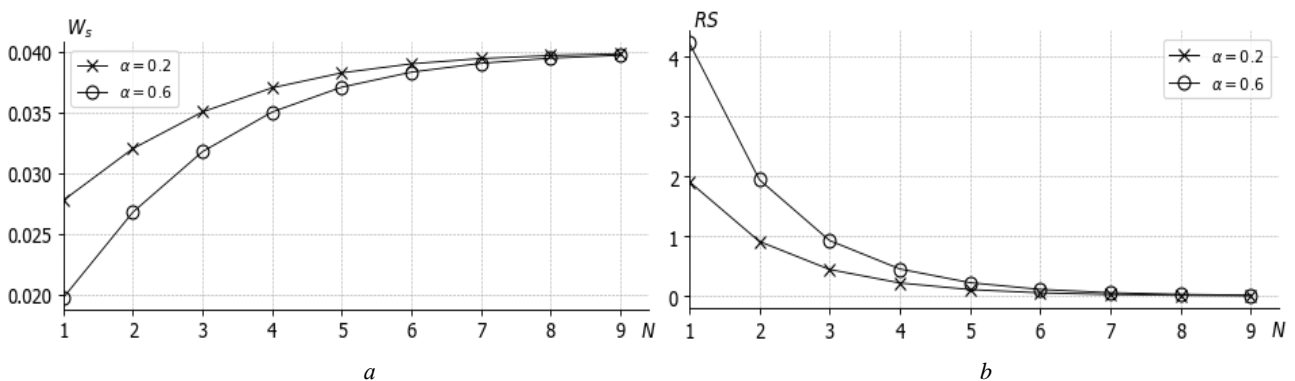


Рис. 2. Зависимость характеристик модели с неограниченным буфером от параметра N ; $\lambda = 25, \mu_F = 50, \mu_S = 35$

Fig. 2. Dependence of the characteristics of the model with an unlimited buffer on the parameter N ; $\lambda = 25, \mu_F = 50, \mu_S = 35$

На рис. 3 показаны зависимости характеристик модели с ограниченным буфером от порогового параметра N при различных значениях вероятности включения медленного сервера. Здесь, как и выше, с ростом параметра N среднее время пребывания заявок в системе увеличивается (см. рис. 3, *a*), интенсивность включения медленного сервера убывает (см. рис. 3, *b*); введенная для данной модели новая характеристика – вероятность потери заявок – является возрастающей относительно указанного параметра (см. рис. 3, *c*). Поведение последней характеристики также было ожидаемо, так как увеличение указанного параметра уменьшает шансы поступающих заявок быть принятыми в буфер. Отметим, что здесь двукратное увеличение вероятности включения медленного сервера позволяет уменьшить вероятности потери заявок почти в 2 раза (см. рис. 3, *c*). В отличие от предыдущих двух характеристик, здесь с ростом порогового параметра N влияние вероятности включения медленного сервера на характеристики системы также растет.

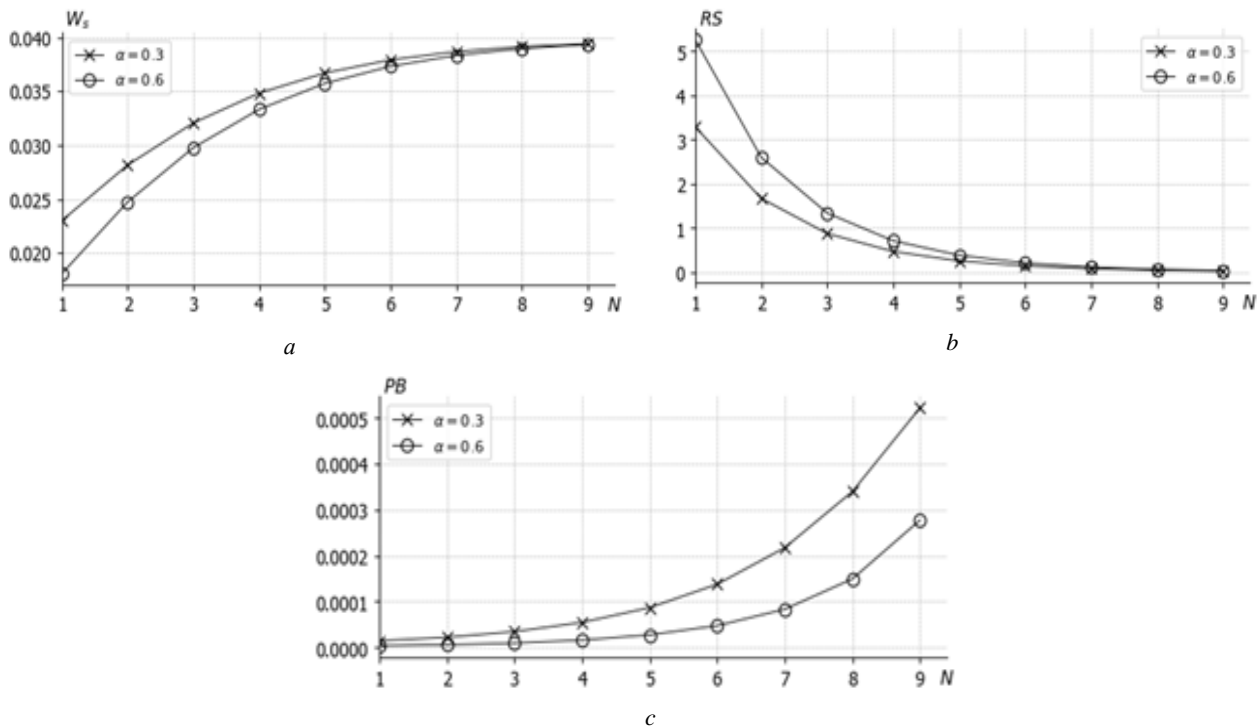


Рис. 3. Зависимость характеристик модели с ограниченным буфером от параметра N ; $\lambda = 30$, $\mu_F = 55$, $\mu_S = 40$, $M = 10$
 Fig. 3. Dependence of the characteristics of the model with a limited buffer on the parameter N ; $\lambda = 30$, $\mu_F = 55$, $\mu_S = 40$, $M = 10$

Наконец рассмотрим третью цель. Для конкретности изложения здесь задача оптимизации заключается в следующем: требуется найти такое (оптимальное) значение параметра N^* , чтобы минимизировать суммарные штрафы (Total Cost, TC), связанные с пребыванием заявок в системе, их потерями (для модели с ограниченным буфером), а также с включением и работой медленного сервера.

Отметим, что из-за сложности задачи нам не удалось доказать (или отвергнуть) существование и единственность решения этой задачи для модели с неограниченным размером буфера. Поэтому здесь мы рассматриваем решение этой задачи для модели с ограниченным размером буфера. Решение этой задачи для модели последнего типа всегда существует, так как множество допустимых решений является конечным и дискретным.

Суммарные штрафы определяются следующим образом:

$$TC = c_s W_s + \lambda P B c_l + c_0 \pi(<1>) + c_1 R S, \quad (26)$$

где c_s – штраф за единицу времени пребывания одной заявки в системе; c_l – штраф за потери одной заявки; c_0 – штраф за единицу времени работы S -сервера; c_1 – штраф из-за однократное включение S -сервера.

Таблица 5

Результаты решения задачи оптимизации ($\lambda = 30$)

(μ_F, μ_S)	α	M	N	TC^*	(μ_F, μ_S)	α	M	N	TC^*	(μ_F, μ_S)	α	M	N	TC^*
(40, 20)	0,2	5	2	0,258	(40, 20)	0,2	5	2	0,258	(50, 35)	0,2	5	3	0,134
		10	6	0,052			10	6	0,052			10	8	0,014
		15	11	0,019			15	11	0,019			15	13	0,006
	0,4	5	3	0,232		0,4	5	3	0,232		0,4	5	3	0,116
		10	7	0,048			10	7	0,048			10	8	0,013
		15	12	0,018			15	12	0,018			15	13	0,006
	0,7	5	3	0,220		0,7	5	3	0,220		0,7	5	4	0,100
		10	8	0,048			10	8	0,048			10	9	0,012
		5	2	0,258			15	13	0,018			15	14	0,005

Таблица 6

Результаты решения задачи оптимизации ($\lambda = 40$)

(μ_F, μ_S)	α	M	N	TC^*	(μ_F, μ_S)	α	M	N	TC^*	(μ_F, μ_S)	α	M	N	TC^*
(40, 20)	0,2	5	1	0,583	(45, 30)	0,2	5	1	0,456	(50, 35)	0,2	5	1	0,377
		10	2	0,203			10	4	0,130			10	5	0,0845
		15	6	0,108			15	8	0,060			15	10	0,031
	0,4	5	1	0,568		0,4	5	2	0,412		0,4	5	2	0,329
		10	4	0,207			10	6	0,126			10	7	0,078
		15	7	0,118			15	10	0,060			15	11	0,029
	0,7	5	2	0,583		0,7	5	3	0,411		0,7	5	3	0,312
		10	5	0,223			10	6	0,133			10	7	0,079
		15	8	0,129			15	11	0,064			15	12	0,029

Таблица 7

Результаты решения задачи оптимизации ($\lambda = 70$)

(μ_F, μ_S)	α	M	N	TC^*	(μ_F, μ_S)	α	M	N	TC^*	(μ_F, μ_S)	α	M	N	TC^*	
(40, 20)	0,2	5	1	1,173	(45, 30)	0,2	5	1	0,793	(50, 35)	5	1	0,659	5	
		10	1	0,439			10	1	0,285			10	3	0,224	10
		15	1	0,229			15	4	0,165			15	6	0,122	15
	0,4	5	1	1,113		0,4	5	1	0,741		5	1	0,625	5	
		10	1	0,443			10	3	0,298			10	4	0,228	10
		15	1	0,250			15	6	0,188			15	8	0,132	15
	0,7	5	1	1,131		0,7	5	1	0,781		5	2	0,631	5	
		10	1	0,466			10	4	0,329			10	5	0,247	10
		15	1	0,273			15	7	0,216			15	19	0,147	15

Из-за сложности определения поведения функции (26) относительно аргумента N здесь для нахождения решения минимизации TC используется метод полного перебора. Результаты решения задачи оптимизации показаны в табл. 5–7. Из этих таблиц можно сделать следующие выводы:

– если вероятность включения медленного сервера остается постоянной, то при фиксированных значениях интенсивности входящего потока с ростом размера буфера оптимальное значение N^* также растет;

– если размер буфер остается постоянным, то при фиксированных значениях интенсивности входящего потока с ростом вероятности включения медленного сервера оптимальное значение N^* также растет;

– если все параметры системы остаются постоянными, то с ростом интенсивности входящего потока оптимальное значение N^* уменьшается.

Заключение

В работе предложена рандомизированная N -политика включения медленного сервера, согласно которой при достижении длины очереди заявок величины N медленный сервер либо с определенной вероятностью включается, либо с дополнительной вероятностью остается в спящем режиме. Рассматриваются модели двух типов: с неограниченным и ограниченным размером буфера для ожидания заявок. Получено условие эргодичности модели с неограниченным размером буфера. Разработан унифицированный приближенный метод расчета распределения вероятностей состояний и характеристик изучаемых систем и решена задача оптимизации системы с ограниченным размером буфера.

В качестве объектов дальнейших исследований можно указать системы, в которых вероятность включения медленного сервера зависит от текущего числа заявок в системе, а также системы, где интервалы времени между поступлениями заявок и времена их обслуживания имеют распределения фазового типа.

Благодарность. Авторы выражают искреннюю благодарность профессору А.А. Назарову за его ценные замечания во время обсуждения результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gumbel H. Waiting Lines with Heterogeneous Servers // *Operations Research*. 1960. V. 8. P. 504–511.
2. Singh V.S. Two-Server Markovian Queues with Balking: Heterogeneous vs Homogeneous Servers // *Operations Research*. 1970. V. 18. P. 145–159.
3. Singh V.S. Markovian Queues with Three Servers // *IEE Transactions*. 1971. V. 3. P. 45–48.
4. Fakinos D. The M/G/k Blocking System with Heterogeneous Servers // *Journal of Operations Research Society*. 1980. V. 31. P. 919–927.
5. Fakinos D. The Generalized M/G/k Blocking System with Heterogeneous Servers // *Journal of Operations Research Society*. 1982. V. 33. P. 801–809.
6. Lin B.W., Elsayed E.A. A General Solution for Multichannel Queuing Systems with Ordered Entry // *Computers & Operations Research*. 1978. V. 5. P. 219–225.
7. Elsayed E.A. Multichannel Queuing Systems with Ordered Entry and Finite Source // *Computers & Operations Research*. 1983. V. 10. P. 213–222.
8. Yao D.D. The Arrangement of Servers in an Ordered Entry System // *Operations Research*. 1987. V. 35. P. 759–763.
9. Pourbabai B., Sonderman D. Server Utilization Factors in Queuing Loss Systems with Ordered Entry and Heterogeneous Servers // *Journal of Applied Probability*. 1986. V. 23. P. 236–242.
10. Pourbabai B. Markovian Queuing Systems with Retrials and Heterogeneous Servers // *Computational Mathematics Applications*. 1987. V. 13. P. 917–923.
11. Nawijn W.M. On a Two-Server Finite Queuing System with Ordered Entry and Deterministic Arrivals // *European Journal of Operations Research*. 1984. V. 18. P. 388–395.
12. Nawijn W.M. A Note on Many-Server Queuing Systems with Ordered Entry with an Application to Conveyor Theory // *Journal of Applied Probability*. 1983. V. 20. P. 144–152.
13. Yao D.D. Convexity Properties of the Overflow in an Ordered Entry System with Heterogeneous Servers // *Operations Research Letters*. 1986. V. 5. P. 145–147.
14. Isguder H.O., Kocer U.U. Analysis of GI/M/n/n Queuing System with Ordered Entry and no waiting line // *Applied Mathematical Modelling*. 2014. V. 38. P. 1024–1032.
15. Melikov A.Z., Mekhbaliyeva E.V. Analysis and optimization of system with heterogen-eous servers and jump priorities // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2019. V. 58. P. 718–735.
16. Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., Mekhbaliyeva E.V. Analysis of models of systems with heterogen-eous servers // *Cybernetics and System Analysis*. 2020. V. 56. P. 89–99.
17. Nath G., Enns E. Optimal Service Rates in the Multi-Server Loss System with Heterogeneous Servers // *Journal of Applied Probability*. 1981. V. 18. P. 776–781.
18. Larsen R.L., Agrawala A.K. Control of Heterogeneous Two-Server Exponential Queuing System // *IEEE Transactions on Software Engineering*. 1983. V. 9. P. 522–526.
19. Koole G. A simple Proof of the Optimality of a Threshold Policy in a Two-Server Queuing System // *Systems and Control Letter*. 1995. V. 26. P. 301–303.

20. Lin W., Kumar P.R. Optimal Control of Queuing System with Two Heterogeneous Servers // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1984. V. 29. P. 696–703.
21. Luh H.P., Viniotis I. Threshold Control Policies for Heterogeneous Servers Systems // *Mathematical Methods in Operational Research*. 2002. V. 55. P. 121–142.
22. Weber R. On a Conjecture about Assigning Jobs to Processors of Different Speeds // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1993. V. 38. P. 166–170.
23. Viniotis I., Ephremides A. Extension of the Optimality of a Threshold Policy in Heterogeneous Multi-Server Queuing Systems // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1988. V. 33. P. 104–109.
24. Rosberg Z., Makowski A.M. Optimal Routing to Parallel Heterogeneous Servers – Small Arrival Rates // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1990. V. 35. P. 789–796.
25. Горцев А.М., Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Управление и адаптация в системах массового обслуживания. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1978. 208 с.
26. Rykov V.V. Monotone Control of Queuing Systems with Heterogeneous Servers // *Queuing Systems*. 2001. V. 37. P. 391–403.
27. Efrosinin D.V., Rykov V.V. Numerical Study of the Optimal Control of a system with Heterogeneous Servers // *Automation and Remote Control*. 2003. V. 64. P. 302–309.
28. Rykov V.V., Efrosinin D.V. On the Slow Server Problem // *Automation and Remote Control*. 2009. V. 70. P. 2013–2023.
29. Efrosinin D.V., Breuer L. Threshold policies for controlled retrial queues with heterogeneous servers // *Annals of Operations Research*. 2006. V. 141. P. 139–162.
30. Efrosinin D., Sztrik J. Optimal Control of a Two-Server Heterogeneous Queuing System with Breakdowns and Constant Retrials // *Communications in Computer and Information Sciences*. 2016. V. 638. P. 57–72.
31. Efrosinin D., Sztrik J., Farkhadov M., Stepanova N. Reliability Analysis of Two-Server Heterogeneous Queuing System with Threshold Control Policy // *Communications in Computer and Information Sciences*. 2017. V. 800. P. 13–27.

Поступила в редакцию 16 мая 2020 г.

Melikov A.Z., Mekhbaliyeva E.V. (2020) NUMERICAL INVESTIGATION OF QUEUE WITH HETEREGENEOUS SERVERS AND RANDOMIZED N-POLICY. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 53. pp. 25–37

DOI: 10.17223/19988605/53/3

We consider queueing system that contains two heterogeneous servers: fast server (F-server) and slow server (S-server). Input flow is Poisson one with rate λ where is independent on status of servers. Service times in both servers are independent random variables with exponential distributions; average service time in F-server and S-server are equal to μ_F^{-1} и μ_S^{-1} respectively, where $\mu_F > \mu_S$. It is assumed that the F-server remains awake at all times while the S-server switching on if queue length reaches some threshold $N, N < \infty$. Switching scheme of the S-server is defined as follows. If upon arrival of call queue length is no less than N then the S-server is switching on with probability (w.p.) $\alpha, 0 < \alpha < 1$, and with complementary probability $1 - \alpha$ this server remains in sleep mode (i.e. in status switch off). Upon completion of servicing of an call in the S-server, it selects one call from the queue for the service if the queue length at this moment is greater than the value N ; otherwise, the S-server goes into sleep mode. In model with finite buffer an arrived call is blocked if at this moment buffer is fully occupied and the S-server is switching on; if upon arrival buffer is fully occupied and the S-server is in sleep mode then either the S-server is switching on w.p. α or with complementary probability an arrived call is blocked. Our problem is calculating the joint distribution of number of calls in the system and status of the S-server and developing the method to finding the performance measures of system.

It is shown that mathematical model of the investigated systems are two-dimensional Markov chains (2D MC). The algorithms to constructing the generating matrix of these 2D MC are developed. The exact and approximate methods to calculating the steady-state probabilities of the indicated 2D MC are proposed. Explicit formulas to calculation of the following performance measures are developed: average number of calls in the system, average sojourn time in the system, intensity of switching on of the S-server, probability of blocking of calls in the system with finite buffer. The approximate method is based on principles of state space merging of 2D MC and it is designed to investigation of large scale models. It is shown that the developed approximate formulas have high accuracy. The problem of minimization of total cost via choosing the optimal value of threshold parameter N is solved. Results of numerical experiments are demonstrated and their analysis is performed.

Keywords: queueing system with heterogeneous servers; randomized N-policy; numerical analysis.

MELIKOV Agassi Zarbali (Associate member of National Academy of Sciences of Azerbaijan, Professor, Head of Department of Teletraffic Theory, Institute of Control Systems, Baku, Azerbaijan).

E-mail: agassi.melikov@gmail.com

MEKHBALIYEVA Esmira Vidadi (Candidate of the Technical Science, Sumgayit State University, Sumgayit, Azerbaijan).

E-mail: esmira.mekhbaliyeva@mail.ru

REFERENCES

1. Gumbel, H. (1960) Waiting Lines with Heterogeneous Servers. *Operations Research*. 8. pp. 504–511. DOI: 10.1287/opre.8.4.504
2. Singh, V.S. (1970) Two-Server Markovian Queues with Balking: Heterogeneous vs Homogeneous Servers. *Operations Research*. 18. pp. 145–159. DOI: 10.1287/opre.18.1.145
3. Singh, V.S. (1971) Markovian Queues with Three Servers. *IIE Transactions*. 3. pp. 45–48.
4. Fakinos, D. (1980) The M/G/k Blocking System with Heterogeneous Servers. *Journal of Operations Research Society*. 31. pp. 919–927. DOI: 10.1057/jors.1980.167
5. Fakinos, D. (1982) The Generalized M/G/k Blocking System with Heterogeneous Servers. *Journal of Operations Research Society*. 33. pp. 801–809. DOI: 10.1057/jors.1982.175
6. Lin, B.W. & Elsayed, E.A. (1978) A General Solution for Multichannel Queuing Systems with Ordered Entry. *Computers & Operations Research*. 5. pp. 219–225. DOI: 10.1016/0305-0548(78)90031-X
7. Elsayed, E.A. (1983) Multichannel Queuing Systems with Ordered Entry and Finite Source. *Computers & Operations Research*. 10. pp. 213–222. DOI: 10.1016/0305-0548(83)90014-X
8. Yao, D.D. (1987) The Arrangement of Servers in an Ordered Entry System. *Operations Research*. 35. pp. 759–763. DOI: 10.1287/opre.35.5.759
9. Pourbabai, B. & Sonderman, D. (1986) Server Utilization Factors in Queuing Loss Systems with Ordered Entry and Heterogeneous Servers. *Journal of Applied Probability*. 23. pp. 236–242. DOI: 10.2307/3214135
10. Pourbabai, B. (1987) Markovian Queuing Systems with Retrials and Heterogeneous Servers. *Computational Mathematics Applications*. 13. pp. 917–923. DOI: 10.1016/0898-1221(87)90064-2
11. Nawijn, W.M. (1984) On a Two-Server Finite Queuing System with Ordered Entry and Deterministic Arrivals. *European Journal of Operations Research*. 18. pp. 388–395. DOI: 10.1016/0377-2217(84)90161-9
12. Nawijn, W.M. (1983) A Note on Many-Server Queuing Systems with Ordered Entry with an Application to Conveyor Theory. *Journal of Applied Probability*. 20. pp. 144–152. DOI: 10.2307/3213728
13. Yao, D.D. (1986) Convexity Properties of the Overflow in an Ordered Entry System with Heterogeneous Servers. *Operations Research Letters*. 5. pp. 145–147. DOI: 10.1016/0167-6377(86)90087-8
14. Isguder, H.O. & Kocer, U.U. (2014) Analysis of GI/M/n/n Queuing System with Ordered Entry and no waiting line. *Applied Mathematical Modelling*. 38. pp. 1024–1032. DOI: 10.1016/j.apm.2013.07.029
15. Melikov, A.Z. & Mekhbaliyeva, E.V. (2019) Analysis and optimization of system with heterogeneous servers and jump priorities. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 58. pp. 718–735. DOI: 10.1134/S1064230719050113
16. Melikov, A.Z., Ponomarenko, L.A. & Mekhbaliyeva, E.V. (2020) Analysis of models of systems with heterogeneous servers. *Cybernetics and System Analysis*. 56. pp. 89–99. DOI: 10.1007/s10559-020-00224-x
17. Nath, G. & Enns, E. (1981) Optimal Service Rates in the Multi-server Loss System with Heterogeneous Servers. *Journal of Applied Probability*. 18. pp. 776–781. DOI: 10.2307/3213336
18. Larsen, R.L. & Agrawala, A.K. (1983) Control of Heterogeneous Two-Server Exponential Queuing System. *IEEE Transactions on Software Engineering*. 9. pp. 522–526. DOI: 10.1109/TSE.1983.234960
19. Koole, G. (1995) A simple proof of the optimality of a threshold policy in a two-server queuing system. *Systems and Control Letter*. 26. pp. 301–303. DOI: 10.1016/0167-6911(95)00015-1
20. Lin, W. & Kumar, P.R. (1984) Optimal Control of Queuing System with Two Heterogeneous Servers. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 29. pp. 696–703.
21. Luh, H.P. & Viniotis, I. (2002) Threshold Control Policies for Heterogeneous Servers Systems. *Mathematical Methods in Operational Research*. 55. pp. 121–142. DOI: 10.1007/s001860100168
22. Weber, R. (1993) On a Conjecture about Assigning Jobs to Processors of Different Speeds. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 38. pp. 166–170. DOI: 10.1109/9.186333
23. Viniotis, I. & Ephremides, A. (1988) Extension of the Optimality of a Threshold Policy in Heterogeneous Multi-Server Queuing Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 33. pp. 104–109.
24. Rosberg, Z. & Makowski, A.M. (1990) Optimal Routing to Parallel Heterogeneous Servers – Small Arrival Rates. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 35. pp. 789–796. DOI: 10.1109/9.57017
25. Gortsev, A.M., Nazarov, A.A. & Terpugov, A.F. (1978) *Upravlenie i adaptatsiya v sistemakh massovogo obsluzhivaniya* [Management and adaptation in queuing systems]. Tomsk: Tomsk State University.
26. Rykov, V.V. (2001) Monotone Control of Queuing Systems with Heterogeneous Servers. *Queuing Systems*. 37. pp. 391–403. DOI: 10.1023/A:1010893501581
27. Efrosinin, D.V. & Rykov, V.V. (2003) Numerical Study of the Optimal Control of a system with Heterogeneous Servers. *Automation and Remote Control*. 64. pp. 302–309. DOI: 10.1023/A:1022271316352
28. Rykov, V.V. & Efrosinin, D.V. (2009) On the Slow Server Problem. *Automation and Remote Control*. 70. pp. 2013–2023. DOI: 10.1134/S0005117909120091
29. Efrosinin, D.V. & Breuer, L. (2006) Threshold policies for controlled retrial queues with heterogeneous servers. *Annals of Operations Research*. 141. pp. 139–162. DOI: 10.1007/s10479-006-5297-5
30. Efrosinin, D. & Sztrik J. (2016) Optimal Control of a Two-Server Heterogeneous Queuing System with Breakdowns and Constant Retrials. *Communications in Computer and Information Sciences*. 638. pp. 57–72. DOI: 10.1007/978-3-319-44615-8_5
31. Efrosinin, D., Sztrik, J., Farkhadov, M. & Stepanova, N. (2017) Reliability Analysis of Two-Server Heterogeneous Queuing System with Threshold Control Policy. *Communications in Computer and Information Sciences*. 800. pp. 13–27. DOI: 10.1007/978-3-319-68069-9_2

УДК 681.326

DOI: 10.17223/19988605/53/4

В.И. Сеньченков, А.С. Матюнин

**РАЗВИТИЕ ОБУЧАЮЩИХ ПРОЦЕДУР ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССОВ
ДИАГНОСТИРОВАНИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Совершенствуются методы обучения в моделях диагностирования сложных технических систем при неполной и неоднородной информации по отказам. Раскрываются теоретические основы построения изображений – формализованного представления неработоспособных состояний системы. Разработана процедура синтеза изображения на основе ортогонального тригонометрического базиса в функциональном пространстве с произвольной областью определения, позволяющая повысить сходимость процесса обучения.

Ключевые слова: неработоспособное состояние; диагностический параметр; рекуррентное соотношение; ортогональный тригонометрический базис; сходимость процесса обучения.

Разработка и совершенствование математического обеспечения процессов диагностирования сложных технических систем имеет особую актуальность, поскольку является необходимым условием повышения достоверности решений о техническом состоянии. Решение указанной задачи предполагает формализованное описание как работоспособного состояния системы, так и неработоспособных состояний, обусловленных отказами различных функциональных элементов. В терминологии теории распознавания образов [1, 2] – методологической базы технической диагностики – описание конкретного состояния системы называется его изображением. Совокупность изображений работоспособного и всех неработоспособных состояний составляет основу модели диагностирования системы.

Теоретические и прикладные вопросы диагностики активно решаются в различных областях техники [3–11]. Критический анализ и осмысление полученных результатов показывают, что в указанных работах не уделяется должного внимания вопросам эффективного использования статистической информации о состоянии систем. В то же время получение такой информации, прежде всего по неработоспособным состояниям системы, является одним из самых трудоемких предварительных этапов разработки моделей. Целью данной работы является дальнейшее развитие подходов [12, 13] к моделированию процессов диагностирования, в частности к построению изображений неработоспособных состояний при острой ограниченности и недостаточном качестве статистических данных об исследуемой системе.

**1. Теоретические основы обучения при синтезе изображений
неработоспособных состояний системы**

Разрабатываются методы синтеза изображений на основе обучающих процедур [1, 2, 4, 5, 11–13]. В обобщенном виде данные методы могут быть представлены следующим образом.

Пусть

$$\mathbf{Y}_{<n>} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \tag{1}$$

вектор зарегистрированных значений физических величин, характеризующих внутреннее состояние системы. Вектором (1) определяется наблюдаемое состояние, а его компоненты $y_j, j = \overline{1, n}$ выступают в качестве диагностических (информативных) параметров.

Всевозможные наблюдаемые состояния образуют множество

$$Y = \{ \mathbf{Y}_{<n>} \}, \tag{2}$$

на котором задается структура n -мерного евклидова пространства [14. С. 55]. Тогда подмножество Y_i ($Y_i \subset Y$) являет собой неработоспособное состояние, обусловленное отказом i -го функционального элемента системы (далее – i -е неработоспособное состояние). Любое из подмножеств Y_i есть область в пространстве (2), которая ограничивается диапазонами

$$\Delta_{ij} = [y_{ij}^H; y_{ij}^B], \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3)$$

изменения диагностических параметров (где y_{ij}^H, y_{ij}^B – соответственно нижнее и верхнее граничные значения j -го диагностического параметра в i -м неработоспособном состоянии системы; m – мощность множества рассматриваемых неработоспособных состояний).

Области

$$Y_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (4)$$

в евклидовом пространстве (2) могут пересекаться в силу самых различных факторов, среди которых возможность лишь приближенной оценки диапазонов (3) на основе имеющейся статистической информации о неработоспособных состояниях системы. Поэтому каждую область необходимо заменить одним элементом – изображением i -го неработоспособного состояния, которое формируется в виде вектора

$$\mathbf{E}_i = (e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{in})^T, \quad \mathbf{E}_i \in E, \quad (5)$$

где

$$E = \{\mathbf{E}_i \mid i = \overline{1, m}\} \quad (6)$$

множество изображений всех неработоспособных состояний.

Изображение \mathbf{E}_i должно аккумулировать в себе свойства всей i -й области (4). Иначе, произвольная компонента e_{ij} вектора (5) характеризует подобие наблюдаемых состояний (1), представляющих i -е неработоспособное состояние, по j -му диагностическому параметру.

Предполагается, что для построения изображений из множества (6) сформирована обучающая выборка наблюдаемых состояний (обучающих образов), принадлежность которых каждой области (4) известна:

$$\{\mathbf{Y}_k^i \mid k = \overline{1, N_i}\} \subset Y_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (7)$$

где N_i – мощность множества обучающих образов по i -му неработоспособному состоянию системы.

Выборка (7) характеризуется неоднородностью и ограниченным объемом, что связано с высокой трудоемкостью получения статистических данных о неработоспособных состояниях систем. Неоднородная статистическая информация малых объемов обрабатывается методами непараметрического статистического анализа, к которым относится метод стохастической аппроксимации [2. С. 384]. На его основе предлагаются различные алгоритмы, но наиболее универсальной является вычислительная схема, реализуемая рекуррентными соотношениями

$$\mathbf{E}_i(k) = \mathbf{E}_i(k-1) - \frac{1}{k} [\mathbf{E}_i(k-1) - G(\mathbf{Y}^i(k))], \quad i = \overline{1, m}. \quad (8)$$

Указанные соотношения позволяют выводить изображение $\mathbf{E}_i(k)$ на текущем шаге через это же изображение $\mathbf{E}_i(k-1)$ на предыдущем шаге и очередной элемент \mathbf{Y}^i из обучающей выборки (7).

В структуре выражения (8) содержится векторная функция

$$G(\mathbf{Y}) = (g_1(\mathbf{Y}), g_2(\mathbf{Y}), \dots, g_n(\mathbf{Y}))^T, \quad (9)$$

которая представляет ортогональное преобразование наблюдаемого состояния \mathbf{Y} . Иначе, попарные скалярные произведения координатных функций в (9) должны быть равны нулю:

$$(g_r, g_s) = 0, \quad r = \overline{1, n}, \quad s = \overline{1, n}, \quad r \neq s. \quad (10)$$

Для векторного преобразования (9) в работах [5. С. 191; 12. С. 35; 13. С. 2] аргументируется применение тригонометрического базиса

$$1, \sin lx, \cos lx, \quad l \in \mathbf{N}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (11)$$

где \mathbf{N} – множество натуральных чисел; \mathbf{R} – множество вещественных чисел.

Базис (11) содержится в пространстве C_2 непрерывных функций, квадратично интегрируемых по Риману [15. С. 158], с областью определения $[-\pi; \pi]$, где $\pi \approx 3,14$. Известно, что скалярное произведение в $C_2[-\pi; \pi]$ определяется выражением

$$(g_r, g_s) = \int_{-\pi}^{\pi} g_r g_s dx, \quad r, s \in \mathbf{N}, \quad r \neq s.$$

Если в качестве элементов g_r, g_s пространства $C_2[-\pi; \pi]$ употреблять базисные функции из (11), то

$$(\sin rx, \cos sx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin rx \cdot \cos sxdx = 0;$$

$$(\sin rx, \sin sx) = 0; \quad (\cos rx, \cos sx) = 0; \quad (1, \sin rx) = 0; \quad (1, \cos rx) = 0.$$

Поскольку равенства (10) справедливы для всех элементов базиса (11), он является ортогональным в пространстве $C_2[-\pi; \pi]$. Начальные элементы данного базиса могут использоваться для построения системы функций (9). Произвольная координатная функция $g_r(\mathbf{Y})$ задается следующими соотношениями [12. С. 35, 13. С. 2]:

$$g_r(\mathbf{Y}) = \begin{cases} \delta_{rj} \sin ly_j, & l = (j+1)/2, \quad j - \text{нечетно}; \\ \delta_{rj} \cos ly_j, & l = j/2, \quad j - \text{четно}; \\ r, & j = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (12)$$

где $\delta_{rj} = \begin{cases} 1, & r = j; \\ 0, & r \neq j \end{cases}$ – символ Кронекера. (13)

При указанном задании каждая функция $g_r(\mathbf{Y})$ определяется только одним элементом базиса (11), влияние других элементов исключается введением в соотношения (12) символа Кронекера (13).

2. Обучение с применением ортогонального базиса в функциональных пространствах с произвольной областью определения

В предыдущих работах [5, 12, 13] не акцентировалось внимание на том, что базис (11) является ортогональным только в пространствах C_2 , которые заданы на интервале $[-\pi; \pi]$. Это частный случай данных пространств. Из указанного факта следует, что строгая попарная ортогональность координат вектора (9) соблюдается только при

$$|y_j| \leq \pi, \quad j = \overline{1, n}. \quad (14)$$

Неравенство (14) указывает на ограниченность по модулю значений диагностических параметров системы величиной $3,14$. В действительности диагностические параметры сложных технических систем могут принимать любые конечные значения. Если условие (14) не выполняется, координатные функции в (9) свойством попарной ортогональности в полной мере не обладают. Это может отрицательно сказываться на качестве процесса обучения и в конечном счете снижать результативность диагностирования. Следовательно, необходим поиск способов обеспечения ортогональности координат вектора (9), когда диагностические параметры принимают произвольные конечные значения:

$$|y_j| \leq z, \quad j = \overline{1, n}, \quad z \in \mathbf{R}^+, \quad (15)$$

где \mathbf{R}^+ – множество положительных вещественных чисел.

Если базис (11) рассматривать в категориях гармонического анализа [14. С. 488], будет допустимой трактовка каждой из функций $\sin lx, \cos lx$ как отдельной гармоник на интервале $[-\pi; \pi]$ с периодом $T = 2\pi/l$. Тогда на интервале

$$[-z; z] \quad (16)$$

в виде аналогичных гармоник могут рассматриваться функции

$$\sin \frac{\pi}{z} lx, \cos \frac{\pi}{z} lx$$

с периодом $T = 2z/l$. Из представленных рассуждений следует, что базис

$$1, \sin \frac{\pi}{z} lx, \cos \frac{\pi}{z} lx, \quad (17)$$

является ортогональным в пространстве $C_2[-z; z]$. Действительно, попарные скалярные произведения элементов базиса (17) равны нулю:

$$\begin{aligned} \left(\sin \frac{\pi}{z} rx, \cos \frac{\pi}{z} sx \right) &= \int_{-z}^z \sin \frac{\pi}{z} rx \cdot \cos \frac{\pi}{z} sxdx = \frac{1}{2} \left(\int_{-z}^z \sin \frac{\pi}{z} (r+s)x dx + \int_{-z}^z \sin \frac{\pi}{z} (r-s)x dx \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{z}{\pi(r+s)} \cos \frac{\pi}{z} (r+s)x \Big|_{-z}^z + \frac{z}{\pi(r-s)} \cos \frac{\pi}{z} (r-s)x \Big|_{-z}^z \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{z}{\pi(r+s)} \left(\cos \frac{\pi}{z} (r+s)z - \cos \frac{\pi}{z} (r+s)(-z) \right) + \frac{z}{\pi(r-s)} \left(\cos \frac{\pi}{z} (r-s)z - \cos \frac{\pi}{z} (r-s)(-z) \right) \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{z}{\pi(r+s)} (\cos(r+s)\pi - \cos(r+s)\pi) + \frac{z}{\pi(r-s)} (\cos(r-s)\pi - \cos(r-s)\pi) \right) = 0; \end{aligned}$$

аналогично $(\sin \frac{\pi}{z} rx, \sin \frac{\pi}{z} sx) = 0$, $(\cos \frac{\pi}{z} rx, \cos \frac{\pi}{z} sx) = 0$, $(1, \sin \frac{\pi}{z} rx) = 0$, $(1, \cos \frac{\pi}{z} rx) = 0$.

Возникает вопрос, какой должна быть величина z , определяющая диапазон ортогональности базиса (17). Пусть z равна максимальной по модулю координате вектора \mathbf{Y} :

$$z = \max \{ |y_j| \mid j = \overline{1, n} \}. \quad (18)$$

Тогда (16) будет самым узким интервалом из тех, которые охватывают все координаты наблюдаемого состояния \mathbf{Y} . Использование такого интервала упрощает вычислительные операции и повышает их точность, поскольку он не включает избыточные величины в отличие от более широких интервалов. По этой причине в качестве рабочего принимается базис (17), а граничные точки области определения пространства $C_2[-z; z]$ задаются условием (18).

Таким образом, попарная ортогональность элементов системы (9) имеет место при любых значениях координат вектора \mathbf{Y} , если выражение (12) принимает вид:

$$g_r(\mathbf{Y}) = \begin{cases} \delta_{lj} \sin \frac{\pi}{z} ly_j, & l = (j+1)/2, \quad j - \text{нечетно}; \\ \delta_{lj} \cos \frac{\pi}{z} ly_j, & l = j/2, \quad j - \text{четно}; \\ r, & j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (19)$$

Начальное приближение процесса обучения (изображение на первом шаге) в дальнейшем принимается в виде элемента \mathbf{Y}^i из выборки (7), преобразованного на основе (19):

$$\mathbf{E}_i(1) = G(\mathbf{Y}^i(1)), \quad i = \overline{1, m}. \quad (20)$$

Соотношениями (8) реализуются второй и последующие шаги.

Тригонометрическим преобразованием (19) обеспечивается ограниченность компонентов e_{ij} в изображениях (5) интервалом $[-1; 1]$. Это означает, что на множестве всех преобразованных элементов пространства (2) генерируется замкнутое и ограниченное евклидово пространство $G(Y)$. Метрика данного пространства будет другой в сравнении с метрикой исходной структуры (2), поскольку каждая его координата локализована в диапазоне $[-1; 1]$. Топология $G(Y)$ характерна тем, что в нем выделяются области $G(Y_i)$, частично пересекающиеся между собой. При этом $G(Y)$ содержит в себе и множество (6) построенных изображений ($E \subset G(Y)$).

3. Сходимость процесса обучения с применением тригонометрических базисов

Анализ пространства $G(Y)$ приводит к заключению, что на основе его метрических соотношений может быть задано условие сходимости процесса обучения:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(\mathbf{E}_i(k), \mathbf{E}_i^*) = 0, \quad (21)$$

где \mathbf{E}_i^* – оптимальное изображение i -го неработоспособного состояния;

$$\rho(\mathbf{E}_i(k), \mathbf{E}_i^*) = \left(\sum_{j=1}^n (e_{ij}^* - e_{ij}(k))^2 \right)^{0,5} - \text{расстояние в пространстве } G(Y) \text{ между векторами } \mathbf{E}_i(k) \text{ и } \mathbf{E}_i^*.$$

Предельное условие (21) показывает результат обучения, когда допускается возможность неограниченного увеличения количества шагов ($k \rightarrow \infty$). Для любой конкретной системы формируются только приближенно оптимальные изображения в силу ограниченности обучающей выборки (7). Поскольку объем данной выборки по каждому неработоспособному состоянию составляет N_i элементов, оптимальным изображением считается полученное на заключительном шаге:

$$\mathbf{E}_i^* = \mathbf{E}_i(N_i), \quad i = \overline{1, m}. \quad (22)$$

После завершения этапа синтеза изображений встает задача распознавания текущих состояний системы, для этого также целесообразно опираться на метрику евклидова пространства $G(Y)$. Наблюдаемое состояние \mathbf{Y} , которого нет в обучающей выборке, идентифицируется с одним из неработоспособных состояний по критерию минимума метрического различия [5. С. 229; 16. С. 953] в пространстве $G(Y)$ между $G(\mathbf{Y})$ и изображениями из множества (6):

$$\mathbf{Y} \in Y_i, \text{ если } \rho(G(\mathbf{Y}), \mathbf{E}_i) = \min_{k=1, m} \{ \rho(G(\mathbf{Y}), \mathbf{E}_k) \}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (23)$$

Применение критерия вида (23) всегда дает однозначный результат при условии, что он базируется на метрике замкнутого и ограниченного пространства [17. С. 360].

Введение условия (21) позволяет сравнивать сходимость различных вариантов процесса обучения. Пусть δ – расстояние в евклидовом пространстве $G(Y)$ между векторами изображения на текущем и последующем шагах обучения:

$$\rho(\mathbf{E}_i(k), \mathbf{E}_i(k+1)) = \delta. \quad (24)$$

Если δ_1 и δ_2 – расстояния вида (24) при обучении на основе базисов (11) и (17) соответственно (варианты обучения 1 и 2), то при $\delta_2 < \delta_1$ сходимость выше по варианту 2. Указанное неравенство может означать и пренебрежимо малое повышение сходимости обучения в случае использования базиса (17), если сравниваемые расстояния сопоставимы между собой. В действительности указанный базис обеспечивает значимое преимущество при формировании изображений, когда величина

$$L = \left| \frac{\delta_1 - \delta_2}{\delta_1} \right| \cdot 100 \quad (25)$$

(относительное различие между расстояниями δ_1 и δ_2) будет не меньше интегральной относительной погрешности Λ регистрации диагностических параметров в контрольных точках системы:

$$L \geq \Lambda. \quad (26)$$

Пример. Наблюдаемое состояние системы задано вектором, включающим пять диагностических параметров:

$$\mathbf{Y} = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)^T.$$

Сформирована обучающая выборка по i -му неработоспособному состоянию системы ($N_i = 12$):

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_1^i &= (5, 6, 1, 1,8, 2,5)^T; & \mathbf{Y}_2^i &= (5,5, 5,8, 1,2, 2,1, 2,7)^T; & \mathbf{Y}_3^i &= (5,8, 5,1, 0,9, 1,6, 2,8)^T; \\ \mathbf{Y}_4^i &= (5,1, 4,8, 1,4, 1,7, 2,6)^T; & \mathbf{Y}_5^i &= (6, 5,6, 1,3, 1,7, 2,7)^T; & \mathbf{Y}_6^i &= (5,1, 6, 1,1, 2, 2,5)^T; \\ \mathbf{Y}_7^i &= (6,1, 5,4, 1, 2,2, 2,4)^T; & \mathbf{Y}_8^i &= (5,3, 6,2, 1,2, 1,6, 2,5)^T; & \mathbf{Y}_9^i &= (5, 6,1, 1,1, 2,1, 2,7)^T; \\ \mathbf{Y}_{10}^i &= (5,2, 6,3, 1, 2, 2,7)^T; & \mathbf{Y}_{11}^i &= (5,1, 6, 1,3, 1,8, 2,8)^T; & \mathbf{Y}_{12}^i &= (5,8, 5,5, 0,9, 1,6, 2,4)^T. \end{aligned}$$

Интегральная относительная погрешность Λ регистрации диагностических параметров составляет 10%.

Требуется построить изображение i -го неработоспособного состояния.

В каждом обучающем образе имеются координаты со значениями, выходящими за диапазон ортогональности базиса (11):

$$\forall \mathbf{Y}_k^i \exists y_{kj}^i, j = \overline{1, 5}: |y_{kj}^i| > \pi.$$

Следовательно, процедуру обучения целесообразно выстраивать на основе базиса (17) или, что равносильно, в рекуррентных соотношениях (8) использовать ортогональное преобразование (9) с координатными функциями (19).

Пусть $z(k)$ – величина, которая определяет диапазон попарной ортогональности элементов системы (9) при выполнении k -го шага обучения. Тогда из (18) следует

$$z(1) = \max \{5, 6, 1, 1,8, 2,5\} = 6.$$

В соответствии с выражениями (19), (20) первый шаг обучения задается как

$$\mathbf{E}_i(1) = G(\mathbf{Y}^i(1)) = \begin{pmatrix} \sin((\pi/6) \cdot 5) \\ \cos((\pi/6) \cdot 6) \\ \sin((\pi/6) \cdot 2 \cdot 1) \\ \cos((\pi/6) \cdot 2 \cdot 1,8) \\ \sin((\pi/6) \cdot 3 \cdot 2,5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin 2,62 \\ \cos 3,14 \\ \sin 1,05 \\ \cos 1,88 \\ \sin 3,93 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,50 \\ -1,00 \\ 0,87 \\ -0,30 \\ -0,71 \end{pmatrix}.$$

Второй шаг заключается в ортогональном преобразовании обучающего образа \mathbf{Y}_2^i и поиске приближения $\mathbf{E}_i(2)$:

$$z(2) = \max \{5,5, 5,8, 1,2, 2,1, 2,7\} = 5,8;$$

$$G(\mathbf{Y}^i(2)) = \begin{pmatrix} \sin((\pi/5,8) \cdot 5,5) \\ \cos((\pi/5,8) \cdot 5,8) \\ \sin((\pi/5,8) \cdot 2 \cdot 1,2) \\ \cos((\pi/5,8) \cdot 2 \cdot 2,1) \\ \sin((\pi/5,8) \cdot 3 \cdot 2,7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin 2,98 \\ \cos 3,14 \\ \sin 1,30 \\ \cos 2,27 \\ \sin 4,39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,16 \\ -1,00 \\ 0,96 \\ -0,64 \\ -0,95 \end{pmatrix};$$

из (8) следует

$$\mathbf{E}_i(2) = \mathbf{E}_i(1) - \frac{1}{2} [\mathbf{E}_i(1) - G(\mathbf{Y}^i(2))] = \begin{pmatrix} 0,50 \\ -1,00 \\ 0,87 \\ -0,30 \\ -0,71 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0,50 \\ -1,00 \\ 0,87 \\ -0,30 \\ -0,71 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,16 \\ -1,00 \\ 0,96 \\ -0,64 \\ -0,95 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0,33 \\ -1,00 \\ 0,92 \\ -0,47 \\ -0,83 \end{pmatrix}.$$

Таким же образом выполняются следующие шаги обучающей процедуры, которые сведены в таблицу.

Последовательность шагов процесса обучения

$\mathbf{Y}^i(1)$	$G(\mathbf{Y}^i(1))$	$\mathbf{Y}^i(2)$	$G(\mathbf{Y}^i(2))$	$\mathbf{E}_i(2)$	$\mathbf{Y}^i(3)$	$G(\mathbf{Y}^i(3))$	$\mathbf{E}_i(3)$
5	0,50	5,5	0,16	0,33	5,8	0,00	0,22
6	-1,00	5,8	-1,00	-1,00	5,1	-0,93	-0,98
1	0,87	1,2	0,96	0,92	0,9	0,82	0,89
1,8	-0,30	2,1	-0,64	-0,47	1,6	-0,16	-0,37
2,5	-0,71	2,7	-0,95	-0,83	2,8	-0,99	-0,88

Окончание таблицы

$Y^i(4)$	$G(Y^i(4))$	$E_i(4)$	$Y^i(5)$	$G(Y^i(5))$	$E_i(5)$	$Y^i(6)$	$G(Y^i(6))$	$E_i(6)$
5,1	0,00	0,16	6,0	0,00	0,13	5,1	0,45	0,18
4,8	-0,98	-0,98	5,6	-0,98	-0,98	6,0	-1,00	-0,98
1,4	0,99	0,92	1,3	0,82	0,90	1,1	0,91	0,90
1,7	-0,50	-0,40	1,7	-0,21	-0,36	2,0	-0,50	-0,38
2,6	-1,00	-0,91	2,7	-0,89	-0,90	2,5	-0,71	-0,87
$Y^i(7)$	$G(Y^i(7))$	$E_i(7)$	$Y^i(8)$	$G(Y^i(8))$	$E_i(8)$	$Y^i(9)$	$G(Y^i(9))$	$E_i(9)$
5,4	-0,00	0,15	5,3	0,44	0,19	5	-0,53	0,23
6,2	-0,98	-0,98	6,2	-1,00	-0,98	6,1	-1,00	-0,98
1	0,82	0,89	1,2	0,94	0,90	1,1	0,90	0,90
2,2	-0,21	-0,36	1,6	-0,05	-0,32	2,1	-0,56	-0,35
2,4	-0,89	-0,87	2,5	-0,61	-0,84	2,7	-0,86	-0,84
$Y^i(10)$	$G(Y^i(10))$	$E_i(10)$	$Y^i(11)$	$G(Y^i(11))$	$E_i(11)$	$Y^i(12)$	$G(Y^i(12))$	$E_i(12)$
5,2	-0,52	0,26	5,1	-0,45	0,28	5,8	0,00	0,26
6,3	-1,00	-0,98	6	-1,00	-0,98	5,5	-0,99	-0,98
1	0,84	0,89	1,3	0,98	0,90	0,9	0,82	0,89
2	-0,41	-0,36	1,8	-0,30	-0,35	1,6	-0,16	-0,33
2,7	-0,78	-0,83	2,8	-0,95	-0,84	2,4	-0,69	-0,83

На основании (22) оптимальным считается изображение $E_i^* = E_i(12)$, представленное в таблице.

Расстояние (24) между векторами изображения на предпоследнем и последнем шагах обучения:

$$\delta_2 = \rho(E_i(11), E_i(12)) = \left((0,26 - 0,28)^2 + (-0,98 + 0,98)^2 + (0,89 - 0,90)^2 + (-0,33 + 0,35)^2 + (-0,83 + 0,84)^2 \right)^{0,5} = 0,032.$$

Аналогичным образом выполнена процедура обучения с использованием той же выборки, что и в данном примере, на основе базиса (11), т.е. в рекуррентных соотношениях (8) применены координатные функции (12). Все этапы указанной процедуры показаны в работе [12. С. 36], расстояние (24) между векторами изображения на тех же шагах обучения составляет

$$\delta_1 = \rho(E_i(11), E_i(12)) = 0,039.$$

Относительное различие (25) между расстояниями δ_1 и δ_2 :

$$L = \frac{0,039 - 0,032}{0,039} \cdot 100 \approx 18\%.$$

Неравенство (26) выполняется, тем самым пример подтверждает теоретические рассуждения о повышении эффективности использования статистической информации в случае применения тригонометрического базиса, ортогонального в пространстве $S_2[-z; z]$. При одном и том же объеме N_i выборки (7) имеет место более высокая степень приближения текущего изображения к оптимальному.

Заключение

В работе представлен в обобщенном виде подход к формированию изображений неработоспособных состояний системы посредством обучающей процедуры, разработанной на базе метода стохастической аппроксимации. Показано, что в соотношениях, реализующих процесс обучения, следует использовать ортогональный тригонометрический базис в пространствах S_2 с областью определения, которая охватывает все координаты наблюдаемого состояния системы. При этом обеспечивается повышение сходимости процесса обучения по сравнению с предшествующими разработками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фомин Я.А. Распознавание образов. Теория и применения. М. : Фазис, 2010. 368 с.
2. Vapnik V. Statistical Learning Theory. New York : Wiley-Interscience, 1998. 768 p.
3. Лобан А.В. Информационная технология распределенного диагностирования космических аппаратов. Москва–Берлин : Директ-Медиа, 2015. 146 с.
4. Малкин В.С. Техническая диагностика. М. : Академия, 2013. 272 с.
5. Сеньченков В.И. Модели, методы и алгоритмы анализа технического состояния. Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. 377 с.
6. Chunhui Z., Furong G. Online fault prognosis with relative deviation analysis and vector autoregressive modeling // Chemical Engineering Science. 2015. V. 138. P. 531–543.
7. Lu G., Zhou Y., Lu C., Li X. A novel framework of change-point detection for machine monitoring // Mechanical Systems and Signal Processing. 2017. V. 83. P. 533–548.
8. Будко П.А., Винограденко А.М., Литвинов А.И. Экспериментальные исследования кинетического метода контроля и диагностики технических средств // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 9. С. 53–58.
9. Liu W.Y., Gao Q.W., Ye G., Ma R., Han J.G. A novel wind turbine bearing fault diagnosis method based on Integral Extension LMD // Measurement. 2015. V. 74. P. 70–77.
10. Skliros C., Esperon M.M., Fakhre A., Jennions I.K. A review of model based and data driven methods targeting hardware systems diagnostics // Diagnostyka. 2019. V. 20 (1). P. 3–21.
11. Shi P., Liang K., Han D., Zhang Yi. A novel intelligent fault diagnosis method of rotating machinery based on deep learning and PSO-SVM // Journal of Vibroengineering. 2017. V. 19 (8). P. 5932–5946.
12. Сеньченков В.И., Шишкин Е.В. Совершенствование процессов обучения в диагностических моделях сложных технических систем // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2017. № 4. С. 33–43.
13. Senchenkov V., Absalyamov D., Avsyukevich D. Diagnostics of life support systems with limited statistical data on failures // E3S Web of Conferences (E3S-2019). V. 140, No. 05002. 5 p.
14. Зорич В.А. Математический анализ. М. : МЦНМО, 2012. Ч. 2. 818 с.
15. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М. : Физматлит, 2009. 572 с.
16. Сеньченков В.И., Абсаямов Д.Р., Авсюкевич Д.А. Задание множества диагностических параметров системы на основе теории функциональных пространств // Труды СПИИРАН. 2019. Т. 18 (4). С. 949–975.
17. Muscat Jo. Functional Analysis: An Introduction to Metric Spaces, Hilbert Spaces, and Banach Algebras. Springer, 2014. 420 p.

Поступила в редакцию 29 апреля 2020 г.

Senchenkov V.I., Matyunin A.S. (2020) THE DEVELOPMENT OF TRAINING PROCEDURES FOR MODELING THE PROCESSES OF DIAGNOSING TECHNICAL SYSTEMS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 53. pp. 38–46

DOI: 10.17223/19988605/53/4

This article discusses and improves training methods in constructing models for diagnosing complex technical systems with incomplete and heterogeneous information about inoperative conditions caused by failures of functional elements. The vector $\mathbf{Y}_{<n>} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ of registered values of diagnostic (informative) parameters y_j is the observed state of the system. On the set $Y = \{Y_i\}$, the structure of an n -dimensional Euclidean space is defined in which the domains Y_i , $i = \overline{1, m}$ are allocated. Each of the domains Y_i represents the i -th inoperative condition of the system. The model for diagnosing is based on images – a formalized description of inoperative conditions. The image is formed as a vector $\mathbf{E}_i = (e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{im})^T$, $\mathbf{E}_i \in E$, that accumulates the properties of all the observed states of the system from the Y_i domain. Images are synthesized on the basis of a training sample $\{\mathbf{Y}_k^i \mid k = \overline{1, N_i}\} \subset Y_i$ by means of recurrence relations

$$\mathbf{E}_i(k) = \mathbf{E}_i(k-1) - \frac{1}{k}[\mathbf{E}_i(k-1) - G(\mathbf{Y}^i(k))], \quad i = \overline{1, m},$$

allowing to display the image $\mathbf{E}_i(k)$ at the current step through the same image $\mathbf{E}_i(k-1)$ at the previous step and the next sample element \mathbf{Y}^i . The indicated relations are derivatives of the stochastic approximation method. The vector function $G(\mathbf{Y}) = (g_1(\mathbf{Y}), g_2(\mathbf{Y}), \dots, g_n(\mathbf{Y}))^T$ represents the orthogonal transformation of the observed condition \mathbf{Y} . The coordinate functions $g_r(\mathbf{Y})$ are formed on the basis of the orthogonal trigonometric basis, which is contained in the space $C_2[-\pi; \pi]$ of continuous functions, square integrable in the Riemann, with the domain of definition $[-\pi; \pi]$, where $\pi \approx 3,14$. Strict pairwise orthogonality of coordinate functions takes place for $|y_j| \leq \pi$ only. Non-compliance with this stipulation reduces the convergence of the training process.

It is proposed in recurrence relations to use a trigonometric basis orthogonal in the space $C_2[-z; z]$, where $z = \max\{|y_j| \mid j = \overline{1, n}\}$. Then the coordinate functions are given in the form

$$g_r(\mathbf{Y}) = \begin{cases} \delta_{rj} \sin \frac{\pi}{z} l y_j, & l = (j+1)/2, \quad j - \text{odd}; \\ \delta_{rj} \cos \frac{\pi}{z} l y_j, & l = j/2, \quad j - \text{even}, \end{cases} \quad \text{where } \delta_{rj} = \begin{cases} 1, & r = j; \\ 0, & r \neq j \end{cases} \quad - \text{Kronecher's symbol; } r, j = \overline{1, n}.$$

This ensures pairwise orthogonality of $g_r(\mathbf{Y})$ for any values of y_j . As a result, a closed and bounded Euclidean space $G(Y)$ is generated, which contains the set E of the formed images. The metric of this space allows you to compare the convergence of various options for the training process. Let δ be the distance in $G(Y)$ between the image vectors at the current and subsequent training steps: $\rho(\mathbf{E}_i(k), \mathbf{E}_i(k+1)) = \delta$. If δ_1 and δ_2 are distances when training based on bases in the spaces $C_2[-\pi; \pi]$ and $C_2[-z; z]$ respectively (training options 1 and 2), then in the case of $|\delta_1 - \delta_2|/\delta_1 \cdot 100 \geq \Lambda$ the convergence is higher for option 2 (where Λ is the integral relative error of registering diagnostic parameters at the control points of the system).

An example of image synthesis is given, showing a higher convergence of the training process when an orthogonal trigonometric basis in the space $C_2[-z; z]$ is applied. Thus, a more efficient use of statistical information about inoperative conditions of the system is evident.

Keywords: inoperative condition; diagnostic parameter; recurrence relation; orthogonal trigonometric basis; convergence of the training process.

SENCHENKOV Valentin Ivanovich (Doctor of Technical Sciences, Professor, A.F. Mozhaisky Military Space Academy, St. Petersburg, Russian Federation).
E-mail: svi9@rambler.ru

MATYUNIN Alexander Sergeevich (Adjunct, A.F. Mozhaisky Military Space Academy, St. Petersburg, Russian Federation).
E-mail: ac0243555@mail.ru

REFERENCES

1. Fomin, Ya.A. (2010) *Pattern recognition. Theory and Applications*. Moscow: Fazis.
2. Vapnik, V. (1998) *Statistical Learning Theory*. New York: Wiley-Interscience.
3. Loban, A.V. (2015) *Informatsionnaya tekhnologiya raspredelenogo diagnostirovaniya kosmicheskikh apparatov* [Information technology for distributed diagnostics of spacecraft]. Moscow; Berlin: Direkt-Media.
4. Malkin, V.S. (2013) *Tekhnicheskaya diagnostika* [Technical Diagnostics]. Moscow: Akademiya.
5. Senchenkov, V.I. (2013) *Modeli, metody i algoritmy analiza tekhnicheskogo sostoyaniya* [Models, methods and algorithms for the analysis of technical condition]. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing.
6. Chunhui, Z. & Furong, G. (2015) Online fault prognosis with relative deviation analysis and vector autoregressive modeling. *Chemical Engineering Science*. 138. pp. 531–543. DOI: 10.1016/j.ces.2015.08.037
7. Lu, G., Zhou, Y., Lu, C. & Li, X. (2017) A novel framework of change-point detection for machine monitoring. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 83. pp. 533–548. DOI: 10.1016/j.ymsp.2016.06.030
8. Budko, P.A., Vinogradenko, A.M. & Litvinov, A.I. (2014) Eksperimental'nye issledovaniya kineticheskogo metoda kontrolya i diagnostiki tekhnicheskikh sredstv [Pilot Studies on Application Kinetic Control Method and Diagnostics Technical Means]. *Mechatronics, Automation, Control*. 9. pp. 53–58.
9. Liu, W.Y., Gao, Q.W., Ye, G., Ma, R. & Han, J.G. (2015) A novel wind turbine bearing fault diagnosis method based on Integral Extension LMD. *Measurement*. 74. pp. 70–77. DOI: 10.1016/j.measurement.2015.06.005
10. Skliros, C., Esperon, M.M., Fakhre, A. & Jennions, I.K. (2019) A review of model based and data driven methods targeting hardware systems diagnostics. *Diagnostyka*. 20(1). pp. 3–21. DOI: 10.29354/diag/99603
11. Shi, P., Liang, K., Han, D. & Zhang, Yi. (2017) A novel intelligent fault diagnosis method of rotating machinery based on deep learning and PSO-SVM. *Journal of Vibroengineering*. 19(8). pp. 5932–5946. DOI: 10.21595/jve.2017.18380
12. Senchenkov, V.I. & Shishkin, E.V. (2017) Improving the processes of training in the diagnostic models of complex technical systems. *Pribory i sistemy. Upravlenie, kontrol', diagnostika – Instruments and Systems: Monitoring, Control, and Diagnostics*. 4. pp. 33–43.
13. Senchenkov, V., Absalyamov, D. & Avsyukevich, D. (2019) Diagnostics of life support systems with limited statistical data on failures. *E3S Web of Conferences (EECE-2019)*. 140. no. 05002.
14. Zorich, V.A. (2012) *Matematicheskii analiz* [Mathematical Analysis]. Vol. 2. Moscow: MTsNMO.
15. Kolmogorov, A.N. & Fomin, S.V. (2009) *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* [Elements of the theory of functions and functional analysis]. Moscow: Fizmatlit.
16. Senchenkov, V.I., Absalyamov, D.R. & Avsyukevich, D.A. (2019) Definition of Set of diagnostic Parameters of System based on the Functional Spaces Theory. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 18(4). pp. 949–975.
17. Muscat, Jo. (2014) *Functional Analysis: An Introduction to Metric Spaces, Hilbert Spaces, and Banach Algebras*. Springer.

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.24

DOI: 10.17223/19988605/53/5

Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко

О ВЛИЯНИИ ОШИБОК ОКРУГЛЕНИЯ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТИСТИК КРИТЕРИЕВ СОГЛАСИЯ

Исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственной работы «Обеспечение проведения научных исследований» (№ 1.4574.2017/6.7) и проектной части государственного задания (№ 1.1009.2017/4.6).

Приводятся результаты численных исследований влияния ошибок округления на распределения статистик различных критериев согласия. Показано, что ошибки округления в анализируемых выборках могут приводить к существенным изменениям распределений статистик критериев. Даны рекомендации по применению критериев в таких ситуациях.

Ключевые слова: критерии согласия; критерии нормальности; критерии экспоненциальности; статистика; распределение статистики; ошибки округления.

Большинство существующих критериев предназначено для проверки статистических гипотез относительно непрерывных случайных величин. Это стандартное предположение, на которое редко обращают внимание, но которое обуславливает корректность применения соответствующих критериев.

В реальных ситуациях это предположение часто нарушается, так как любые измерения сопровождаются некоторой погрешностью округления и в выборках присутствуют повторяющиеся наблюдения, чего не должно быть в случае непрерывности случайной величины. Это типично для данных экономического характера, для измерений, сопровождающих исследования в медицине и биологии, нередко повторяющиеся результаты встречаются в выборках высокоточных измерений, связанных с техническими системами.

Очевидно, что наличие погрешностей округления как-то отражается на результатах применения статистических методов, а в некоторых ситуациях влияние ошибок округления может приводить и к неверным статистическим выводам.

Поясним, например, что происходит с критерием согласия Колмогорова при проверке простой гипотезы $H_0: F_n(x) = F(x)$, статистика которого $S = \sqrt{n}D_n$, где $D_n = \sup|F_n(x) - F(x)|$, учитывает отклонение эмпирического распределения $F_n(x)$ от теоретического $F(x)$, если результаты измерений округляются с некоторым Δ .

Предельным распределением статистики S при справедливости проверяемой гипотезы H_0 является распределение Колмогорова $K(S)$. Если «нарушается» стандартное предположение о непрерывности наблюдаемой случайной величины и результаты измерений округляются (фиксируются) с некоторым Δ , то, начиная с некоторого n (зависящего от вида $F(x)$), от области определения случайной величины и от Δ), величина D_n с ростом n перестает уменьшаться, а распределение статистики S (при справедливости H_0) будет отклоняться от распределения Колмогорова $K(S)$ (чем больше Δ , тем при меньшем n).

В работах [1, 2] поведение распределений статистик критериев, предназначенных для проверки различных статистических гипотез, исследовалось в зависимости от Δ в условиях больших выборок.

Было показано, что классическими результатами, касающимися распределений статистик, можно пользоваться лишь до определенных объемов выборок $n \leq n_{\max}$. При $n > n_{\max}$ из-за естественного присутствия ошибок округления распределения статистик уже существенно отличаются от имеющих место в классической ситуации.

Как видим, в случае больших массивов данных (Big Data) из этой ситуации имеется простой выход: в интересах анализа из Big Data следует извлекать выборки, объемом не превышающие n_{\max} , тогда, применяя критерии, можно пользоваться классическими результатами.

Однако такие же проблемы возникают не только при анализе больших выборок. Например, о возможных проблемах с применением критериев нормальности, связанных с округлением, ранее говорилось в работе [3]. В [4, 5] на примере критериев проверки гипотез о равенстве математического ожидания и дисперсии номинальным значениям, а также критериев Стьюдента об однородности средних и Фишера об однородности дисперсий двух выборок было показано влияние ошибок округления на реальный уровень значимости. Там же было отмечено, что с увеличением Δ снижается мощность критериев. Но в упомянутых работах не говорится о том, как меняются распределения статистик критериев с ростом ошибок округления и что делать, если такие изменения имеют место.

Цель настоящей работы заключается в том, чтобы показать: как в ситуации ограниченных объемов выборок в зависимости от величины ошибки округления могут изменяться распределения статистик различных критериев проверки статистических гипотез; при каких условиях эти изменения нельзя игнорировать; как поступать, чтобы обеспечить в таких условиях корректность вывода по применяемому критерию.

Для обеспечения настоящих исследований в вычислительной системе [6], в которой представлен перечень критериев, несколько превышающий множество критериев, охваченных в [7–10], реализована возможность применения этого перечня критериев, а также моделирования распределений статистик соответствующих критериев в условиях нарушения стандартного предположения о непрерывности (при заданной погрешности округления Δ). Количество имитационных экспериментов при исследовании соответствующих распределений статистик и вычислении оценок достигнутого уровня значимости методами статистического моделирования, как правило, составляло величину не менее $N = 10^6$.

В руководствах [7–10] мы представили результаты исследований реальных свойств различных групп критериев без учета влияния на эти свойства ошибок округления. В данном случае на примере различных критериев с использованием методов статистического моделирования покажем, как погрешность округления может влиять на распределения статистик критериев проверки различных гипотез при относительно небольших объемах выборок, и что надо делать, чтобы, применяя критерии в этих условиях, обеспечить корректность статистических выводов. Как проблема ошибок округления отражается на свойствах критериев, будет продемонстрировано на группах критериев, используемых при проверке гипотез об отклонении эмпирического распределения от нормального закона и об отклонении от экспоненциального.

1. Влияние ошибок округления на распределения статистик критериев проверки нормальности

Во многих приложениях достаточно типична ситуация, когда из-за округления в анализируемых выборках оказывается относительно много повторяющихся значений. Это настораживающий факт, указывающий на то, что реальные распределения $G_{\Delta}(S_n|H_0)$ статистик критериев (при погрешности округления Δ и объемах выборок n) могут существенно отличаться от предельных распределений $G(S|H_0)$ или от $G(S_n|H_0)$, имеющих место в ситуации без округления измерений. Наличие некоторого числа повторяющихся наблюдений в выборке еще не свидетельствует об изменении распределения статистики. Но когда величина Δ оказывается соизмеримой со среднеквадратическим отклонением σ закона распределения ошибки измерения, распределение статистики может и не «пытаться» сходиться к предельному закону, а с ростом n будет лишь удаляться от него.

В табл. 1 приведены выражения статистик критериев согласия, чаще всего используемых в приложениях. В этот перечень входят критерии: Колмогорова (K) [11] с поправкой Большева [12] (1), Купера (Ku) [13] (2), Крамера–Мизеса–Смирнова (CMS) [12] (3), Ватсона (W) [14, 15] (4), Андерсона–Дарлингга (AD) [16, 17] (5), Жанга [18] (со статистиками Z_K, Z_A, Z_C (6)–(8), распределения которых зависят от объемов выборок), критерий χ^2 Пирсона (X_n^2) (9), критерий Никулина–Рао–Робсона (Y_n^2) [19, 20, 21] (10). Критерий Никулина–Рао–Робсона предполагает использование оценок максимального правдоподобия (ОМП) по негруппированным данным. В этом случае распределением $G(Y_n^2|H_0)$ его статистики является χ_{k-1}^2 -распределение.

Таблица 1

Статистики рассматриваемых критериев согласия

Критерии	Статистики критериев
K	$S_K = \sqrt{n}D_n + \frac{1}{6\sqrt{n}}, \quad (1)$ <p>где $D_n = \max(D_n^+, D_n^-)$, $D_n^+ = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{i}{n} - F(x_i, \theta) \right\}$, $D_n^- = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ F(x_i, \theta) - \frac{i-1}{n} \right\}$</p>
Ku	$V_n^{mod} = \sqrt{n}(D_n^+ + D_n^-) + \frac{1}{3\sqrt{n}} \quad (2)$
CMS	$S_\omega = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left\{ F(x_i, \theta) - \frac{2i-1}{2n} \right\}^2 \quad (3)$
W	$U_n^2 = \sum_{i=1}^n \left(F(x_i, \theta) - \frac{i-1/2}{n} \right)^2 - n \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(x_i, \theta) - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{12n} \quad (4)$
AD	$S_\Omega = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) \{ \ln F(x_i, \theta) + \ln(1 - F(x_{n-i+1}, \theta)) \} \quad (5)$
Z_K	$Z_K = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\left(i - \frac{1}{2} \right) \ln \left\{ \frac{i-1/2}{nF(x_i, \theta)} \right\} + (n-i+1/2) \ln \left[\frac{n-i+1/2}{n\{1-F(x_i, \theta)\}} \right] \right) \quad (6)$
Z_A	$Z_A = - \sum_{i=1}^n \left[\frac{\ln \{ F(x_i, \theta) \}}{n-i+1/2} + \frac{\ln \{ 1-F(x_i, \theta) \}}{i-1/2} \right] \quad (7)$
Z_C	$Z_C = \sum_{i=1}^n \left[\ln \left\{ \frac{[F(x_i, \theta)]^{-1} - 1}{(n-1/2)/(i-3/4) - 1} \right\} \right]^2 \quad (8)$
X_n^2	$X_n^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(n_i/n - P_i(\theta))^2}{P_i(\theta)}, \quad (9)$ <p>где $P_i(\theta)$ – вероятность попадания в интервал</p>
Y_n^2	$Y_n^2(\theta) = X_n^2 + n^{-1} a^T(\theta) \Lambda(\theta) a(\theta), \quad (10)$ <p>где вычисление $a(\theta)$ и $\Lambda(\theta)$ см.: [19, 20] или [22]</p>
KL	$S_{KL} = - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left\{ \frac{n}{2m} [F(x_{i+m}, \theta) - F(x_{i-m}, \theta)] \right\}, \quad (11)$ <p>где $m \leq n/2$; $x_i = x_1$, если $i < 1$; $x_i = x_n$, если $i > n$</p>

В табл. 1 приведена также статистика (11) относительно недавно предложенного критерия, опирающегося на оценку информации Кульбака–Лейблера [23, 24]. Этот критерий, а также ряд критериев проверки нормальности и равномерности, в статистиках которых используются различные оценки энтропии, как правило, демонстрируют высокую мощность. Однако анализ выборок с повторяющимися значениями с использованием подобных критериев оказывается проблематичным. Чтобы понять причину, достаточно взглянуть на вид статистики (11).

Ошибки округления влияют на распределения статистик критериев согласия при проверке и простых, и сложных гипотез. На примере критерия Андерсона–Дарлинга со статистикой (5) покажем, как меняется распределение $G(S_\Omega|H_0)$ ее статистики в зависимости от Δ при $n = 50$ в случае проверки сложной гипотезы о принадлежности выборок нормальному закону. Рисунок 1 иллюстрирует, как меняются распределения $G(S_\Omega|H_0)$ при изменении Δ от 0 до σ наблюдаемого закона. Как можно видеть, уже при ошибке округления $\Delta = 0,1\sigma$ отклонением распределения статистики от асимптотического (при $\Delta = 0$) пренебрегать нельзя. В то же время при $\Delta = 0,01\sigma$ и $n = 50$ распределение статистики не отличается от асимптотического. С увеличением объемов выборок картина, представленная на рис. 1, будет меняться: распределения при соответствующих Δ будут сдвигаться вправо от асимптотического.

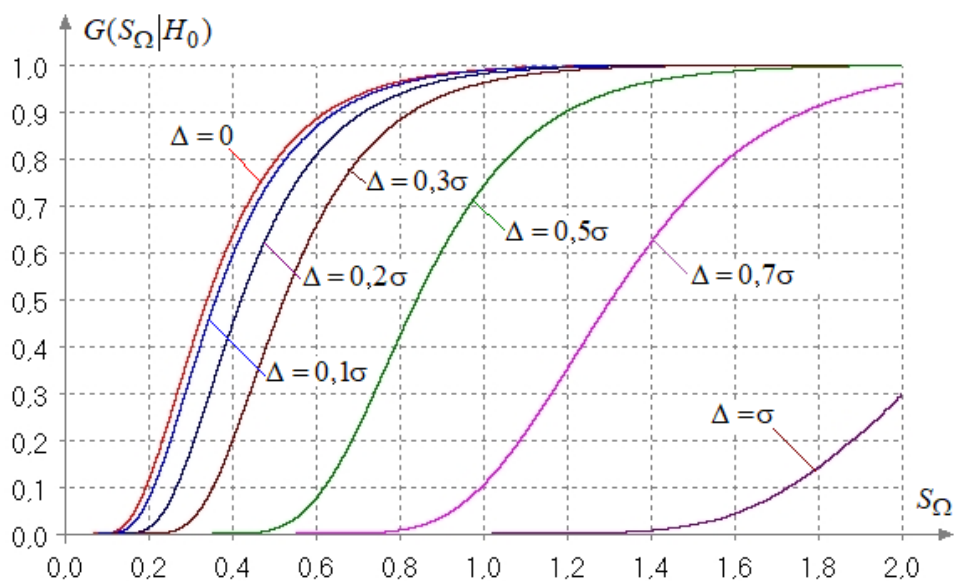


Рис. 1. Зависимость распределения статистики (5) критерия Андерсона–Дарлинга при проверке нормальности при $n = 50$ в зависимости от Δ

Fig. 1. Dependence of the distribution of statistics (5) of the Anderson–Darling test when checking the normality at $n = 50$ depending on Δ

Подобным же образом в зависимости от Δ при проверке нормальности ведут себя распределения статистик других критериев согласия.

На модельном примере покажем, как меняются результаты проверки при учете погрешности округления. В этом примере демонстрируется также применение некоторых специальных критериев проверки нормальности, вид статистик которых представлен в табл. 2. В этот перечень входят критерии: Фросини (F) [25] (12), Эппса-Палли (EP) [26] (13), Хегази–Грина (HG) [27] (14)–(15), Дэвида–Хартли–Пирсона (DHP) [28] (16), Гири (G) [29] (17), Д’Агостино (D’A) [30] (18).

Таблица 2

Статистики критериев проверки нормальности

Критерии	Статистики критериев
F	$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left \Phi(z_i) - \frac{i-0.5}{n} \right , \quad (12)$ <p>где $z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$</p>
EP	$T_{EP} = 1 + \frac{n}{\sqrt{3}} + \frac{2}{n} \sum_{k=2}^n \sum_{j=1}^{k-1} \exp \left\{ -\frac{(x_j - x_k)^2}{2s^2} \right\} - \sqrt{2} \sum_{j=1}^n \exp \left\{ -\frac{(x_j - \bar{x})^2}{4s^2} \right\}. \quad (13)$

Критерии	Статистики критериев
HG	$T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i - \eta_i , \quad (14)$
	$T_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{z_i - \eta_i\}^2, \quad (15)$
	где $z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$, $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, $\eta_i = \Phi^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right)$, – функция распределения стандартного нормального закона
DHP	$U = R/s, \quad (16)$ где $R = x_{\max} - x_{\min}$ – размах выборки, $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$
D	$d = \frac{1}{ns} \sum_{i=1}^n x_i - \bar{x} \quad (17)$
D'A	$z_2 = \left\{ \left(\frac{\chi}{2\alpha} \right)^{1/3} - 1 + \frac{1}{9\alpha} \right\} (9\alpha)^{1/2}, \quad (18)$ где $\delta = (n-3)(n+1)(n^2 + 15n - 4)$, $a = \frac{(n-2)(n+5)(n+7)(n^2 + 27n - 70)}{6\delta}$, $\chi = (\hat{\beta}_2 - 1 - \hat{\beta}_1)2k$, $c = \frac{(n-7)(n+5)(n+7)(n^2 + 2n - 5)}{6\delta}$, $k = \frac{(n+5)(n+7)(n^3 + 37n^2 + 11n - 313)}{12\delta}$, $\alpha = a + \beta_1 c$

Пример 1. Проверка сложной гипотезы о принадлежности выборки нормальному закону.

Анализируемая выборка

1,04	1,12	0,92	0,92	0,94	1,04	0,94	0,96	1,02	1,04
1,04	0,92	1,00	1,10	0,88	1,08	1,00	1,02	0,94	1,02
0,88	0,96	0,94	1,10	1,12	1,04	1,18	1,10	0,80	0,88
0,94	1,00	1,06	1,02	1,06	1,04	0,94	1,14	1,02	1,16
0,94	0,92	0,96	0,88	1,00	1,22	1,08	1,02	1,02	1,04

представляет собой результаты моделирования по нормальному закону с параметром сдвига $\mu = 1$ и масштаба $\sigma = 0,1$, зафиксированные с погрешностью округления $\Delta = 0,2\sigma$.

ОМП параметров, вычисленные по выборке, $\hat{\mu} = 1,008$ и $\hat{\sigma} = 0,085884$. Результаты проверки сложной гипотезы по совокупности критериев согласия и критериев нормальности представлены в табл. 3, где приведены значения статистик, а также оценки достигнутых уровней значимости p_{value} , вычисленные, соответственно, в предположении об отсутствии округлений при $\Delta = 0$ (по асимптотическим распределениям статистик) и по реальным распределениям при наличии округления порядка $\Delta = 0,2\sigma$. В случае критериев χ^2 Пирсона и Никулина–Рао–Робсона использовались пять равновероятных интервалов.

Таблица 3

Результаты проверки сложной гипотезы о нормальности

№ п/п	Критерий	Статистика	Оценки p_{value}	
			По асимптотическому распределению статистики $\Delta = 0$	По реальному распределению статистики $\Delta = 0,2\sigma$
Критерии согласия				
1	K	0,77130	0,173	0,425
2	CMS	0,08362	0,186	0,306
3	AD	0,45581	0,270	0,423
4	Ku	1,47064	0,062	0,239
5	W	0,08229	0,157	0,274
6	χ^2	0,40000	0,825	0,817
7	Y^2	6,16205	0,188	0,844

№ п/п	Критерий	Статистика	Оценки p_{value}	
			По асимптотическому распределению статистики $\Delta = 0$	По реальному распределению статистики $\Delta = 0,2\sigma$
8	Z_A	3,31084	0,663	0,761
9	Z_C	3,60967	0,830	0,892
10	Z_K	1,24283	0,223	0,407
Специальные критерии нормальности				
11	F	0,22147	0,224	0,338
12	EP	0,01673	0,950	0,950
13	HGT ₁	0,12241	0,278	0,413
14	HGT ₂	0,02294	0,434	0,571
15	DHP	4,84119	0,465	0,472
16	G	0,802947	0,995	0,961
17	D'A	0,34812	0,667	0,669

Все рассмотренные критерии согласия правосторонние. Из рассмотренных критериев нормальности двусторонними являются критерии Дэвида–Хартли–Пирсона, Гири и Д'Агостино, остальные также правосторонние. Как можно видеть, оценки p_{value} по реальным распределениям статистик, как правило, существенно отличаются от значений, полученных в предположении о непрерывности (по асимптотическим распределениям). В меньшей мере изменяются распределения двусторонних критериев. Исключение составляют критерии Эппса–Палли и Д'Агостино, распределения которых практически не изменяются с ростом Δ .

2. Влияние ошибок округления на распределения статистик критериев экспоненциальности

Наличие ошибок округления точно так же влияет и на распределения статистик множества критериев, используемых для проверки гипотезы о принадлежности анализируемой выборки экспоненциальному закону. Например, рис. 2 иллюстрирует изменение распределения $G(S_\omega | H_0)$ статистики (3) критерия Крамера–Мизеса–Смирнова в зависимости от Δ при $n = 50$.

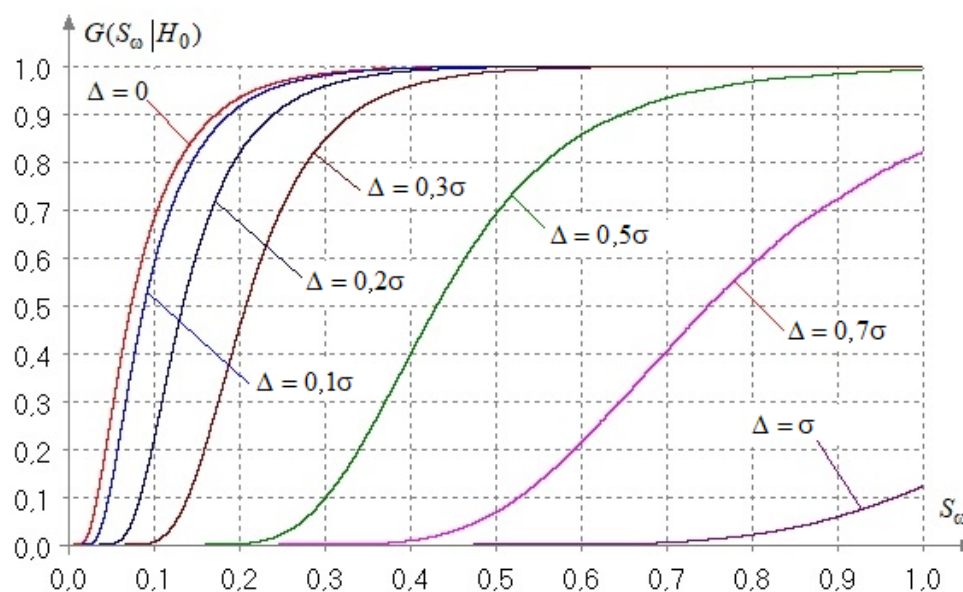


Рис. 2. Зависимость распределения статистики (3) критерия Крамера–Мизеса–Смирнова при проверке экспоненциальности при $n = 50$ в зависимости от Δ

Fig. 2. Dependence of the distribution of statistics (3) of the Cramer–Mises–Smirnov test when checking the exponentiality at $n = 50$ depending on Δ

Подобным же образом в зависимости от Δ при проверке экспоненциальности ведут себя распределения статистик критериев Колмогорова, Купера, Ватсона, χ^2 Пирсона и Никулина–Рао–Робсона и многих специальных критериев проверки экспоненциальности.

Вместе с тем при проверке экспоненциальности проявляются особенности применения критериев, не встречающиеся при проверке нормальности. Вследствие округления в выборке могут присутствовать значения, совпадающие со значением параметра сдвига. При таких значениях функция распределения экспоненциального закона (при нулевом сдвиге) $F(x, \eta) = 1 - \exp(-x/\eta)$ принимает значение 0. Для ряда критериев это является основанием для отклонения проверяемой гипотезы H_0 . В такой ситуации статистика (5) критерия Андерсона–Дарлинга, а также статистики (6)–(8) Z_K, Z_A, Z_C критериев Жанга принимают значения $+\infty$, а $p_{value} = 0$. С этим же можно столкнуться при использовании некоторых специальных критериев экспоненциальности.

Так же, как ранее при проверке нормальности, на модельном примере покажем, как меняются результаты проверки с учетом погрешности округления при проверке экспоненциальности. В данном случае также кроме критериев согласия используем несколько специальных критериев проверки экспоненциальности. Для этого из предварительно исследованных почти четырех десятков критериев экспоненциальности отобрали критерии, показавшие наибольшую мощность относительно рассматриваемых (в исследовании) конкурирующих гипотез. Вид статистик отображенных критериев представлен в табл. 4. В этот перечень вошли критерии: Барингхауса–Хензе (BH) [31] (19), Аткинсона (At_n) [32] (20), Фросини (F) [33] (21), Хензе–Мейнтаниса (HM) [34, 35] (22), Хензе (He) [36, 35] (23), Клара (Kl) [37] (24), Хегази–Грина (HGT₁) [27] (25), Кимбера–Мичела (KM) [38] (26), Дешпанде (De) [39] (27). Заметим, что свойства некоторых из этих критериев существенно зависят от имеющегося параметра. Такие критерии в данном случае рассматриваются при значениях параметров, при которых они проявили более высокую мощность.

Пример 2. Пусть проверяется гипотеза о принадлежности упорядоченной выборки объемом $n = 50$ экспоненциальному закону:

0,00	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20
0,20	0,40	0,40	0,40	0,40	0,40	0,40	0,40	0,40	0,60
0,60	0,80	0,80	0,80	0,80	0,80	0,80	0,80	0,80	1,00
1,00	1,00	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20	1,40	1,40	1,60
1,60	1,80	1,80	2,00	2,20	2,20	2,40	2,80	3,20	4,40

Эта выборка получена в результате моделирования по экспоненциальному закону с параметром масштаба $\eta = 1$ с нулевым параметром сдвига, т.е. с дисперсией $\sigma^2 = 1$. Моделируемые значения фиксировались с погрешностью округления $\Delta = 0,2\sigma$. Полученная по выборке оценка параметра масштаба $\hat{\eta} = 1,012$.

Таблица 4

Статистики рассматриваемых критериев экспоненциальности

Критерии	Статистики критериев
BH(a)	$BH(a) = \frac{1}{n} \sum_{j,k=1}^n \left[\frac{(1-Y_j)(1-Y_k)}{Y_j + Y_k + a} + \frac{2Y_j Y_k - Y_j - Y_k}{(Y_j + Y_k + a)^2} + \frac{2Y_j Y_k}{(Y_j + Y_k + a)^3} \right], \quad (19)$ <p>где $Y_i = x_{(i)}/\bar{x}$, $x_{(i)}$ – элементы вариационного ряда</p>
$At_n(p)$	$At_n(p) = \sqrt{n} \left \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} / \bar{x} - (\Gamma(1+p))^{1/p} \right / \sigma^2(p), \quad (20)$ <p>где $-1 < p < 1$, $\sigma^2(p) = \Gamma(1+p)^{2/p} \left(\frac{\Gamma(1+2p)}{p^2 \Gamma^2(1+p)} - 1 - \frac{1}{p^2} \right)$</p>
F	$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left 1 - \exp\left(-\frac{x_{(i)}}{\bar{x}}\right) - \frac{i-0.5}{n} \right \quad (21)$

Критерии	Статистики критериев
$HM(a)$	$HM(a) = \frac{1}{n} \sum_{j,k=1}^n \frac{1+(Y_j+Y_k+a+1)^2}{(Y_j+Y_k+a)^3} - 2 \sum_{j=1}^n \frac{1+Y_j+a}{(Y_j+a)^2} + \frac{n}{a},$ <p style="text-align: center;">где $Y_i = x_{(i)}/\bar{x}$, $a > 0$</p>
$He(a)$	$He(a) = \frac{1}{n} \sum_{j,k=1}^n \frac{1}{Y_j+Y_k+a} - \sum_{j=1}^n \exp(Y_j+a) E_1(Y_j+a) + n(1-a \exp(a) E_1(a)),$ <p style="text-align: center;">где $Y_i = x_{(i)}/\bar{x}$, $a > 0$, $E_1(z) = \int_z^\infty t^{-1} \exp(-t) dt$</p>
$Kl(a)$	$Kl(a) = \frac{2(3a+2)n}{(2+a)(1+a)^2} - 2a^3 \sum_{j=1}^n \frac{\exp(-(1+a)Y_j)}{(1+a)^2} - \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n \exp(-aY_j) + \frac{2}{n} \sum_{j<k} [a(Y_{(k)} - Y_{(j)}) - 2] \exp(-aY_{(j)})$
HGT_1	$T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left Y_i + \ln \left(1 - \frac{i}{n+1} \right) \right $
KM	$KM = \max_i s_i - r_i ,$ <p style="text-align: center;">где $s_i = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{1 - \exp\left(-\frac{x_{(i)}}{\bar{x}}\right)}$, $r_i = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{i-0.5}{n}}$</p>
$De(b)$	$De(b) = \frac{J - E[J]}{\sqrt{D[J]}},$ <p style="text-align: center;">где $E[J] = \frac{1}{b+1}$, $D[J] = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{b}{b+2} + \frac{1}{2b+1} + \frac{2(1-b)}{b+1} - \frac{2b}{b^2+b+1} - \frac{4}{(b+1)^2} \right)^2$,</p> $J = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} \varphi(x_i; bx_j), \quad \varphi(x_i, bx_j) = \begin{cases} 1 & \text{если } x_i > bx_j; \\ 0 & \text{если } x_i \leq bx_j \end{cases}$

Результаты применения для анализа предложенной выборки рассматриваемых критериев согласия и специальных критериев экспоненциальности приведены в табл. 5. В таблице представлены оценки p_{value} для всех рассматриваемых критериев, полученные по смоделированным распределениям статистик при количестве экспериментов $N = 10^6$ в предположении об отсутствии округления ($\Delta = 0$) и при наличии с погрешностью округления $\Delta = 0,2\sigma$.

Таблица 5

Результаты проверки сложной гипотезы об экспоненциальности

№ п/п	Критерий	Статистика	Оценки p_{value}	
			По асимптотическому распределению статистики $\Delta = 0$	По реальному распределению статистики $\Delta = 0,2\sigma$
Специальные критерии экспоненциальности				
1	$BH(0,1)$	0,767622	0,166	0,794
2	$BH(1)$	0,135266	0,208	0,250
3	$At_n(0,25)$	1,06031	0,293	0,758
4	F	0,267318	0,272	0,630
5	$HM(1,5)$	0,078934	0,197	0,232
6	$He(1)$	0,026544	0,202	0,237
7	$He(5)$	0,000389	0,275	0,294
8	$Kl(1)$	0,037906	0,317	0,419
9	$Kl(10)$	0,241439	0,115	0,385
10	HGT_1	0,080471	0,862	0,989

№ п/п	Критерий	Статистика	Оценки p_{value}	
			По асимптотическому распределению статистики $\Delta = 0$	По реальному распределению статистики $\Delta = 0,2\sigma$
11	KM	0,16755	0,001	0,735
12	$De(0,1)$	1,72338	0,083	0,062
13	$De(0,3)$	1,22981	0,242	0,309
Критерии согласия				
14	W	0,110544	0,153	0,588
15	Ku	1,55209	0,093	0,711
16	CMS	0,13948	0,173	0,465
17	K	1,15017	0,034	0,283
18	χ^2	3,31357	0,222	0,284
19	Y^2	5,93455	0,115	0,231
20	AD	0,94396	0,139	0,272
21	Z_A	3,43736	0,064	0,111
22	Z_C	14,50745	0,125	0,190
23	Z_K	5,42224	0,003	0,034

Как можно заметить, значения p_{value} , соответствующие реальным распределениям статистик при $\Delta = 0,2\sigma$, как правило, увеличиваются. Особенно чувствительны к ошибкам округления распределения статистик: (19) $BH(0,1)$ критерия Барингхауса–Хензе, (20) $At_n(0,25)$ критерия Аткинсона, (21) критерия Фросини, (26) критерия Кимбера–Мичела. В данном случае только критерий Дешпанде является двусторонним.

Аналогичным образом получены результаты применения к анализируемой выборке первых шести из представленных в табл. 5 критериев согласия. В случае критериев χ^2 Пирсона и Никулина–Рао–Робсона использовалось асимптотически оптимальное группирование [22] при числе интервалов $k = 4$.

Статистика (5) критерия Андерсона–Дарлинга и статистики (6)–(8) Z_K, Z_A, Z_C критериев Жанга вследствие присутствия 0,00 в анализируемой выборке принимают значение $+\infty$, а $p_{value} = 0$. Среди критериев согласия эти критерии, как правило, характеризуются более высокой мощностью. Поэтому обеспечить возможность их корректного применения является желательным, что можно осуществить с использованием следующего алгоритма.

Такие аномальные элементы (0,00 в нашей выборке) появляются в результате округления значений, оказавшихся меньшими величины $0,5\Delta$. Пусть в анализируемой выборке оказалось k таких «аномальных» элементов.

1. Эти «аномальные» элементы $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(k)}$ можно заменить восстановленными в соответствии с функцией распределения $F(x, \hat{\eta}) = 1 - \exp(-x / \hat{\eta})$ следующим образом:

$$\hat{x}_{(i)} = -\hat{\eta} \ln(1 - \xi_i), \quad i = \overline{1, k},$$

где ξ_i – равномерные псевдослучайные величины на интервале $[1 - \exp\{-0,5\Delta / \hat{\eta}\}, 1]$. Иногда эту процедуру называют преобразованием Смирнова. Эффективность ее применения при анализе цензурированных и группированных выборок, а также выборок дискретных случайных величин была показана в [40].

2. Теперь проблема с вычислением статистик критериев Андерсона–Дарлинга и Жанга отсутствует. Однако при моделировании распределений статистик для последующей оценки по ним значений p_{value} необходимо учитывать, что при генерации в соответствии с законом $F(x, \hat{\eta}) = 1 - \exp(-x / \hat{\eta})$ псевдослучайных выборок x_1, x_2, \dots, x_n значения $x_i < 0,5\Delta$ не должны округляться.

Для критериев Андерсона–Дарлинга и Жанга в табл. 5 внесены результаты проверки, полученные с использованием именно этого алгоритма.

Рассмотренный выше подход можно расширить следующим образом. Выборку с повторяющимися в результате округления значениями можно рассматривать как поразрядно группированную, в которой содержится k различных значений, и элемент x_i , $i = \overline{1, k}$, повторяется n_i раз, $n = \sum_{i=1}^k n_i$. То есть x_i является центром интервала $[x_i - \Delta / 2, x_i + \Delta / 2]$, в который попало n_i значений. В соответствии с функцией распределения $F(x, \hat{\eta}) = 1 - \exp(-x / \hat{\eta})$, используя преобразование Смирнова для каждого интервала i , $i = \overline{1, k}$, можно сгенерировать последовательность

$$\hat{x}_{ij} = -\hat{\eta} \ln(1 - \xi_j), \quad j = \overline{1, n_i},$$

где ξ_j – псевдослучайные величины, равномерно распределенные на интервале $[1 - \exp\{-(x_i - \Delta / 2) / \hat{\eta}\}, 1 - \exp\{-(x_i + \Delta / 2) / \hat{\eta}\}]$.

По полученной в результате этих действий псевдослучайной выборке $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2}, \dots, x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn_k}$ можно вычислить статистику S критерия, используемого для проверки гипотезы об отклонении эмпирического распределения этой выборки от функции распределения $F(x, \hat{\eta})$.

При справедливости проверяемой гипотезы H_0 распределение этой статистики сходится к распределению статистики критерия, имеющему место при проверке сложной гипотезы (в случае отсутствия округления). А оценка p_{value} (достигнутого уровня значимости) сходится к оценке, получаемой по распределению статистики в условиях округления.

На наш взгляд, в этом заключается наиболее рациональный подход, гарантирующий корректность статистических выводов при проверке гипотез по анализируемым выборкам с округленными данными. Он также открывает возможность применения в этой ситуации таких перспективных критериев, как критерий согласия со статистикой (11), опирающийся на оценки информации Кульбака–Лейблера, или различных критериев, использующих оценки энтропии.

Заключение

В различных приложениях достаточно часто приходится сталкиваться с ситуациями, когда в анализируемых выборках оказывается большое количество повторяющихся значений. Это может являться признаком того, что ошибки округления Δ при имеющихся объемах выборок и среднеквадратичном отклонении ошибок измерения σ привели к изменению распределения статистики применяемого критерия.

В таких ситуациях реальные распределения $G_\Delta(S_n | H_0)$ статистик критериев при имеющихся ограниченных объемах выборок могут существенно отличаться от $G(S_n | H_0)$, имеющих место при отсутствии ошибок округления.

Изменение свойств критерия под влиянием погрешностей округления не исключает возможности его корректного применения. Надо лишь знать распределение $G(S_n | H_0)$ статистики критерия при той же погрешности округления Δ и том же объеме выборки n , которые соответствуют анализируемой выборке. Для этого лучше всего воспользоваться методами статистического моделирования и в результате N экспериментов найти эмпирическое распределение статистики $G_N(S_n | H_0)$ критерия (при тех же Δ и n), по которому вычислить оценку p_{value} .

Для моделирования $G_N(S_n | H_0)$ рассмотренных в [7–10] множеств критериев можно использовать программную систему ISW [6], с применением которой проведены настоящие исследования, в которую встроены соответствующие средства интерактивного моделирования.

Возможное влияние погрешностей округления на распределения статистик критериев необходимо учитывать при использовании конкретных критериев в приложениях, а также в автоматизированных системах обработки данных, где статистические методы могут использоваться для отслеживания неизменности закономерностей (или обнаружения их изменения).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лемешко Б.Ю. Лемешко С.Б., Семёнова М.А. К вопросу статистического анализа больших данных // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2018. № 44. С. 40–49. DOI: 10.17223/19988605/44/5
2. Lemeshko B., Lemeshko S., Semenova M. Features of testing statistical hypotheses under big data analysis // Applied Methods of Statistical Analysis. Statistical Computation and Simulation – AMSA'2019, Novosibirsk, Russia, 18–20 September, 2019 : proc. of the International Workshop. Novosibirsk : NSTU publisher, 2019. P. 122–137.
3. Pearson E.S., D'Agostino R.B., Bowman K.O. Tests for departure from normality: Comparison of powers // Biometrika. 1977. V. 64. P. 231–246. DOI: 10.1093/biomet/64.2.427-a
4. Tricker A.R. The effect of rounding on the significance level of certain normal test statistics // Journal of Applied Statistics. 1990. V. 17, No. 1. P. 31–38. DOI: 10.1080/757582644
5. Tricker A.R. The effect of rounding on the power level of certain normal test statistics // Journal of Applied Statistics. 1990. V. 17, No. 2. P. 219–228. DOI: 10.1080/757582833
6. ISW – Программная система статистического анализа одномерных наблюдений. URL: <https://ami.nstu.ru/~headrd/ISW.htm> (дата обращения: 11.02.2020).
7. Лемешко Б.Ю. Непараметрические критерии согласия : руководство по применению. М. : ИНФРА-М, 2014. 163 с. DOI: 10.12737/11873
8. Лемешко Б.Ю. Критерии проверки отклонения распределения от нормального закона : руководство по применению. М. : ИНФРА-М, 2015. 160 с. DOI: 10.12737/6086
9. Лемешко Б.Ю., Блинов П.Ю. Критерии проверки отклонения распределения от равномерного закона : руководство по применению. М. : ИНФРА-М, 2015. 183 с. DOI: 10.12737/11304
10. Лемешко Б.Ю. Критерии проверки гипотез об однородности : руководство по применению. М. : ИНФРА-М, 2017. 208 с. DOI: 10.12737/22368
11. Kolmogoroff A.N. Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione // Giornale del Istituto Italiano degli Attuari. 1933. V. 4, No. 1. P. 83–91.
12. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. М. : Наука, 1983. 416 с.
13. Kuiper N.H. Tests concerning random points on a circle // Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Series A. 1960. V. 63. P. 38–47.
14. Watson G.S. Goodness-of-fit tests on a circle. I // Biometrika. 1961. V. 48, No. 1-2. P. 109–114.
15. Watson G.S. Goodness-of-fit tests on a circle. II // Biometrika. 1962. V. 49, No. 1-2. P. 57–63.
16. Anderson T.W., Darling D.A. A test of goodness of fit // Journal of the American Statistical Association. 1954. V. 29. P. 765–769.
17. Anderson T.W., Darling D.A. Asymptotic theory of certain “Goodness of fit” criteria based on stochastic processes // The Annals of Mathematical Statistics. 1952. V. 23. P. 193–212.
18. Zhang J. Powerful goodness-of-fit and multi-sample tests : PhD Thesis / York University. Toronto. 2001. 113 p. URL: <http://www.collectionscanada.gc.ca/obj/s4/f2/dsk3/ftp05/NQ66371.pdf> (accessed: 03.12.2019).
19. Никулин М.С. Критерий хи-квадрат для непрерывных распределений с параметрами сдвига и масштаба // Теория вероятностей и ее применение. 1973. Т. XVIII, № 3. С. 583–591.
20. Никулин М.С. О критерии хи-квадрат для непрерывных распределений // Теория вероятностей и ее применение. 1973. Т. XVIII, № 3. С. 675–676.
21. Rao K.C., Robson D.S. A chi-squared statistic for goodness-of-fit tests within the exponential family // Communications in Statistics – Theory and Methods. 1974. V. 3. P. 1139–1153.
22. Статистический анализ данных, моделирование и исследование вероятностных закономерностей. Компьютерный подход / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко, С.Н. Постовалов, Е.В. Чимитова. Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2011. 888 с.
23. Noughabi H.A., Arghami, N.R. General treatment of goodness of fit tests based on Kullback–Leibler information // Journal of Statistical Computation and Simulation. 2013. V. 83. P. 1556–1569.
24. Noughabi H.A. A new estimator of Kullback–Leibler information and its application in goodness of fit tests // Journal of Statistical Computation and Simulation. 2019. V. 89, No. 10. P. 1914–1934.
25. Frosini B.V. A survey of a class of goodness-of-fit statistics // Metron. 1978. V. 36, No. 1-2. P. 3–49.
26. Epps T.W., Pulley L.B. A test for normality based on the empirical characteristic function // Biometrika. 1983. V. 70. P. 723–726.
27. Hegazy Y.A.S., Green J.R. Some new goodness-of-fit tests using order statistics // Applied Statistics. 1975. V. 24, No. 3. P. 299–308.
28. David H.A., Hartley H.O., Pearson E.S. The distribution of the ratio? In a single normal sample, of range to standard deviation // Biometrika. 1964. V. 512, No. 3-4. P. 484–487.

29. Geary R.C. Testing for Normality // *Biometrika*. 1937. V. 34. P. 209–242.
30. D'Agostino R.B. Transformation to normality of the null distribution of g_1 // *Biometrika*. 1970. V. 57. P. 679–681.
31. Baringhaus L., Henze N. A class of consistent tests for exponentiality based on the empirical Laplace transform // *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*. 1991. V. 43, No. 3. P. 551–564.
32. Mimoto N., Zitakis R. The Atkinson index, the Moran statistic, and testing exponentiality // *Journal of the Japan statistical society*. 2008. V. 38, No. 2. P. 187–205.
33. Frosini B.V. On the distribution and power of a goodness-of-fit statistic with parametric and nonparametric application // *Goodness-of-fit* / ed. by P. Reverz, K. Sarkadi, P.K. Sen // *Amdstedam–Oxford–New York : North-Holland. Publ. Comp.*, 1987. P. 133–154.
34. Henze N., Meintanis S.G. Tests of fit for exponentiality based on the empirical Laplace transform // *Statistics: a Journal of Theoretical and Applied Statistics*. 2002. V. 36, No. 2. P. 147–161.
35. Henze N., Meintanis S.G. Recent and classical tests for exponentiality: a partial review with comparisons // *Metrika*. 2005. V. 61. P. 29–45.
36. Henze N. A new flexible class of omnibus tests for exponentiality // *Communications in Statistics – Theory and Methods*. 1993. V. 22, No. 1. P. 115–133.
37. Klar B. Goodness-of-fit tests for the exponential and the normal distribution based on the integrated distribution function // *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*. 2001. V. 53, No. 2. P. 338–353.
38. Kimber A.C. Tests for exponential, Weibull and Gumbel distribution based on the stabilized probability plot // *Biometrika*. 1985. V. 72, No. 3. P. 661–663.
39. Deshpande J.V. A Class of tests for exponentiality against increasing failure rate average alternatives // *Biometrika*. 1983. V. 70, No. 2. P. 514–518.
40. Lemeshko B.Yu., Chimitova E.V., Kolesnikov S.S. Nonparametric goodness-of-fit tests for discrete, grouped or censored data // XIIth Applied Stochastic Models and Data Analysis (ASMDA 2007) International Conference. Book of Abstracts. May 29 – June 1, 2007. Chania, Crete, Greece / ed. C.H. Skiadas. P. 112. URL: https://ami.nstu.ru/~headrd/seminar/publik_html/LEMESHKO_ASMDA2007_2.pdf (accessed: 18.12.2019).

Поступила в редакцию 17 февраля 2020 г.

Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B. (2020) ABOUT THE INFLUENCE OF ROUNDING ERRORS ON DISTRIBUTIONS OF STATISTICS OF THE GOODNESS-OF-FIT TESTS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 53. pp. 47–60

DOI: 10.17223/19988605/53/5

Most of the existing tests are designed to checking statistical hypotheses regarding continuous random variables. This is a standard assumption, which determines the correct application of the relevant tests.

In real situations, this assumption is often violated, since any measurements are accompanied by some rounding error. Therefore, repeated observations appear in the samples, which should not be in the case of continuity of a random variable.

The presence of rounding errors can affect the results of applying statistical hypothesis testing criteria, and in some situations lead to incorrect conclusions.

Changing the properties of tests due to the influence of rounding errors does not exclude the possibility of their correct application.

This work has two goals. First, to show how, depending on the magnitude of the rounding error Δ and on the volume n of samples, the distributions of statistics of various criteria for testing statistical hypotheses can change. Secondly, to give recommendations on how to proceed in order to ensure the correctness of the conclusion according to the applicable tests, if such changes cannot be ignored.

To ensure the ongoing research in the developed software system, the possibility of simulating the distributions of statistics of the corresponding tests under the conditions of violation of the standard assumption of continuity (for given Δ and n) is implemented. The number of simulation experiments in the study of the corresponding distributions of statistics and the calculation of estimates of the achieved significance level p_{value} by statistical simulating methods, as a rule, was not less than $N = 10^6$.

Using statistical simulating methods, an example of a set of 30 tests (goodness-of-fit tests, special tests for checking normality and checking exponentiality) demonstrates how significantly the distribution of the statistics of the tests can change depending on the rounding error and for limited sample sizes n .

To ensure the correctness of the conclusions on the applicable tests for non-standard conditions is proposed applications (and implemented) interactive study of the real distribution of the test statistic (for given Δ and n) statistical simulating methods.

Two samples of volume $n = 50$ containing the measurement results with a rounding error of $\Delta = 0,2 \sigma$ show the results of applying the considered set of tests to checking hypotheses about the belonging of the samples to the normal and exponential laws, respectively. A significant difference is shown between the estimates of p_{value} obtained from the asymptotic and real distributions of statistics.

Keywords: goodness-of-fit tests; normality tests; exponential tests; statistics; distribution of statistics; rounding errors.

LEMESHKO Boris Yurievich (Doctor of Technical Sciences, Professor, Novosibirsk State Technical University, Russian Federation).
E-mail: Lemeshko@ami.nstu.ru

LEMESHKO Stanislav Borisovich (Candidate of Technical Sciences, Novosibirsk State Technical University, Russian Federation).
E-mail: skyer@mail.ru

REFERENCES

1. Lemeshko, B.Yu., Lemeshko, S.B. & Semenova, M.A. (2018) To question of the statistical analysis of big data. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 44. pp. 40–49. DOI: 10.17223/19988605/44/5
2. Lemeshko, B., Lemeshko, S. & Semenova, M. (2019) Features of testing statistical hypotheses under big data analysis. *Applied Methods of Statistical Analysis. Statistical Computation and Simulation – AMSA'2019*. Proceedings of the International Workshop. Novosibirsk, Russia, 18–20 September, 2019. Novosibirsk: NSTU. pp. 122–137.
3. Pearson, E.S., D'Agostino, R.B. & Bowman, K.O. (1977) Tests for departure from normality: Comparison of powers. *Biometrika*. 64. pp. 231–246. DOI: 10.1093/biomet/64.2.427-a
4. Tricker, A.R. (1990) The effect of rounding on the significance level of certain normal test statistics. *Journal of Applied Statistics*. 17(1). pp. 31–38. DOI: 10.1080/757582644
5. Tricker, A.R. (1990) The effect of rounding on the power level of certain normal test statistics. *Journal of Applied Statistics*. 17(2). pp. 219–228. DOI: 10.1080/757582833
6. ISW – Software system for statistical analysis of one-dimensional observations. [Online] Available from: <https://ami.nstu.ru/~headrd/ISW.htm>. (Accessed: 11th February 2020)
7. Lemeshko, B.Yu. (2014) *Neparametricheskie kriterii soglasiya: rukovodstvo po primeneniyu* [Nonparametric goodness-of-fit tests. Guide on the application]. Moscow: INFRA–M. DOI: 10.12737/11873
8. Lemeshko, B.Yu. (2015) *Kriterii proverki otkloneniya raspredeleniya ot normal'nogo zakona: rukovodstvo po primeneniyu* [Tests for checking the deviation from normal distribution law. Guide on the application]. Moscow: INFRA–M. DOI: 10.12737/6086
9. Lemeshko, B.Yu. & Blinov, P.Yu. (2015) *Kriterii proverki otkloneniya raspredeleniya ot ravnomernogo zakona: rukovodstvo po primeneniyu* [Tests for checking the deviation from uniform distribution law. Guide on the application]. Moscow: INFRA–M. DOI: 10.12737/11304
10. Lemeshko, B.Yu. (2017) *Kriterii proverki gipotez ob odnorodnosti: rukovodstvo po primeneniyu* [Tests for homogeneity. Guide on the application]. Moscow: INFRA–M. DOI: 10.12737/22368
11. Kolmogoroff, A.N. (1933) Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione. *Giornale del Istituto Italiano degli Attuari*. 4(1). pp. 83–91.
12. Bolshev, L.N. & Smirnov, N.V. (1983) *Tablitsy matematicheskoy statistiki* [Tables for Mathematical Statistics]. Moscow: Nauka.
13. Kuiper, N.H. (1960) Tests concerning random points on a circle. *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Series A*. 63. pp. 38–47.
14. Watson, G.S. (1961) Goodness-of-fit tests on a circle. I. *Biometrika*. 48(1–2). pp. 109–114.
15. Watson, G.S. (1962) Goodness-of-fit tests on a circle. II. *Biometrika*. 49(1–2). pp. 57–63.
16. Anderson, T.W. & Darling, D.A. (1954) A test of goodness of fit. *Journal of the American Statistical Association*. 29. pp. 765–769.
17. Anderson, T.W. & Darling, D.A. (1952) Asymptotic theory of certain “Goodness of fit” criteria based on stochastic processes. *The Annals of Mathematical Statistics*. 23. pp. 193–212. DOI: 10.1214/aoms/1177729437
18. Zhang, J. (2001) *Powerful goodness-of-fit and multi-sample tests*. PhD Thesis. York University, Toronto. [Online] Available from: <http://www.collectionscanada.gc.ca/obj/s4/f2/dsk3/ftp05/NQ66371.pdf> (Accessed: 3rd December 2019).
19. Nikulin, M.S. (1973a) Kriteriy khi-kvadrat dlya nepreryvnykh raspredeleniy s parametrami sdviga i masshaba [Chi-square test for continuous distributions with location and scale parameters]. *Teoriya veroyatnostey i ee primeneniye*. 18(3). pp. 583–591.
20. Nikulin, M.S. (1973b) O kriterii khi-kvadrat dlya nepreryvnykh raspredeleniy [About the Chi-square test for continuous distributions]. *Teoriya veroyatnostey i ee primeneniye*. 18(3). pp. 675–676.
21. Rao, K.C. & Robson, D.S. (1974) A chi-squared statistic for goodness-of-fit tests within the exponential family. *Communications in Statistics – Theory and Methods*. 3. pp. 1139–1153. DOI: 10.1080/03610927408827216
22. Lemeshko, B.Yu., Lemeshko, S.B., Postovalov, S.N. & Chimitova, E.V. (2011) *Statistical Data Analysis, Simulation and Study of Probability Regularities. Computer Approach*. Novosibirsk: Novosibirsk State Technical University.
23. Noughabi, H.A. & Arghami, N.R. (2013) General treatment of goodness of fit tests based on Kullback–Leibler information. *Journal of Statistical Computation and Simulation*. 83. pp. 1556–1569. DOI: 10.1080/00949655.2012.667100
24. Noughabi, H.A. (2019) A new estimator of Kullback–Leibler information and its application in goodness of fit tests. *Journal of Statistical Computation and Simulation*. 89(10). pp. 1914–1934. DOI: 10.1080/01621459.1981.10477750
25. Frosini, B.V. (1978) A survey of a class of goodness-of-fit statistics. *Metron*. 36(1–2). pp. 3–49.
26. Epps, T.W. & Pulley, L.B. (1983) A test for normality based on the empirical characteristic function. *Biometrika*. 70. pp. 723–726. DOI: 10.1093/biomet/70.3.723
27. Hegazy, Y.A.S. & Green, J.R. (1975) Some new goodness-of-fit tests using order statistics. *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)*. 24(3). pp. 299–308.

28. David, H.A., Hartley, H.O. & Pearson, E.S. (1964) The distribution of the ratio? In a single normal sample, of range to standard deviation. *Biometrika*. 51(3–4). pp. 484–487. DOI: 10.1093/biomet/41.3-4.482
29. Geary, R.C. (1937) Testing for Normality. *Biometrika*. 34. pp. 209–242. DOI: 10.1093/biomet/34.3-4.209
30. D'Agostino, R.B. (1970) Transformation to normality of the null distribution of g_1 . *Biometrika*. 57. pp. 679–681. DOI: 10.1093/biomet/57.3.679
31. Baringhaus, L. & Henze, N. (1991) A class of consistent tests for exponentiality based on the empirical Laplace transform. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*. 43(3). pp. 551–564. DOI: 10.1007/BF00053372
32. Mimoto, N. & Zitikis, R. (2008) The Atkinson index, the Moran statistic, and testing exponentiality. *Journal of the Japan Statistical Society*. 38(2). pp. 187–205. DOI: 10.14490/jjss.38.187
33. Frosini, B.V. (1987) On the distribution and power of a goodness-of-fit statistic with parametric and nonparametric application. In: Reverz, P., Sarkadi, K. & Sen, P.K. (eds) *Goodness-of-fit*. Amdstedam; Oxford; New York: North-Holland. pp. 133–154.
34. Henze, N. & Meintanis, S.G. (2002) Tests of fit for exponentiality based on the empirifcal Laplace transform. *Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics*. 36(2). pp. 147–161. DOI: 10.1080/02331880212042
35. Henze, N. & Meintanis, S.G. (2005) Recent and classical tests for exponentiality: a partial review with comparisons. *Metrika*. 61. pp. 29–45. DOI: 10.1007/s001840400322
36. Henze, N. (1993) A new flexible class of omnibus tests for exponentiality. *Communications in Statistics – Theory and Methods*. 22(1). pp. 115–133. DOI: 10.1080/03610929308831009
37. Klar, B. (2001) Goodness-of-fit tests for the exponential and the normal distribution based on the integrated distribution function. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*. 53(2). pp. 338–353. DOI: 10.1023/A:1012422823063
38. Kimber, A.C. (1985) Tests for exponential. Weibull and Gumbel distribution based on the stabilized probability plot. *Biometrika*. 72(3). pp. 661–663. DOI: 10.1093/biomet/72.3.661
39. Deshpande, J.V. (1983) A class of tests for exponentiality against increasing failure rate average alternatives. *Biometrika*. 70(2). pp. 514–518. DOI: 10.1080/03610929208830930
40. Lemeshko, B.Yu. Chimitova, E.V. & Kolesnikov, S.S. (2007) Nonparametric goodness-of-fit tests for discrete, grouped or censored data. In: Skiadas, Ch.H. (eds) *XIIth Applied Stochastic Models and Data Analysis (ASMDA 2007) International Conference*. Chania, Crete, Greece. pp. 112. [Online] Available from: https://ami.nstu.ru/~headrd/seminar/publik_html/LEMESHKO_ASMDA2007_2.pdf (Accessed: 15th February 2020).

УДК 51-73 + 004.932.2
DOI: 10.17223/19988605/53/6

А.Г. Масловская, Л.С. Афанасов

АЛГОРИТМЫ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОГО ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА В ЗАДАЧАХ СПЕЦИФИКАЦИИ РАСТРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ САМОПОДОБНЫХ СТРУКТУР

Работа посвящена развитию и применению алгоритмического подхода к оценке скейлинговых характеристик растровых изображений самоподобных структур на основе мультифрактального вейвлет-анализа. В рамках метода максимумов модулей вейвлет-преобразования предложены алгоритмы фильтрации и маркировки линий локальных экстремумов. Представлены мультифрактальные характеристики на примере анализа растровых изображений доменных структур типичных сегнетоэлектриков.

Keywords: растровые изображения; метод максимумов модулей вейвлет-преобразования; алгоритм фильтрации; алгоритм маркировки; мультифрактальные характеристики.

На современном этапе теория самоорганизации представляет перспективное направление, которое активно используется для исследования объектов, обнаруживающих самоподобие и высокую степень самоупорядочения или, напротив, обладающих свойствами диссипативности, нерегулярности, шероховатости, хаоса и беспорядка [1]. Концепции теории фракталов часто выступают в качестве теоретического базиса, привлекаемого для математической формализации и количественного анализа различных твердотельных структур.

Как известно, центральным понятием теории фракталов является фрактальная размерность. Сложные физические системы характеризуются проявлением свойств самоподобия в иерархии масштабных уровней, поэтому для спецификации таких объектов – мультифракталов – используют спектр размерностей. Основной подход в применении методов фрактального и мультифрактального анализа состоит в установлении зависимостей между физическими свойствами физического объекта и скейлинговыми характеристиками его структуры или динамического поведения. Особую роль в практике приобретают алгоритмы мультифрактальной параметризации как инструменты детального анализа дисперсии фрактальных размерностей [2]. Одной из важнейших задач рассматривается проблема обработки, характеризации и классификации сложных 2D- и 3D-структур на основе математического аппарата мультифрактального анализа.

В числе методов мультифрактального анализа растровых изображений особого внимания заслуживают методы, основанные на покрытии объекта кластерами, когда не только происходит подсчет количества «занятых» кластеров при уменьшении их размера, но и определяется их удельный вес. Методы этой группы базируются на идее метода покрытий. Другим многообещающим и непрерывно развивающимся направлением является использование вейвлет-преобразований для оценки мультифрактальных характеристик изображений. Так, метод максимумов модулей вейвлет-преобразования (ММВП), предложенный Мьюзи, Бакри и Арнеодо [3], нашел применение не только для анализа временных рядов, но и для расчета скейлинговых характеристик растровых изображений [4–5] и даже распространился на 3D растровые и векторные поля [6]. Альтернативными подходами являются основанный на вейвлет-преобразованиях метод мультифрактального флуктуационного анализа [7] и методы, использующие дискретное вейвлет-преобразование, в частности метод вейвлет-лидеров [8–9]. Все указанные подходы вполне сопоставимы в плане алгоритмической сложности, точности и потенциальности для расчета скейлинговых характеристик.

В числе твердотельных структур, обладающих интересными фрактальными свойствами, можно выделить особый класс полярных диэлектрических материалов – сегнетоэлектрики. Сегнетоэлектри-

ческий кристалл имеет неоднородную структуру и разбит на домены, каждому из которых соответствует определенное направление спонтанной поляризации. Способность сегнетоэлектриков переключать поляризацию под внешним воздействием обуславливает востребованность этих материалов в микроэлектронике, оптике, акустике, пиро- и пьезотехнике, приемниках и преобразователях излучений. Доменные конфигурации типичных сегнетоэлектриков являются результатом процесса самоорганизации и обнаруживают самоподобные геометрические свойства. Фрактальность сегнетоэлектрических доменов была установлена рядом независимых авторов на основе анализа растровых изображений, полученных методом селективного химического травления, поляризационным или зондовыми методами (растровой электронной микроскопии (РЭМ) и атомно-силовой микроскопии) [10–13]. Можно также отметить, что фрактальная динамика доменов, эффекты памяти, присутствие шумовых компонент в поляризационных и диэлектрических откликах, а также скачки Баркгаузена, вызванные сложным характером перестройки доменов, были исследованы с привлечением методов фрактального анализа временных рядов, теории клеточных автоматов, перколяции и математического аппарата дробного дифференцирования [14–15].

Рассматривая РЭМ-изображения сегнетоэлектрических доменов как объекты фрактального анализа, требуется учитывать их специфику. Изображения в РЭМ формируются построчно и представляют результат регистрации видеосигнала как отклика образца на воздействие электронного зонда. Поскольку мультифрактальный вейвлет-анализ предоставляет гибкий математический инструмент для диагностики сложных сигналов, возможности частных методик могут быть применены для характеристики сегнетоэлектриков. В частности, одномерный метод максимумов модулей вейвлет-преобразования может быть использован для спецификации РЭМ-контраста сложных структур на основе анализа профиля видеосигнала.

Настоящая работа направлена на развитие алгоритмов в концепции ММВП, разработку системы компьютерного анализа скейлинговых характеристик самоподобных физических структур и применение данной методики к задачам исследования мультифрактальных свойств РЭМ-изображений доменных конфигураций типичных сегнетоэлектриков.

1. Математический аппарат вейвлет-мультифрактального анализа

Теория вейвлет-анализа была разработана для исследования временных рядов с меняющимся спектральным составом и выступила конкурирующей альтернативой преобразованию Фурье, дающему локализацию частот без временного разрешения, и возможностям функций Шеннона, специфицирующих моменты времени без частотного разрешения [16]. Семейство вейвлет-анализаторов позволяет на основе частотно-временной локализации характеризовать структуру неоднородных объектов.

Вейвлет-преобразование строится на основе солитоноподобной функции ψ из пространства $L^2(R)$. В вейвлет-преобразованиях масштаб заменяет понятие частоты, применяемой в спектральном анализе. Для покрытия вейвлетами временной оси вводится сдвиг функций, и используемые вейвлеты представляются функциями вида: $\psi([t - b]/a)$, где b – сдвиг, a – масштаб. Непрерывное вейвлет-преобразование некоторой функции $g(t)$ задается в виде:

$$W(a, b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt. \quad (1)$$

Вейвлеты также ассоциируют с «математическим микроскопом», определяя параметр сдвига b как позицию «фокусировки», масштаб a – как увеличение, а сам вейвлет – как «разрешающую способность» [16]. Поскольку различные вейвлеты обладают различными особенностями во временном и частотном пространствах, ключевая роль при анализе данных отводится выбору вейвлета. Наиболее известным подходом к конструированию материнских вейвлетов является использование производных функций Гаусса: $\psi_m(t) = (-1)^m \partial_t^m \left[\exp(-t^2/2) \right]$. Использование производных более высоких порядков, с одной стороны, дает возможность расширить функционал вейвлета за счет извлечения детальной ин-

формации из данных, но, с другой стороны, требует контроля соотношения между гладкостью вейвлета и анализируемого сигнала. Поэтому на практике особенно востребованными оказались вейвлеты первого (WAVE-вейвлет, $m = 1$) и второго («мексиканская шляпа», или МНАТ-вейвлет, $m = 2$) порядков [17].

Рассмотрим базовые концепции ММВП. Как показывает практика, более устойчивый результат метод демонстрирует при использовании предварительной нормализации и исключения линейного тренда исходного сигнала $G(t)$ путем построения его «профиля» $g(t_i) = |G(t_i) - \langle G \rangle|$, $i = \overline{1, N}$, где $\langle G \rangle$ – среднее арифметическое значений исходного ряда. Первый шаг ММВП предполагает проведение непрерывного вейвлет-преобразования функции $g(t)$ по соотношению (1), которое часто реализуют на основе приближенного представления интеграла:

$$W(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{i=1}^N g_i \cdot \psi\left(\frac{i-b}{a}\right). \quad (2)$$

Многие авторы также допускают модификацию преобразований (1) и (2) с учетом умножения правой части на коэффициент $1/\sqrt{a}$ [17]. Результатом проведенного вейвлет-преобразования является зависящая от двух координат регулярная функция $W(a, b)$, для геометрической интерпретации которой традиционно используют поверхность в трехмерном пространстве и проекцию на плоскость (a, b) . Другой важной характеристикой является скелетон – линии локальных экстремумов функции (максимумов и минимумов) $W(a, b)$ для каждого значения масштабного коэффициента a . Второй шаг алгоритма ММВП состоит в оценке скейлинговых характеристик анализируемых сигналов на основе полученных данных. С этой целью используют статистические функции

$$Z(q, a) = \sum_{l \in L(a)} |W(a', x_l(a'))|^q, \quad (3)$$

где $L(a)$ – множество всех линий l локальных максимумов модулей вейвлет-коэффициентов $W(a, b)$, существующих на масштабе a ; q – дискретный массив эмпирически устанавливаемых параметров деформации.

Для более корректного воспроизведения функций $Z(q, a)$ при отрицательных значениях параметра деформации q оценку получают посредством вычисления максимальных значений модулей коэффициентов вейвлет-преобразования вдоль каждой линии локальных экстремумов l на всех масштабах a' , меньших заданного значения масштабного параметра a , по формуле

$$Z(q, a) = \sum_{l \in L(a)} \left[\sup_{a' \leq a} |W(a', x_l(a'))| \right]^q. \quad (4)$$

Выражение (4) можно формализовать в обобщенном виде: $Z(q, a) \sim a^{\tau(q)}$, откуда, выполнив построение зависимостей $Z(a)$ для каждого q в двойном логарифмическом масштабе, можно получить оценку скейлинговой экспоненты $\tau(q)$, которая имеет вид линейной зависимости для монофрактальных объектов и нелинейной – для мультифракталов: $\tau(q) = qh - 1$, где $h(q)$ – альтернативная характеристика, связанная со спектром размерностей $D(q)$ фрактального множества: $D(q) = \tau(q)/(q - 1)$. Преобразование Лежандра позволяет установить связь между основными спектральными характеристиками рассматриваемого мультифрактального множества:

$$\alpha(q) = d\tau(q)/dq, \quad f(\alpha) = q \cdot \alpha - \tau(q), \quad (5)$$

где α – экспоненты Гельдера и $f(\alpha)$ – спектр сингулярностей.

Носителем фрактальной меры является множество Ψ , представляющее собой объединение фрактальных подмножеств Ψ_α . Множество Ψ характеризуется фрактальной размерностью D , а каждое из подмножеств Ψ_α – величиной $f(\alpha < D)$.

2. Алгоритмы фильтрации и маркировки линий локальных максимумов

Анализируя ММВП, можно отметить, что ключевым этапом, представляющим сложность в алгоритмическом плане, является запись скелетона функции $W(a, b)$ согласно (1) или (2) в виде,

пригодном для дальнейшего вычисления статистических функций $Z(q, a)$. При построении линий локальных максимумов могут возникнуть цепочки «ложных» или, как отмечают авторы работы [18], «грязных» максимумов. Кроме того, возможно присутствие «висячих» или «обрывающихся» максимумов, не относящихся к продолжающимся линиям, как показано на рис. 1.

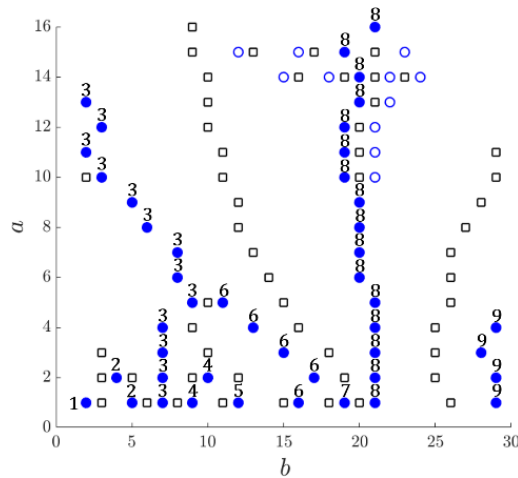


Рис. 1. Пример фильтрации и маркировки линий локальных максимумов (квадратами обозначены минимумы, закрашенными кругами – максимумы, подлежащие маркировке, пустыми кругами – «ложные» максимумы)
 Fig. 1. An example of filtering and marking the local maxima lines (squares refer to minima, shaded circles – marked maxima, and empty circles – “false” maxima)

Подобные «артефакты» искажают результат вычисления значений статистических функций, поэтому возникает подзадача фильтрации линий локальных максимумов, которая позволит исключить из рассмотрения «ложные» максимумы. Данный аспект ММВП, как отмечено в работе [18], относится «к темной стороне» алгоритма. Многие авторы избегают организации подобных процедур, ограничиваясь работой с матрицей максимумов модулей коэффициентов вейвлет-преобразования, включающей «ложные» цепочки.

Результата процедуры фильтрации будет достаточно для построения функций $Z(q, a)$ по формуле (3). Однако для того, чтобы воспользоваться соотношением (4), необходимо знать, какой цепочке принадлежит подлежащий просмотру максимум, чтобы определить максимальное значение вдоль каждой линии. Здесь возникает другая подзадача – маркировки локальных максимумов. Многие авторы также отказываются от программной реализации этого подхода в пользу применения более простого соотношения (3). В рамках реализации ММВП введем в рассмотрение следующие алгоритмы фильтрации и маркировки линий локальных максимумов. Алгоритм основной функции формализован с помощью блок-схемы, приведенной на рис. 2.

Входными параметрами являются: *Scales* – диапазон изменения масштаба a ; D – матрица максимумов модулей коэффициентов вейвлет-преобразования $W(a, b)$. Выходные данные: *Filt_D* – сформированная в результате фильтрации матрица максимумов модулей коэффициентов вейвлет-преобразования; *Mark_D* – матрица, содержащая уникальные для каждой линии максимумов метки.

Процесс поиска выполняется последовательно на каждом масштабе снизу вверх. На первом шаге выполняется инициализация матриц *Filt_D* и *Mark_D* как матриц с нулевыми элементами. Далее значения для первой строки матрицы *Filt_D* определяются равными значениям первой строки матрицы D . Выполняется маркировка для самого нижнего уровня масштаба a : каждый максимум маркируется цифрой и маркер инкрементируется.

На втором шаге выполняется циклический перебор всех значений матрицы D на каждом масштабе a_i . Если при просмотре элементов массива *Filt_D* было найдено значение, отличное от нуля, то выполняется вызов вспомогательной функции *next_max*, которая выполняет поиск индексов максимума на следующем масштабе от текущей позиции. Далее осуществляется маркировка вновь найденного максимума: значение маркера равно значению маркера максимума, для которого был проведен поиск.

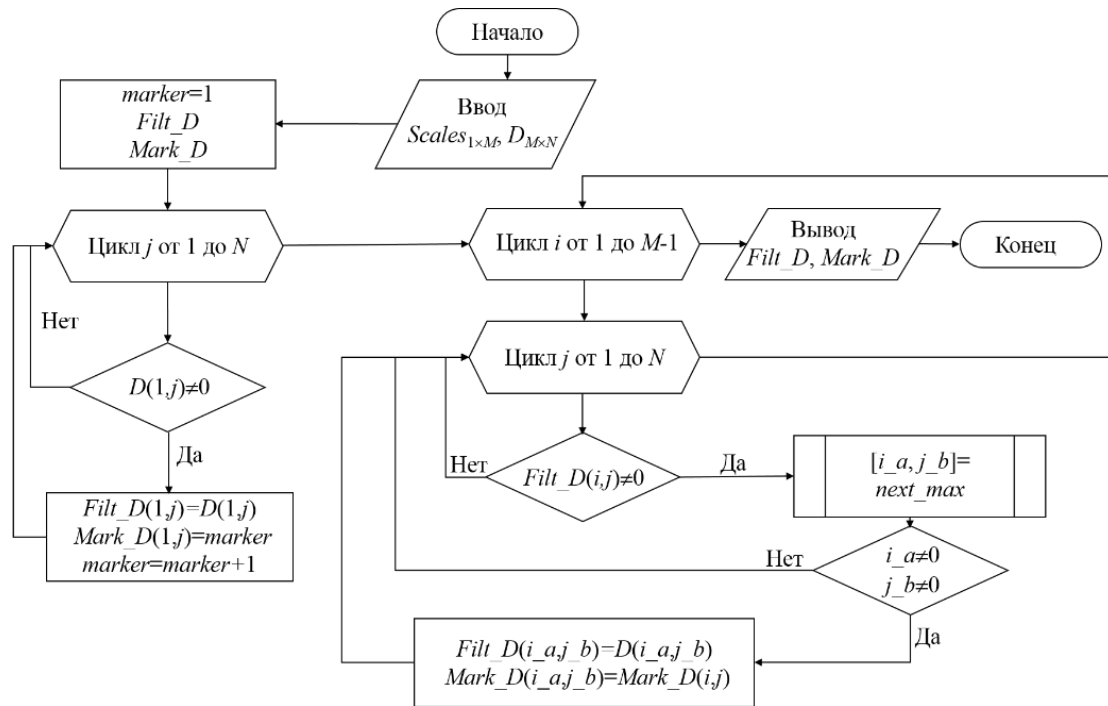


Рис. 2. Блок-схема алгоритма
Fig. 2. The flowchart of the algorithm

Входными параметрами вспомогательной функции *next_max* являются: значение масштаба a_{i+1} , на котором производится поиск максимума; массивы D и $Mark_D$. Выходные данные: i_a , i_b – позиция максимума на уровне a_{i+1} , принадлежащего той же линии, что и максимум, из которого ведется поиск. Первый этап предполагает инициализацию индексов и переменной шага для поиска. Если значение переданного искомого масштаба a_{i+1} меньше максимального возможного значения, то выполняются дальнейшие шаги алгоритма для поиска максимума, в противном случае происходит выход из функции.

Следующий шаг – фиксация диапазона для поиска максимума на текущем значении масштаба и контроль достижения границ. Выполняется проход по диапазону для поиска близлежащего немаркированного максимума на заданном масштабе. Если при переборе было найдено значение, отличное от нуля, и в матрице $Mark_D$ с теми же индексами не был записан маркер, то выполняется запись индексов данного максимума. После полного прохода от крайней левой точки до крайней правой выбираются индексы того максимума, который был расположен ближе к исходной позиции по j . А если при полном проходе ни одного из максимума не было найдено, то функция вернет индексы нулевыми.

Предложенные алгоритмы в концепции ММВП могут быть применены для мультифрактального анализа растровых изображений. Строго говоря, особенностью описанного выше метода является его локальная одномерность: исследованию подлежит «сигнал» – выбранная строка растрового изображения. Система компьютерного анализа реализована в виде программного приложения в ППП Matlab, структура которого представлена на рис. 3. Графический интерфейс пользователя позволяет загрузить исследуемое изображение в рабочую область, зафиксировать определенный профиль изображения для анализа, осуществить выбор материнского вейвлета и выполнить расчет мультифрактальных характеристик. Модуль обработки транслирует монохромное изображение в матрицу яркости и выделяет «двумерный сигнал», соответствующий профилю изображения, выбранному пользователем. Следующий модуль выполняет вейвлет-преобразование, строит поверхность коэффициентов вейвлет-преобразования. Далее следует блок построения скелетона на основе алгоритмов фильтрации и маркировки линий локальных экстремумов, после чего ММВП рассчитываются характеристики анализируемого множества: скейлинговая экспонента $\tau(q)$, значения экспонент Гельдера $\alpha(q)$ и спектр сингулярностей $f(\alpha)$. Программа сохраняет данные в библиотеку файлов и выводит результаты расчета в графическую область.

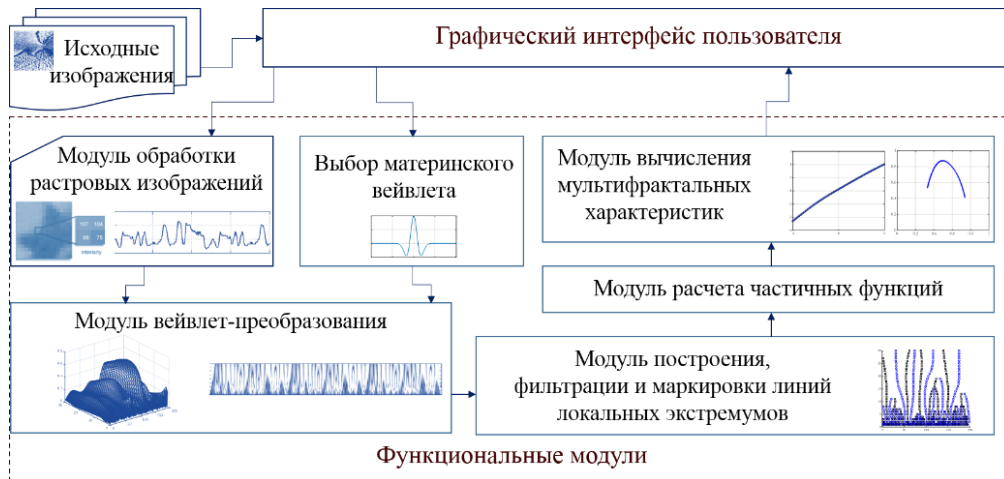


Рис. 3. Структурная схема программного приложения
 Fig. 3. Block diagram of a software application

Можно заметить, что ППП Matlab имеет встроенный инструментарий не только для проведения вейвлет-преобразования (функция *cwt*), но и для мультифрактального анализа сигналов на основе методов ММВП и вейвлет-лидеров (функции *wtm* и *dwtleader* соответственно). Применение указанных функций избавляет исследователя от необходимости программной реализации сложных алгоритмов, тем не менее «пользовательский» подход на практике встречает некоторые серьезные ограничения. Например, использование функции *wtm* не предполагает вариацию выбора материнского вейвлета, изменение диапазона значений параметра деформации и включает только определенный набор скейлинговых характеристик. Кроме того, результат работы функции *cwt*, используемой функцией *wtm*, не предполагает дальнейшей фильтрации максимумов. Также разработчиками предусмотрено нормированное представление при вычислении статистических функций: соотношение (3) умножается на параметр, что дает сдвиг скейлинговой экспоненты и, как следствие, сдвиг спектра сингулярностей. Таким образом, для получения адекватного результата потребуются искусственная настройка графического вывода.

3. Демонстрационный пример

Проверка адекватности работы программного приложения проводилась на тест-объектах – искусственно сгенерированных абстрактных сигналах, являющихся монофрактальными объектами с известным характером поведения скейлинговых характеристик и значениями фрактальных размерностей. С целью верификации и демонстрации особенностей работы модифицированного алгоритма рассмотрим тестовую задачу анализа анизотропного изображения, искусственно синтезированного с использованием коричневого шума для каждой строки изображения. Будем считать, что исходное изображение задано в растровом формате «градации серого», как показано на рис. 4, *a*, и всему изображению поставлена в соответствие матрица яркости $G(x, y)$. Пользовательский выбор строки изображения дает анализируемый сигнал, профиль $g(x)$ которого представлен на рис. 4, *b*.

Выполним преобразование (1) над сигналом $g(x)$, используя вейвлет «мексиканская шляпа». Результатом являются поверхность абсолютных значений коэффициентов вейвлет-преобразования $W(a, b)$ и ее проекция на плоскость (a, b) . Проекция наглядно отображает иерархическую структуру сигнала – характерные разветвления на различных масштабах a .

Модули прикладной программы реализуют предложенные алгоритмы и позволяют построить отфильтрованные линии локальных экстремумов и выполнить их уникальную маркировку. Дальнейшая реализация алгоритма предполагает вычисление функций $Z(a, q)$, фиксируя набор параметров деформации $q \in [-2, 2]$. Вычисление функций $Z(a, q)$ дает визуально не различимый результат для положительных q , что служит также верификацией работы алгоритма. Результаты расчета скейлинго-

вых характеристик приведены на рис. 5. В данном случае зависимость $\tau(q)$ имеет «спрямленный» вид, а спектр сингулярностей $f(\alpha)$ четко локализован и имеет максимум в точке с координатами (0,5; 1), что соответствует проявлению фрактальных свойств анализируемого сигнала.

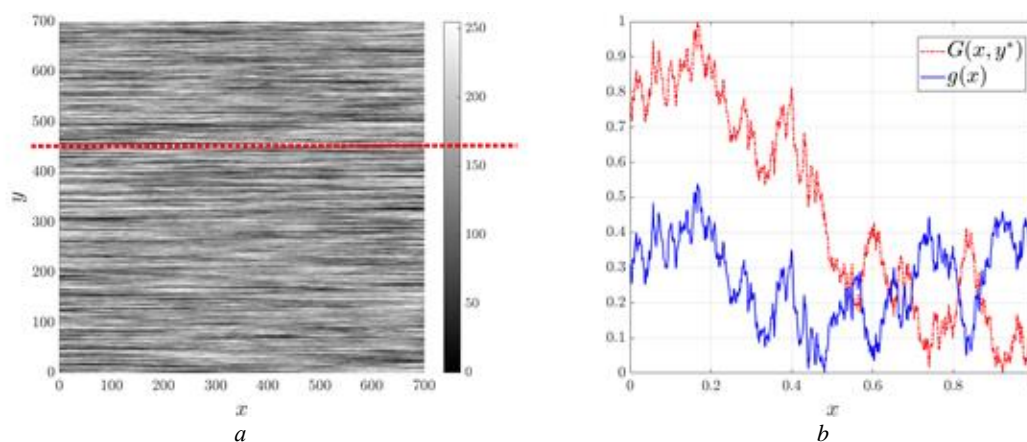


Рис. 4. Растровое тест-изображение и пример выбора строки y^* для анализа (пунктирная линия) – a , значение яркости сигнала $G(x, y^*)$ в нормированном виде и «профиль» $g(x)$ этого сигнала – b
 Fig. 4. Raster test-image and an example of selecting the string y^* for analysis (dashed line) – a , the signal brightness value $G(x, y^*)$ in the normalized form and the “profile” $g(x)$ of this signal – b

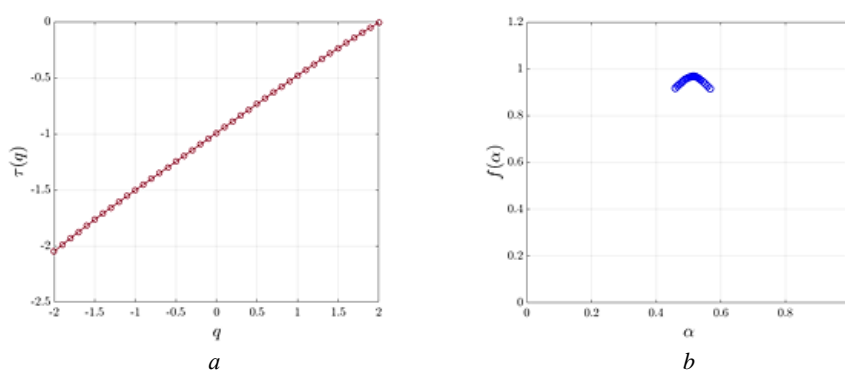


Рис. 5. Скейлинговые характеристики анализируемого сигнала $g(x)$, установленные ММВП: скейлинговая экспонента $\tau(q)$ – a , спектр сингулярностей $f(\alpha)$ – b
 Fig. 5. The scaling characteristics of the analyzed signal $g(x)$ specified by WTMM: the scaling exponent $\tau(q)$ – a , the singularity spectrum $f(\alpha)$ – b

Известно, что значение скейлинговой экспоненты $\tau(0) = -1$ и для коричневого шума $\tau(2) = 0$, что отвечает данным, представленным на рис. 5, a . Для фрактальных сигналов между $\tau(2)$ и показателем степени β функции спектральной плотности мощности $S(\varphi) = 1/\varphi^\beta$ существует взаимосвязь: $\beta = 2 + \tau(2)$. Кроме того, $\beta = 2H + 1$, где H – параметр Херста фрактального множества, и $H = 0,5$ для коричневого шума. Значение максимума функции спектра дает информацию о носителе меры, а абсцисса максимума соответствует значению параметра Херста $\alpha_{\max} = 0,5$ (рис. 5, b).

3.1. Мультифрактальный вейвлет-анализ РЭМ-изображений доменных структур сегнетоэлектриков

В качестве прикладной задачи рассмотрим анализ РЭМ-фотографий доменных структур типичных сегнетоэлектриков. Все исследуемые изображения были предварительно представлены в формате «градации серого». Для анализа выбирались несколько строк из матрицы яркости соответствующего изображения. Формируемый в РЭМ контраст отвечает построчной визуализации сигнала как отклика образца на воздействие электронного зонда. Таким образом, считая скорость движения зонда пост-

янной, анализу подлежит регистрируемый видеосигнал. Значение масштабного параметра a соответствовало диапазону [1, 30], параметр деформации $q \in [-2, 2]$.

На рис. 6, *a* приведен пример результатов расчета мультифрактального спектра для кристалла триглицинсульфата (ТГС). Для расчетов использован материнский вейвлет «мексиканская шляпа». Результат оценки скейлинговых характеристик позволяет охарактеризовать особенности изображений. Скейлинговая экспонента $\tau(q)$ представляется нелинейной зависимостью, что характерно для мультифрактальной структуры. Спектр сингулярностей позволяет определить набор фрактальных размерностей и оценить уровень максимума α_{\max} , соответствующий параметру Херста, и ширину фрактального спектра $\Delta\alpha$. Для изображения кристалла ТГС при выборе различных строк для анализа абсцисса максимума варьировала в диапазоне 0,32–0,58, ширина спектра $\Delta\alpha \approx 0,5$ –1. Поскольку метод анализа является локально одномерным – преобразование выполняется каждый раз над отдельной строкой изображения, носителем меры во всех случаях является единица (максимальное значение $f_{\max}(\alpha)$ ограничено единицей).

На рис. 6, *b, c* показана эволюция спектра сингулярностей РЭМ-изображения доменной структуры кристалла ТГС, наблюдаемая в условиях температурного нагрева.

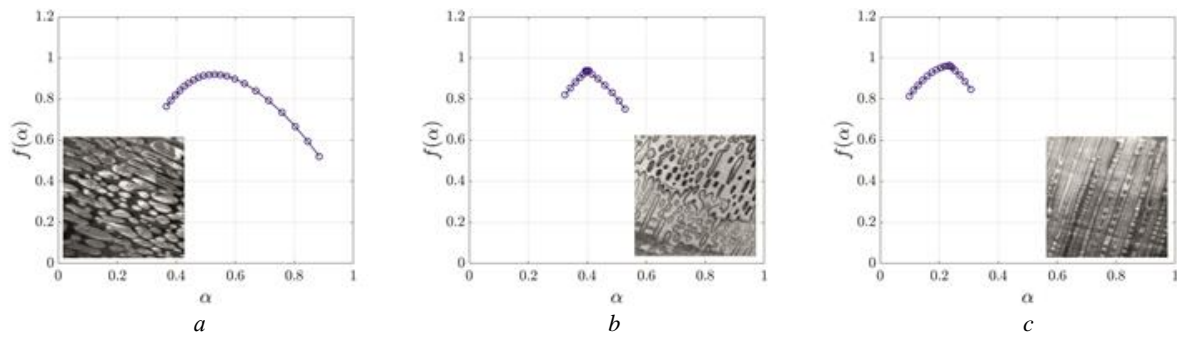


Рис. 6. Спектры мультифрактальных размерностей для РЭМ-изображений доменной структуры ТГС, визуализируемых: при комнатной температуре – *a*, при прогреве до T_c – *b*, при глубоком отжиге $T \gg T_c$ – *c*
 Fig. 6. Multifractal spectra calculated for SEM images of the TGS domain structure visualized: at room temperature – *a*, at heating to T_c – *b*, at deep annealing $T \gg T_c$ – *c*

При прогреве кристалла ТГС выше температуры Кюри $T_c \approx 49^\circ\text{C}$ визуализируемый поляризационный контраст соответствует структуре, известной при описании процесса полимеризации гелей как «вязкие пальцы». Такая конфигурация характеризуется некоторым сужением и смещением спектра при $\alpha_{\max} \approx 0,4$. Наконец, глубокий отжиг при температуре $T = 70^\circ\text{C}$ приводит к модификации и выстраиванию «псевдодоменов» в вытянутые цепочки. Мультифрактальный спектр также является достаточно узким и еще более сдвинут в сторону меньших значений экспонент Гельдера α и $\alpha_{\max} \approx 0,23$. Таким образом, при нагреве кристалла ТГС свыше температуры Кюри остаточный поляризационный контраст на поверхности имеет достаточно сложную организацию, даже более «упорядоченную», чем исходная доменная структура. Степень, или уровень, такой упорядоченности можно охарактеризовать спектром фрактальных размерностей с шириной $\Delta\alpha \approx 0,2$.

Поэтому спецификация геометрии доменных структур сегнетоэлектриков хотя и может быть в некоторых частных случаях проведена с использованием фрактального формализма, в общем требует привлечения методов мультифрактального анализа. Отметим, что дополнительные возможности и перспективы в данном классе задач открывает использование $2D$ и $3D$ мультифрактального вейвлет-анализа.

Заключение

Настоящая работа обобщает результаты развития алгоритмов и их применение для анализа растровых изображений самоподобных структур в рамках одномерного метода максимумов модулей

вейвлет-преобразования. Предложен алгоритм фильтрации локальных экстремумов, позволяющий работать с корректным представлением скелетона функции, являющейся результатом вейвлет-преобразования. Алгоритм нацелен на ликвидацию «обрывающихся» и «висячих» максимумов при построении непрерывных линий локальных экстремумов. Сателлитом данного алгоритма выступил алгоритм маркировки линий локальных экстремумов, позволяющий однозначно идентифицировать принадлежность максимума к той или иной линии локальных экстремумов и вычислять статистические функции при отрицательных значениях параметра деформации.

На базе ППП Matlab разработан программный комплекс, предназначенный для проведения мультифрактального вейвлет-анализа растровых изображений. Работа программного приложения продемонстрирована на тестовой задаче оценки скейлинговых характеристик растрового изображения, сгенерированного на основе коричневого шума. Разработанные программные средства применены для оценки мультифрактальных характеристик растровых изображений доменных структур сегнетоэлектрических материалов. Показано, что РЭМ-изображение типичного сегнетоэлектрика ТГС характеризуется спектром фрактальных размерностей, представленным достаточно широким диапазоном. Проведен анализ эволюции спектра сингулярностей для сегнетоэлектрика, подверженного температурному воздействию. Показано, что остаточный поляризационный контраст при отжиге характеризуется сужением и смещением спектра по сравнению с исходной структурой, наблюдаемой в равновесных условиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Falconer K. J. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. Chichester : Wiley, 2014. 398 p.
2. Abry P., Jaffard S., Wendt H. Irregularities and scaling in signal and image processing: multifractal analysis // *Benoit Mandelbrot: a Life in Many Dimensions* / M. Frame, N. Cohen (ed.). Singapore : World Scientific Publ., 2015. P. 31–116.
3. Muzy J.F., Barcy E., Arneodo A. Wavelets and multifractal formalism for singular signals: Application to turbulence data // *Phys. Rev. Lett.*, 1991. P. 3515–3518.
4. Arneodo A., Decoster N., Kestener P., Roux S.G. A wavelet-based method for multi-fractal image analysis: From theoretical concepts to experimental applications // *Adv. Imaging Electr. Phys.* 2003. V. 126. P. 1–92.
5. Гиляров В.Л., Корсуков В.Е., Бутенко П.Н., Светлов В.Н. Применение вейвлет-преобразования при изучении изменения фрактальных свойств поверхностей аморфных металлов под воздействием механической нагрузки // *Физика твердого тела*. 2004. Т. 46, вып. 10. С. 1806–1810.
6. Kestener P., Arneodo A. Generalizing the wavelet-based multifractal formalism to random vector fields: Application to three-dimensional turbulence velocity and vorticity data // *Phys. Rev. Lett.* 2004. V. 93. 044501(5).
7. Jagtap J., Ghosh S., Panigrahi P.K., Pradhan A. Wavelet-based multifractal analysis of laser biopsy imagery // *Proc. SPIE 8222. Dynamics and Fluctuations in Biomedical Photonics IX*. 2012. 82220F(9).
8. Jaffard S., Lashermes B., Abry P. Wavelet leaders in multifractal analysis // *Wavelet Analysis and Applications* / T. Qian, M.I. Vai, Y. Xu (ed.). Basel : Birkhauser Verlag, 2006. P. 219–264.
9. Leonarduzzi R., Wendt H., Abry P., Jaffard S., Melot C. Finite-Resolution Effects in p-Leader Multifractal Analysis // *IEEE Transactions on Signal Processing*. 2017. V. 65 (13). P. 3359–3368.
10. Mitić V.V., Paunović V., Lazović G., Kocić L., Fecht H. Fractal dimension of fractals tensor product ferroelectric ceramic materials frontiers // *Ferroelectrics*. 2018. V. 535, No. 1. P. 114–119.
11. Uchino K. *Advanced piezoelectric material. Science and technology*. Duxford : Elsevier, Woodhead publ., 2017. 848 p.
12. Roy M.K., Paul J., Dattagupta S. Domain dynamics and fractal growth analysis in thin ferroelectric films // *IEEE Xplore*. 2010. V. 109. 014108(4).
13. Maslovskaya A.G., Barabash T.K. Fractal parameterization analysis of ferroelectric domain structure evolution induced by electron beam irradiation // *Proc. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. 2017. V. 168. 012028 (6).
14. Maslovskaya A.G., Barabash T.K. Multifractal analysis of electron beam stimulated process of polarization reversal in ferroelectrics // *Physics Procedia*. 2012. No. 23. P. 81–85.
15. Tadic B. Switching current noise and relaxation of ferroelectric domains // *Eur. Phys. J. B*. 2002. V. 28. P. 81–89.
16. Addison P.S. *The illustrated wavelet transform handbook: Introductory theory and applications in science, engineering, medicine and finance*. New York : CRC Press, 2016. 446 p.
17. Павлов А.Н., Анищенко В.С. Мультифрактальный анализ сложных сигналов // *Успехи физических наук*. 2007. Т. 177, № 8. С. 859–872.
18. Puckovs A., Matvejevs A. Wavelet transform modulus maxima approach for world stock index multifractal analysis // *Information Technology and Management Science*. 2012. V. 15. P. 76–86.

Поступила в редакцию 10 июля 2020 г.

Maslovskaya A.G., Afanasov L.S. (2020) ALGORITHMS OF MULTIFRACTAL WAVELET ANALYSIS IN PROBLEMS OF SPECIFYING RASTER IMAGES OF SELF-SIMILAR STRUCTURES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 53. pp. 61–71

DOI: 10.17223/19988605/53/6

Many physical objects exhibit self-similarity and a high degree of self-organization, or, in contrast, possess the properties of dissipativity, irregularity, roughness, chaos, and disorder. The concepts of the theory of fractals and multifractals are used as a theoretical basis for mathematical formalization and quantitative analysis of various solid-state media. The study is devoted to further developing algorithmic approaches of the multifractal wavelet analysis and their application for assessing scaling characteristics of raster images of self-similar physical structures.

The wavelet transform modulus maxima (WTMM) method is one of the promising and widespread multifractal techniques based on wavelet transforms. The basic step of WTMM method is presented by constructing the wavelet transform skeleton, which is used for the calculation of partition functions and scaling characteristics. However, the traditional approach leads to the appearance of the so-called “artifacts” at the construction of lines of local extrema. The algorithms for filtering and marking lines of local maxima are proposed within the framework of WTMM. The filtering algorithm is aimed at eliminating “breaking” and “hanging” maxima when constructing continuous lines of local maxima and allows one to work with the correct representation of the wavelet transform skeleton. The marking algorithm uniquely identifies the maximum belonging to a particular line of local extrema and underlines calculating partition functions for negative values of the deformation parameter.

A system of computer analysis of raster images was designed in Matlab to perform a multifractal parameterization and visualize the main scaling characteristics. The results of the program application are demonstrated for the test problem of analysis of the fractal image artificially generated with use of brown noise. The developed software tools are applied to estimate the multifractal characteristics of digital images of materials obtained by scanning electron microscopy. The scanning electron microscope (SEM) images are formed line by line by electron beam moving with constant velocity. SEM-images are result of videosignal registration as a sample response under the electron probe action. Hence, one-dimensional WTMM method can be used for specification of complex images by means of analyzing video signal profile.

Ferroelectrics is a special class of polar dielectric materials possessing interesting fractal properties. Domain configurations of typical ferroelectrics are the result of self-organization and indicate self-similar behavior. Scaling characteristics are established for the domain structure image of a typical ferroelectric – triglycine sulfate (TGS). The findings suggest, that the SEM-image of a TGS crystal exhibits multifractal properties and is characterized by a spectrum of fractal dimensions, represented by a rather wide range. The analysis of the evolution of the singularities spectrum is carried out for a ferroelectric under temperature exposure. Our results show that the residual polarization contrast during annealing is characterized by a narrowing and a shift of the spectrum to lower values of the Hölder exponents in comparison with the initial structure. This result demonstrates that the alignment of the TGS “pseudo-domains” into elongated chains at annealing has a complex organization, even more “ordered” than the initial domain structure observed under equilibrium conditions.

In general, the apparatus of multifractal wavelet analysis provides a flexible technique for mathematical diagnostics of the degree of the self-similarity properties of domain configurations and the topographic structure of complex structured physical systems.

Keywords: raster images; wavelet transform modulus maxima method; filtering algorithm; marking algorithm; multifractal characteristics.

MASLOVSKAYA Anna Gennadiyevna (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Professor, Amur State University, Blagoveshchensk, Russian Federation).

E-mail: maslovskayaag@mail.ru

AFANASOV Leonid Sergeevich (Junior Researcher, Amur State University, Blagoveshchensk, Russian Federation).

E-mail: l.a.1996@mail.ru

REFERENCES

1. Falconer, K.J. (2014) *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. Chichester: Wiley.
2. Abry, P., Jaffard, S. & Wendt, H. (2015) Irregularities and scaling in signal and image processing: multifractal analysis. In: Frame, M. & Cohen, N. (eds) *Benoit Mandelbrot: A Life in Many Dimensions*. Singapore: World Scientific Publ. pp. 31–116.
3. Muzy, J.F., Barcy, E. & Arneodo, A. (1991) Wavelets and multifractal formalism for singular signals: Application to turbulence data. *Physical Review Letters*. 67. pp. 3515–3518. DOI: 10.1103/PhysRevLett.67.3515
4. Arneodo, A., Decoster, N., Kestener, P. & Roux, S. G. (2003) A wavelet-based method for multi- fractal image analysis: From theoretical concepts to experimental applications. *Advances in Imaging and Electron Physics*. 126. pp. 1–92. DOI: 10.1016/S1076-5670(03)80014-9
5. Gilyarov, V.L., Korsukov, V.E., Butenko, P.N. & Svetlov, V.N. (2004) Primenenie veyvlet-preobrazovaniya pri izuchenii izmeneniya fraktal'nykh svoystv poverkhnostey amorfnykh metallov pod vozdeystviem mekhanicheskoy nagruzki [Wavelet transform as a method for studying the fractal properties of the surface of amorphous metals under mechanical load]. *Fizika tverdogo tela – Physics of the Solid State*. 46(10). pp. 1868–1872.

6. Kestener, P. & Arneodo, A. (2004) Generalizing the wavelet-based multifractal formalism to random vector fields: Application to three-dimensional turbulence velocity and vorticity data. *Physical Review Letters*. 93. pp. 044501(5). DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.044501
7. Jagtap, J., Ghosh, S., Panigrahi, P.K. & Pradhan, A. (2012) Wavelet-based multifractal analysis of laser biopsy imagery. *Proc. SPIE 8222. Dynamics and Fluctuations in Biomedical Photonics IX*. pp. 82220F(9). DOI: 10.1117/12.907330
8. Jaffard, S., Lashermes, B. & Abry, P. (2006) Wavelet leaders in multifractal analysis. In: Qian T., Vai M. I. & Xu, Y. (eds) *Wavelet Analysis and Applications*. Basel, Switzerland: Birkhauser Verlag. pp. 219–264.
9. Leonarduzzi, R., Wendt, H., Abry, P., Jaffard, S. & Melot, C. (2017) Finite-Resolution Effects in p-Leader Multifractal Analysis. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 65(13). pp. 3359–3368. DOI: 10.1109/TSP.2017.2690391
10. Mitić, V.V., Paunović, V., Lazović, G., Kocić, L. & Fecht, H. (2018) Fractal dimension of fractals tensor product ferroelectric ceramic materials frontiers. *Ferroelectrics*. 535(1). pp. 114–119. DOI: 10.1080/00150193.2018.1474653
11. Uchino, K. (2017) *Advanced piezoelectric material. Science and technology*. Duxford: Elsevier, Woodhead.
12. Roy, M.K., Paul, J. & Dattagupta, S. (2010) Domain dynamics and fractal growth analysis in thin ferroelectric films. *IEEE Xplore*. 109. pp. 014108(4). DOI: 10.1063/1.3456505
13. Maslovskaya, A.G. & Barabash, T.K. (2017) Fractal parameterization analysis of ferroelectric domain structure evolution induced by electron beam irradiation. *Proc. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. 168. pp. 012028 (6).
14. Maslovskaya, A.G. & Barabash, T.K. (2012) Multifractal analysis of electron beam stimulated process of polarization reversal in ferroelectrics. *Physics Procedia*. 23. pp. 81–85. DOI: 10.1016/j.phpro.2012.01.021
15. Tadic, B. (2002) Switching current noise and relaxation of ferroelectric domains. *The European Physical Journal B*. 28. pp. 81–89. DOI: 10.1140/epjb/e2002-00203-1
16. Addison, P.S. (2016) *The illustrated wavelet transform handbook: Introductory theory and applications in science, engineering, medicine and finance*. New York: CRC Press.
17. Pavlov, A.N. & Anishchenko, V.S. (2007) Multifractal analysis of complex signals. *Physics-Uspokhi*. 50(8). pp. 819–834. DOI: 10.1070/PU2007v050n08ABEH006116
18. Puckovs, A. & Matvejevs, A. (2012) Wavelet transform modulus maxima approach for world stock index multifractal analysis. *Information Technology and Management Science*. 15. pp. 76–86. DOI: 10.2478/v10313-012-0016-5

УДК 519.876.5

DOI: 10.17223/19988605/53/7

А.В. Медведев, Д.И. Ярещенко

**НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ
МНОГОМЕРНЫМИ БЕЗЫНЕРЦИОННЫМИ ПРОЦЕССАМИ**

Рассматриваются задачи идентификации и управления многомерными безынерционными системами с запаздыванием в условиях непараметрической неопределенности, т.е. в условиях, когда вид параметрических уравнений по различным каналам объекта отсутствует из-за недостатка априорной информации.

Ключевые слова: непараметрическое моделирование; управление; безынерционные системы; Т-процессы; Т-модели; цепочка алгоритмов.

Идентификация и управление многомерными безынерционными процессами (объектами) с запаздыванием продолжают оставаться довольно актуальными проблемами в настоящее время. При этом следует учитывать, что по различным каналам многомерного объекта процессы чаще всего могут быть и динамическими, но контроль переменных осуществляется через дискретные интервалы времени. В качестве примера можно привести самые различные технологические, производственные и активные процессы, в частности в стройиндустрии при сухом измельчении клинкера (клинкер – это продукт обжига), который в последующем подлежит измельчению, а измельчение приводит к получению цемента. Основным параметром, определяющим его качество, является активность цемента, т.е. его прочность при сжатии. Но важными технологическими показателями являются также тонкость помола, удельная поверхность, распыл конуса и др. Их измерение осуществляется через несколько часов: два, три и более, в то время как постоянная времени по различным каналам многомерного объекта составляет 3–5 мин, следовательно, переходный процесс длится в течение 20–25 мин. Это обстоятельство приводит к тому, что мы вынуждены рассматривать те или иные каналы как статические с запаздыванием, а также к зависимости выходных переменных; в частности, активность цемента зависит от тонкости помола и др. В этом случае объект описывается в виде некоторых неявных функций. Таким образом, можно сделать вывод, что многомерный объект в общем виде описывается в виде системы неявных функций. Особенностью настоящей задачи, о которой пойдет речь в статье, является то, что вид такой системы функций априори оказывается неизвестным. Тем не менее исследователь стоит перед необходимостью решить эту систему функций относительно компонент выходных переменных $x(t)$ объекта при известных входных $u(t)$. Подобные многомерные процессы были названы Т-процессами, а объекты, соответственно, Т-объектами [1].

В данной работе рассматривается задача идентификации и управления в условиях непараметрической неопределенности, т.е. в условиях, когда различные каналы многомерного объекта не могут быть представлены в виде уравнений с точностью до вектора параметров [2]. Классическая теория идентификации и управления предполагает описание объекта с точностью до параметров, т.е. является в большинстве случаев параметрической. Это приводит к еще одной важной особенности при идентификации подобных систем, а именно процедура получения прогноза значений компонент выходных переменных при известных входных представляет собой не отдельно взятый алгоритм, а цепочку алгоритмов, которые позволяют решать подобную задачу.

Проведенные вычислительные эксперименты по идентификации и управлению Т-процессами показали достаточно высокую эффективность. В статье приведены некоторые фрагменты численных исследований. При этом рассматривались варианты с различной размерностью объектов, уровнем помех, объемом обучающих выборок и др.

1. Т-процессы

Т-процесс – это многомерный дискретно-непрерывный процесс, имеющий стохастическую зависимость выходных переменных $\bar{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, $j = \overline{1, n}$ [1]. Обозначим вектор входных компонент – $\bar{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$, $k = \overline{1, m}$. Это приводит к тому, что математическое описание объекта представляется в виде некоторой системы неявных функций вида $F_j(\bar{u}(t), \bar{x}(t)) = 0$, $j = \overline{1, n}$. Задача идентификации сводится к задаче решения системы нелинейных уравнений

$$F_j(\bar{u}(t), \bar{x}(t)) = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (1)$$

относительно компонент вектора $\bar{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, при известных значениях $\bar{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$. В общем виде исследуемая многомерная система, реализующая Т-процесс, может быть представлена следующим образом (рис. 1).

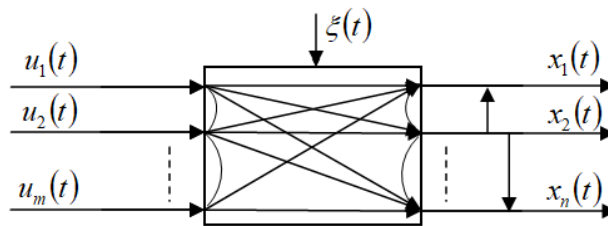


Рис. 1. Многомерный объект
Fig. 1. Multidimensional object

На рис. 1 приняты следующие обозначения: $\bar{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$ – m -мерный вектор входных переменных; $\bar{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ – n -мерный вектор выходных переменных, который напоминает мультиколлинеарный вектор с той лишь разницей, что компоненты вектора $x(t)$ могут зависеть и нелинейно; $\xi(t)$ – случайные помехи, действующие на объект; вертикальные стрелки показывают стохастическую зависимость выходных переменных. По различным каналам исследуемого объекта зависимость j -й компоненты вектора x может быть представлена в виде некоторой зависимости от тех или иных компонент вектора u : $x^{<j>} = f_j(u^{<j>})$, $j = \overline{1, n}$. Каждый j -й канал зависит от нескольких компонент вектора u , например $x^{<5>} = (u_1, u_3, u_6)$, где $x^{<5>}$ – составной вектор. Составной вектор – это вектор, составленный из компонент векторов входных и выходных переменных [3]. В этом случае система уравнений (1) примет вид:

$$F_j(\bar{u}^{<j>}(t), \bar{x}^{<j>}(t)) = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где $\bar{u}^{<j>}(t)$, $\bar{x}^{<j>}(t)$ – составные векторы. В общем виде зависимость той или иной компоненты вектора выхода может быть от всех компонент вектора входа. Одним словом, составные векторы выписываются исследователем на основании имеющейся априорной информации.

Заметим, что вид уравнений $F_j(\cdot)$, $j = \overline{1, n}$ продолжает оставаться неизвестным и не может интерпретироваться как модель исследуемого процесса. Задача состоит в моделировании подобных процессов, т.е. Т-процессов.

2. Т-модели

Описание процесса, показанного на рис. 1, может быть принято в виде (2). При этом особенностью моделирования подобного процесса в условиях непараметрической неопределенности является

тот факт, что вид функций (2) неизвестен. Система моделей исследуемого процесса может быть представлена в следующем виде:

$$\hat{F}_j(\bar{u}^{<j>}(t), \bar{x}^{<j>}(t), \bar{x}_s, \bar{u}_s) = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3)$$

где \bar{x}_s, \bar{u}_s – временные векторы (набор данных, поступивший к s -му моменту времени), но и в этом случае $\hat{F}_j(\cdot)$, $j = \overline{1, n}$ продолжают оставаться неизвестными. В теории идентификации подобные задачи не только не рассматриваются, но и не ставятся. Обычно идут по пути выбора параметрической структуры (2), но, к сожалению, преодоление этого этапа затруднено из-за недостатка априорной информации. И требуется длительное время для определения параметрической структуры, т.е. представления модели в виде:

$$F_j(\bar{u}^{<j>}(t), \bar{x}^{<j>}(t), \alpha) = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (4)$$

где α – вектор параметров. Далее следуют процедура оценки параметров по элементам обучающей выборки u_i, x_i , $i = \overline{1, s}$, и последующее решение системы нелинейных взаимосвязанных соотношений (4). Успех построения модели в данном случае будет зависеть от качественной параметризации системы (4).

Рассмотрим задачу построения Т-моделей в условиях непараметрической неопределенности, т.е. в условиях, когда система (4) неизвестна с точностью до параметров. Таким образом, задача моделирования Т-процессов сводится к прогнозу значений выходных переменных $\bar{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ при известных входных $\bar{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$.

В результате измерений, проводимых на объекте, формируется обучающая выборка x_i, u_i , $i = \overline{1, s}$. В этом случае оценка компонент вектора выходных переменных $\bar{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ при известных значениях входных $\bar{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$, как уже было отмечено выше, приводит к необходимости решать систему уравнений (3).

В итоге задача идентификации сводится к тому, что при заданном значении вектора входных переменных $u = u'$, необходимо решить систему (3) относительно вектора выходных переменных $\bar{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$.

По этому поводу следует сделать некоторые специальные замечания, которые и будут содержать сущность отличия проблематики идентификации Т-процессов от общепринятой схемы идентификации [3, 4]. Она состоит в том, что алгоритм идентификации не может быть представлен так, как обычно он принят в теории идентификации:

$$x(t) = F(u(t), \alpha) \quad (5)$$

где α – вектор параметров модели объекта. В случае, если α как-то оценен, формула (5) является моделью исследуемого объекта. При наличии описания (3) этот путь оказывается неприемлемым. Но возможно выстроить цепочку алгоритмов, которые в своей взаимосвязи и будут представлять модель Т-процесса. Таким образом, обычная в теории идентификации формула (5) подменяется взаимосвязанной цепочкой некоторой последовательности алгоритмических соотношений, которые рассматриваются ниже. Общая схема решения такой системы сводится к следующему. Сначала вычисляются невязки по формуле

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_j(\bar{u}^{<j>}(i), \bar{x}^{<j>}(i), \bar{x}_s, \bar{u}_s), \quad j = \overline{1, n}, \quad (6)$$

где $\varepsilon_j(\bar{u}^{<j>}(i), \bar{x}^{<j>}(i), \bar{x}_s, \bar{u}_s)$ находятся с использованием непараметрической оценки функции регрессии Надарая–Ватсона [5]:

$$\varepsilon_j(i) = \varphi_{\varepsilon_j}(\bar{u}^{<j>}, x_j(i)) = x_j(i) - \frac{\sum_{i=1}^s x_j[i] \prod_{k=1}^{<m>} \Phi\left(\frac{u'_k - u_k[i]}{c_{su_k}}\right)}{\sum_{i=1}^s \prod_{k=1}^{<m>} \Phi\left(\frac{u'_k - u_k[i]}{c_{su_k}}\right)}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (7)$$

где $\langle m \rangle$ – размерность составного вектора \bar{u}_k , $\langle m \rangle \leq m$, в дальнейшем это обозначение используется и для других переменных.

Колоколообразные функции $\Phi\left(\frac{u'_k - u_k[i]}{c_{su_k}}\right)$ и параметр размытости c_{su_k} удовлетворяют следующим условиям [5]:

$$\Phi(\cdot) < \infty; \quad (8)$$

$$\int_{\Omega(u)} \Phi\left(c_s^{-1}(u_k - u_{ki})\right) du = 1; \quad (9)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} c_s^{-1} \Phi\left(c_s^{-1}(u_k - u_{ki})\right) = \delta(u_k - u_{ki}); \quad (10)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} c_s = 0; \quad (11)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s c_s^m = \infty. \quad (12)$$

Следующий шаг состоит в оценивании условного математического ожидания:

$$x_j = M\{x_j | u^{<j>}, \varepsilon = 0\}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (13)$$

В качестве оценки (13) примем непараметрическую оценку регрессии [Там же]:

$$\hat{x}_j = \frac{\sum_{i=1}^s x_j[i] \cdot \prod_{k_1=1}^{\langle m \rangle} \Phi\left(\frac{u_{k_1} - u_{k_1}[i]}{c_{su}}\right) \prod_{k_2=1}^{\langle n \rangle} \Phi\left(\frac{\varepsilon_{k_2}[i]}{c_{s\varepsilon}}\right)}{\sum_{i=1}^s \prod_{k_1=1}^{\langle m \rangle} \Phi\left(\frac{u_{k_1} - u_{k_1}[i]}{c_{su}}\right) \prod_{k_2=1}^{\langle n \rangle} \Phi\left(\frac{\varepsilon_{k_2}[i]}{c_{s\varepsilon}}\right)}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (14)$$

где колоколообразные функции $\Phi(\cdot)$ примем в виде треугольного ядра:

$$\Phi\left(\frac{u_{k_1} - u_{k_1}[i]}{c_{su}}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{|u_{k_1} - u_{k_1}[i]|}{c_{su}}, & \frac{|u_{k_1} - u_{k_1}[i]|}{c_{su}} < 1, \\ 0, & \frac{|u_{k_1} - u_{k_1}[i]|}{c_{su}} \geq 1. \end{cases}, \quad (15)$$

и

$$\Phi\left(\frac{\varepsilon_{k_2}[i]}{c_{s\varepsilon}}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{|0 - \varepsilon_{k_2}[i]|}{c_{s\varepsilon}}, & \frac{|0 - \varepsilon_{k_2}[i]|}{c_{s\varepsilon}} < 1, \\ 0, & \frac{|0 - \varepsilon_{k_2}[i]|}{c_{s\varepsilon}} \geq 1. \end{cases} \quad (16)$$

Осуществляя эту процедуру, получаем значения выходных переменных x при входных воздействиях на объект $u = u'$, а в этом и состоит основное назначение искомой модели, которая в дальнейшем может быть использована в различных системах управления [6], в том числе в организационных [7, 8].

Точность моделирования оценивается по следующей формуле:

$$\delta_j = \frac{\sum_{i=1}^s |x_i - x_s(u_i)|}{\sum_{i=1}^s |x_i - \hat{x}|}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (17)$$

где x_i – наблюдения на объекте, $x_s(u_i)$ – прогноз выхода объекта, \hat{x} – среднее значение по каждой компоненте вектора x .

Поясним механизм работы предложенной цепочки (7) и (14), составляющей алгоритм работы идентификации. Учитывая локальные свойства непараметрических оценок функции регрессии, можно увидеть и проанализировать технологию функционирования цепочки (7) и (14), которая и дает прогноз каждой компоненты вектора выхода x при известных значениях вектора входа u . Действительно, если значения вектора входных переменных u известны, то они (7), (14) тем самым локализируют некоторую подобласть в пространстве входных-выходных переменных (\bar{x}, \bar{u}) . Далее, при оценивании (прогнозе) каждой компоненты вектора x в соответствии с (14), в силу локальности непараметрических оценок, выделяется та подобласть, для которых соответствующие ε_{ij} близки к нулю. При других значениях входных переменных u подобная ситуация повторяется.

3. Управление дискретно-непрерывным процессом

Рассмотрим задачу управления многомерным Т-объектом в условиях непараметрической неопределенности. При этом приведем следующую схему (рис. 2).

На рис. 2 введены следующие обозначения: $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$ – входные управляемые переменные процесса; $\mu(t) = (\mu_1(t), \mu_2(t), \dots, \mu_p(t))$ – входные неуправляемые, но контролируемые переменные процесса; $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ – выходные переменные процесса; $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in \Omega(x^*) \subset R^n$ – задающее воздействие, $\xi(t)$ – случайные стационарные помехи, действующие на объект.

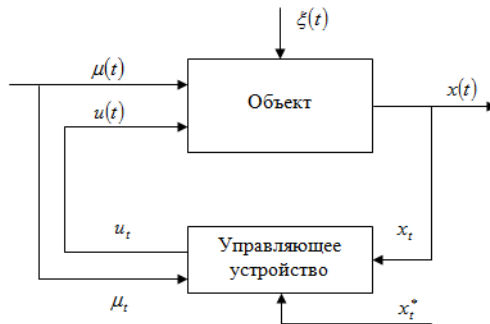


Рис. 2. Схема непараметрической системы управления безынерционным объектом
 Fig. 2. Diagram of a nonparametric control system of an inertialess object

Переменная $\mu(t)$ является входной контролируемой, но неуправляемой переменной, в частности это могут быть технологические параметры, для измерения которых используется физико-химическая технология. Например, клинкер может быть недообожженным или переобожженным. Такая переменная существенно влияет на объект и на значения выходных переменных $x(t)$. Поэтому задача управления таким объектом усложняется, так как необходимо поддерживать на выходе объекта заданное значение $x^*(t)$ при известном значении $\mu(t)$.

Управление дискретно-непрерывным процессом рассматривается в условиях непараметрической неопределенности, т.е. в условиях, когда модель процесса с точностью до вектора параметров отсутствует полностью. В этом случае известные приемы неприменимы [4], и следует использовать другие подходы для решения задачи [9].

В случае отсутствия достаточной априорной информации об исследуемом объекте целесообразно использовать непараметрический алгоритм управления изложенный в [1]:

$$u_s^k = \frac{\sum_{i=1}^s u_i^k \prod_{j=1}^n \Phi\left(\frac{x_j^* - x_j^i}{c_x}\right) \prod_{v=1}^p \Phi\left(\frac{\mu_v^* - \mu_v^i}{c_\mu}\right)}{\sum_{i=1}^s \prod_{l=1}^n \Phi\left(\frac{x_j^* - x_j^i}{c_x}\right) \prod_{v=1}^p \Phi\left(\frac{\mu_v^* - \mu_v^i}{c_\mu}\right)}, \quad k = \overline{1, m}, \quad (18)$$

где $(u^i, \mu^i, x^i, i = \overline{1, s})$ – обучающая выборка.

Однако в данной задаче естественно использовать следующую цепочку: входную переменную $u_1(t)$ берем произвольно из области $\Omega(u)$. Входная переменная $u_2(t)$ может быть определена в соответствии со следующим алгоритмом:

$$u_2 = \frac{\sum_{i=1}^s u_i^2 \Phi\left(\frac{u_1 - u_1^i}{c_{u_1}}\right) \prod_{j=1}^n \Phi\left(\frac{x_j^* - x_j^i}{c_{x_j}}\right) \prod_{v=1}^p \Phi\left(\frac{\mu_v^* - \mu_v^i}{c_{\mu_v}}\right)}{\sum_{i=1}^s \Phi\left(\frac{u_1 - u_1^i}{c_{u_1}}\right) \prod_{j=1}^n \Phi\left(\frac{x_j^* - x_j^i}{c_{x_j}}\right) \prod_{v=1}^p \Phi\left(\frac{\mu_v^* - \mu_v^i}{c_{\mu_v}}\right)}. \quad (19)$$

Для входной переменной $u_3(t)$ алгоритм управления будет выглядеть следующим образом:

$$u_3 = \frac{\sum_{i=1}^s u_i^3 \Phi\left(\frac{u_1 - u_1^i}{c_{u_1}}\right) \Phi\left(\frac{u_2 - u_2^i}{c_{u_2}}\right) \prod_{j=1}^n \Phi\left(\frac{x_j^* - x_j^i}{c_{x_j}}\right) \prod_{v=1}^p \Phi\left(\frac{\mu_v^* - \mu_v^i}{c_{\mu_v}}\right)}{\sum_{i=1}^s \Phi\left(\frac{u_1 - u_1^i}{c_{u_1}}\right) \Phi\left(\frac{u_2 - u_2^i}{c_{u_2}}\right) \prod_{j=1}^n \Phi\left(\frac{x_j^* - x_j^i}{c_{x_j}}\right) \prod_{v=1}^p \Phi\left(\frac{\mu_v^* - \mu_v^i}{c_{\mu_v}}\right)}. \quad (20)$$

И так далее для каждой компоненты входа $u_m(t)$ объекта. В общем виде для многомерной системы алгоритм управления будет выглядеть следующим образом:

$$u_s^k = \frac{\sum_{i=1}^s u_i^k \prod_{k=1}^{k-1} \Phi\left(\frac{u_k - u_k^i}{c_{u_k}}\right) \prod_{j=1}^n \Phi\left(\frac{x_j^* - x_j^i}{c_{x_j}}\right) \prod_{v=1}^p \Phi\left(\frac{\mu_v^* - \mu_v^i}{c_{\mu_v}}\right)}{\sum_{i=1}^s \prod_{k=1}^{k-1} \Phi\left(\frac{u_k - u_k^i}{c_{u_k}}\right) \prod_{j=1}^n \Phi\left(\frac{x_j^* - x_j^i}{c_{x_j}}\right) \prod_{v=1}^p \Phi\left(\frac{\mu_v^* - \mu_v^i}{c_{\mu_v}}\right)}, \quad k = \overline{1, m}. \quad (21)$$

В реальных задачах часто число компонент вектора u больше числа компонент вектора x . Если же размерность вектора u превышает размерность вектора x , т.е. $m > n$, то обычно поступают следующим образом: в число компонент вектора $\bar{\mu}$ включают компоненты вектора u , с тем чтобы размерность векторов u и x сделать одинаковой [10].

Настраиваемыми параметрами будут параметры размытости c_{u_k} , c_{x_j} и c_{μ_v} , для них будем использовать следующие формулы: $c_{u_k} = \alpha |u_k - u_k^i|$, $c_{x_j} = \beta |x_j^* - x_j^i|$ и $c_{\mu_v} = \gamma |\mu_v^* - \mu_v^i|$, где α , β и γ – некоторые параметры, большие 1: $\alpha > 1$, $\beta > 1$, $\gamma > 1$. Следует заметить, что выбор c_{u_k} , c_{x_j} и c_{μ_v} осуществляется на каждом такте управления. При этом если сначала определен c_{u_k} , то определение c_{x_j} и c_{μ_v} осуществляется с учетом этого факта. Однако может быть и наоборот, например сначала определяется c_{x_j} или c_{μ_v} , а потом остальные.

4. Экспериментальная часть

Для проведения вычислительного эксперимента был взят объект с пятью входными переменными $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t), u_5(t))$, принимающими случайные значения в интервале $u(t) \in [0, 3]$, и тремя выходными переменными $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, принимающими значения в интервалах: $x_1(t) \in [-2; 15]$, $x_2(t) \in [1; 10]$, $x_3(t) \in [6; 23]$. Для данного объекта была сформирована выборка входных и выходных переменных и найдены прогнозные значения выходных переменных при известных входных. Для вычисления использовались объем выборки $s = 2\,000$, параметр размытости $c_s = 0,3$, помеха, действующая на компоненты вектора выходных переменных, $\xi = 0,07$. Описание объекта

с точностью до параметров было принято только для проведения компьютерного исследования и оставалось неизвестным для изложенной выше теории.

На рис. 3 и 4 по оси абсцисс представлены такты t , по оси ординат – значения выхода объекта и модели. На рисунках представлены 20 точек выборки из-за простоты представления результатов, т.е. каждая сотая точка выборки. «Точкой» обозначены значения выхода объекта, а «крестиком» – значения выхода модели. Как видно из рисю 3 и 4, прогноз значений выходных переменных многомерного объекта по известным входным переменным достаточно удовлетворителен.

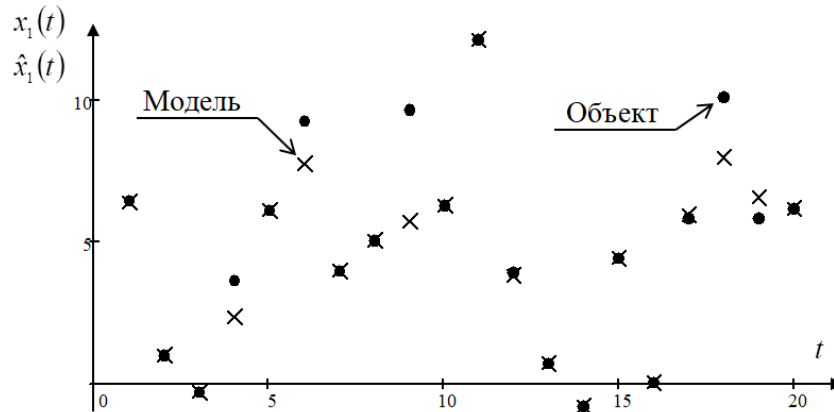


Рис. 3. Прогноз выходной переменной $x_1(t)$ объекта, измеренный с равномерной помехой 7%
 Fig. 3. Forecast by the output variable $x_1(t)$ of the object, measured with uniform interference of 7%

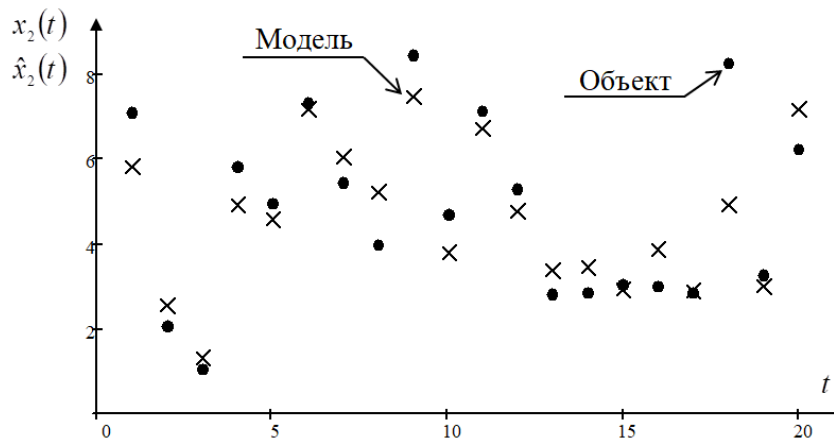


Рис. 4. Прогноз выходной переменной $x_2(t)$ объекта, измеренный с равномерной помехой 7%
 Fig. 4. Forecast by the output variable $x_2(t)$ of the object, measured with uniform interference of 7%

Далее приводятся результаты вычислительных экспериментов для данного объекта при использовании алгоритма управления (21). В проведенном вычислительном эксперименте число компонент вектора \mathbf{u} больше числа компонент вектора \mathbf{x} . Если же размерность вектора \mathbf{u} превышает размерность вектора \mathbf{x} , т.е. $m > n$, то заменим $u_4(t) = \mu_1(t)$, а $u_5(t) = \mu_2(t)$, чтобы размерность векторов \mathbf{u} и \mathbf{x} сделать одинаковой. Так как входные переменные $u(t)$ принимали случайные значения в интервале $u(t) \in [0, 3]$, то $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ также принимают случайные значения в заданном интервале.

Обратим еще раз внимание на то, что исследователю неизвестен вид системы уравнений, описывающих управляемый объект. В качестве информации о последнем используются измерения входных и выходных переменных $(u^i, \mu^i, x^i, i = \overline{1, s})$.

Как видно из рис. 5, при управлении объектом выход объекта $x_1(t)$ близок к задающему воздействию $x_1^*(t)$.

Далее в качестве задающего воздействия $x_2^*(t)$ будем принимать случайные воздействия в интервале выходной переменной $x_2(t) \in [1; 10]$.

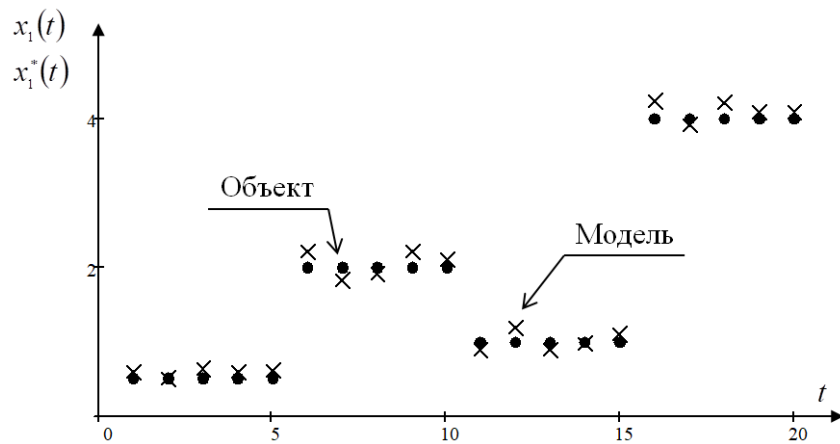


Рис. 5. Управление при задающем воздействии $x_1^*(t)$ в виде ступенчатой функции

Fig. 5. Control under the setting action $x_1^*(t)$ in the form of a step function

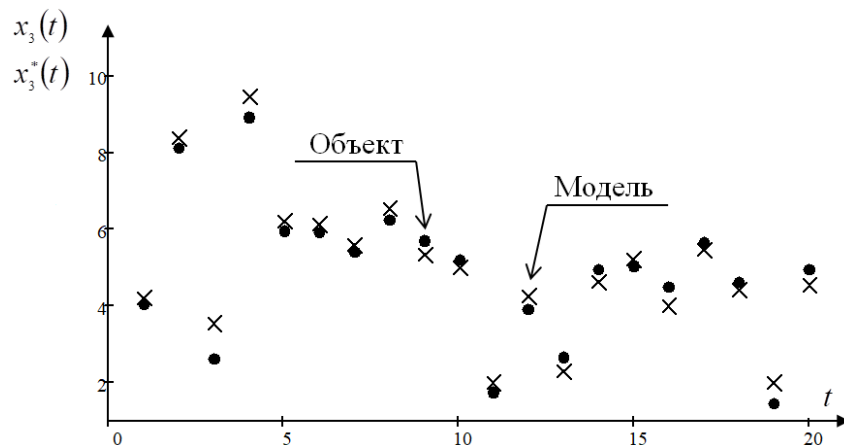


Рис. 6. Зависимость выхода объекта $x_2(t)$ от задающего воздействия $x_2^*(t)$, носящего случайный характер

Fig. 6. The dependence of the output of the object $x_2(t)$ on the driving influence $x_2^*(t)$, which is random

Из рис. 6 можно увидеть, что выход объекта $x_2(t)$ также близок к задающему воздействию $x_2^*(t)$.

Заключение

В настоящей статье рассмотрена задача идентификации и управления многомерным дискретно-непрерывным объектом в условиях непараметрической неопределенности. Основной идеей, изложенной выше, является и при идентификации, и при управлении введение соответствующих цепочек алгоритмов.

Приведенные фрагменты вычислительных экспериментов показали достаточно хорошие результаты предлагаемых цепочек идентификации и управления многомерной системы. При статистическом моделировании алгоритмов идентификации и управления исследовалось влияние на объект различных случайных факторов при различных объемах обучающей выборки, различных способах и приемах оценивания коэффициентов размытости. Сравнительно произвольно изменялись также и многомерные объекты, положенные в основу статистического моделирования. В итоге можно ска-

зять, что полученные результаты численных исследований оказались достаточно удовлетворительными для многомерных объектов в условиях непараметрической неопределенности, хотя они значительно отличались в зависимости от изменения вида объекта, помех и обучающих выборок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Медведев А.В. Основы теории непараметрических систем / Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. Красноярск, 2018. 727 с.
2. Михов Е.Д. Определение наиболее существенных переменных в задачах моделирования и управления безынерционными стохастическими процессами // Системы автоматизации в образовании, науке и производстве AS'2017 : тр. конф. Новокузнецк, 2017. С. 424–429.
3. Цыпкин Я.З. Основы информационной теории идентификации. М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. 320 с.
4. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления // пер. с англ. В.А. Лотоцкого, А.С. Манделя. М. : Мир, 1975. 680 с.
5. Надарая Э.А. Непараметрическое оценивание плотности вероятностей и кривой регрессии. Тбилиси : Изд-во Тбилисского ун-та, 1983. 194 с.
6. Антомонов Ю.Г., Харламов В.И. Кибернетика и жизнь. М. : Сов. Россия, 1968. 327 с.
7. Медведев А.В., Ярещенко Д.И. О моделировании процесса приобретения знаний студентами в университете // Высшее образование сегодня. 2017. Вып. 1. С. 7–10.
8. Агафонов Е.Д., Медведев А.В., Орловская Н.Ф., Синюта В.Р., Ярещенко Д.И. Прогнозная модель процесса каталитической гидродепарафинизации в условиях недостатка априорных сведений // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2018. № 9. С. 456–468.
9. Банникова А.В., Корнеева А.А., Корнет М.Е. О непараметрическом дуальном управлении многомерным объектом с запаздыванием // Идентификация систем и задачи управления : тр. X Междунар. конф. М., 2015. С. 191–200.
10. Фельдбаум А.А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963. 553 с.

Поступила в редакцию 17 февраля 2020 г.

Medvedev A.V., Yareschenko D.I. (2020) NONPARAMETRIC IDENTIFICATION AND CONTROL ALGORITHMS FOR MULTIDIMENSIONAL INERTIALESS PROCESSES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science] 53. pp. 72–81

DOI: 10.17223/19988605/53/7

The work is devoted to the problems of nonparametric identification and control of multidimensional discrete-continuous processes. Discrete-continuous processes occur continuously in space, but their variables are monitored at discrete time instants. Such processes are considered as inertialess with delay. This is explained by the fact that, through various channels of a multidimensional system, the measurement of output variables is carried out at different time intervals. Examples of such processes can be the processes of the mining or processing industries, in particular, in the construction industry (cement production process), metallurgy (steel smelting process), oil refining (diesel hydrotreatment process) and many others

If the output variables of a multidimensional object are somehow stochastically dependent, and this dependence is unknown, then such processes were called T-processes. Such processes require a special look at the identification problem, which is somewhat different from the generally accepted ones. The main thing here is that the identification of such objects should be carried out in a way that is not traditional for the existing theory of identification.

This emphasizes the importance of the identification problem for many real-life processes of discrete-continuous nature. A feature of such processes is that the vector of output variables $\bar{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, $j = \overline{1, n}$, consisting of n components, is such that the components of this vector are stochastically dependent in an unknown manner. Denote the vector of input components by $\bar{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$, $k = \overline{1, m}$. Such a formulation of the question leads to the fact that the mathematical description of the object can be represented in the form of some system of implicit functions of the form $F_j(\bar{u}(t), \bar{x}(t)) = 0$, $j = \overline{1, n}$. The main feature of this modeling problem is that the class of dependencies $F(\cdot)$ is a priori unknown, due to a lack of a priori information. That is, there is no parametric class of vector functions $F_j(\bar{u}(t), \bar{x}(t), \alpha)$, $j = \overline{1, n}$, where α is a vector of parameters, which does not allow the use of parametric identification methods, because the class of functions cannot be determined a priori and the known identification methods are not suitable. As a result of the above, the identification problem is reduced to the problem of solving a system of nonlinear equations $F_j(\bar{u}(t), \bar{x}(t), \alpha)$, $j = \overline{1, n}$ with respect to the components of the vector $\bar{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, for known values of $\bar{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$. A situation arises when it is necessary to solve a system of interrelated equations, but this system is not defined. In this case, it is possible to use a sequential chain of algorithms to find the values of the components of the vector of output variables $\bar{x}(t)$ from the known input $\bar{u}(t)$.

The task of controlling a discrete-continuous process is considered under conditions of nonparametric uncertainty, that is, when the object in question is not described up to the parameter vector α . In this case, it is advisable to use a chain of control algorithms to search for the corresponding control action $u(t)$ at each step. If the dimension of the input vector $\bar{u}(t)$ exceeds the dimension of the output vector $\bar{x}(t)$, then some of the components of the input variables $\bar{u}(t)$ can be interpreted as uncontrolled, but controlled. This often corresponds to actual technological processes.

We have carried out numerous computational experiments on the identification and control of T-processes, which have shown a fairly high efficiency. The article presents some fragments of numerical studies. In this case, options were considered with different dimensionalities of objects, the level of interference, the volume of training samples, and others.

Keywords: nonparametric modeling; control; inertialess systems; T-processes; T-models; algorithm chain.

MEDVEDEV Alexander Vasilevich (Doctor of Technical Sciences, Professor, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation).

E-mail: mav2745@mail.ru

YARESHCHENKO Darya Igorevna (Senior Lecturer, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation).

E-mail: yareshchenkodi@yandex.ru

REFERENCES

1. Medvedev, A.V. (2018) *Osnovy teorii neparametricheskikh sistem* [Fundamentals of the theory of nonparametric systems]. Krasnoyarsk: Siberian State Aerospace University.
2. Mikhov, E.D. (2017) [Determination of the most significant variables in the problems of modeling and control of inertialess stochastic processes]. *Sistemy avtomatizatsii v obrazovanii, nauke i proizvodstve AS'2017* [Automation systems in education, science and production]. Proc. of the Conference. pp. 424–429. Novokuznetsk: [s.n.]. pp. 424–429.
3. Tsyppin, Ya.Z. (1984) *Osnovy informatsionnoy teorii identifikatsii* [Fundamentals of Information Theory of Identification]. Moscow: Nauka.
4. Eykhhoff, P. (1975) *Osnovy identifikatsii sistem upravleniya* [Fundamentals of Identification Management Systems]. Translated from English by V.A. Lototsky, A.S. Mandel. Moscow: Mir.
5. Nadaraya, E.A. (1983) *Neparametricheskoe otsenivanie plotnosti veroyatnostey i krivoy regressii* [Nonparametric estimation of probability density and regression curve]. Tbilisi: Tbilisi University Press.
6. Antomonov, Yu.G. & Kharlamov, V.I. (1968) *Kibernetika i zhizn'* [Cybernetics and Life]. Moscow: Sovetskaya Rossiya.
7. Medvedev, A.V. & Yareshchenko, D.I. (2017) O modelirovanii protsessa priobreteniya znaniy studentami v universitete [On modeling the process of acquiring knowledge by students at a university]. *Vysshee obrazovanie segodnya*. 1. pp. 7–10.
8. Agafonov, E.D., Medvedev, A.V., Orlovskaya, N.F., Sinyuta, V.R. & Yareshchenko, D.I. (2018) Prognoznaya model' protsessa kataliticheskoy gidrodeparafinizatsii v usloviyakh nedostatka apriornykh svedeniy [Predictive model of the process of catalytic hydrodewaxing in the absence of a priori information]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki – Izvestiya Tula State University. Technical Sciences*. 9. pp. 456–468.
9. Bannikova, A.V., Korneeva, A.A. & Kornet, M.E. (2015) [On nonparametric dual control of a multidimensional object with delay]. *Identifikatsiya sistem i zadachi upravleniya* [System Identification and Management Tasks]. Proc. of the Conference. Moscow. pp. 191–200.
10. Feldbaum, A.A. (1963) *Osnovy teorii optimal'nykh avtomaticheskikh sistem* [Fundamentals of the theory of optimal automatic systems]. Moscow: Gos. izd.-vo fiz.-mat. lit.

УДК 519.21

DOI: 10.17223/19988605/53/8

Л.А. Нежелская, Д.А. Тумашкина

**ОЦЕНКА ДЛИТЕЛЬНОСТИ НЕПРОДЛЕВАЮЩЕГОСЯ МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ
В РЕКУРРЕНТНОМ ПОЛУСИНХРОННОМ ПОТОКЕ СОБЫТИЙ
ВТОРОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ МОМЕНТОВ**

Изучается рекуррентный полусинхронный поток событий второго порядка, функционирующий в условиях наличия мертвого времени фиксированной длительности; решается задача оценивания длительности непродлевающегося мертвого времени для исследуемого потока методом моментов; находятся вероятностные характеристики потока. Для установления качества оценивания неизвестного параметра (длительности мертвого времени) приводятся результаты статистических экспериментов, реализованных на имитационной модели потока.

Ключевые слова: дважды стохастический поток событий; условия рекуррентности, рекуррентный полусинхронный поток событий второго порядка; непродлевающееся мертвое время; оценка длительности мертвого времени, метод моментов.

В настоящей работе рассматривается полусинхронный дважды стохастический поток событий второго порядка. Дважды стохастические потоки [1–9], в свою очередь, являются адекватными математическими моделями информационных потоков запросов, функционирующих в телекоммуникационных сетях. Модели дважды стохастических потоков можно классифицировать в зависимости от того, каким образом происходит смена их состояний: синхронные потоки [10]; асинхронные [11]; полусинхронные потоки [12]. Более того, в литературе выделяют два класса дважды стохастических потоков в зависимости от интенсивности потока: 1) интенсивность является непрерывным случайным процессом [4, 5]; 2) интенсивность является кусочно-постоянным случайным процессом [1–3].

Множество состояний вышеприведенных потоков конечно и дискретно. В данной работе число состояний потока полагается равным двум.

Поскольку в реальности любому регистрирующему устройству необходимо некоторое время на регистрацию заявки (сообщения), в течение которого устройство не способно регистрировать другие заявки, большую актуальность в настоящее время имеют модели потоков, функционирующих в условиях так называемого мертвого времени. Мертвое время [13, 14] является периодом ненаблюдаемости, вызванным наступлением события, в течение которого другие наступившие события потока недоступны для наблюдения. В этой связи возникает вопрос об оценке среднего числа потерянных событий в единицу времени, который сводится к задаче оценивания длительности мертвого времени. Наступившие в период ненаблюдаемости события могут продлевать или не вызывать продления длительности мертвого времени, поэтому различают модели с продлевающимся и непродлевающимся мертвым временем. В работах [15–19] рассматриваются подобные задачи для различных моделей дважды стохастических потоков событий.

В данном исследовании, которое является непосредственным развитием [20, 21], методом моментов решается задача оценивания длительности непродлевающегося мертвого времени в рекуррентном полусинхронном потоке событий второго порядка, проводятся статистические эксперименты.

1. Постановка задачи

Рассматривается стационарный режим функционирования полусинхронного потока событий второго порядка (поток), сопровождающий случайный процесс которого $\lambda(t)$ – кусочно-постоянный с двумя состояниями S_1 и S_2 .

Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_1 определяется случайной величиной $\eta = \min(\xi^{(1)}, \xi^{(2)})$, где $\xi^{(1)}$ имеет функцию распределения $F_1^{(1)}(t) = 1 - e^{-\lambda_1 t}$, $t \geq 0$; $\xi^{(2)}$ – функцию распределения $F_1^{(2)}(t) = 1 - e^{-\alpha_1 t}$, $t \geq 0$; $\xi^{(1)}$ и $\xi^{(2)}$ – независимые случайные величины. В момент наступления события потока в зависимости от того, какая из случайных величин $\xi^{(i)}$, $i = 1, 2$, приняла минимальное значение, процесс $\lambda(t)$ переходит из состояния S_1 в S_2 с вероятностью $P_1^{(i)}(\lambda_2 | \lambda_1)$, либо $\lambda(t)$ остается в состоянии S_1 с вероятностью $P_1^{(i)}(\lambda_1 | \lambda_1)$, $i = 1, 2$. Здесь $P_1^{(i)}(\lambda_2 | \lambda_1) + P_1^{(i)}(\lambda_1 | \lambda_1) = 1$, $i = 1, 2$. Длительность интервала между событиями потока в состоянии S_1 является случайной величиной с функцией распределения $F_1(t) = 1 - e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)t}$, $t \geq 0$.

Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_2 является случайной величиной с функцией распределения $F_2(t) = 1 - e^{-\alpha_2 t}$, $t \geq 0$. В течение времени пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_2 имеет место пуассоновский поток событий с параметром λ_2 . Далее полагается, что имеет место состояние S_i (i -е состояние) процесса $\lambda(t)$, если $\lambda(t) = \lambda_i$, $i = 1, 2$; $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$.

Матрицы инфинитезимальных характеристик [22] процесса $\lambda(t)$ имеют вид:

$$D_0 = \begin{vmatrix} -(\lambda_1 + \alpha_1) & 0 \\ \alpha_2 & -(\lambda_2 + \alpha_2) \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) & \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}.$$

После каждого зарегистрированного в момент времени t_k события наступает период мертвого времени фиксированной длительности T , в течение которого следующие события исходного потока являются недоступными для наблюдения. После окончания данного периода первое наступившее событие снова создает период мертвого времени длительности T (непродлевающееся мертвое время) и т.д.

Пример возникающей ситуации проиллюстрирован на рис. 1, где t_1, t_2, \dots – моменты наступления событий в наблюдаемом потоке; штриховкой обозначены периоды мертвого времени длительности T ; черными кружками обозначены недоступные наблюдению события потока.

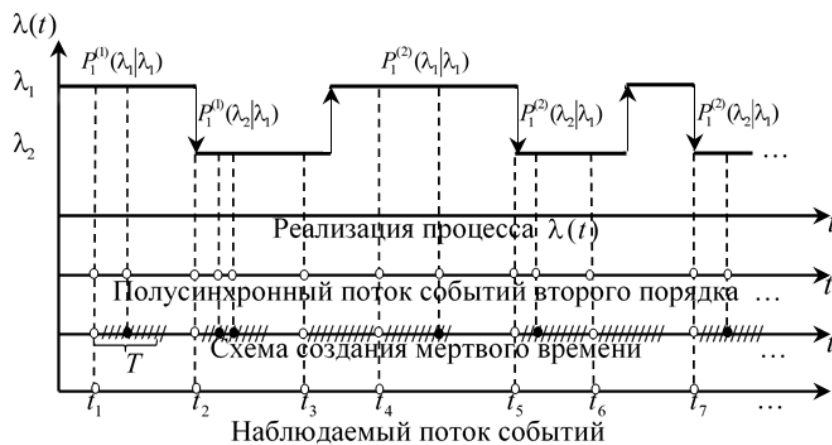


Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий
Fig. 1. Formation of the observed event flow

Процесс $\lambda(t)$ – принципиально ненаблюдаем, наблюдаются только моменты наступления событий t_1, t_2, \dots , тогда $\lambda(t)$ является скрытым марковским процессом или ненаблюдаемым сопровождающим марковским процессом. Отметим, что в моменты $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ последовательность $\{\lambda(t_k)\}$ представляет собой вложенную цепь Маркова.

Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 1, 2, \dots$, – значение длительности интервала между соседними событиями в наблюдаемом потоке, $p_T(\tau_k)$ – плотность вероятности значений длительности интервала между соседними событиями наблюдаемого потока. Рассматривается стационарный режим функцио-

нирования потока, тогда $p_T(\tau_k) = p_T(\tau)$ для всех $k = 1, 2, \dots, \tau \geq 0$. Как следствие, момент наступления события потока t_k без ограничения общности можно положить равным нулю, т.е. момент наступления события есть $\tau = 0$. В силу стационарного режима функционирования потока расположение двух смежных интервалов (t_k, t_{k+1}) и (t_{k+1}, t_{k+2}) , $k = 1, 2, \dots$, на временной оси произвольно. Тогда без ограничения общности $\tau_1 = 0$ и $\tau_2 = 0$ можно рассматривать как моменты наступления соседних событий в наблюдаемом потоке. При этом совместную плотность вероятности значений любых смежных интервалов обозначим $p_T(\tau_1, \tau_2)$, $\tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0$.

Ставится задача оценивания длительности мертвого времени T в рекуррентном полусинхронном потоке событий второго порядка методом моментов. Для решения поставленной задачи необходимо найти явный вид совместной плотности вероятности $p_T(\tau_1, \tau_2)$, $\tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0$, получить условия рекуррентности потока, а также для каждого из выписанных условий найти явный вид плотности вероятности $p_T(\tau)$, $\tau \geq 0$, в рекуррентном потоке.

2. Вывод совместной плотности вероятности $p_T(\tau_1, \tau_2)$

Пусть $\tau_1 = T + t^{(1)}$, $\tau_2 = T + t^{(2)}$ – значения длительностей двух смежных интервалов между моментами наступления соседних событий в наблюдаемом потоке, где T – значение длительности мертвого времени, $t^{(l)}$ – значение длительности интервала между моментом окончания периода мертвого времени и моментом наступления очередного события наблюдаемого потока, $t^{(l)} > 0, l = 1, 2$.

Рассмотрим один из двух смежных интервалов, значение длительности которого обозначим $\tau = T + t, t > 0$.

Введем в рассмотрение переходную вероятность $q_{ij}(T)$ того, что за мертвое время длительности T процесс $\lambda(t)$ перейдет из состояния S_i в момент времени $\tau = 0$ в состояние S_j в момент $\tau = T$, $i, j = 1, 2$; условную стационарную вероятность $\pi_i(0/T)$ того, что процесс $\lambda(t)$ в момент времени $\tau = 0$ находится в состоянии S_i , $i = 1, 2$, при условии, что в данный момент времени наступило событие наблюдаемого потока, породив период мертвого времени длительности T ; условную вероятность $p_{ij}(t)$ того, что на интервале $(0, t)$ нет событий потока, и в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_j$ при условии, что в момент времени $t = 0$ значение процесса $\lambda(0) = \lambda_i$; $\tilde{p}_{ij}(t)$ – соответствующая плотность вероятности, $i, j = 1, 2$.

В силу того, что последовательность моментов наступления событий t_1, t_2, \dots образует вложенную цепь Маркова $\{\lambda(t_k)\}$, совместная плотность вероятности $p_T(\tau_1, \tau_2)$ [23] определится в виде:

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau_1 < T, \tau_2 \geq 0, \\ 0, & 0 \leq \tau_2 < T, \tau_1 \geq 0, \\ \sum_{i=1}^2 \pi_i(0/T) \sum_{j=1}^2 q_{ij}(T) \sum_{k=1}^2 \tilde{p}_{jk}(\tau_1 - T) \sum_{s=1}^2 q_{ks}(T) \sum_{n=1}^2 \tilde{p}_{sn}(\tau_2 - T), & \tau_1 \geq T, \tau_2 \geq T. \end{cases} \quad (1)$$

Явный вид $\pi_i(0/T)$, $q_{ij}(T)$, $\tilde{p}_{jk}(\tau - T)$, $i, j, k = 1, 2$, устанавливаются следующие леммы [21].

Лемма 1. Переходные вероятности $q_{ij}(T)$, $i, j = 1, 2$, в коррелированном полусинхронном потоке событий второго порядка определяются формулами

$$\begin{aligned} q_{11}(T) &= \pi_1 + \pi_2 e^{-(\alpha_2 + a)T}, & q_{12}(T) &= \pi_2 - \pi_2 e^{-(\alpha_2 + a)T}, \\ q_{21}(T) &= \pi_1 - \pi_1 e^{-(\alpha_2 + a)T}, & q_{22}(T) &= \pi_2 + \pi_1 e^{-(\alpha_1 + a)T}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $a = \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)$; априорные финальные вероятности состояний S_1 и S_2 равны $\pi_1 = \alpha_2 / (\alpha_2 + a)$, $\pi_2 = a / (\alpha_2 + a)$ соответственно.

Лемма 2. Плотности вероятностей $\tilde{p}_{ij}(\tau)$, $i, j = 1, 2$, в коррелированном полусинхронном потоке событий второго порядка имеют вид:

$$\begin{aligned}\tilde{p}_{1j}(\tau) &= [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_j | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_j | \lambda_1)] e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}, \quad j = 1, 2, \\ \tilde{p}_{21}(\tau) &= \frac{\alpha_2 [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)]}{(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2)} [e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau} - e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}], \\ \tilde{p}_{22}(\tau) &= \frac{\alpha_2 [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)]}{(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2)} [e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau} - e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}] + \lambda_2 e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau}, \quad \tau \geq 0,\end{aligned}\quad (3)$$

где $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) \neq 0$.

Лемма 3. Условные стационарные вероятности $\pi_i(0/T)$, $i = 1, 2$, в коррелированном полусинхронном потоке событий второго порядка определяются следующим образом

$$\pi_1(0/T) = (z_1 - a) (\alpha_2 + \lambda_2 \pi_1 (1 - e^{-(\alpha_2 + a)T})) / (z_1 z_2 - \lambda_2 (z_1 - a) e^{-(\alpha_2 + a)T}), \quad \pi_2(0/T) = 1 - \pi_1(0/T), \quad (4)$$

$z_1 = \lambda_1 + \alpha_1$, $z_2 = \lambda_2 + \alpha_2$; π_1 и a определены в (2).

Теорема 1. Плотность вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в коррелированном полусинхронном потоке второго порядка в условиях наличия мертвого времени для случая $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) \neq 0$ имеет вид

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \gamma(T) z_1 e^{-z_1(\tau-T)} + (1 - \gamma(T)) z_2 e^{-z_2(\tau-T)}, & \tau \geq T, \end{cases} \quad (5)$$

$$\gamma(T) = \pi_1 [(z_1 - z_2 - a) / (z_1 - z_2)] [1 + a(z_1 - \lambda_2) / (z_1 z_2 e^{(\alpha_2 + a)T} - \lambda_2 (z_1 - a))],$$

где π_1 и a определены в (2); z_1, z_2 – в (4).

Тогда на основании вышеприведенных лемм и теоремы 1 сформулируем следующую теорему.

Теорема 2. Полусинхронный поток событий второго порядка при наличии мертвого времени в общем случае является коррелированным и совместная плотность вероятности значений длительностей смежных интервалов для случая $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) \neq 0$ имеет вид:

$$\begin{aligned}p_T(\tau_1, \tau_2) &= 0, \quad 0 \leq \tau_1 < T, \quad \tau_2 \geq 0, \\ p_T(\tau_1, \tau_2) &= 0, \quad 0 \leq \tau_2 < T, \quad \tau_1 \geq 0, \\ p_T(\tau_1, \tau_2) &= p_T(\tau_1) p_T(\tau_2) + \gamma(T) (1 - \gamma(T)) (1 - a/z_1) (\lambda_2 / z_2) \times \\ &\times [z_1 e^{-z_1(\tau_1-T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_1-T)}] [z_1 e^{-z_1(\tau_2-T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_2-T)}] e^{-(\alpha_2 + a)T}, \quad \tau_1 \geq T, \quad \tau_2 \geq T,\end{aligned}\quad (6)$$

где вероятности $p_T(\tau_k)$ для $\tau = \tau_k$, $k = 1, 2$, и $\gamma(T)$ определены в (5); a – в (2); z_1, z_2 – в (4).

Доказательство. Последовательно подставляя в (1) выражения (3), (2), (4), прodelывая достаточно трудоемкие преобразования, получим (6). Теорема 2 доказана.

Далее, опираясь на результаты, полученные в [21], определим $p_T(\tau_1, \tau_2)$ в явном виде для особого случая задания параметров потока, когда коэффициент $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) = 0$.

Лемма 4. Плотности вероятностей $\tilde{p}_{ij}(\tau)$, $i, j = 1, 2$, в коррелированном полусинхронном потоке событий второго порядка для случая $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) = 0$ имеют вид:

$$\begin{aligned}\tilde{p}_{1j}(\tau) &= [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_j | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_j | \lambda_1)] e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}, \quad j = 1, 2, \\ \tilde{p}_{21}(\tau) &= \alpha_2 [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1)] \tau e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}, \\ \tilde{p}_{22}(\tau) &= \alpha_2 [\lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)] \tau e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau} + \lambda_2 e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)\tau}, \quad \tau \geq 0.\end{aligned}\quad (7)$$

Теорема 3. Плотность вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в коррелированном полусинхронном потоке второго порядка в условиях наличия мертвого времени для случая $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) = 0$ определяется следующим образом:

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ [(\lambda_1 + \alpha_1) - \alpha_2 \pi_2(T)(1 - (\lambda_1 + \alpha_1)(\tau - T))] e^{-(\lambda_1 + \alpha_1)(\tau - T)}, & \tau \geq T, \end{cases} \quad (8)$$

$$\pi_2(T) = \pi_2 \left[1 + a \alpha_2 / \left((\lambda_1 + \alpha_1)^2 e^{(\alpha_2 + a)T} - \lambda_2 (\lambda_1 + \alpha_1 - a) \right) \right],$$

где π_2 и a определены в (2) [21].

На основании лемм 1, 4, теоремы 3 сформулируем следующую теорему.

Теорема 4. Полусинхронный поток событий второго порядка является коррелированным и совместная плотность вероятности значений длительностей смежных интервалов для случая $(\lambda_1 + \alpha_1) - (\lambda_2 + \alpha_2) = 0$ имеет вид:

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = 0, \quad 0 \leq \tau_1 < T, \quad \tau_2 \geq 0,$$

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = 0, \quad 0 \leq \tau_2 < T, \quad \tau_1 \geq 0,$$

$$p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1) p_T(\tau_2) - \lambda_2 (\alpha_2 / z)^2 (z - a) \pi_2^2(T) \times$$

$$\times [1 - z(\tau_1 - T)] [1 - z(\tau_2 - T)] e^{-z(\tau_1 + \tau_2 - 2T)} e^{-(\alpha_2 + a)T}, \quad \tau_1 \geq T, \quad \tau_2 \geq T, \quad (9)$$

где $z = \lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$; $p(\tau_k)$ для $\tau = \tau_k$, $k = 1, 2$, а также $\pi_2(T)$ определены в (8); коэффициент a определен в (2).

Доказательство. Подставляя в (1) выражения (7), (2), (4) и проделывая достаточно трудоемкие преобразования, получим (9). Теорема 4 доказана.

3. Условия рекуррентности потока при наличии мертвого времени

Рассмотрим случаи, когда поток является рекуррентным; для каждого из случаев запишем вид плотности исходя из выражений (5), (8).

Для общего случая $\lambda_1 + \alpha_1 \neq \lambda_2 + \alpha_2$ задания параметров потока, анализируя (6), подчеркнем, что совместная плотность факторизуется $p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1) p_T(\tau_2)$, если:

- 1) $a/z_1 = 1$, получим $p_T(\tau) = \gamma(T) z_1 e^{-z_1(\tau - T)} + (1 - \gamma(T)) z_2 e^{-z_2(\tau - T)}$, $\tau \geq T$, где $z_1 = \lambda_1 + \alpha_1$, $z_2 = \lambda_2 + \alpha_2$;
- 2) $\lambda_2 = 0$, получим $p_T(\tau) = \gamma(T) z_1 e^{-z_1(\tau - T)} + (1 - \gamma(T)) z_2 e^{-z_2(\tau - T)}$, $\tau \geq T$, где $z_1 = \lambda_1 + \alpha_1$, $z_2 = \alpha_2$;
- 3) $\gamma(T) = 0$, получим плотность для простейшего потока $p_T(\tau) = z_2 e^{-z_2(\tau - T)}$, $\tau \geq T$, где $z_2 = \lambda_2 + \alpha_2$;
- 4) $1 - \gamma(T) = 0$, получим плотность для простейшего потока $p_T(\tau) = z_1 e^{-z_1(\tau - T)}$, $\tau \geq T$, где $z_1 = \lambda_1 + \alpha_1$.

В свою очередь, для особого случая $\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$ задания параметров потока, анализируя (9), аналогичным образом находим, что совместная плотность факторизуется $p_T(\tau_1, \tau_2) = p_T(\tau_1) p_T(\tau_2)$, если:

- 1') $z - a = 0$, получим $p_T(\tau) = [z - \alpha_2 \pi_2(T)(1 - z(\tau - T))] e^{-z(\tau - T)}$, $\tau \geq T$, где $z = \lambda_1 + \alpha_1$;
- 2') $\lambda_2 = 0$, получим $p_T(\tau) = z [1 - \pi_2(T)(1 - z(\tau - T))] e^{-z(\tau - T)}$, $\tau \geq T$, где $z = \lambda_1 + \alpha_1$;
- 3') $\pi_2(T) = 0$, получим плотность для простейшего потока $p_T(\tau) = z e^{-z(\tau - T)}$, $\tau \geq T$, где $z = \lambda_1 + \alpha_1$.

Ставится задача оценивания длительности мертвого времени T для рекуррентного потока при выполнении условий 1 и 2 в общем случае задания параметров, а также для условий 1' и 2' в особом случае задания параметров потока.

4. Оценивание длительности мертвого времени в рекуррентном потоке методом моментов

Пусть $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ – значение длительности интервала между моментами t_k и t_{k+1} , $k = 1, 2, \dots, n$, наступления событий в наблюдаемом потоке. Введем статистику $C = (1/n) \sum_{k=1}^n \tau_k$,

$M_T(\tau) = \int_T^{\infty} \tau p_T(\tau) d\tau$ – начальный теоретический момент первого порядка. Тогда в соответствии с методом моментов [24] уравнение моментов для определения неизвестного параметра T запишется в виде:

$$M_T(\tau) = C. \quad (10)$$

В общем случае задания параметров потока с учетом плотности, определенной для условий 1 и 2 рекуррентности потока, уравнение (10) будет иметь вид:

$$\gamma(T)(1/z_1 - 1/z_2) + T + 1/z_2 = C, \quad (11)$$

где z_1, z_2 принимают значения, соответствующие выписанным условиям 1 и 2.

Утверждение 1. Уравнение моментов (11) для условий рекуррентности 1 и 2 имеет единственное решение.

В свою очередь, уравнение (10) для особого случая задания параметров потока с учетом плотности, определенной для условий 1' и 2' рекуррентности потока, запишется в виде:

$$\alpha_2 \pi_2(T) / z^2 + T + 1/z = C, \quad (12)$$

где $\pi_2(T) = \pi_2(1 + \alpha_2 / (ze^{(\alpha_2+a)T}))$ для условия 1'; $\pi_2(T) = \pi_2(1 + a / (\alpha_2 e^{(\alpha_2+a)T}))$ для условия 2'.

Утверждение 2. Уравнение моментов (12) для условий рекуррентности 1' и 2' имеет единственное решение.

Доказательство утверждений 1 и 2 проводится аналогичным путем, приведенным в работе [21].

Полученные уравнения моментов (11) и (12) относительно неизвестного параметра T решаются только с привлечением численных методов.

5. Вероятностные характеристики потока

Поскольку теоремы 2 и 4 доказывают, что поток является коррелированным, рассмотрим следующие вероятностные характеристики.

Для общего случая задания параметров потока при $T = 0$ ковариация и коэффициент корреляции имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\tau_1, \tau_2) &= \gamma(1-\gamma)(1-a/z_1)(\lambda_2/z_2)(1/z_1 - 1/z_2)^2, \\ r_{\tau_1, \tau_2} &= \gamma(1-\gamma)(1-a/z_1)(\lambda_2/z_2)(1/z_1 - 1/z_2)^2 \left\{ \gamma^2(1/z_1 - 1/z_2)^2 + 2\gamma(1/z_1^2 - 1/(z_1 z_2)) + 1/z_2^2 \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

В особом случае задания параметров потока ковариация и коэффициент корреляции при $T = 0$ определяются выражениями

$$\begin{aligned} \text{cov}(\tau_1, \tau_2) &= -\lambda_2 \alpha_2^2 (z-a) \pi_2^2(0) / z^6, \\ r_{\tau_1, \tau_2} &= -\lambda_2 \alpha_2^2 (z-a) \pi_2^2(0) / z^6 \left\{ -\alpha_2^2 \pi_2^2(0) / z^4 + 2\alpha_2 \pi_2(0) / z^3 + 1/z^2 \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

При $T \neq 0$ ковариация и коэффициент корреляции для общего случая параметров имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{cov}_T(\tau_1, \tau_2) &= \gamma(T)(1-\gamma(T))(1-a/z_1)(\lambda_2/z_2)(1/z_1 - 1/z_2)^2 e^{-(\alpha_2+a)T}, \\ r_{\tau_1, \tau_2}^{(T)} &= \gamma(T)(1-\gamma(T))(1-a/z_1)(\lambda_2/z_2)(1/z_1 - 1/z_2)^2 e^{-(\alpha_2+a)T} \times \\ &\times \left\{ \gamma(T)^2(1/z_1 - 1/z_2)^2 + 2\gamma(T)(1/z_1^2 - 1/(z_1 z_2)) + 1/z_2^2 \right\}^{-1}, \end{aligned}$$

и для особого случая задания параметров потока:

$$\begin{aligned} \text{cov}_T(\tau_1, \tau_2) &= -\lambda_2 \alpha_2^2 (z-a) \pi_2^2(T) e^{-(\alpha_2+a)T} / z^6, \\ r_{\tau_1, \tau_2}^{(T)} &= -\lambda_2 \alpha_2^2 (z-a) \pi_2^2(T) e^{-(\alpha_2+a)T} / z^6 \left\{ -\alpha_2^2 \pi_2^2(T) / z^4 + 2\alpha_2 \pi_2(T) / z^3 + 1/z^2 \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

Отметим, что для рекуррентного потока как в общем случае задания параметра потока $\lambda_1 + \alpha_1 \neq \lambda_2 + \alpha_2$, так и в особом случае $\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$ при полной наблюдаемости потока имеем

$\text{cov}(\tau_1, \tau_2) = 0$, $r_{\tau_1, \tau_2} = 0$; при наличии непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности T имеем $\text{cov}_T(\tau_1, \tau_2) = 0$, $r_{\tau_1, \tau_2}^{(T)} = 0$.

6. Результаты статистических экспериментов

Оценка длительности мертвого времени T производится по следующему алгоритму. Обозначим $f(T) = M_T(T)$. В качестве оценки параметра T выбирается решение (11)/(12) (в зависимости от задания параметров потока) на полуинтервале $(0, \tau_{\min}]$, где $\tau_{\min} = \min_k(\tau_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$; если $f(0) < C < f(\tau_{\min})$, то $\hat{T}_{\text{numeric}} = \hat{T}$; если $f(0) < f(\tau_{\min}) \leq C$, то $\hat{T}_{\text{numeric}} = \tau_{\min}$; $f(0) \geq C$, то $\hat{T}_{\text{numeric}} = 0$, где \hat{T}_{numeric} – численное решение уравнения (11)/(12) методом Ньютона. Стоит отметить, что применение τ_{\min} дает улучшенную оценку параметра T .

Для проверки качества оценивания длительности мертвого времени с использованием построенной имитационной модели полусинхронного потока событий второго порядка проведена серия статистических экспериментов [25].

По алгоритму, приведенному выше, находится выборка оценок $\hat{T}_1, \hat{T}_2, \dots, \hat{T}_N$ для N реализаций потока и вычисляются выборочное среднее $\hat{M}(\hat{T}) = (1/N) \sum_{s=1}^N \hat{T}_s$, выборочная вариация $\hat{V}(\hat{T}) = 1/N \sum_{s=1}^N (\hat{T}_s - T)^2$ и оценка смещения $\delta(T) = |\hat{M}(\hat{T}) - T|$ для конкретного эксперимента.

Цель первого статистического эксперимента – проверка установления стационарного режима в случае выполнения первого условия рекуррентности в общем случае задания параметров потока. В соответствии с условием рекуррентности положим

$$P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) = 1,$$

$$P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) = 0.$$

При параметрах потока $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$, $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 1$, $T = 1,5$ и $N = 300$ рассмотрим следующие значения времени моделирования: $T_m = 50, 100, \dots, 1\,000$ ед. времени с шагом 50. В табл. 1 приведены численные результаты данного эксперимента.

Таблица 1

Результаты первого статического эксперимента

T	50	100	150	...	700	750	...	950	1 000
$\hat{M}(\hat{T})$	1,2095	1,2748	1,3067	...	1,4905	1,4906	...	1,4904	1,4905
$\delta(T)$	0,2905	0,2252	0,1933	...	0,0095	0,0094	...	0,0096	0,0095
$\hat{V}(\hat{T}) \times 10^{-5}$	24,4841	20,0012	18,1038	...	1,7731	1,5871	...	1,1742	1,8421

Целью второго статистического эксперимента является установление зависимости $\hat{M}(\hat{T})$, $\hat{V}(\hat{T})$ от количества реализаций N ($N = 50, 100, \dots, 500$ с шагом 50) при заданных значениях параметра мертвого времени T ($T = 0,2; 0,5; 1; 1,5; 2$), а также проверка качества оценивания при увеличении периода ненаблюдаемости при выполнении второго условия рекуррентности для особого случая задания параметров потока. В соответствии с условием рекуррентности положим $\lambda_2 = 0$, $P_1^{(1)}(\lambda_1 | \lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1) = 0,4$, $P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) = P_1^{(2)}(\lambda_1 | \lambda_1) = 0,6$, а также $\lambda_1 = 7$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 8$.

Таблица 2

Результаты второго статического эксперимента

	N	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
$T = 0,2$	$\hat{M}(\hat{T})$	0,1980	0,1986	0,1988	0,1988	0,1988	0,1989	0,1990	0,1989	0,1989	0,1988
	$\hat{V}(\hat{T}) \times 10^{-5}$	1,0179	0,3475	0,3815	0,2157	0,2874	0,2904	0,3111	0,3199	0,2894	0,2971

Окончание табл. 2

	N	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
$T = 0,5$	$\hat{M}(\hat{T})$	0,5033	0,5026	0,5024	0,5028	0,5021	0,5021	0,5024	0,5024	0,5022	0,5022
	$\hat{V}(\hat{T}) \times 10^{-5}$	1,5980	0,7159	0,6791	0,6105	0,6817	0,6587	0,6454	0,6971	0,6587	0,6621
$T = 1$	$\hat{M}(\hat{T})$	0,9913	0,9928	0,9918	0,9920	0,9928	0,9930	0,9931	0,9932	0,9930	0,9931
	$\hat{V}(\hat{T}) \times 10^{-5}$	3,5483	2,1713	1,9971	1,6105	1,5157	0,9387	0,9689	0,9189	0,9541	0,8917
$T = 1,5$	$\hat{M}(\hat{T})$	1,4876	1,4880	1,4881	1,4887	1,4891	1,4897	1,4892	1,4896	1,4897	1,4896
	$\hat{V}(\hat{T}) \times 10^{-5}$	5,7781	3,7421	3,1154	2,9715	2,4718	2,1741	2,2154	2,2089	2,2541	2,3517
$T = 2$	$\hat{M}(\hat{T})$	1,9602	1,9612	1,9621	1,9618	1,9625	1,9629	1,9632	1,9630	1,9630	1,9631
	$\hat{V}(\hat{T}) \times 10^{-5}$	7,4887	5,3872	5,0082	4,9700	4,8176	4,5813	4,1984	4,3489	4,1579	3,9947

Проводя анализ полученных в табл. 1 и 2 численных результатов, можно сделать следующие выводы:

- 1) найденная оценка является состоятельной [24] и смещенной, при этом наблюдения показывают достаточно приемлемую величину смещения;
- 2) оценка ухудшается (в смысле увеличения выборочной вариации) с увеличением T , что является естественным в силу большей потери событий (информации);
- 3) отмечается установление стационарного режима для $T_m \geq 700$ (табл. 1);
- 4) количество экспериментов коррелирует со значением мертвого времени T (табл. 2): для достаточно малого значения T результаты стабилизируются при $N = 100$, однако при увеличении T для получения более стабильных результатов необходимо увеличить количество реализаций и положить $N = 300$.

Заключение

В настоящей работе рассмотрен полусинхронный поток событий второго порядка в условиях наличия непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности T . В ходе исследования потока было выявлено два случая задания параметров потока: общий и особый. Для обоих случаев задания параметров потока путем вывода совместной плотности вероятности значений длительностей смежных интервалов доказано, что рассматриваемый поток является коррелированным. В этой связи найдены такие вероятностные характеристики потока, как ковариация и коэффициент корреляции, а также сформулированы условия, при которых поток является рекуррентным. Для рекуррентного потока решена задача оценивания длительности мертвого времени с применением численного метода для решения уравнения моментов относительно неизвестного параметра T . Алгоритм вычисления оценок длительности мертвого времени запрограммирован на языке C# в среде Visual Studio 2013. С целью проверки качества полученных оценок проведена серия статистических экспериментов с помощью имитационной модели потока; численные результаты реализованных экспериментов демонстрируют приемлемое качество оценивания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 1 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
2. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 2 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
3. Neuts M.F. A versatile Markov point process // Journal of Applied Probability. 1979. V. 16. P. 764–779.
4. Cox D.R. The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1955. V. 51, No. 3. P. 433–441.
5. Kingman J.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60, is. 4. P. 923–930.
6. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a bath markovian arrival process // Communications in Statistics Stochastic Models. 1991. V. 7. P. 1–46.
7. Дудин А.Н., Клименок В.И. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск : Изд-во Белорус. гос. ун-та, 2000. 175 с.

8. Basharin G.P., Gaidamaka Yu.V., Samouylov K.E. Mathematical theory of teletraffic and its application to the analysis of multi-service communication of the next generation networks // *Automatic Control and Computer Sciences*. 2013. V. 47, No. 2. P. 62–69.
9. Vishnevsky V.M., Semenova O.V. Polling systems: theory and applications for broadband wireless networks. London : Academic Publishing, 2012. 316 p.
10. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров синхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // *Вестник Томского государственного университета*. 2002. № S1-1. С. 24–29.
11. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Вероятность ошибки при оценивании состояний обобщенного асинхронного потока событий // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2012. № 2 (19). С. 88–101.
12. Нежелская Л.А. Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий в условиях его частичной наблюдаемости // *Вестник Томского государственного университета*. 2000. № 269. С. 95–98.
13. Normey-Rico J.E. Control of dead-time process. London : Springer-Verlag, 2007. 462 p.
14. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988. 256 с.
15. Nezhel'skaya L. Probability density function for modulated MAP event flows with unextendable dead time // *Communications in Computer and Information Science*. 2015. V. 564. P. 141–151.
16. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2013. № 2 (23). С. 54–63.
17. Горцев А.М., Соловьев А.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов потока физических событий при неподлежащем мертвом времени // *Известия высших учебных заведений. Физика*. 2014. Т. 57, № 7. С. 103–111.
18. Gortsev A.M., Klimov I.S. Estimation of the parameters of an alternating Poisson stream of events // *Telecommunications and Radio Engineering*. 1993. V. 48, is. 10. P. 40–45.
19. Gortsev A.M., Klimov I.S. Estimation of intensity of Poisson stream of events for conditions under which it is partially unobservable // *Telecommunications and Radio Engineering*. 1992. V. 47, is. 1. P. 33–38.
20. Nezhelskaya L., Tumashkina D. Optimal state estimation of semi-synchronous event flow of the second order under its complete observability // *Communications in Computer and Information Science*. 2018. V. 912. P. 93–105.
21. Нежелская Л.А., Тумашкина Д.А. Оценивание методом моментов длительности непродлевающегося мертвого времени в полусинхронном потоке событий второго порядка // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2020. № 52. С. 73–82.
22. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория вероятностей и случайных процессов. Томск : Изд-во НУИТ, 2006. 204 с.
23. Bakholdina M., Gortsev A. Joint probability density of the intervals length of modulated semi-synchronous integrated flow of events in conditions of a constant dead time and the flow recurrence conditions // *Communications in Computer and Information Science*. 2015. V. 564. P. 13–27.
24. Малинковский Ю.В. Теория вероятностей и математическая статистика. Гомель : ГТУ им. Ф. Скорины, 2004. Ч. 2: Математическая статистика. 146 с.
25. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. М. : Наука, 1973. 312 с.

Поступила в редакцию 12 июня 2020 г.

Nezhel'skaya L.A., Tumashkina D.A. (2020) ESTIMATION OF THE UNEXTENDABLE DEAD TIME DURATION IN RECURRENT SEMI-SYNCHRONOUS EVENTS FLOW OF THE SECOND ORDER BY THE METHOD OF MOMENTS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 53. pp. 82–92

DOI: 10.17223/19988605/53/8

In the current paper we consider the stationary operation mode of the doubly stochastic semi-synchronous events flow of the second order under the conditions of unextendable dead time functioning, i.e. after each registered event at the time moment t_k , the dead time period of fixed duration T appears, during which other events are unobservable. The first event that occurred again at the end of the dead time period creates a period of dead time, etc.

Under these conditions, joint probability density $p_T(\tau_1, \tau_2)$ of the adjacent flow intervals duration values in the *general case* of setting parameters $(\lambda_1 + \alpha_1 \neq \lambda_2 + \alpha_2)$ has the following form

$$\begin{aligned}
 p_T(\tau_1, \tau_2) &= 0, \quad 0 \leq \tau_1 < T, \quad \tau_2 \geq 0, \\
 p_T(\tau_1, \tau_2) &= 0, \quad 0 \leq \tau_2 < T, \quad \tau_1 \geq 0, \\
 p_T(\tau_1, \tau_2) &= p_T(\tau_1)p_T(\tau_2) + \gamma(T)(1 - \gamma(T))(1 - a/z_1)(\lambda_2 / z_2) \times \\
 &\times [z_1 e^{-z_1(\tau_1 - T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_1 - T)}] [z_1 e^{-z_1(\tau_2 - T)} - z_2 e^{-z_2(\tau_2 - T)}] e^{-(\alpha_2 + a)T}, \quad \tau_1 \geq T, \quad \tau_2 \geq T, \\
 \gamma(T) &= \pi_1 [(z_1 - z_2 - a) / (z_1 - z_2)] \left(1 + a(z_1 - \lambda_2) / (z_1 z_2 e^{(\alpha_2 + a)T} - \lambda_2(z_1 - a)) \right),
 \end{aligned}$$

where $a = \lambda_1 P_1^{(1)}(\lambda_2 | \lambda_1) + \alpha_1 P_1^{(2)}(\lambda_2 | \lambda_1)$, $z_1 = \lambda_1 + \alpha_1$, $z_2 = \lambda_2 + \alpha_2$.

For the special case ($\lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2$) of setting flow parameters, $p_T(\tau_1, \tau_2)$ has the form

$$\begin{aligned} p_T(\tau_1, \tau_2) &= 0, \quad 0 \leq \tau_1 < T, \quad \tau_2 \geq 0, \\ p_T(\tau_1, \tau_2) &= 0, \quad 0 \leq \tau_2 < T, \quad \tau_1 \geq 0, \\ p_T(\tau_1, \tau_2) &= p_T(\tau_1)p_T(\tau_2) - \lambda_2 \left(\alpha_2 / z\right)^2 (z - a) \pi_2^2(T) \times \\ &\times [1 - z(\tau_1 - T)] [1 - z(\tau_2 - T)] e^{-z(\tau_1 + \tau_2 - 2T)} e^{-(\alpha_2 + a)T}, \quad \tau_1 \geq T, \quad \tau_2 \geq T, \\ \pi_2(T) &= \pi_2 \left[1 + a\alpha_2 / \left((\lambda_1 + \alpha_1)^2 e^{(\alpha_2 + a)T} - \lambda_2(\lambda_1 + \alpha_1 - a) \right) \right], \quad z = \lambda_1 + \alpha_1 = \lambda_2 + \alpha_2. \end{aligned}$$

Using the explicit forms of the density functions, the flow recurrence conditions were obtained, the moment equations to determine parameter T were written out and numerically solved for the recurrent flow in both cases.

The algorithm for calculating the estimates was implemented using C# programming language in Visual Studio 2013. In order to establish the quality of the estimation, the statistical experiments were carried out using a simulation model of the flow, the numerical results of which illustrate an acceptable quality of estimation.

Keywords: doubly stochastic events flow; recurrence conditions, recurrent semi-synchronous events flow of the second order; unextendable dead time; estimation of the dead time duration; method of moments.

NEZHEL'SKAYA Lyudmila Alekseevna (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Applied Mathematics Department, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: ludne@mail.tsu.ru

TUMASHKINA Diana Aleksandrovna (Post-graduate Student, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: diana1323@mail.ru

REFERENCES

1. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. Chast 1. [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks. Part 1]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 17(6). pp. 92–99.
2. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1980) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. Ch.2 [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks. Part 2]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 1. pp. 55–61.
3. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markov point process. *Journal of Applied Probability*. 16. pp. 764–779. DOI: 10.2307/3213143
4. Cox, D.R. (1955) The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 51(3). pp. 433–441. DOI: 10.1017/S0305004100030437
5. Kingman, J.F.C. (1964) On doubly stochastic Poisson process. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 60(4). pp. 923–930. DOI: 10.1017/S030500410003838X
6. Lucantoni, D.M. (1991) New results on the single server queue with a bath markovian arrival process. *Communications in Statistics Stochastic Models*. 7. pp. 1–46. DOI: 10.1080/15326349108807174
7. Dudin, A.N. & Klimenok, V.I. (2000) *Sistemy massovogo obsluzhivaniya s korrelirovannymi potokami* [Queueing Systems with Correlated Flows]. Minsk: Belarusian State University.
8. Basharin, G.P., Gaidamaka, Yu.V. & Samouylov K.E. (2013) Mathematical theory of teletraffic and its application to the analysis of multiservice communication of the next generation networks. *Automatic Control and Computer Sciences*. 47(2). pp. 62–69. DOI: 10.3103/S0146411613020028
9. Vishnevsky, V.M. & Semenova, O.V. (2012) *Polling systems: theory and applications for broadband wireless networks*. London: Academic Publishing.
10. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2002) Estimation of the parameters of a synchronous doubly stochastic event flow by the method of moments. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. S1-1. pp. 24–29.
11. Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2012) The probability of wrong decisions in the estimation of states of a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(19). pp. 88–101.
12. Nezhelskaya, L. (2000) Optimal estimation of the states of semi-synchronous event flow under conditions of its partial observability. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 269. pp. 95–98.
13. Normey-Rico, J.E. (2007) *Control of dead-time process*. London: Springer-Verlag.
14. Apanasovich, V.V., Kolyada, A.A. & Chernyavsky, A.F. (1988) *Statisticheskiy analiz sluchaynykh potokov v fizicheskom eksperimente* [The statistical analysis of series of random events in physical experiment]. Minsk: Universitetskoe.

15. Nezhelskaya, L. (2015) Probability density function for modulated MAP event flows with unextendable dead time. *Communications in Computer and Information Science*. 564. pp. 141–151.
16. Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2013) Maximum likelihood estimation of the dead time duration in generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(23). pp. 54–63.
17. Gortsev, A.M. & Soloviev, A.A. (2014) The joint probability density of the intervals duration of the flow of physical events with unextendable dead time. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Fizika – Russian Physics Journal*. 57(7). pp. 103–111.
18. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1993) Estimation of the parameters of an alternating Poisson stream of events. *Telecommunications and Radio Engineering*. 48(10). pp. 40–45.
19. Gortsev, A.M. & Klimov, I.S. (1992) Estimation of intensity of Poisson stream of events for conditions under which it is partially unobservable. *Telecommunications and Radio Engineering*. 47(1). pp. 33–38.
20. Nezhelskaya, L. & Tumashkina, D. (2018) Optimal state estimation of semi-synchronous event flow of the second order under its complete observability. *Communications in Computer and Information Science*. 912. pp. 93–105. DOI: 10.17223/19988605/46/9
21. Nezhelskaya, L.A. & Tumashkina, D.A. (2020) Estimation of the unextendable dead time duration in semi-synchronous events flow of the second order by the method of moments. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 52. pp. 73–82. DOI: 10.17223/19988605/52/9
22. Nazarov, A.A. & Terpugov, A.F. (2006) *Teoriya veroyatnostey i sluchaynykh protsessov* [The theory of probability and random processes]. Tomsk: NTL.
23. Bakholdina, M. & Gortsev, A. (2015) Joint probability density of the intervals length of modulated semi-synchronous integrated flow of events in conditions of a constant dead time and the flow recurrence conditions. *Communications in Computer and Information Science*. 564. pp. 13–27. DOI: 10.1007/978-3-319-13671-4_3
24. Malinkovsky, Yu.V. (2004) *Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika* [Probability Theory and Mathematical Statistics]. Gomel: Francisk Skorina Gomel State University.
25. Sobol, I.M. (1973) *Chislennyye metody Monte-Karlo* [Numerical methods of Monte Carlo]. Moscow: Nauka.

УДК 519.234:621.391
DOI: 10.17223/19988605/53/9

И.М. Рудько

ЕДИНОЕ ПОЛЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ОБНАРУЖЕНИЯ ДЛЯ РАЗНОРОДНЫХ СРЕДСТВ НАБЛЮДЕНИЯ

Рассмотрена задача вычисления единого поля вероятности обнаружения для стационарных и подвижных наблюдателей, контролирующих заданный район и работающих в пассивном режиме в различных частотных диапазонах. В работе рассматриваются расположенные на плоскости, снабженной декартовой системой координат, стационарные гидроакустические средства, координаты которых известны, и рассчитывается единое поле вероятностей обнаружения объекта для всех стационарных гидроакустических средств по всему району $P_{\text{обн}}(x, y)$. Это поле используется как основа для интеграции систем подводного наблюдения и объединения всех имеющихся позиционных и маневрирующих гидроакустических систем в единый комплекс подводного наблюдения, в том числе и при условии работы в анизотропной среде.

Ключевые слова: траектория движения объекта; интеграция систем подводного наблюдения; вероятность обнаружения объекта; поле вероятностей обнаружения объекта.

Рассматривается задача обнаружения морского подводного объекта (МПО) средствами пассивной гидролокации в районе, контролируемом несколькими стационарными гидроакустическими станциями (СГАС) и маневренными средствами (МС).

В настоящее время реализация идей «сетцентризма» применительно к решению задач поиска МПО приводит к интеграции систем подводного наблюдения [1] и объединению всех имеющихся позиционных и маневрирующих гидроакустических систем в единый комплекс подводного наблюдения.

При решении рассматриваемой задачи применительно к обработке гидроакустической информации необходимо учитывать также сложную структуру поля, по которому происходит распространение сигнала. Зона потенциально возможного обнаружения цели является анизотропной (слоисто-неоднородной), т.е. обладает контрастной структурой с чередованием зон акустической освещенности и зон акустической тени. Контрастная структура зоны наблюдения может выражаться в любой мере – либо как давление или интенсивность полезного сигнала [2], либо как вероятность обнаружения полезного сигнала [3], лишь бы они представляли собой корректную свертку всех основных влияющих факторов и были доступны для оценки.

Удобство использования вероятностной формы определяется тем, что она позволяет получать не только текущие локальные, но и интегральные оценки потенциальной возможности обнаружения объекта поиска по траектории, т.е. по маршруту (в горизонтальной плоскости) и трассе (по глубине) следования МПО относительно наблюдателя

Непосредственно такую возможность характеризует *вероятностный критерий*, представляющий собой вероятность такого события, при котором за время прохождения МПО маршрута его ни разу не обнаружит ни один из L ($L \geq 1$) наблюдателей, расположенных в районе и работающих в пассивном режиме. Обозначим эту вероятность $P_{\text{обн}}$ и будем называть ее вероятностью обнаружения объекта на траектории движения.

В случае независимых наблюдателей (вероятность наступления события обнаружения хотя бы одним наблюдателем) оценки производятся по формуле интегральной (кумулятивной, накопленной) вероятности [4]:

$$P_{\text{обн}} = 1 - \prod_{i=1}^L (1 - P_{\text{обн}i}), \quad (1)$$

где L – число наблюдателей, $P_{\text{обн}i}$ – вероятность обнаружения i -м наблюдателем.

Удобство использования вероятностной формы определяется тем, что она позволяет получать не только текущие локальные, но и интегральные оценки потенциальной возможности обнаружения объекта поиска по траектории следования относительно наблюдателей.

В данной работе рассматриваются расположенные на плоскости, снабженной декартовой системой координат XOY , стационарные гидроакустические средства, координаты которых известны, и рассчитывается единое поле вероятностей обнаружения объекта для всех СГАС по всему району $P_{\text{обн}}(x, y)$. Это поле используется как основа для интеграции систем подводного наблюдения и объединения всех имеющихся позиционных и маневрирующих гидроакустических систем в единый комплекс подводного наблюдения.

1. Расчет единого поля вероятности обнаружения для нескольких наблюдателей в изотропном поле

При обработке гидроакустической информации в пассивном режиме обнаружение осуществляется по результатам обработки излученного объектом и принятого наблюдателем сигнала при наличии помех. Решение о наличии или отсутствии сигнала от объекта принимается наблюдателем периодически, после предварительной обработки поступившей на интервале наблюдения (накопления) длительностью T_0 реализации гауссовского случайного процесса $X(t)$ с нулевым математическим ожиданием. Обозначим символом $\sigma_{\text{ш}}^2$ дисперсию помех на входе наблюдателя, символом $\sigma_c^2 = \sigma_c^2(v, D)$ – дисперсию сигнала, излученного движущимся объектом и поступившего на вход наблюдателя, зависящую от текущей скорости движения объекта v и текущего расстояния D между ним и наблюдателем. При отсутствии сигнала от объекта случайный процесс $X(t)$ имеет дисперсию $\sigma_{\text{ш}}^2$, при наличии сигнала от объекта – дисперсию $\sigma_c^2 + \sigma_{\text{ш}}^2$.

Используя основное уравнение гидроакустики (ОУГ) [5], определим дисперсию сигнала на входе приемника. Полагая, что зависимость уровня интенсивности излученного МПО сигнала от его скорости носит степенной характер, а закон распространения гидроакустического сигнала в среде – сферический, имеем для интенсивности сигнала на входе наблюдателя [6]

$$I_c(v, D) = I_c(v_0) \left(\frac{v}{v_0} \right)^{m_v} \frac{D_0^2}{D^2},$$

где $I_c(v_0)$ – интенсивность излучения МПО на эталонной скорости v_0 , v – текущая скорость движения МПО, D – текущее расстояние между ним и наблюдателем, D_0 – эталонное расстояние.

Интенсивность помехи на входе приемной системы наблюдателя рассчитывается по формуле $I_{\text{ш}} = I_n^0(f)/A(f)$, где $I_n^0(f)$ – суммарная интенсивность помех в районе расположения наблюдателя, $A(f)$ – коэффициент концентрации антенной системы наблюдателя в полосе приема. Выражение для текущего отношения сигнал/помеха может быть записано в следующем виде:

$$\rho = \frac{\sigma_c^2(v, D)}{\sigma_{\text{ш}}^2} = \frac{I_c(v, D)}{I_{\text{ш}}} = \frac{I_c(v_0) \left(\frac{v}{v_0} \right)^{m_v} \frac{D_0^2}{D^2}}{I_n^0(f)/A(f)}.$$

Вероятность обнаружения МПО наблюдателем по результатам обработки информации на одном интервале наблюдения длительностью T_0 вычисляется по следующей формуле [6]:

$$P_{\text{обн}}(v, D) = 1 - F_N \left(\frac{h_F}{\frac{I_c(v, D)}{I_{\text{ш}}} + 1} \right) = 1 - F_N \left(\frac{h_F}{\rho(v, D) + 1} \right),$$

где F_N – функция χ^2 -распределения с N степенями свободы, h_F – квантиль уровня $(1 - \alpha)$, $N = 2T_0\Delta F$, ΔF – полоса частот, $\alpha = P_{\text{лт}}$ – вероятность ложной тревоги.

Расстояние, на котором вероятность правильного обнаружения сигнала $P_{обн}$ равна установленному значению при соблюдении требований к вероятности ложных тревог $P_{лт}$, называется дальностью действия ГАС [7]. Данное определение в общем виде относится к однократному (мгновенному) наблюдению при установленных зависимостях между временем накопления T_0 , отношением сигнал/помеха ρ , $P_{обн}$ и $P_{лт}$.

Хотя эффективность обнаружения цели по акустическому полю принято оценивать вероятностью правильного обнаружения, она зависит от величины энергии принимаемого сигнала. При заданной мощности энергия сигнала определяется длительностью его приема, а мощность зависит от акустической силы цели и от расстояния до цели. Для заданной вероятности ложной тревоги $P_{лт} = \alpha$ вероятность правильного обнаружения $P_{обн}$ возрастает с увеличением ρ , а ρ монотонно убывает с ростом расстояния r до цели.

Как правило, приемная система наблюдателя работает периодически, каждый раз накапливая и обрабатывая сигнал в течение фиксированного времени T (времени разового наблюдения), за которое положение обнаруживаемого объекта и его скорость практически не изменяются. По истечении этого времени принимается решение об отсутствии или наличии МПО. Будем называть такую процедуру «взглядом», а время T – длительностью взгляда.

Учитывая, что каждая СГАС может работать в нескольких частотных диапазонах со своим временем накопления в каждом, формулу вычисления интегральной вероятности (1) применить невозможно, так как длительности их взглядов различны. Если бы удалось привести времена накопления (взгляда) для всех СГАС и их частотных диапазонов к единому времени $T = const$, то можно было бы построить единую карту вероятности – $P_{обн}(x, y)$ в координатах XOY для всех СГАС, находящихся в заданном районе.

Пусть имеются два наблюдателя два частотных диапазона одной СГАС) с шириной полосы частот ΔF_1 и ΔF_2 и со временами накопления T_1 и T_2 ($T_1 \neq T_2$) соответственно, в которых решение об обнаружении принимаются независимо. Для расчета вероятности правильного обнаружения хотя бы одним из двух наблюдателей, чтобы иметь возможность использовать формулу интегральной (кумулятивной) вероятности (1), нужно *одинаковое время накопления*, но $T_1 \neq T_2$. Поэтому приведем время накопления к «общему знаменателю». Определим наименьшее общее кратное – НОК(T_1, T_2) = T_0 . Тогда за $T_0 - L_1 = T_0/T_1$ – число взглядов для 1-го наблюдателя, $L_2 = T_0/T_2$ – число взглядов для 2-го наблюдателя.

Для 1-го наблюдателя, считая, что цель неподвижна, согласно (1) за время T_0 получаем

$$P_{необн1}(T_0) = \prod_{i=1}^{L_1} P_{необн1}(T_1) = [P_{необн1}(T_1)]^{L_1}, \quad (2)$$

а для 2-го наблюдателя за время T_0

$$P_{необн2}(T_0) = \prod_{i=1}^{L_2} P_{необн2}(T_2) = [P_{необн2}(T_2)]^{L_2}.$$

Допустим, что у нас есть 3-й наблюдатель, который имеет время наблюдения T_2 и за время T_0 обеспечивает по формуле (2) такую же вероятность необнаружения $P_{необн}$, как и 1-й наблюдатель, т.е.

$$[P_{необн3}(T_2)]^{L_2} = [P_{необн1}(T_1)]^{L_1} \text{ и}$$

$$P_{необн3}(T_2) = [P_{необн1}(T_1)]^{L_1/L_2} = [P_{необн1}(T_1)]^{T_2/T_1}.$$

Таким образом, 3-й наблюдатель эквивалентен 1-му наблюдателю в том смысле, что рассчитанные для них по формуле (2) за время T_0 вероятности необнаружения $P_{необн}$ равны между собой. Так как время наблюдения T_2 для 3-го наблюдателя равно времени наблюдения для 2-го наблюдателя, то для определения суммарной (интегральной, кумулятивной) вероятности для независимых наблюдателей можно применить формулу (1):

$$P_{необн\Sigma} = P_{необн2}(T_2)P_{необн3}(T_2) = P_{необн2}(T_2)[P_{необн1}(T_1)]^{T_2/T_1}. \quad (3)$$

Следовательно, вероятности необнаружения для двух диапазонов с различными временами взглядов можно объединить, используя формулу (3), в вероятность необнаружения с единым временем взгляда.

Пусть СГАС, расположенная в районе, имеет координаты (x_k, y_k) . Тогда, используя формулу для вычисления $P_{\text{обн}}(d_i)$, приведенную в [6], можно рассчитать вероятность необнаружения для всех точек района (x, y) , т.е. сформировать поле (матрицу) вероятностей необнаружения $P_{\text{необн}}(x, y)$. Для СГАС, расположенной в точке с координатами (x_k, y_k) , и имеющей M частотных диапазонов, используя формулы (1) и (3), можно рассчитать суммарную вероятность необнаружения для всех диапазонов за время T_m :

$$P_{\text{необн}k}(x, y) = \prod_{j=1}^M P_{\text{необн}j}(x, y)^{T_m/T_j}, \quad (4)$$

где T_j – длительность взгляда для j -го частотного диапазона, $T_m = \max[T_j]$.

Рассчитав по (4) приведенные вероятности необнаружения для каждого наблюдателя, можно рассчитать единое (суммарное) поле для всех наблюдателей:

$$P_{\text{необн}}(x, y) = \prod_{k=1}^K P_{\text{необн}k}(x_k, y_k)^{T_m/T_k},$$

где K – число наблюдателей, T_k – длительность взгляда для k -го частотного диапазона, $T_m = \max[T_k]$, T_k – приведенная длительность взгляда для k -го наблюдателя, (x_k, y_k) – координаты k -го наблюдателя, $P_{\text{необн}k}$ – приведенные вероятности необнаружения для k -го наблюдателя.

Кроме задания единого времени наблюдения для всех наблюдателей для расчета единого поля вероятности обнаружения требуется выполнение еще одного очевидного условия – равенства вероятности ложных тревог для всех наблюдателей: $P_{\text{лт}} = \alpha$.

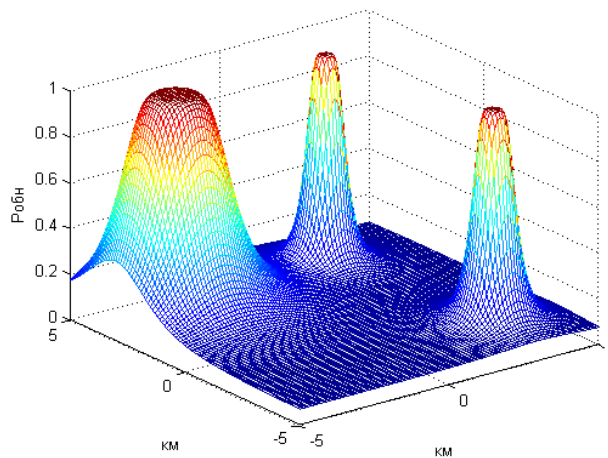


Рис. 1. Пример расчета единого поля вероятности обнаружения для трех наблюдателей
Fig. 1. Example of calculating a single detection probability field for three observers

На рис. 1 представлен пример расчета единого поля вероятности обнаружения для трех наблюдателей с различными параметрами наблюдения в случае изотропного акустического поля.

2. Расчет единого поля вероятности обнаружения для нескольких наблюдателей в анизотропном поле

В неоднородной морской среде (анизотропном поле) вероятность обнаружения зависит не только от расстояния между МПО и наблюдателем, но также от глубины и профиля дна, акустических свойств грунта, от гидрологических, определяемых видом вертикального распределения скорости звука, и метеорологических условий наблюдения, глубины погружения МПО, характеристик СГАС и глубины установки ее антенны и ряда других факторов [8]. В результате круговая диаграмма,

присущая изотропному полю, сильно деформируется и зависит уже от четырех параметров: расстояния между МПО и наблюдателем (d), глубины погружения МПО ($h_{ист}$), азимута на МПО и глубины установки антенны СГАС ($h_{пр}$). Тем не менее для фиксированной глубины погружения МПО ($h_{ист}$) также можно рассчитать вероятность обнаружения для всех точек района $P_{обн}(x, y)$, т.е. построить карту вероятности обнаружения для $h_{ист} = const$. Такой набор карт вероятности можно описывать трехмерной матрицей в координатах $(x, y, h_{ист})$ для ряда фиксированных глубин $h_{ист j}$ ($1 \leq j \leq J$) при фиксированных глубинах каждого наблюдателя $h_{пр k}$ ($1 \leq k \leq K$).

Рассчитав по (4) приведенные вероятности необнаружения для всех наблюдателей и их диапазонов, можно рассчитать общее (суммарное) поле для всех наблюдателей.

На рис. 2–4 приведен пример расчета суммарного поля вероятности обнаружения для двух наблюдателей по формуле

$$P_{необн}(x, y) = \prod_{k=1}^K P_{необнк}(x_k, y_k)^{T_M/T_k}, \quad (5)$$

где K – число наблюдателей, T_k – длительность взгляда для k -го частотного диапазона, $T_M = \max[T_k]$, T_k – приведенная длительность взгляда для k -го наблюдателя, (x_k, y_k) – координаты k -го наблюдателя, $P_{необнк}$ – приведенные вероятности необнаружения для k -го наблюдателя.

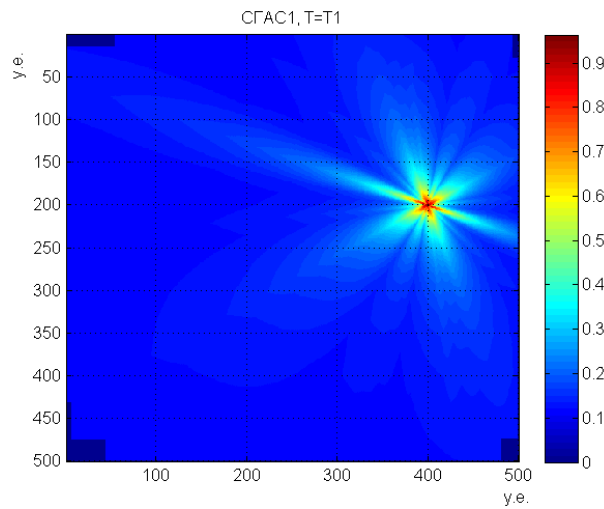


Рис. 2. Поле вероятности обнаружения для 1-го наблюдателя за время T_1
 Fig. 2. Detection probability field for the 1st observer during T_1

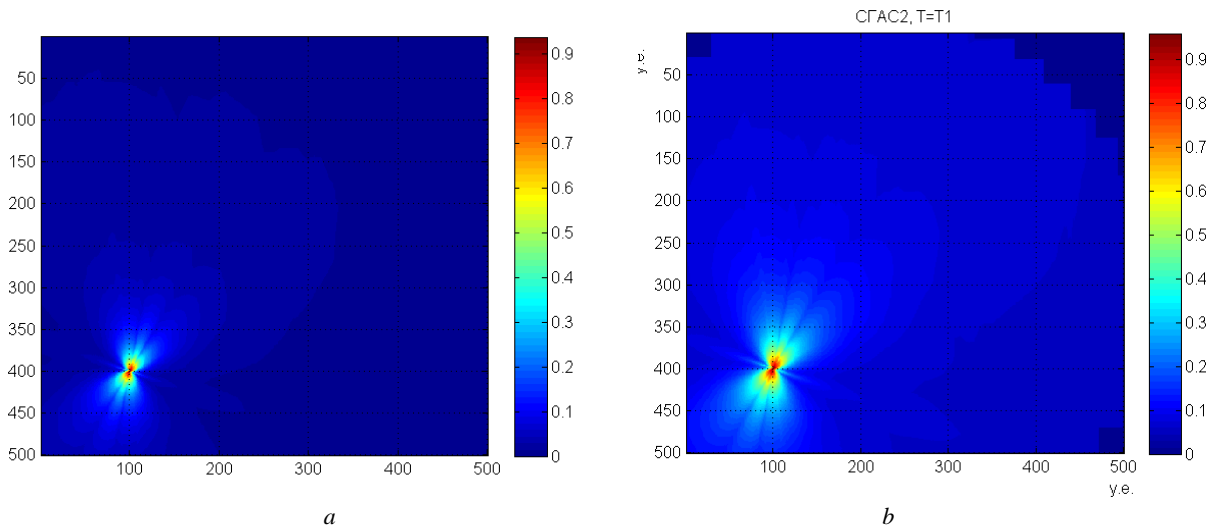


Рис. 3. Поле вероятности обнаружения для 2-го наблюдателя: a – за время T_2 ; b – за время T_1 ($T_1 > T_2$) – по формуле (5)
 Fig. 3. Field of probability of detection for the 2nd observer: a – during T_2 ; b – during the time T_1 ($T_1 > T_2$) - according to the formula (5)

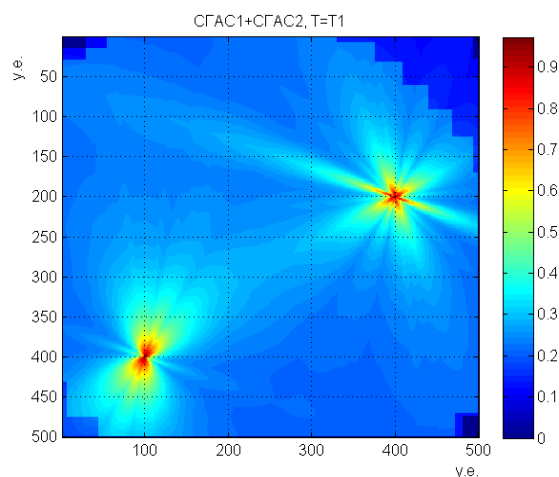


Рис. 4. Суммарное поле вероятности обнаружения для 1-го и 2-го наблюдателя по формуле (5)
 Fig. 4. The total detection probability field for the 1st and 2nd observer according to the formula (5)

Такое поле вероятности обнаружения может быть построено для набора возможных глубин МПО. Таким образом, формируется трехмерная матрица $P_{\text{обн}}(x, y, h_{\text{ист}})$.

Вычисление единого поля вероятности $P_{\text{обн}}(x, y, h_{\text{ист}})$ для всего района позволяет наложить это поле на географическую карту. Тогда оператор может визуально (как известно, глаз человека очень хорошо справляется с такой задачей) определять «слабые» места, т.е. районы, в которых $P_{\text{обн}}$ мала, и отправлять туда, например, дополнительные маневренные средства.

3. Расчет вероятности обнаружения маневренными средствами

Наличие единого поля вероятности $P_{\text{обн}}(x, y, h_{\text{ист}})$ для СГАС всего района позволяет использовать его и как основу для комплексирования вероятностей обнаружения от различных маневренных средств.

Учитывая, что для СГАС $P_{\text{обн}}(x, y, h_{\text{ист}})$ вычисляется за единое время наблюдения T_0 , при расчете $P_{\text{обн}}(\text{МС})$ необходимо вычислять эту вероятность за то же время T_0 , иначе формулу (1) применять некорректно (*основное условие расчета единого поля вероятностей обнаружения*).

Поиск в районе МС, к которым относятся, например, подвижные наблюдатели (ПН) и неподвижные пассивные буи, контролируемые авиационными носителями, основывается на модели, основной характеристикой которой является интенсивность поиска $\gamma(t)$ – среднее число обнаружений МПО в районе поиска в единицу времени [4]. Интенсивность поиска в предположении о времени поиска $t_{\text{П}}$ и малости величины $\gamma(t)$ может быть пересчитана в вероятности обнаружения

$$P_{\text{МС}}(t_{\text{П}}) = 1 - \exp \left[- \int_{t_0}^{t_0+t_{\text{П}}} \gamma(t) dt \right],$$

где t_0 – время начала поиска, $t_{\text{П}}$ – продолжительность поиска.

Если положить $t_{\text{П}} = T_0$, то основное условие выполнено и можно использовать формулу (1).

Для буев интенсивность поиска рассчитывается по формуле [9]

$$\gamma(t) = 2n_{\text{Б}}\theta D_{\text{Б}}(V)V/S_{\text{р}},$$

где V – скорость движения МПО, $D_{\text{Б}}(V)$ – дальность обнаружения МПО пассивным буйем, зависящая от V ; $n_{\text{Б}}$ – число буев в подрайоне, через который проходит МПО; θ – доля одновременно контролируемых буев; $S_{\text{р}}$ – площадь подрайона.

Для ПН интенсивность поиска рассчитывается по формуле [4]

$$\gamma(t) = 2D_{\text{ПН}}(V, u)v_{\text{отн}}/S_{\text{р}},$$

где $D_{\text{ПН}}(V, u)$ – дальность обнаружения МПО для ПН, u – скорость ПН; $v_{\text{отн}}$ – средняя скорость движения МПО относительно ПН.

Поиск на рубеже осуществляется, когда есть достаточные основания предполагать, что проход МПО будет совершен через данный рубеж. При этом ПН имеют задачу не допустить прохода объекта поиска через данный рубеж необнаруженным. Поиск на рубеже ведется, когда известен вероятный курс или сектор вероятных курсов противника, и осуществляется при маневрировании ПН курсами, перпендикулярными вероятному курсу объекта поиска. Вероятность обнаружения цели в этом случае определяется по формуле [10]

$$P_{\text{обнР}} = \frac{2d_{\text{л}}P_{\text{к}}}{l_{\text{уч}}} \sqrt{1 + \frac{V_{\text{ПН}}^2}{V_{\text{МПО}}^2}}, \quad (6)$$

где $P_{\text{к}}$ – вероятность получения контакта с целью в пределах дальности обнаружения, $l_{\text{уч}}$ – длина участка (прямолинейного отрезка от одной точки поворота до другой точки поворота), обследуемого ПН, $d_{\text{л}}$ – дальность действия средств наблюдения ПН, $V_{\text{ПН}}$ и $V_{\text{МПО}}$ – скорости ПН и МПО.

В формуле (6) время в явном виде отсутствует. Поэтому по известным длине участка $l_{\text{уч}}$ и скорости ПН $V_{\text{ПН}}$ можно определить время прохождения участка $t_{\text{уч}} = l_{\text{уч}}/V_{\text{ПН}}$. По формуле, аналогичной (2), определяем вероятность необнаружения за время T_0 , заданное при построении карты вероятностей:

$$P_{\text{необн}}(T_0) = (1 - P_{\text{обнР}})^{T_0/t_{\text{уч}}}.$$

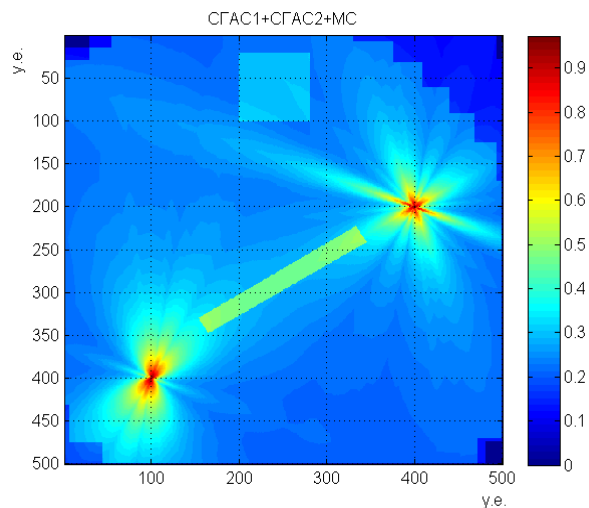


Рис. 5. Суммарное поле вероятности обнаружения для 1-й и 2-й СГАС и МС (поиск в районе (зонаверху карты) и поиск на рубеже (между СГАС))

Fig. 5. The total field of the probability of detection for the 1st and 2nd SSS and MS (search in the area (zone at the top of the map) and search at the boundary (between SSS))

На рис. 5 приведен пример расчета единого поля вероятности обнаружения с учетом применения поиска на рубеже и поиска МС.

Заключение

Единое поле вероятности обнаружения для всех наблюдателей, контролирующих заданный район, $P_{\text{обн}}(x, y, h_{\text{ист}})$:

- может быть обобщено на случай анизотропного (слоисто-неоднородного) гидроакустического поля путем добавления еще одной координаты $h_{\text{ист}}$;
- может быть использовано для визуализации, т.е. представления оператору.

Наличие единого поля вероятности $P_{\text{обн}}(x, y, h_{\text{ист}})$ для СГАС всего района позволяет использовать его как основу для комплексирования вероятностей обнаружения от различных физических полей (11). МПО имеет собственные физические поля, к которым относятся: акустическое, магнитное, гидрофизическое, электрическое, низкочастотное электромагнитное, тепловое, оптическое. Включе-

ние этих полей в единое поле вероятности обнаружения $P_{\text{обн}}(x, y, h_{\text{ист}})$ возможно при условии наличия моделей для расчетов вероятностей обнаружения объекта этими средствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пичугин С. Состояние и перспективы развития систем гидроакустического наблюдения ВМС США. Ч. 1 // Зарубежное военное обозрение. 2010. № 6. С. 61–70.
2. Ольшевский В.В. Статистические методы в гидролокации. Л. : Судостроение, 1983. 280 с.
3. Какалов В.А., Поленин В.И., Дымент А.Б., Сергеев В.А. Метод оптимизации боевого маневрирования подводной лодки по вероятностному критерию скрытности // Морская радиоэлектроника. 2003. № 3 (6). С.44–47
4. Абчук В.А., Суздаль В.Г. Поиск объектов. М. : Сов. радио, 1977. 336 с.
5. Urick R.J. Principles of underwater sound. McGraw–Hill Book Company, 1975. 445 p.
6. Абрамянц Т.Г., Маслов Е.П., Рудько И.М., Яхно В.П. Уклонение подвижного объекта от обнаружения группой наблюдателей при малых отношениях сигнал/помеха // Информационно-управляющие системы. 2011. № 2. С. 2–7.
7. Евтютов А.П., Колесников А.Е., Ляликов А.П. Справочник по гидроакустике. Л. : Судостроение, 1988. 552 с.
8. Burdic W.S. Acoustic system analysis. Englewood Cliffs, NJ : Prentice–Hall, Inc., 1984. 392 p.
9. Forrester R.N. Estimating search effectiveness with limited information. Monterey, CA : Naval Postgraduate School, 1993.
10. Хвощ В.А. Тактика подводных лодок М. : Воениздат, 1988. 266 с.
11. Якушенко Е.И., Эйдук В.И., Дружинина О.В., Лебедев В.Г., Кулида Е.Л. Применение математических методов оптимизации при управлении скрытностью морских подводных объектов // Управление в технических, эргатических, организационных и сетевых системах : материалы конф., СПб., 9–11 окт. 2012. СПб., 2012. С. 843–846.

Поступила в редакцию 17 июня 2020 г.

Rudko I.M. (2020) UNIFIED FIELD OF DETECTION PROBABILITIES FOR HETEROGENEOUS MEANS OF OBSERVATIONS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science] 53. pp. 93–101

DOI: 10.17223/19988605/53/9

The problem of calculating a single detection probability field for stationary and moving observers controlling a given region and working in a passive mode in different frequency ranges is considered. Currently, the implementation of the ideas of "network-centrism" in relation to solving the problems of searching for a marine underwater object leads to the integration of underwater surveillance systems and to the integration of all available positional and maneuvering sonar systems into a single complex of underwater observation, in which the results of the work of heterogeneous means of observations could be combined.

In this work we consider stationary sonar station located on a plane equipped with the Cartesian coordinate system XOY , whose coordinates are known, and calculate a single object detection probability field for all stationary sonar station throughout the region $P_{\text{det}}(x, y)$. This field is used as the basis for the integration of underwater observation systems and for combining all available positional and maneuvering sonar systems into a single underwater observation complex, including when operating in an anisotropic environment.

All the examples cited were calculated using the MATLAB computing environment.

The presence of a single field of probability of detection for a given area:

- firstly, it greatly facilitates the work of the operator;
- secondly, it allows you to quickly make adjustments to the work of maneuvering means;
- thirdly, take into account data from non-acoustic physical fields in this single field of probability.

Keywords: the trajectory of the object; the integration of underwater surveillance systems; the probability of detecting an object; the probability field of detecting an object.

RUDKO Igor Mikhailovich (Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation).

E-mail: igor-rudko@mail.ru

REFERENCES

1. Pichugin, S. (2010) Sostoyanie i perspektivy razvitiya sistem gidroakusticheskogo nablyudeniya VMS SSHA. Ch. 1 [The state and development prospects of sonar surveillance systems of the US Navy. Part 1]. *Zarubezhnoe voennoe obozrenie*. 6. pp. 61–70.
2. Olshevsky, V.V. (1983) *Statisticheskie metody v gidrolokatsii* [Statistical methods in sonar]. Leningrad: Sudostroenie.
3. Kakalov, V.A., Polenin, V.I., Dyment, A.B. & Sergeev, V.A. (2003) Metod optimizatsii boevogo manevrirovaniya podvodnoy lodki po veroyatnostnomu kriteriyu skrytnosti [A method for optimizing the combat maneuvering of a submarine by the probabilistic stealth criterion]. *Morskaya radioelektronika*. 3(6). pp. 44–47.

4. Abchuk, V.A. & Suzdal, V.G. (1977) *Poisk ob"ektov* [Search for objects]. Moscow: Sovetskoe radio.
5. Urick, R.J. (1975) *Principles of underwater sound*. McGraw– Hill Book Company.
6. Abramyants, T.G., Maslov, E.P., Rudko, I.M. & Yahno, V.P. (2011) Avoidance of a moving object from detection by a group of observers subject to small signal/noise ratios. *Informatsionno-upravlyayushchie sistemy – Information and Control Systems*. 2. pp. 2–7.
7. Evtuyotov, A.P., Kolesnikov, A.E. & Lyalikov, A.P. (1988) *Spravochnik po gidroakustike* [Handbook of Hydroacoustics]. Leningrad: Sudostroenie.
8. Burdic, W.S. (1984) *Acoustic System Analysis*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice–Hall, Inc.
9. Forrest, R.N. (1993) *Estimating search effectiveness with limited information*. Monterey, CA: Naval Postgraduate School.
10. Khvoshch, V.A. (1988) *Taktika podvodnykh lodok* [Tactics of Submarines]. Moscow: Voenizdat.
11. Yakushenko, E.I., Eiduk, V.I., Druzhinina, O.V., Lebedev, V.G. & Kulida, E.L. (2012) [Application of mathematical optimization methods for managing the stealth of marine underwater objects]. *Upravlenie v tekhnicheskikh, ergaticheskikh, organizatsionnykh i setevykh sistemakh* [Management in technical, ergatic, organizational and network systems]. Proc. of the Conference. St. Peteresburg, October 9–11, 2012. St. Petersburg. pp. 843–846.

УДК 519.95

DOI: 10.17223/19988605/53/10

Ф.Г. Фейзиев, Н.Б. Абаева

**ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА ДВОИЧНЫХ 4D-НЕЛИНЕЙНЫХ
МОДУЛЯРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Рассматривается задача синтеза одного класса двоичных 4D-нелинейных модулярных динамических систем, заданных двухзначным аналогом полинома Вольтерры. Задача формулируется как задача квадратичной оптимизации. При удовлетворении входной последовательностью системы условия ортогональности приводится алгоритм решения поставленной задачи. При неудовлетворении входной последовательностью условий ортогональности для решения задачи предлагается методика, основанная на привлечении специальных ортогональных входных последовательностей.

Ключевые слова: нелинейные модулярные динамические системы; полином Вольтерры; задача оптимального синтеза; задача квадратичной оптимизации; условие ортогональности; ортогональные входные последовательности.

Модулярные динамические системы (МДС) [1–6] являются одним из важных классов дискретных динамических систем (понятие модулярной динамической системы – синоним понятия «конечные автоматы», «конечные последовательностные машины» и т.д. [7]). Обычные, т.е. однопараметрические, и многопараметрические МДС широко применяются в вычислительной технике, системах диагностики, кодировании и декодировании дискретных сообщений, в криптографии, моделировании, управлении непрерывных и дискретных объектов, в распараллеливании выполнения вычислений для различных задач (см. [1, 2, 4–6, 8–12]). Исследованы также задачи теории и приложений МДС (см.: [1–7, 13–19]). К таким задачам относится и задача синтеза МДС. К настоящему времени разработаны методы и алгоритмы решения задачи синтеза для различных классов однопараметрических и многопараметрических МДС, заданных в виде двухзначного аналога полинома Вольтерры [5, 6, 20–22]. Одним из классов МДС является класс двоичных 4D-нелинейных МДС (4D-НМДС), который имеет более общие структуры, чем nD -НМДС, $n \in \{1, 2, 3\}$. А это стимулирует изучение различных задач также для 4D-НМДС. Лишь в работе [23] для полной реакции двоичных 4D-НМДС, заданных функциональными входно-выходными соотношениями, получено полиномиальное соотношение в виде двухзначного аналога полинома Вольтерры. В данной работе рассматривается вопрос разработки метода и алгоритма решения задачи синтеза для двоичных 4D-НМДС.

1. Постановка задачи

Рассмотрим двоичную 4D-НМДС с фиксированной памятью n_0 , ограниченной связью $P = P_1 \times P_2 \times P_3$, со степенью S , описываемую в виде двухзначного аналога полинома Вольтерры [23]:

$$y[n, c_1, c_2, c_3] = \sum_{i=1}^S \sum_{(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \bar{m}) \in F(i)} \sum_{(\bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho}) \in L(\ell_1, \ell_2, \ell_3)} \sum_{\bar{\tau} \in \Gamma(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \bar{m})} h_{i, (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \bar{m})} [\bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho}, \bar{\tau}] \times \prod_{(\alpha, \beta, \gamma) \in Q_0(i, \ell_1, \ell_2, \ell_3, \bar{m})} \prod_{\xi_{\alpha, \beta, \gamma} = 1}^{m_{\alpha, \beta, \gamma}} u[n - \tau(\alpha, \beta, \gamma, \xi_{\alpha, \beta, \gamma}), c_1 + p_1(j_\alpha), c_2 + p_2(\sigma_\beta), c_3 + p_3(\rho_\gamma)], GF(2). \tag{1}$$

Здесь $n \in T = \{0, 1, 2, \dots\}$, $c_\alpha \in \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$, $\alpha = \overline{1, 3}$; $y[n, c_1, c_2, c_3]$ и $u[n, c_1, c_2, c_3]$ есть соответственно выходная и входная последовательности над полем $GF(2)$; $P_\alpha = \{p_\alpha(1), \dots, p_\alpha(r_\alpha)\}$, $-\infty < p_\alpha(1) < \dots < p_\alpha(r_\alpha) < \infty$, $p_\alpha(j) \in \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$, $j = 1, \dots, r_\alpha$, $\alpha = \overline{1, 3}$;

$$F(i) = \{(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \bar{m}) \mid \bar{m} = (m_{1,1,1}, \dots, m_{1,1,\ell_3}, m_{1,2,1}, \dots, m_{1,2,\ell_3}, \dots, m_{1,\ell_2,1}, \dots, m_{1,\ell_2,\ell_3}),$$

$$\sum_{\alpha=1}^{\ell_1} \sum_{\beta=1}^{\ell_2} \sum_{\gamma=1}^{\ell_3} m_{\alpha,\beta,\gamma} = i; \quad m_{\alpha,\beta,\gamma} \in \{0, \dots, n_0 + 1\}, \quad \alpha = \overline{1, \ell_1}, \beta = \overline{1, \ell_2}, \gamma = \overline{1, \ell_3};$$

$$(\forall \alpha \in \{1, \dots, \ell_1\})(\exists \beta \in \{1, \dots, \ell_2\})(\exists \gamma \in \{1, \dots, \ell_3\}) \Rightarrow (m_{\alpha,\beta,\gamma} \neq 0),$$

$$(\forall \beta \in \{1, \dots, \ell_2\})(\exists \alpha \in \{1, \dots, \ell_1\})(\exists \gamma \in \{1, \dots, \ell_3\}) \Rightarrow (m_{\alpha,\beta,\gamma} \neq 0),$$

$$(\forall \gamma \in \{1, \dots, \ell_3\})(\exists \alpha \in \{1, \dots, \ell_1\})(\exists \beta \in \{1, \dots, \ell_2\}) \Rightarrow (m_{\alpha,\beta,\gamma} \neq 0); \quad \ell_\sigma \in \{1, \dots, r_\sigma\}, \sigma = \overline{1, 3} \};$$

$$L(\ell_1, \ell_2, \ell_3) = \{(\bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho}) \mid \bar{j} \in L_1(\ell_1), \bar{\sigma} \in L_2(\ell_2), \bar{\rho} \in L_3(\ell_3)\},$$

где $L_1(\ell_1) = \{\bar{j} = (j_1, \dots, j_{\ell_1}) \mid 1 \leq j_1 < \dots < j_{\ell_1} \leq r_1\}, \quad L_2(\ell_2) = \{\bar{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_{\ell_2}) \mid 1 \leq \sigma_1 < \dots < \sigma_{\ell_2} \leq r_2\},$

$$L_3(\ell_3) = \{\bar{\rho} = (\rho_1, \dots, \rho_{\ell_3}) \mid 1 \leq \rho_1 < \dots < \rho_{\ell_3} \leq r_3\}; \quad \Gamma(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \bar{m}) = \prod_{(\alpha,\beta,\gamma) \in Q_0(i, \ell_1, \ell_2, \ell_3, \bar{m})} \Gamma_1(m_{\alpha,\beta,\gamma})$$

(здесь $\Gamma_1(m_{\alpha,\beta,\gamma}) = \{\bar{\tau}_{\alpha,\beta,\gamma} = (\tau(\alpha, \beta, \gamma, 1), \dots, \tau(\alpha)), \beta, \gamma, m_{\alpha,\beta,\gamma} \mid 0 \leq \tau(\alpha, \beta, \gamma, 1) < \dots < \tau(\alpha, \beta, \gamma, m_{\alpha,\beta,\gamma}) \leq n_0\};$

$Q_0(i, \ell_1, \ell_2, \ell_3, \bar{m}) = \{(\alpha, \beta, \gamma) \mid m_{\alpha,\beta,\gamma}$ есть компонента \bar{m} и $m_{\alpha,\beta,\gamma} \neq 0, \alpha = \overline{1, \ell_1}, \beta = \overline{1, \ell_2}, \gamma = \overline{1, \ell_3}\}$).

Пусть $\lambda_i = |F(i)|$, через $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \bar{m})_\nu$ обозначим ν -й элемент множества $F(i)$. Тогда 4D-НМДС (1) можно записать в следующем виде:

$$y[n, c_1, c_2, c_3] = \sum_{i=1}^S \sum_{\nu=1}^{\lambda_i} \sum_{(\bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho}) \in L_{i,\nu}} \sum_{\bar{\tau} \in \Gamma_{i,\nu}} h_{i,\nu}[\bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho}, \bar{\tau}] \times$$

$$\times \prod_{(\alpha,\beta,\gamma) \in Q_{i,\nu}} \prod_{\xi_{\alpha,\beta,\gamma}=1}^{m_{\alpha,\beta,\gamma}} u[n - \tau(\alpha, \beta, \gamma, \xi_{\alpha,\beta,\gamma}), c_1 + p_1(j_\alpha), c_2 + p_2(\sigma_\beta), c_3 + p_3(\rho_\gamma)], GF(2),$$
(2)

где для простоты записей приняты обозначения:

$$h_{i,\nu}[\bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho}, \bar{\tau}] \equiv h_{i,(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \bar{m})_\nu}[\bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho}, \bar{\tau}], \quad Q_{i,\nu} \equiv Q_0(i, (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \bar{m})_\nu), \quad \Gamma_{i,\nu} \equiv \Gamma((\ell_1, \ell_2, \ell_3, \bar{m})_\nu),$$

$$L_{i,\nu} \equiv L((\ell_1, \ell_2, \ell_3)_\nu).$$

Из формулы (2) видно, что двоичный 4D-НМДС состоит из различных блоков. Между блоками и возможными двойками $\langle i, \nu \rangle$ есть взаимно-однозначное соответствие, где $\nu \in \{1, \dots, \lambda_i\}$, $i \in \{1, \dots, S\}$.

Отметим, что количество блоков определяется по формуле $\lambda_1 + \dots + \lambda_S$.

Пусть $n \in [0, N] \equiv \{0, 1, \dots, N\}$, $c_\alpha \in [0, C_\alpha] \equiv \{0, 1, \dots, C_\alpha\}$, $\alpha = \overline{1, 3}$, и последовательность

$$\{y_0[n, c_1, c_2, c_3] : n \in [0, N], c_1 \in [0, C_1], c_2 \in [0, C_2], c_3 \in [0, C_3]\} \quad (3)$$

суть желаемая выходная последовательность 4D-НМДС (2). Пусть на вход 4D-НМДС (2) поступает произвольная двоичная неизвестная последовательность

$$\{u[n, c_1, c_2, c_3] : n \in [0, N], c_1 \in [0, C_1], c_2 \in [0, C_2], c_3 \in [0, C_3]\}.$$

Задача оптимального синтеза двоичных 4D-НМДС (2) заключается в нахождении для всех $\bar{\tau} \in \Gamma_{i,\nu}$, $(\bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho}) \in L_{i,\nu}$, $\nu \in \{1, \dots, \lambda_i\}$, $i \in \{1, \dots, S\}$, таких $h_{i,\nu}[\bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho}, \bar{\tau}] \in \{0, 1\}$, при которых минимизируется функционал

$$J = \sum_{n=0}^N \sum_{c_1 \in [0, C_1]} \sum_{c_2 \in [0, C_2]} \sum_{c_3 \in [0, C_3]} (y[n, c_1, c_2, c_3] - y_0[n, c_1, c_2, c_3])^2. \quad (4)$$

Функционал (4) указывает расстояние между реальной $y[n, c_1, c_2, c_3]$ и желаемой $y_0[n, c_1, c_2, c_3]$ последовательностями 4D-НМДС (2). Задача (2), (4) суть задача квадратичной оптимизации.

2. Матричный вид задачи оптимального синтеза

Через $\bar{\tau}_k$ обозначим k -й элемент в $\Gamma_{i,\nu}$, а компоненты набора $\bar{\tau}_k$ обозначим через $\tau^{(k)}(\alpha, \beta, \gamma, \xi_{\alpha,\beta,\gamma})$, где $(\alpha, \beta, \gamma) \in Q_{i,\nu}$. Введем следующий вектор столбец:

$$U_0(i, v, \bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho}, \bar{\tau}_k) = \left\{ \prod_{(\alpha, \beta, \gamma) \in Q_{i,v}} \prod_{\xi_{\alpha, \beta, \gamma} = 1}^{m_{\alpha, \beta, \gamma}} u[n - \tau^{(k)}(\alpha, \beta, \gamma, \xi_{\alpha, \beta, \gamma}), c_1 + p_1(j_\alpha), c_2 + p_2(\sigma_\beta), c_3 + p_3(\rho_\gamma)] \right\}, \quad (5)$$

где каждому набору $(n, c_1, c_2, c_3) \in [0, N] \times [0, C_1] \times [0, C_2] \times [0, C_3]$ соответствует одна компонента. Последовательно введем следующие блочные матрицы:

$$\begin{aligned} U_1(i, v, \bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho}) &= (U_0(i, v, \bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho}, \bar{\tau}_1) \dots U_0(i, v, \bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho}, \bar{\tau}_{|\Gamma_{i,v}|})), \\ U_2(i, v) &= (U_1(i, v, (\bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho})_1) \dots U_1(i, v, (\bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho})_{|\Lambda_{i,v}|})), \\ U_3(i) &= (U_2(i, v_1) \dots U_2(i, v_{\lambda_i})), \quad U = (U_3(1) \dots U_3(S)). \end{aligned} \quad (6)$$

Пусть

$$H_1(i, v, \bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho}) = (h_{i,v}[\bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho}, \bar{\tau}_1], \dots, h_{i,v}[\bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho}, \bar{\tau}_{|\Gamma_{i,v}|}])^T. \quad (7)$$

Последовательно введем следующие блочные векторы:

$$\begin{aligned} H_2(i, v) &= (H_1(i, v, (\bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho})_1), \dots, H_1(i, v, (\bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho})_{|\Lambda_{i,v}|}))^T, \\ H_3(i) &= (H_2(i, 1), \dots, H_2(i, \lambda_i))^T, \quad H = (H_3(1), \dots, H_3(S))^T, \end{aligned} \quad (8)$$

где в формулах (6)–(8) через $|A|$ обозначено количество элементов во множестве A .

В блочной матрице U все элементы блочной подматрицы $U_3(i)$, $i = \overline{1, S}$, распишем в открытом виде, в полученной блочной матрице все элементы блочной подматрицы $U_2(i, v)$, $v = \overline{1, \lambda_i}$, $i = \overline{1, S}$, также распишем в открытом виде и т.д. Тогда получим обыкновенную матрицу U размерностью $(N+1)(C_1+1)(C_2+1)(C_3+1) \times R$, где $R = \sum_{i=1}^S C_{(n_0+1)r_1 r_2 r_3}^i$. В блочном векторе H все компоненты блочных подвекторов $H_3(i)$, $i = \overline{1, S}$, распишем в открытом виде. В полученном блочном векторе все компоненты блочных подвекторов $H_2(i, v)$, $v = \overline{1, \lambda_i}$, $i = \overline{1, S}$, распишем в открытом виде и т.д. Тогда получим обыкновенный вектор H с R компонентами.

Предполагаем, что $(N+1)(C_1+1)(C_2+1)(C_3+1) \gg R$. Пусть

$$\begin{aligned} Y_0 &= (y_0[0, 0, 0, 0], \dots, y_0[0, 0, 0, C_3], \dots, y_0[0, 0, C_2, C_3], \dots, y_0[0, C_1, C_2, C_3], \dots, y_0[N, C_1, C_2, C_3])^T, \\ Y &= (y[0, 0, 0, 0], \dots, y[0, 0, 0, C_3], \dots, y[0, 0, C_2, C_3], \dots, y[0, C_1, C_2, C_3], \dots, y[N, C_1, C_2, C_3])^T. \end{aligned}$$

Тогда задачу (2), (4) можем записать в следующем матричном виде:

$$Y = U \cdot H, \quad GF(2), \quad (9)$$

$$J = (Y - Y_0)^T \cdot (Y - Y_0) \rightarrow \min. \quad (10)$$

Пусть на вход 4D-НМДС (2) поступает входная последовательность

$$\{u[n, c_1, c_2, c_3] : n \in [0, N], c_1 \in [0, C_1], c_2 \in [0, C_2], c_3 \in [0, C_3]\}, \quad (11)$$

и она такова, что матрица U , образованная из нее по формулам (5), (6), удовлетворяет условиям ортогональности

$$U^T \cdot U = \text{diag}\{d_{1,1}, \dots, d_{R,R}\}; \quad d_{\alpha,\alpha} > 0, \quad \alpha = 1, \dots, R, \quad (12)$$

где $d_{\alpha,\alpha}$, $\alpha = \overline{1, R}$, есть элементы матрицы $U^T \cdot U$. Тогда последовательность (11) называется ортогональной входной последовательностью для 4D-НМДС (2).

При произвольности двоичной входной последовательности (11) матрица U может не удовлетворять условиям ортогональности (12). Можно доказать, что при $S > 1$ невозможно найти входную последовательность типа (11) при которой U удовлетворяла бы условиям ортогональности (12). Однако если в разные блоки 4D-НМДС (2) поступают разные входные последовательности, тогда возможно удовлетворение матрицей U , образованной аналогично по формулам (5), (6), условия ортогональности аналогично (12) при $S > 1$.

Решения задачи (2),(4) для случая ортогональных входных последовательностей и случая неортогональных входных последовательностей будем проводить в отдельности.

3. Решение задачи оптимального синтеза 4D-НМДС при ортогональных входных последовательностях

Рассмотрим случай, когда в разные блоки 4D-НМДС поступают разные входные последовательности. Таким образом, рассмотрим следующую 4D-НМДС:

$$y[n, c_1, c_2, c_3] = \sum_{i=1}^S \sum_{v=1}^{\lambda_i} \sum_{(\bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho}) \in L_{i,v}} \sum_{\bar{\tau} \in \Gamma_{i,v}} h_{i,v}[\bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho}, \bar{\tau}] \times \\ \times \prod_{(\alpha, \beta, \gamma) \in Q_{i,v}} \prod_{\xi_{\alpha, \beta, \gamma}=1}^{m_{\alpha, \beta, \gamma}} v_{i,v}[n - \tau(\alpha, \beta, \gamma, \xi_{\alpha, \beta, \gamma}), c_1 + p_1(j_\alpha), c_2 + p_2(\sigma_\beta), c_3 + p_3(\rho_\gamma)], GF(2). \quad (13)$$

В 4D-НМДС на вход блока, соответствующего $\langle i, v \rangle$, поступают последовательности $\{v_{i,v}[n, c_1, c_2, c_3] : n \in [0, N], c_1 \in [0, C_1], c_2 \in [0, C_2], c_3 \in [0, C_3]\}$, $i = 1, \dots, S$. Пусть

$$V_0(i, v, \bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho}, \bar{\tau}_k) = \\ = \left\{ \prod_{(\alpha, \beta, \gamma) \in Q_{i,v}} \prod_{\xi_{\alpha, \beta, \gamma}=1}^{m_{\alpha, \beta, \gamma}} v_{i,v}[n - \tau^{(k)}(\alpha, \beta, \gamma, \xi_{\alpha, \beta, \gamma}), c_1 + p_1(j_\alpha), c_2 + p_2(\sigma_\beta), c_3 + p_3(\rho_\gamma)] \right\}. \quad (14)$$

На основе матрицы $V_0(i, v, \bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho}, \bar{\tau}_k)$ аналогично по формулам (6) последовательно формируем матрицы

$$V_1(i, v, \bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho}) = (V_0(i, v, \bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho}, \bar{\tau}_1) \dots V_0(i, v, \bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho}, \bar{\tau}_{|\Gamma_{i,v}|})), \\ V_2(i, v) = (V_1(i, v, (\bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho})_1) \dots V_1(i, v, (\bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho})_{|L_{i,v}|})), \\ V_3(i) = (V_2(i, v_1) \dots V_2(i, v_{\lambda_i})), \quad V = (V_3(1) \dots V_3(S)). \quad (15)$$

В (15) матрица V как обычная матрица имеет размерность $(N+1)(C_1+1)(C_2+1)(C_3+1) \times R$.

Задача (13), (4) имеет следующий матричный вид:

$$Y = V \cdot H, GF(2).$$

В формуле (16) операция проводится над конечным полем $GF(2)$, а в (17) операция проводится над полем вещественных чисел. Однако эта задача оптимизации есть задача целочисленной оптимизации. Для решения данной задачи нужно использовать метод, использующий ее специфические особенности. Пусть входные последовательности

$$\{v_{i,v}[n, c_1, c_2, c_3] : n \in [0, N], c_1 \in [0, C_1], c_2 \in [0, C_2], c_3 \in [0, C_3]\}, \quad v = \overline{1, \lambda_i}, \quad i = \overline{1, S}, \quad (18)$$

ортогональные, т.е. удовлетворяются условиям ортогональности

$$V^T \cdot V = \text{diag}\{d_{1,1}, \dots, d_{R,R}\}; \quad d_{\alpha,\alpha} > 0, \quad \alpha = \overline{1, R}, \quad (19)$$

где $d_{\alpha,\alpha}$, $\alpha = \overline{1, R}$, – элементы матрицы $V^T \cdot V$.

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации над полем действительных чисел:

$$Y = V \cdot K, \quad (20)$$

$$J = (Y - Y_0)^T (Y - Y_0) \rightarrow \min, \quad (21)$$

где количество компонентов неизвестного вектора K суть R , и задача (20), (21) есть непрерывный аналог задачи (16), (17). Через k_α и h_α обозначим α -й компонент вектора K и вектора H соответственно. Если решение задачи (20), (21) известно, то решение задачи (16), (17) определяется по формуле [20]

$$h_\alpha = \begin{cases} 1, & \text{если } k_\alpha > 0,5, \\ 0, & \text{если } k_\alpha \leq 0,5. \end{cases} \quad (22)$$

В случае удовлетворения входной последовательностью (18) условия ортогональности (19), решение задачи квадратичной оптимизации (20), (21) можно определить по формуле

$$K = (V^T \cdot V)^{-1} \cdot V^T \cdot Y_0 . \quad (23)$$

Рассмотрим вопрос определения оптимального значения импульсных характеристик $h_{i,v}[\bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho}, \bar{\tau}]$, $\bar{\tau} \in \Gamma_{i,v}$, $(\bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho}) \in D_{i,v}$, $v \in \{1, \dots, \lambda_i\}$, $i \in \{1, \dots, S\}$. Для этого определим номера компонентов вектора $H_1(i, v, (\bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho})_\alpha) = (h_{i,v}[(\bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho})_\alpha, \bar{\tau}_1], \dots, h_{i,v}[(\bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho})_\alpha, \bar{\tau}_{|\Gamma_{i,v}|}])^T$ среди компонентов вектора H . Рассмотрим компоненту $h_{i,v}[(\bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho})_\alpha, \bar{\tau}_\beta]$ вектора $H_1(i, v, (\bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho})_\alpha)$, где $\beta \in \{1, \dots, |\Gamma_{i,v}|\}$, $\alpha \in \{1, \dots, |L_{i,v}|\}$. Номер компоненты $h_{i,v}[(\bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho})_\alpha, \bar{\tau}_\beta]$ можно определить по формуле

$$\gamma = \sum_{\pi=1}^{i-1} \sum_{\xi=1}^{\lambda_\pi} |L_{\pi,\xi}| |\Gamma_{\pi,\xi}| + \sum_{\xi=1}^{v-1} \sum_{\mu=1}^{|L_{i,\xi}|} |\Gamma_{i,\xi}| + (\alpha - 1) |\Gamma_{i,\lambda_i}| + \beta. \quad (24)$$

Таким образом, при ортогональной последовательности (18) решение задачи (16), (17), т.е. оптимальное $h_{i,v}[(\bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho})_\alpha, \bar{\tau}_\beta]$, $\beta \in \{1, \dots, |\Gamma_{i,v}|\}$, $\alpha \in \{1, \dots, |L_{i,v}|\}$, $v \in \{1, \dots, \lambda_i\}$, $i \in \{1, \dots, S\}$, можно определить по следующей последовательности: определение вектора K – решения задачи (20), (21), по формуле (23); для каждого $\beta \in \{1, \dots, |\Gamma_{i,v}|\}$, $\alpha \in \{1, \dots, |L_{i,v}|\}$, $v \in \{1, \dots, \lambda_i\}$, $i \in \{1, \dots, S\}$ определение $h_{i,v}[(\bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho})_\alpha, \bar{\tau}_\beta]$ по формуле

$$h_{i,v}[(\bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho})_\alpha, \bar{\tau}_\beta] = \begin{cases} 1, & \text{если } k_\gamma > 0,5, \\ 0, & \text{если } k_\gamma \leq 0,5, \end{cases}$$

где γ определяется по формуле (24).

4. Решение задачи оптимального синтеза 4D-НМДС при произвольных входных последовательностях

Пусть входная последовательность (11) суть произвольная неизвестная двоичная последовательность. Тогда элементы матрицы U , образованной по формулам (5), (6), неизвестны, и условие ортогональности (12) не выполняется. По этой причине решение задачи оптимального синтеза (2), (4) на основе существующих методов невозможно, так как для решения задачи оптимизации этими методами должны быть известны значения элементов матрицы U или ее какие-либо свойства. Поэтому для решения поставленной задачи необходима разработка специального метода, основанного на ортогонализации входной последовательности, которая будет поступать на вход 4D-НМДС. Для реализации этого поставим на вход 4D-НМДС специальные преобразователи, с помощью которых входная последовательность (11) преобразуется в специальные ортогональные последовательности

$$\{v_{i,v}[n, c_1, c_2] : n \in [0, N], c_1 \in [0, C_1], c_2 \in [0, C_2], c_3 \in [0, C_3]\}, \quad v \in \{1, \dots, \lambda_i\}, \quad i \in \{1, \dots, S\}.$$

Для каждого $v \in \{1, \dots, \lambda_i\}$, $i \in \{1, \dots, S\}$, в качестве преобразователя можно использовать линейную модулярную систему, описываемую следующим уравнением:

$$v_{i,v}[n, c_1, c_2, c_3] = \sum_{m=0}^{n-1} g_{i,v}[n-m-1, c_1, c_2, c_3] u[m, c_1, c_2, c_3] + g_{i,v}[n, c_1, c_2, c_3], \quad GF(2), \quad (25)$$

где $g_{i,v}[n, c_1, c_2, c_3]$ является импульсной характеристикой соответствующего преобразователя. Выход преобразователя (25) подается на вход тех блоков 4D-НМДС (2), которые соответствуют $\langle i, v \rangle$, где $v \in \{1, \dots, \lambda_i\}$, $i \in \{1, \dots, S\}$. Для каждого $v \in \{1, \dots, \lambda_i\}$, $i \in \{1, \dots, S\}$, при известной последовательности $\{v_{i,v}[n, c_1, c_2] : n \in [0, N], c_1 \in [0, C_1], c_2 \in [0, C_2], c_3 \in [0, C_3]\}$, импульсную характеристику преобразователя (25) можно определить по формуле

$$g_{i,v}[n, c_1, c_2, c_3] = \sum_{m=0}^{n-1} g_{i,v}[n-m-1, c_1, c_2, c_3] u[m, c_1, c_2, c_3] + v_{i,v}[n, c_1, c_2, c_3], \quad GF(2).$$

Таким образом, для решения задачи синтеза 4D-НМДС с произвольными неизвестными входными последовательностями сначала осуществляем ортогонализацию ее входной последовательности, а после этого, применяя методику решения задачи синтеза 4D-НМДС с ортогональными входными последовательностями, рассмотренную в разделе 3, решаем поставленную задачу.

Заключение

В работе задача оптимального синтеза одного класса двоичных 4D-НМДС, заданных двухзначным аналогом полинома Вольтерры, сформирована как задача квадратичной оптимизации. Получен матричный вид задачи оптимального синтеза. Введены понятие ортогональной входной последовательности для двоичных 4D-НМДС. Приведена методика решения задачи оптимального синтеза двоичных 4D-НМДС с ортогональными входными последовательностями. А для решения задачи оптимального синтеза двоичных 4D-НМДС с произвольными двоичными входными последовательностями предложена методика, основанная на привлечении специальных ортогональных последовательностей. Отметим, что ортогональные последовательности строятся на основе условий ортогональности, учитывающих особенности рассматриваемой МДС. Поэтому в дальнейшем, во-первых, необходимо найти такие условия и, во-вторых, на основе этих условий разработать алгоритм для построения ортогональных входных последовательностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гилл А. Линейные последовательностные машины. М.: Наука, 1974. 288 с.
2. Фараджев Р.Г. Линейные последовательностные машины. М.: Сов. радио, 1975. 248 с.
3. Блюмин С.Л., Фараджев Р.Г. Анализ и синтез конечных линейных последовательностно-клеточных машин // Автоматика и телемеханика. 1981. № 6. С. 57–66.
4. Блюмин С.Л., Фараджев Р.Г. Линейные клеточные машины: подход пространства состояний (обзор) // Автоматика и телемеханика. 1982. № 2. С. 125–163.
5. Фараджев Р.Г., Фейзиев Ф.Г. Методы и алгоритмы решения задачи квадратичной оптимизации для двоичных последовательностных машин. Баку: Элм, 1996. 180 с.
6. Фейзиев Ф.Г., Фараджева М.Р. Модулярные последовательностные машины: основные результаты по теории и приложению. Баку: Элм, 2006. 234 с.
7. Фейзиев Ф.Г., Самедова З.А. Полиномиальное соотношение для представления полной реакции 3D-нелинейных модулярных динамических систем // Электронное моделирование. 2011. Т. 33, № 2. С. 33–50.
8. Блейхут Р. Теория и практика кодов, контролирующих ошибки. М.: Мир, 1986. 576 с.
9. Байбатшаев М.Ш. Синтез одного класса систем с двоичной нелинейной последовательностной машиной для управления непрерывным объектом // Сборник трудов ВНИИСИ. 1978. Вып. 1. С. 48–58.
10. Блюмин С.Л., Корнеев А.М. Дискретное моделирование систем автоматизации и управления. Липецк: Липецк. эколого-гуманитар. ин-т, 2005. 124 с.
11. Nagiyev A.T., Feyziyev F.G. The sequential cellular-machining model of the continuous objects with distributing parameters // Seminarberichte, Fachbereich Mathematic. 2001. Bd. 71. S. 31–43.
12. Кожевников В.С., Матюшин И.В. Вычисление детерминанта и произведения матриц в структуре клеточного автомата // Прикладная дискретная математика. 2019. № 46. С. 88–107.
13. Фараджев Р.Г., Нагиев А.Т., Гусейнов И.Н. Критерии диагностируемости билинейных последовательностных машин // Доклады РАН. 1998. Т. 361, № 5. С. 606–607.
14. Сперанский Д.В. Нечеткое двоичное логическое моделирование // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 27. С. 4–9.
15. Сперанский Д.В. Эксперименты с нечеткими автоматами // Автоматика и телемеханика. 2015. № 2. С. 107–124.
16. Сперанский Д.В. Эксперименты с нестационарными билинейными автоматами // Автоматика и телемеханика. 2015. № 9. С. 161–174.
17. Hacı Y. Optimal control problem for processes with multiparametric binary linear difference equation system // Applied and computational mathematics. 2009. V. 8, No. 2. P. 263–269.
18. Hacı Y., Özen K. Terminal optimal control problem for processes represented by nonlinear multi-parametric binary dynamical system // Control and cybernetics. 2009. V. 38, No. 3. P. 625–633.
19. Hacı Y., Candan M., Or A. On the Principle of Optimality for Linear Stochastic Dynamical System // International Journal in Foundations of Computer Science and Technology. 2016. V. 6, No. 1. P. 57–63.
20. Байбатшаев М.Ш., Попков Ю.С. Об одной задаче квадратичной оптимизации двоичных нелинейных последовательностных машин // Автоматика и телемеханика. 1978. № 12. С. 37–47.
21. Фараджев Р.Г., Фейзиев Ф.Г. К задаче квадратичной оптимизации для двоичных многомерных нелинейных последовательностно-клеточных машин // Автоматика и телемеханика. 1996. № 5. С. 104–119.

22. Фараджев Р.Г., Нагиев А.Т., Фейзи́ев Ф.Г. Аналитическое описание и квадратичная оптимизация двоичных многомерных нелинейных последовательно-клеточных машин // Доклады РАН. 1998. Т. 360, № 6. С. 750–752.
23. Фейзи́ев Ф.Г., Абаева Н.Б. Полиномиальное соотношение для представления полной реакции одного класса двоичных 4D-модулярных динамических систем // Вестник Пермского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 2 (45). С 46–54.

Поступила в редакцию 12 февраля 2020 г.

Feyziyev F.G., Abayeva N.B. (2020) THE PROBLEM OF OPTIMAL SYNTHESIS OF BINARY 4D-NONLINEAR MODULAR DYNAMIC SYSTEMS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 53. pp. 102–109

DOI: 10.17223/19988605/53/10

Binary 4D-nonlinear modular dynamic system (4D-NMDS) with fixed memory n_0 , limited connection $P_1 \times P_2 \times P_3$, degree S , described in the form of two-valued analogue of Volterra's polynomial is considered:

$$y[n, c_1, c_2, c_3] = \sum_{i=1}^S \sum_{v=1}^{\lambda_i} \sum_{(\bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho}) \in L_{i,v}} \sum_{\bar{\tau} \in \Gamma_{i,v}} h_{i,v}[\bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho}, \bar{\tau}] \prod_{(\alpha, \beta, \gamma) \in Q_{i,v}} \prod_{\xi_{\alpha, \beta, \gamma}=1}^{m_{\alpha, \beta, \gamma}} u[n - \tau(\alpha, \beta, \gamma, \xi_{\alpha, \beta, \gamma}), c_1 + p_1(j_\alpha), c_2 + p_2(\sigma_\beta), c_3 + p_3(\rho_\gamma)], GF(2). \quad (1)$$

Here $n \in [0, N] \equiv \{0, 1, \dots, N\}$, $c_\alpha \in [0, C_\alpha] \equiv \{0, 1, \dots, C_\alpha\}$, $\alpha = \overline{1, 3}$; $y[n, c_1, c_2, c_3]$ and $u[n, c_1, c_2, c_3]$ is a sequence over field $GF(2)$; $P_\alpha = \{p_\alpha(1), \dots, p_\alpha(r_\alpha)\}$, $-\infty < p_\alpha(1) < \dots < p_\alpha(r_\alpha) < \infty$, $p_\alpha(j) \in \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$, $j = 1, \dots, r_\alpha$, $\alpha = \overline{1, 3}$.

Let $\{y_0[n, c_1, c_2, c_3] : n \in [0, N]\}$, $c_1 \in [0, C_1]$, $c_2 \in [0, C_2]$, $c_3 \in [0, C_3]$, be desired output sequences of 4D-NMDS (1). Let an arbitrary binary unknown sequence enter the input 4D-NMDS (1)

$$\{u[n, c_1, c_2, c_3] : n \in [0, N], c_1 \in [0, C_1], c_2 \in [0, C_2], c_3 \in [0, C_3]\}. \quad (2)$$

The problems of the optimal synthesis of binary 4D-NMDS (1) consist in finding for all $(\bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho}) \in L_{i,v}$, $\bar{\tau} \in \Gamma_{i,v}$, $v \in \{1, \dots, \lambda_i\}$, $i \in \{1, \dots, S\}$, such $h_{i,v}[\bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho}, \bar{\tau}] \in \{0, 1\}$, for which the following functional is minimized

$$J = \sum_{n=0}^N \sum_{c_1 \in [0, C_1]} \sum_{c_2 \in [0, C_2]} \sum_{c_3 \in [0, C_3]} (y[n, c_1, c_2, c_3] - y_0[n, c_1, c_2, c_3])^2. \quad (3)$$

Based on the sequence (2), the matrix $U_0(i, v, \bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho}, \bar{\tau})$ is constructed. Based on the $U_0(i, v, \bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho}, \bar{\tau})$ and $h_{i,v}[\bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho}, \bar{\tau}]$, sequentially matrices $U_1(i, v, \bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho})$, $U_2(i, v)$, $U_3(i)$, U and vectors $H_1(i, v, \bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho})$, $H_2(i, v)$, $H_3(i)$, H are constructed respectively.

The matrix U and the vector H have the dimensions $(N+1)(C_1+1)(C_2+1)(C_3+1) \times R$ and R , respectively, where $R = \sum_{i=1}^S C_{(n_0+1)r_1 r_2 r_3}^i$.

The formulas (1) and (3) have the following matrix form:

$$Y = U \cdot H, GF(2), \quad J = (Y - Y_0)^T \cdot (Y - Y_0) \rightarrow \min. \quad (4)$$

If $S > 1$, then the input sequence is not orthogonal, i.e. does not satisfy the conditions. $U^T \cdot U = \text{diag}\{d_{1,1}, \dots, d_{R,R}\}$, $d_{\alpha, \alpha} > 0$, $\alpha = 1, \dots, R$. If different input sequences enter input different blocks 4D-NMDS (1), then it is possible that, together input sequences of all blocks 4D-NMDS (1) can be orthogonal input sequences. Let orthogonal sequences $v_{i,v}[n, c_1, c_2, c_3]$, $v \in \{1, \dots, \lambda_i\}$, $i \in \{1, \dots, S\}$, enters to input of 4D-NMDS (1) and the matrix V is formed from them. Then the solution to problem $Y = V \cdot H, GF(2)$, $J = (Y - Y_0)^T (Y - Y_0) \rightarrow \min$ is determined on the basis of the solution to the continuous problem of the quadratic optimization $Y = V \cdot K$, $J = (Y - Y_0)^T (Y - Y_0) \rightarrow \min$ as follows: if k_α and h_α are α -th components of vectors K and H respectively, then if $k_\alpha > 0.5$, then $h_\alpha = 1$, else $h_\alpha = 0$. The vector K is determined by the formula $K = (V^T \cdot V)^{-1} \cdot V^T \cdot Y_0$.

Also in the case of non-orthogonal input sequences, for solving problem (4) a technique, based on attracting special orthogonal sequences, is proposed.

Keywords: 4D-nonlinear modular dynamic system; Volterra's polynomial; problem of optimal synthesis; problem of quadratic optimization; orthogonal input sequences.

FEYZIYEV Fikrat Gulali (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Sumgait State University, Sumgait, Azerbaijan). E-mail: FeyziyevFG@mail.ru

ABAYEVA Nigar Bahram (Dissertant of Doktor philosophy (Ph.D) in Mathematics, Sumgait State University, Sumgait, Azerbaijan). E-mail: abayeveldar404@gmail.com

REFERENCES

1. Gill, A. (1974) *Lineynye posledovatel'nostnye mashiny* [Linear sequential circuits]. Translated from English. Moscow: Nauka.
2. Faradzhev, R.G. (1975) *Lineynye posledovatel'nostnye mashiny* [Linear sequential machines]. Moscow: Sovetskoe radio.
3. Blyumin, S.L. & Faradzhev, R.G. (1981) Analysis and design of finite linear sequential cellular machines. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 6. pp. 57–66.
4. Blyumin, S.L. & Faradzhev, R.G. (1982) Linear cellular machine: The approach of the state space (review). *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 2. pp. 125–163.
5. Faradzhev, R.G. & Feyziyev, F.G. (1996) *Metody i algoritmy resheniya zadachi kvadrachnoy optimizatsii dlya dvoichnykh posledova-tel'nostnykh mashin* [Methods and algorithms for solving quadratic optimization problem for binary sequential machines]. Baku: Elm.
6. Feyziyev, F.G. & Faradzheva, M.R. (2006) *Modulyarnye posledovatel'nostnye mashiny: osnovnye rezul'taty po teorii i prilozheniyu* [Modular sequential machine: The main results of the theory and application]. Baku: Elm.
7. Feyziyev, F.G. & Samedova, Z.A. (2011) Polinomial'noe sootnoshenie dlya predstavleniya polnoy reaktsii 3D-nelineynykh modularnykh dinamicheskikh sistem [Polynomial ratio to represent the full reaction 3D-nonlinear modular dynamical systems]. *Elektronnoe modelirovanie – Electronic Modeling*. 33(2). pp. 33–50.
8. Blahut, R. (1986) *Teoriya i praktika kodov, kontroliruyushchikh oshibki* [Theory and Practice of Error Control Codes]. Translated from English. Moscow: Mir.
9. Baybatshaev, M.Sh. (1978) Sintez odnogo klassa sistem s dvoichnoy nelineynoy posledovatel'nostnoy mashinoy dlya upravleniya nepreryvnyim ob"ektom [Design of one class of systems with a binary non-linear sequential machine for controlling a continuous object]. *Sbornik trudov VNIISI*. 1. pp. 48–58.
10. Blyumin, S.L. & Korneev, A.M. (2005) *Diskretnoe modelirovanie sistem avtomatizatsii i upravleniya* [Discrete modeling automation and control systems]. Lipetsk: LEHI.
11. Nagiyev, A.T. & Feyziyev, F.G. (2001) The sequential cellular-machining model of the continuous objects with distributing parameters. *Seminarberichte, Fachbereich Mathematic*. 71. pp. 31–43.
12. Kozhevnikov, V.S. & Matyushkin, I.V. (2019) Computation of a determinant and matrix product in cellular automata. *Prikladnaya diskretnaya matematika – Applied Mathematics*. 46. pp. 88–107. DOI: 10.17223/20710410/46/8
13. Faradzhev, R.G., Nagiyev, A.T. & Guseynov, I.N. (1998) Kriterii diagnostiruемости bilineynykh posledovatel'nostnykh mashin [The criteria of diagnosability for bilinear sequential machines]. *Doklady RAN*. 361(5). pp. 606–607.
14. Speranskiy, D.V. (2014) Fuzzy binary logic modeling for digital devices. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(27). pp. 4–9.
15. Speranskiy, D.V. (2015) Experiments with fuzzy finite state machines. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 2. pp. 107–124.
16. Speranskiy, D.V. (2015) Experiments with nonstationary bilinear finite state machines. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 9. pp. 161–174.
17. Haci, Y. (2009) Optimal control problem for processes with multiparametric binary linear difference equation system. *Applied and computational mathematics*. 8(2). pp. 263–269.
18. Haci, H. & Özen, K. (2009) Terminal optimal control problem for processes represented by nonlinear multiparametric binary dynamical system. *Control and Cybernetics*. 38(3). pp. 625–633.
19. Haci, Y., Candan, M. & Or, A. (2016) On the Principle of Optimality for Linear Stochastic Dynamical System. *Intentional Journal in Foundations of Computer Science and Technology*. 6(1). pp. 57–63. DOI: 10.5121/ijfcs.2016.6105
20. Baybatshaev, M.Sh. & Popkov, Yu.S. (1978) Ob odnoy zadache kvadrachnoy optimizatsii dvoichnykh nelineynykh posledovatel'nostnykh mashin [On one quadratic optimization problem for binary nonlinear sequential machines]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 12. pp. 37–47.
21. Faradzhev, R.G. & Feyziyev, F.G. (1996) K zadache kvadrachnoy optimizatsii dlya dvoichnykh mnogomernykh nelineynykh posledova-tel'nostno-kletochnykh mashin [To the quadratic optimization problem for binary many-dimensional nonlinear sequential - cellular machines]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 5. pp. 104–119.
22. Faradzhev, R.G., Nagiyev, A.T. & Feyziyev, F.G. (1998) Analiticheskoe opisaniye i kvadrachnaya optimizatsiya dvoichnykh mnogomernykh nelineynykh posledovatel'nostno-kletochnykh mashin [Analytical description and quadratic optimization of binary many-dimensional nonlinear sequential - cellular machines]. *Doklady RAN*. 360(5). pp. 750–752.
23. Feyziyev, F.G. & Abaeva, N.B. (2019) The polynomial ratio for description of full reaction of one classes binary 4D-multidimensional modular dynamic systems. *Vestnik Permskogo universiteta. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika*. 2(45). pp. 46–54. DOI: 10.17072/1993-0550-2019-2-46-54

ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

УДК 004.434

DOI: 10.17223/19988605/53/11

И.А. Жуков, Ю.Л. Костюк

МОДЕЛЬ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МНГОВАРИАНТНЫХ ЗАДАНИЙ ДЛЯ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ ПО ПРОГРАММИРОВАНИЮ

Рассмотрена проблема автоматизированного контроля знаний при обучении программированию. Существующий подход к проверке программ, основанный на тестировании методом черного ящика, исключает автоматизированный семантический анализ программного кода. Описана модель представления многовариантных заданий, основанная на конструктивно-выборочном методе. Предложен формальный язык описания заданий при помощи множества шаблонов. Разработаны два алгоритма автоматизированного контроля знаний.

Ключевые слова: автоматизированный контроль знаний; конструктивно-выборочный метод; обучение программированию.

Вопросы автоматизации контроля знаний актуальны на протяжении многих лет. В частности, технологии автоматизированного контроля применяются для дисциплин укрупненных групп специальностей и направлений (УГСН) 02.00.00 «Компьютерные и информационные науки» и 09.00.00 «Информатика и вычислительная техника». Большинство профессиональных дисциплин данных УГСН связано с программированием. Многие авторы ищут новые подходы для совершенствования традиционного метода обучения программированию. Автор [1] предлагает применять методики, использующие интерактивные технологии и стимулирующие методы. Проведен анализ успеваемости двух групп: экспериментальной, для которой лекционные занятия строились на основе специально созданного программного комплекса, и контрольной, в которой применялась традиционная методика преподавания. Автор отмечает, что уровень знаний в экспериментальной группе оказался выше, чем в контрольной. Сделан вывод, что при обучении программированию более эффективными будут отход от традиционных методов преподавания и внедрение в обучение новых методик, использующих интерактивные технологии и стимулирующие методы.

Важную роль в учебном процессе играет контроль знаний. Основным методом автоматизированного контроля знаний является альтернативно-выборочный метод (тесты). Для изучения основ программирования такой метод применим. Например, в [2] описан разработанный авторами алгоритм генерации тестов для проверки теоретических знаний и навыков владения студентами языком программирования в рамках дисциплины «Основы программирования на языке Delphi 7.0». Отметим, что для проверки навыков применяются тесты в формате: «Что будет являться результатом работы приведенного фрагмента программного кода?»

Помимо тестов требуется более глубокий контроль, при котором обучающийся мог бы не просто выбирать один или несколько ответов из предложенных. Многие стараются решить этот вопрос, разрабатывая новые методики и техники контроля знаний или поддержки процесса обучения. Например, авторы [3] разрабатывают систему поддержки обучения тестированию программного обеспечения. Для этого они создали язык описания диаграмм, который основан на высказываниях, причем

каждое высказывание относится к одному из двух типов: «функция» или «ограничение». Язык может транслироваться в более «низкоуровневые» языки описания графов. Авторы [4] предлагают систему обучения программированию, в которой учащиеся составляют интеллект-карту для ответа на задание. Обсуждается идея игры по теме «Программирование», основанной на принципе интеллект-карты. Обучающемуся предлагается ряд задач, и ему следует выбрать несколько операторов, необходимых для решения задачи, их порядок, а затем выбрать типы данных для переменных.

Особенности обучения будущих программистов заключаются в том, что необходимо огромное количество практики, а именно написание тысяч строк программного кода. В образовательных программах предусмотрены лабораторные работы, в рамках которых обучающиеся разрабатывают программы для решения поставленных учебных задач. Преподаватель оценивает знания и полученные навыки обучающихся в ходе личной беседы или чтения отчетов. Одним из способов автоматизации этого процесса является автоматическое тестирование программ. В таком случае применяется поведенческое тестирование, где в качестве спецификации, в которой описаны входные данные и ожидаемый результат, используются условия задачи. Поведенческое тестирование также называют тестированием черного ящика [5], или тестированием методом черного ящика. Такой подход, например, используют авторы [6], которые разработали систему поддержки процесса обучения программированию, предлагающую задания в форме тестов для проверки теоретических знаний и тестирование программ для проверки умений и навыков. Для тестирования программ авторы используют набор тестов, включающий в себя входные и выходные данные, а также максимально допустимое время выполнения программы.

Является ли тестирование черного ящика решением проблемы автоматизации контроля практических навыков программирования? В [7, 8] рассматриваются различные подходы к автоматизации контроля знаний при обучении программированию. В работе [7] для контроля знаний по программированию, помимо тестирования теоретических знаний студентов, применяется автоматическое тестирование программ, написанных в рамках лабораторных работ. В [8] отмечена двойственность систем автоматизированного тестирования по программированию: для преподавателей выполняется формализованная проверка программы с отчетом о функциональности решений, а студентам необходимо применять творческие умения. Сделан вывод о недостаточности тестирования методом черного ящика, которое не позволяет определить реальные причины некорректной работы программы, так как полностью исключается семантический анализ программного кода. Заметим, что при обучении основам программирования студенты изучают определенный набор базовых алгоритмов. На лабораторных занятиях они пишут программный код, реализуя эти алгоритмы. Тестирование таких программ методом черного ящика не позволяет оценить уровень владения студентом тем или иным базовым алгоритмом. Например, проверка отсортированного массива свидетельствует только о том, произошла ли сортировка исходных данных, но не дает информации о степени владения студентом конкретными алгоритмами. Косвенным признаком может служить время исполнения программы, которое зависит от трудоемкости алгоритма. Однако единственным надежным способом является семантический анализ исходного кода программы. Таким образом, контроль ответа без контроля хода решения нельзя признать исчерпывающим. Тестирование методом черного ящика дает лишь представление о функционировании программы, но не о том, как она написана.

Оценка преподавателем программного кода, написанного каждым обучающимся, при массовом обучении требует больших затрат времени. Поэтому актуален вопрос создания инструментов, осуществляющих первичный (предварительный) контроль знаний базовых алгоритмов. При обучении основам программирования полезно давать обучающимся задания на составление решения (программного кода) из предложенных фрагментов (компонентов). Следует учесть, что в программировании многие фрагменты даже простейших программ могут быть написаны разными способами, но выполнять одно и то же действие. Такие задания будем в дальнейшем называть многовариантными.

В данной статье рассматривается задача автоматизации контроля решения многовариантных заданий, при котором исключается семантический анализ программного кода преподавателем вручную. Для этого разработана модель представления многовариантных заданий, а также алгоритм контроля.

1. Модель представления многовариантных заданий

В [9] изложена идея конструктивно-выборочного метода, при котором обучающийся составляет свой ответ из элементов, являющихся допустимыми смысловыми единицами. В дальнейшем такие единицы будем называть компонентами. Авторы [10] отмечают, что конструктивно-выборочный метод является более удачным, чем альтернативно-выборочный, так как требует творческого подхода от обучающегося и уменьшает вероятность угадывания правильного ответа. В программировании в качестве компонента логично взять одну строку программного кода. Даже для простейшей программы существуют десятки компонент, образующих в различных комбинациях правильные решения. Для преподавателя возможно три способа подбора компонентов:

- 1) из предложенных компонентов можно составить единственное верное решение, причем каждый компонент входит в верное решение;
- 2) из предложенных компонентов можно составить единственное верное решение, причем часть компонентов не входит в верное решение (т.е. являются избыточными);
- 3) из предложенных компонентов можно составить несколько верных решений, причем в каждом случае некоторые компоненты не входят в верное решение, а также допустимы компоненты, не входящие ни в одно решение.

Отметим, что каждый следующий способ подбора компонентов включает в себя предыдущие, которые для него являются частными случаями.

В разработанной модели за основу взят третий способ подбора компонентов, так как в программировании правильным решением конкретной задачи может быть множество программ. Обучающийся предлагает свой вариант решения в виде упорядоченной последовательности, составленной из множества предложенных компонентов. С формальной точки зрения вариант решения – конкретная упорядоченная последовательность компонентов. Вариант решения может быть правильным (верным) или неправильным (неверным). Все правильные варианты решения должны быть описаны конечным множеством шаблонов. Каждый шаблон состоит из элементов. С точки зрения программирования элемент – какое-либо действие, состоящее из одной или нескольких строк программного кода. То есть элемент – последовательность компонентов. В модели выделено три типа элементов: один компонент, один из компонентов, перестановка компонентов. Элемент «один из компонентов» представляет собой список компонентов, каждый из которых удовлетворяет верному решению, но любое верное решение содержит только один компонент из этого списка. Элемент «перестановка компонентов» представляет собой список компонентов, любая перестановка которых удовлетворяет верному решению.

Длиной шаблона будем называть количество элементов в шаблоне. Каждый шаблон для конкретного задания может иметь разную длину.

Предложенный обучающимся вариант решения оценивается в баллах. Максимальная оценка принята равной единице. Итоговый балл складывается из оценок за каждый элемент. Если итоговый балл попадает в интервал $(0, 1)$, то решение считается частично правильным. По умолчанию все элементы равнозначны, вес каждого элемента равен единице, деленной на длину шаблона. По усмотрению преподавателя элементам могут быть назначены разные веса.

Каждый элемент может быть отмечен как рубежный или как допускающий отсутствие (опциональный). Отсутствие непомянутого элемента добавляет в итоговую оценку 25% его веса. Если в ответе отсутствует элемент, отмеченный как «допускается отсутствие», при расчете итогового балла добавляется 50% веса пропущенного элемента. Если отсутствует рубежный элемент, то в итоговую оценку не добавляется ничего. Если в приведенном ответе отсутствуют все рубежные элементы, ответ оценивается в ноль баллов. Элемент «перестановка компонентов» не может быть помечен как рубежный. Любой элемент, стоящий после элемента «перестановка компонентов», всегда считается рубежным. Следовательно, любой шаблон не может содержать два элемента «перестановка компонентов» подряд. Один компонент может встречаться в нескольких элементах внутри одного шаблона, но два соседних элемента не могут содержать одинаковые компоненты.

2. Язык описания шаблонов

Для записи шаблонов разработан специализированный формальный язык. Описание предыдущей версии языка и выбранного алгоритма синтаксического анализа приведено в [11]. В данной статье обсуждается расширенная версия языка. Основным нововведением является возможность пометки элементов. Приведем описание языка в расширенной форме Бэкуса–Наура (РБНФ), жирным шрифтом выделены метасимволы, относящиеся к РБНФ:

Задание = Шаблон {"|" Шаблон}

Шаблон = "{" Элемент {";" Элемент} "}"

Элемент = "[**"**? ((ОдинКомпонент | ОдинИзКомпонентов) **"***" | ПерестановкаКомпонентов) **"**]"?

ОдинКомпонент = ИдентификаторКомпонента

ЦифрыБезНуля = "1" | "2" | "3" | "4" | "5" | "6" | "7" | "8" | "9"

Цифры = "0" | ЦифрыБезНуля

ИдентификаторКомпонента = ЦифрыБезНуля {Цифры}

ОдинИзКомпонентов = ОдинКомпонент "|" ОдинКомпонент {"|" ОдинКомпонент}

ПерестановкаКомпонентов = "(" ОдинКомпонент ";" ОдинКомпонент {";" ОдинКомпонент} ")".

В языке используются терминальные символы: круглые скобки, квадратные скобки, фигурные скобки, вертикальная черта («|»), точка с запятой и звездочка. Шаблоны разделяются вертикальной чертой. Компонент решения нумеруется целым числом, начиная с единицы. Элементы внутри шаблона разделяются точкой с запятой. В элементе «один из компонентов» компоненты разделяются вертикальной чертой. В элементе «перестановка компонентов» в круглых скобках записываются компоненты, разделенные точкой с запятой. Элемент, допускающий отсутствие, находится в квадратных скобках. Рубежный элемент помечается звездочкой.

Задание, записанное на языке шаблонов, транслируется в массив массивов словарей (формат JSON). Процесс трансляции состоит из трех этапов: лексический анализ, синтаксический анализ, трансформация дерева разбора. На входе лексический анализатор получает запись на языке шаблонов, выходом будет список лексем, после этого список лексем передается в синтаксический анализ, который строит дерево разбора. Затем при помощи специального алгоритма каждой вершине дерева ставится в соответствие запись в массиве массивов словарей. Шаблон представляется массивом словарей, задание – массивом шаблонов. Каждый элемент описывается словарем с тремя ключами: *type*, *components* и *flag*. Ключ *type* соответствует типу элемента; значением является целое число в интервале [1, 3], где 1 – один компонент, 2 – один из компонентов, 3 – перестановка. Ключ *flag* соответствует метке элемента; значением является целое число в интервале [0, 2], где 0 – метка отсутствует, 1 – рубежный элемент, 2 – элемент, допускающий отсутствие. Ключ *components* соответствует массиву компонентов, из которых состоит элемент.

Приведем пример задания по дисциплине «Основы программирования» на языке программирования Pascal и его записи на языке шаблонов.

Пример. Из заданных ниже компонентов составьте программу, результатом работы которой будет вычисление суммы всех элементов массива *m*. Длина массива *n*. Результат суммирования должен быть записан в переменную *S*.

- | | | | | |
|---------------------|--------------------|--------------|------------------|------------------|
| 1. S:=0; | 4. i:=1; | 7. i:=i + 1; | 10. repeat | 13. i++; |
| 2. for i:=1 to n do | 5. while i <= n do | 8. inc(i); | 11. until i > n; | 14. repeat do |
| 3. S:=S + m[i]; | 6. begin | 9. end; | 12. i += 1; | 15. until i < n; |

Обучающемуся для составление варианта решения предложено 15 компонентов, среди них есть избыточные компоненты: компоненты 7 и 8 идентичны по сути, компоненты 12–14 являются неверными с точки зрения синтаксиса языка Pascal, а компонент 15 не входит в какое-либо правильное решение.

Описания задания на языке шаблонов:

{[1];2;3*}{{(1;4);5;6;3*;7|8;9}{{(1;4);10;3*;7|8;11}}

Первый шаблон – [1];2;3*. Он состоит из трех элементов. Каждый элемент относится к типу «один компонент». Первый элемент помечен как допускающий отсутствие. Последний элемент помечен как рубежный. Для этого шаблона правильным вариантом решения будет упорядоченная последовательность компонентов 1, 2 и 3. Частично верным будет вариант 2;3.

Второй шаблон – (1;4);5;6;3*;7|8;9. Он состоит из шести элементов. Первый элемент относится к типу «перестановка компонентов». Элементы со второго по четвертый – «один компонент», четвертый элемент при этом помечен как рубежный. Пятый элемент – «один из компонентов». Шестой элемент – «один компонент». Для этого шаблона правильными вариантами решения будут четыре последовательности: 1;4;5;6;3;7;9, 1;4;5;6;3;8;9, 4;1;5;6;3;7;9, 4;1;5;6;3;8;9. Эти последовательности содержат компоненты 1, 4 в любом порядке, компоненты 5, 6, 3 в указанном порядке, один из компонентов 7 или 8 (но не оба сразу) и компонент 9.

Третий шаблон – (1;4);10;3*;7|8;11. Он состоит из пяти элементов. Первый элемент относится к типу «перестановка компонентов». Второй и третий элементы – «один компонент», при этом третий элемент помечен как рубежный. Четвертый элемент – «один из компонентов». Пятый элемент – «один компонент». Для этого шаблона правильными вариантами решения будут четыре последовательности: 1;4;10;3;7;11, 1;4;10;3;8;11, 4;1;10;3;7;11, 4;1;10;3;8;11. Эти последовательности содержат компоненты 1, 4 в любом порядке, компоненты 10 и 3 в указанном порядке, один из компонентов 7 или 8 (но не оба сразу) и компонент 11.

Для задания из примера 1 получим следующий массив массивов JSON-объектом:

```
[[{"type": 1, "components": [1], "flag": 2}, {"type": 1, "components": [2], "flag": 0}, {"type": 1, "components": [3], "flag": 1}], [{"type": 3, "components": [1, 4], "flag": 0}, {"type": 1, "components": [5], "flag": 1}, {"type": 1, "components": [6], "flag": 0}, {"type": 1, "components": [3], "flag": 1}, {"type": 2, "components": [7, 8], "flag": 0}, {"type": 1, "components": [9], "flag": 0}], [{"type": 3, "components": [1, 4], "flag": 0}, {"type": 1, "components": [10], "flag": 1}, {"type": 1, "components": [3], "flag": 1}, {"type": 2, "components": [7, 8], "flag": 0}, {"type": 1, "components": [11], "flag": 0}]]
```

3. Алгоритм контроля

Для автоматизированной оценки варианта решения авторами статьи предложен следующий алгоритм. Введем понятие эксперта. Экспертом в дальнейшем будем называть автомат, оценивающий соответствие варианта решения (входной последовательности) одному шаблону. Эксперт считывает по два значения из входной последовательности, если текущий элемент не является «перестановкой компонентов» или не помечен как рубежный. Для рубежного элемента эксперт считывает только одно значение. Для элемента «перестановка компонентов» эксперт просматривает все значения до следующего рубежного элемента. Эксперт оценивает соответствие считанной последовательности и текущего элемента, а затем выставляет оценку. Возможно 5 случаев:

- 1) считанная последовательность полностью соответствует элементу, т.е. компоненты, входящие в элемент, расположены в допустимом порядке, начиная с первого считанного значения;
- 2) считанная последовательность частично соответствует элементу, т.е. компоненты, входящие в элемент, расположены в допустимом порядке, начиная с элемента n считанной последовательности, тогда количество лишних компонентов увеличивается на $n - 1$;
- 3) считанная последовательность не соответствует элементу, тогда количество отсутствующих элементов увеличивается на 1;
- 4) если текущий элемент является рубежным и считанное значение не соответствует текущему элементу, то количество пропущенных рубежных элементов увеличивается на 1;
- 5) если текущий элемент помечен как допускающий отсутствие и считанная последовательность не соответствует текущему элементу, то количество пропущенных опциональных элементов увеличивается на 1.

В зависимости от результата сравнения эксперт перемещает метку текущего элемента на входной последовательности и независимо от результатов оценки переходит к следующему элементу. Эксперт выставляет представленному ответу оценку от 0 до 1.

Поскольку задание может быть описано более чем одним шаблоном, то один вариант решения может оцениваться более чем одним экспертом. Например, задание, описанное тремя шаблонами, оценивают три эксперта. Каждый из экспертов выставляет свою оценку, затем из них выбирается наибольшая. Альтернативой такому способу оценивания может быть алгоритм выбора эксперта. Алгоритм оценивает компетентность каждого эксперта для любого представленного варианта решения. Критерии оценки компетентности:

1. Насколько длина представленного варианта решения соответствует длине оцениваемой экспертом последовательности?

2. Насколько множество компонентов представленного ответа соответствует множеству компонентов оцениваемой экспертом последовательности?

3. Насколько множество компонентов оцениваемой экспертом последовательности покрывает множество компонентов, из которых может быть составлен ответ на задание?

4. Сколько рубежных для эксперта элементов присутствует в представленном варианте решения?

Эксперту, получившему наибольшую оценку, алгоритм передает оцениваемую последовательность. Оценка, выставленная выбранным экспертом, будет оценкой представленного обучающимся варианта решения.

Рассмотрим работу алгоритма оценивания на примерах. Будем использовать задание из примера, представленного выше. Пусть обучающимся предложен вариант решения “1;4;5;6;3;8;9”. Этот вариант решения является верным и соответствует шаблону 2, который оценивает эксперт 2. Результаты оценки экспертов приведены в табл. 1.

Таблица 1

Результаты оценки предложенного варианта решения

Эксперт	Оценка	Лишних компонентов	Отсутствует элементов	Отсутствует опциональных элементов	Отсутствует рубежных элементов
1	0	3	1	0	1
2	1	0	0	0	0
3	0	1	4	0	2

Алгоритм выбора эксперта подтверждает, что эксперт 2 имеет наибольшую оценку компетентности для предложенного варианта решения. Результаты оценки компетентности приведены в табл. 2.

Таблица 2

Выбор эксперта для оценки предложенного варианта решения

Эксперт	Оценка компетентности	Критерий 1	Критерий 2	Критерий 3	Критерий 4
1	3,106	2,333	0,273	0,667	1
2	3,186	1,167	0,273	0,875	1
3	2,408	1,4	0,636	0,571	0,5

Пусть обучающимся дан ответ “2;4;10;3;8;11”. Этот вариант решения является частично верным и частично соответствует шаблону 3, который оценивает эксперт 3. Результаты оценки экспертов приведены в табл. 3.

Таблица 3

Результаты оценки предложенного варианта решения

Эксперт	Оценка	Лишних компонентов	Отсутствует элементов	Отсутствует опциональных элементов	Отсутствует рубежных элементов
1	0	0	3	0	0
2	0,167	0	4	0	1
3	0,75	1	1	0	1

Алгоритм выбора эксперта подтверждает, что эксперт 3 имеет наибольшую оценку компетентности для предложенного варианта решения. Результаты оценки компетентности приведены в табл. 4.

Выбор эксперта для оценки предложенного варианта решения

Эксперт	Оценка компетентности	Критерий 1	Критерий 2	Критерий 3	Критерий 4
1	2,939	2	0,273	0,667	1
2	2,102	1	0,273	0,375	0,5
3	2,951	1,2	0,636	0,714	1

Из табл. 1–4 можно сделать вывод, что алгоритм выбора эксперта достаточно эффективен.

Заключение

В результате решения задачи автоматизации контроля знаний в области основ программирования разработаны модель представления многовариантных заданий, язык описания шаблонов и алгоритм контроля знаний. Их применение к реальным задачам дало положительные результаты. Разработанный алгоритм решает проблему автоматизированной проверки программ методом белого ящика и позволяет осуществлять полноценную интеллектуальную автоматизированную проверку знаний в области основ программирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гимранова Ф.Э. Экспериментальная апробация программного комплекса на основе интернет-сервисов для обучения программированию студентов учреждений среднего профессионального образования // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. 2018. № 3 (99). С. 163–169.
2. Магомедов А.М., Лавренченко С.А., Ибрагимова З.И. Алгоритм автоматизации создания тестов // Вестник Дагестанского государственного университета. Сер. 1. Естественные науки. 2019. Т. 34, № 2. С. 63–71.
3. Полевщиков И.С., Баяндин К.Н. Разработка и применение средств автоматизации для обучения навыкам тестирования программного обеспечения (на примере методов «черного ящика») // Научно-технический вестник Поволжья. 2019. № 12. С. 88–91.
4. Кукарских К.А., Баранова К.С. Интеллект-карта в организации контроля знаний по программированию // Математическое и информационное моделирование : сб. науч. тр. / Тюмен. гос. ун-т, Ин-т математики и компьютерных наук. Тюмень : Изд-во Тюмен. гос. ун-та, 2019. С. 303–311.
5. Бейзер Б. Тестирование черного ящика технологии функционального тестирования программного обеспечения и систем // СПб. Питер. 2004: [пер. с англ.] 317 с.
6. Плеско М.С., Антипин А.Ф. Автоматизированная система поддержки процесса обучения программированию // Colloquium-journal. 2018. № 6-1. С. 48–54.
7. Антипин А.Ф. О разработке сетевой автоматизированной системы для контроля знаний по программированию // Современные наукоемкие технологии. 2016. № 10-1. С. 19–23.
8. Гладких И.Ю., Якушин А.В. Системы автоматизированного тестирования по программированию в образовательном пространстве // Современные проблемы науки и образования. 2016. № 3. С. 326.
9. Довгялло А.М., Ющенко Е.Л. Программированный учебник // Энциклопедия кибернетики. Киев : Гл. ред. УСЭ, 1975. Т. 2. С. 243–244.
10. Шевелев М.Ю., Вишнякова Л.А., Шевелев Ю.П. Контроль знаний в компьютерном обучении. Неантропоморфный подход. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014. 395 с.
11. Жуков И.А., Костюк Ю.Л. Модель представления заданий с многовариантными ответами для автоматизированного тестирования // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2019) : материалы XVIII Междунар. конф. им. А.Ф.Терпугова, 26–30 июня 2019 г. Томск : Изд-во НТЛ, 2019. Ч. 1. С. 31–36.

Поступила в редакцию 28 мая 2020 г.

Zhukov I.A., Kostyuk Yu.L. (2020) MODEL OF REPRESENTATION OF MULTIVARIATE TASKS FOR AUTOMATED CONTROL OF PROGRAMMING KNOWLEDGE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika*. [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 53. pp. 110–117

DOI: 10.17223/19988605/53/11

One way to automate the process of monitoring the practical skills of students in programming is to automatically test programs. Testing programs by the black box method does not allow assessing the student's level of proficiency in one or another basic algorithm. Evaluation by a teacher of the program code written by each student during mass learning is time-consuming. Therefore, the issue of

creating tools that carry out primary (preliminary) control of knowledge of basic algorithms is relevant. The authors of this article set the task of automating assessment of solving multivariate tasks, excluding semantic analysis of the program code manually by a teacher.

A model for the representation of multivariate tasks based on the constructive-selective method is developed. The student composes his answer from elements that are valid semantic units, which in the model are called components. The student offers his own variant of solution in the form of an ordered sequence composed of the proposed components. The solution may be right or wrong. All the correct solutions should be described by a finite set of patterns. Each pattern consists of elements. From a programming point of view, an element is an action that consist of one or more lines of program code. Three types of elements are distinguished in the model: one component, one of the components, permutation of components. The solution proposed by the student is evaluated in points. The maximum score is taken equal to one. The total score is made up of points for each element. The solution is considered partially correct if the final score falls within the interval (0, 1). A specialized formal language for describing patterns has been developed.

Algorithm for automated assessment of a variant of solution is proposed by the authors of the article. The automaton, called the expert, evaluates the correspondence of the solution variant (input sequence) to one pattern. The expert evaluates the correspondence of the read sequence and the current element, and then puts a mark. Since the task can be described by more than one pattern, one solution can be evaluated by more than one expert. For example, a task described by three patterns is evaluated by three experts. Each expert gives his own score, then the highest one is selected from them. An alternative to this method of assessment may be an expert selection algorithm. The algorithm evaluates the competence of each expert for any presented solution. To the expert who received the highest rating will be chosen to assess given variant of solution. Score given by the selected expert will be the score of the solution presented by the student.

As a result of solving the task of automating knowledge control in the field of programming basics, a model for representing multivariate tasks, a template description language, and a knowledge control algorithm are developed. Their application to real tasks yielded positive results. Developed algorithm solves the problem of automated assessment of programs using the white box method and allows full-fledged intelligent automated knowledge assessment in the field of programming basics.

Keywords: automated knowledge assessment; constructive-selective method; learning programming.

ZHUKOV Igor Andreevich (Post-graduate Student, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: Ig.Zhukov963@yandex.ru

KOSTYUK Yuriy Leonidovich (Doctor of Technical Sciences, Professor, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation).

E-mail: kostyuk_y_1@sibmail.com

REFERENCES

1. Gimranova, F.E (2018) Experimental testing of software package based on internet services for teaching programming in the system of secondary vocational education. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ya. Yakovleva – I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Bulletin*. 3(99). pp. 163–169.
2. Magomedov, A.M., Lavrenchenko, S.A. & Ibragimova, Z.I. (2019) Algorithm for automating test creation. *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. 1. Estestvennye nauki – Herald of Dagestan State University. Series 1. Natural Sciences*. 34(2). pp. 63–71.
3. Polevshchikov, I.S. & Bayandin, K.N. (2019) Development and application of automation tools for teaching software testing skills (on the example of “black box” methods). *Nauchno-tekhnicheskiiy vestnik Povolzh'ya – Scientific and Technical Volga region Bulletin*. 12. pp. 88–91.
4. Kukarskikh, K.A. & Baranova, K.S. (2019) Intellect-karta v organizatsii kontrolya znaniy po programmirovaniyu [Intellect map in the organization of knowledge control in programming]. In: Ivashko, A.G. (ed.) *Matematicheskoe i informatsionnoe modelirovanie [Mathematical and information modeling]*. Tyumen: Tyumen State University. pp. 303–311.
5. Beizer, B. (2004) *Testirovanie chernogo yashchika tekhnologii funktsional'nogo testirovaniya programmnoy obespecheniya i system* [Testing the black box of functional testing technology for software and systems]. St. Petersburg: Piter.
6. Plesko, M.S. & Antipin, A.F. (2018) Automated system for supporting the learning process of programming. *Colloquium-Journal*. 6-1. pp. 48–54.
7. Antipin, A.F. (2016) About the development of the network automated system for control of knowledge in programming. *Sovremennyye Naukoemkie Tekhnologii – Modern High Technologies*. 10-1. pp. 19–23.
8. Gladkikh, I.Yu. & Yakushin, A.V. (2016) System of automated testing programs in learning environment. *Sovremennyye problemy nauki i obrazovaniya – Modern Problems of Science and Education*. 3. pp. 326.
9. Dovgiallo, A.M. & Yushchenko, E.L. (1975) Programmirovannyy uchebnik [Programmed textbook]. *Entsiklopediya kibernetiki*. 2. pp. 243–244.
10. Shevelev, M.Yu., Vishnyakova, L.A. & Shevelev, Yu.P. (2014) *Kontrol' znaniy v komp'yuternom obuchenii. Neantropomorfnyy podkhod* [Knowledge control in computer learning. Non-anthropomorphic approach]. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing.
11. Zhukov, I.A. & Kostyuk, Yu.L. (2019) [Model for the presentation of tasks with multivariate answers for automated testing]. *Informatsionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie (ITMM-2019)* [Information technologies and mathematical modeling (ITMM-2019)]. Proc. of the 18th International Conference. Tomsk, June 26–30, 2019. Tomsk: NTL. pp. 31–36.

УДК 004, 004.05, 004.4
DOI: 10.17223/19988605/53/12

В.А. Непомнящий, Е.В. Бодин, С.О. Веретнов

АНАЛИЗ И ВЕРИФИКАЦИЯ SDL-СПЕЦИФИКАЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ ЯЗЫКА DYNAMIC-REAL

Описан новый программный комплекс SRDSVer3 (SDL/REAL Distributed Systems Verifier), предназначенный для моделирования, анализа и верификации SDL-спецификаций распределенных систем. Он включает транслятор из языка SDL в разработанный ранее язык Dynamic-REAL (dREAL), системы автоматического моделирования dREAL-спецификаций и их верификации с помощью системы SPIN. Этот комплекс применяется для верификации системы управления сетью банкоматов.

Ключевые слова: верификация распределенных систем; анализ распределенных систем; трансляция; SDL; SPIN.

В последние годы заметно возрастает роль формальных методов, применяемых для разработки распределенных систем, таких как системы управления и коммуникационные протоколы. Для разработки и спецификации распределенных систем часто используется язык SDL [1–3]. Поэтому проблема анализа и верификации SDL-спецификаций является актуальной.

Эта проблема рассматривалась в работе [4], где описано применение системы SPIN для верификации SDL-спецификаций с использованием промежуточного языка IF [5]. В отличие от этого подхода, в нашем подходе наряду с системой верификации SPIN применяется система моделирования поведения SDL-спецификаций, а также система поиска ошибок в SDL-спецификациях с помощью полученных контрпримеров. Это позволяет проводить анализ SDL-спецификаций и тогда, когда система SPIN неприменима.

В данной работе описывается новый программный комплекс SRDSVer3 (SDL/REAL Distributed Systems Verifier), предназначенный для моделирования, анализа и верификации SDL-спецификаций. Данный комплекс использует промежуточный язык спецификаций Dynamic-REAL (dREAL) [6].

Входной язык этого комплекса включает базовые конструкции языка SDL-2010, такие как BLOCK, PROCESS, SIGNALROUTE, CHANNEL, SAVE. Для описания свойств SDL-спецификаций используется язык SPLan (SDL Properties Language) [Там же], основанный на логике линейного времени (LTL), расширенной кванторами по экземплярам процессов. Для моделирования и анализа SDL-спецификаций также используется язык запросов. Для верификации SDL-спецификаций используется транслятор из языка dREAL во входной язык Promela системы верификации SPIN.

Описанный подход применяется для верификации и анализа динамической системы управления сетью банкоматов. Были рассмотрены две версии такой системы: корректная версия и версия, содержащая логическую ошибку. С помощью этого подхода данная ошибка была обнаружена.

Заметим, что в работе [7] описано применение системы SPIN для верификации системы управления сетью банкоматов, заданной на языке Promela. Однако система управления сетью банкоматов, описанная в разд. 5, является более мощной, а ее спецификация на языке SDL более точно описывает поведение сетей банкоматов.

1. Программный комплекс для моделирования, анализа и верификации SDL-спецификаций

Программный комплекс SRDSVer3 предназначен для моделирования, анализа и верификации спецификаций, представленных на языке SDL, с помощью промежуточного языка dREAL.

Комплекс SRDSVer3 (рис. 1) состоит из следующих компонентов:

- Транслятор1 переводит SDL-спецификацию в dREAL-спецификацию.
- Конвертер2 переводит запросы для SDL-спецификаций в запросы для dREAL-спецификаций.
- Система моделирования проводит анализ dREAL-спецификаций с помощью пользовательских запросов. Если запрос выполняется, конфигурация системы и результаты передаются в Конвертер4. В противном случае пользователь получает сообщение о невыполнении запроса.

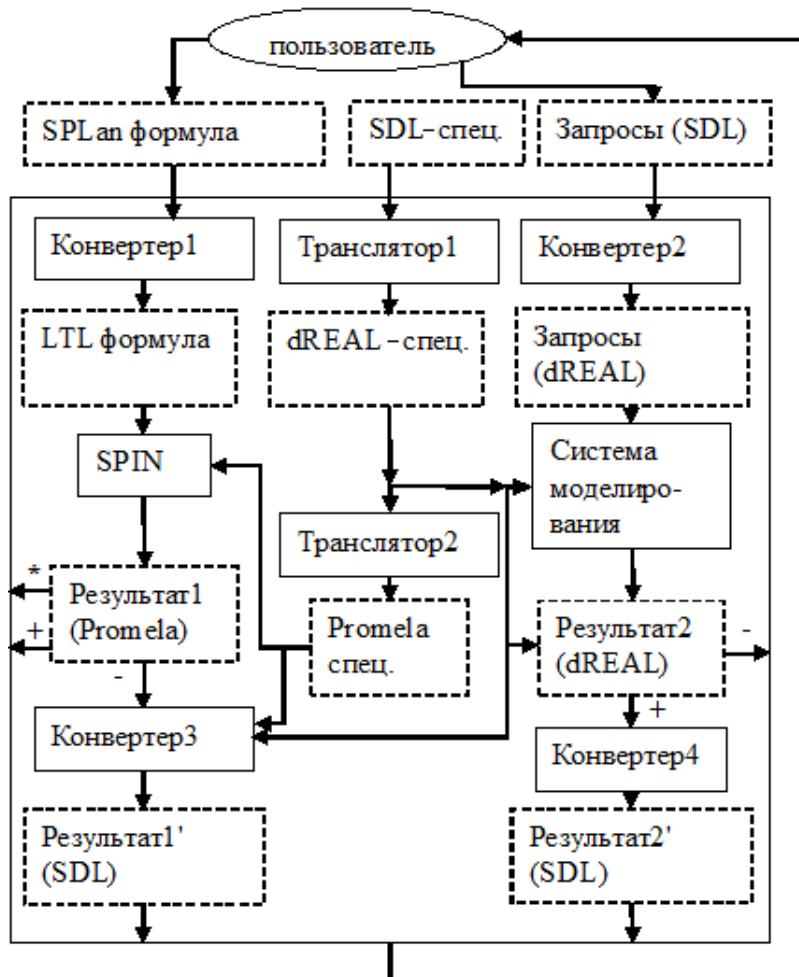


Рис. 1 Программный комплекс SRDSVer3
Fig. 1. Software package SRDSVer3

– Конвертер4 переводит Результат2 работы Системы моделирования из терминов dREAL в термины SDL. На выходе пользователь получает номер строки исходной SDL-спецификации, где выполняются условия запроса, и конфигурацию моделируемой системы в момент выполнения этих условий.

- Транслятор2 переводит dREAL-спецификацию в Promela-спецификацию.
- Конвертер1 переводит SPLan-формулу для SDL-спецификации в LTL-формулу.
- Система верификации SPIN проверяет Promela-спецификацию, полученную от Транслятора2, с учетом LTL-формулы, полученной от Конвертера1.
- Конвертер3 переводит Результат1 верификации системой SPIN в Результат1' в терминах SDL.

Поэтому пользователь получает номер строки в исходной SDL-спецификации, где свойство, заданное LTL-формулой, не выполняется. Если это свойство выполняется, то пользователь получает соответствующее сообщение. Если при верификации Promela-спецификации не хватило памяти или размера массивов, пользователь также получает соответствующее сообщение (отмечено на рисунке звездочкой).

2. Транслятор из SDL в dREAL

Результатом работы этого транслятора является dREAL-спецификация, эквивалентная входной SDL-спецификации. Блоки, процессы, типы данных и переменные языка SDL имеют прямые аналоги в языке dREAL. В языке dREAL процессы соединены каналами, причем каждый канал хранит проходящие по нему сигналы независимо от других каналов, в отличие от общего входного буфера процесса в языке SDL. Каналы языка dREAL однонаправленные и не могут разветвляться, в отличие от каналов и маршрутов языка SDL. Операторы DECISION, EXPORT, IMPORT и динамические конструкции преобразуются в соответствующие конструкции языка dREAL. Процедуры и макрокоманды развертываются в теле спецификации. Детали трансляции представлены в [6].

Каждый экземпляр процесса может порождать или уничтожать экземпляры процессов в своем блоке. Подобно языку SDL, в языке dREAL количество экземпляров, существующих с самого начала, и максимально возможное количество экземпляров определяются в заголовке процесса.

Одним из основных отличий языка SDL от языка dREAL является различный механизм передачи сигналов от процесса к процессу. В языке SDL все входные сигналы хранятся в порядке их поступления в едином буфере процесса, а не в том канале, в который они поступили, как в языке dREAL. При трансляции в каждом блоке dREAL-спецификации создается процесс-буфер. Все каналы от одного процесса к другому перенаправляются в процесс-буфер, а из него выходит один канал до целевого процесса. Процесс-буфер читает приходящие сигналы и записывает их в этот канал. Таким образом, в единственном входном канале процесса все входящие сигналы расположены в порядке их поступления в процесс-буфер. В случае одновременного поступления сигналов они располагаются во входном канале процесса в случайном порядке, как и в языке SDL.

В языке SDL сигнал удаляется из очереди, если не предусмотрена его обработка в текущем состоянии. В этом случае процесс пытается обработать следующий сигнал. В языке dREAL в этом случае процесс переходит в режим ожидания сигнала. При трансляции в каждом состоянии процесса добавляется обработка всех сигналов, которые могут приходить к нему. Если приходит сигнал, для которого в этом состоянии в исходной SDL-спецификации не предусмотрена обработка, то в результирующей dREAL-спецификации этот сигнал удаляется из канала.

Рассмотрим оператор SAVE языка SDL, который позволяет читать не первый пришедший сигнал, а следующий за ним, сохраняя при этом первый сигнал в общей очереди. Поскольку в языке dREAL такой конструкции нет, то моделируется поведение оператора SAVE. Все приходящие сигналы сохраняются в массиве, который моделирует общий буфер SDL-процесса. Далее процесс читает сигнал из этого массива по текущему индексу. В случае, если приходящий сигнал нужно сохранить в данном состоянии, процесс обрабатывает следующий сигнал по индексу, увеличенному на 1. При переходе в следующее SDL-состояние индекс, по которому процесс читает сигналы из массива, обнуляется, и процесс обрабатывает первый сигнал в очереди.

В языке SDL оператор PROVIDED <условие> позволяет принимать сигнал при выполнении этого условия. Если условие не выполняется, то сигнал сохраняется. Поэтому при трансляции в dREAL создается два альтернативных перехода с условным dREAL-оператором WHEN: первый переход для случая, когда условие выполнено, и тогда используется оператор READ для чтения из канала, и второй переход для случая, когда условие не выполнено, и тогда реализуется механизм для оператора SAVE.

3. Система моделирования dREAL-спецификаций

3.1. Язык запросов

Для языка запросов использованы конструкции языка SDL с добавлением служебных слов. Структура запроса представляет собой конструкцию:

Квантор Объект { If (условие) операция; } [Период]

Квантор может быть представлен квантором всеобщности All или существования Ex. Объект – это экземпляр процесса. Условие может представлять собой как отдельный предикат, так и конъюнкцию предикатов. Предикат может быть представлен отношением между переменными и параметрами, локатором контроля управления, контроллером пустоты или полноты канала, чекером присутствия сигнала в канале. Операция представляется с помощью следующих операторов: STOP – остановить процесс симуляции, PAUSE – приостановить процесс симуляции, PRINTLOG («сообщение») – записать «сообщение» в протокол работы системы. Период – это отрезок времени, за который система должна выполнить запрос и остановиться или остановить работу без выполнения запроса по истечении заданного времени.

3.2. Система моделирования

Система состоит из синтаксического анализатора, модуля моделирования, конструктора графа переходов и модуля обратного хода.

Система моделирования позволяет провести проверку ряда свойств dREAL-спецификации. Эта спецификация и запросы, выражающие ее свойства, передаются синтаксическому анализатору, который переводит их во внутреннее представление и передает модулю моделирования. Затем на каждом шаге рассматриваются все возможные состояния системы. Для каждого состояния получается конфигурация перехода, которая содержит значения переменных, состояния каналов и состояния процессов для этого шага моделирования. Модуль моделирования передает каждую новую конфигурацию конструктору графа переходов. На каждом шаге модуль моделирования проверяет истинность свойств, заданных запросами. Выполнение каждой ветки происходит до тех пор, пока не выполнится запрос, либо система не придет в завершающее состояние, либо не закончится время, заданное в запросе. Таким образом, модуль моделирования совершает полный обход спецификации во всех возможных конфигурациях. По окончании работы система сохраняет граф переходов.

Поскольку исходная спецификация представлена на языке SDL, то и результаты моделирования желательно представить в языке SDL. Модуль обратного хода предназначен для отображения в исходной SDL-спецификации результатов, полученных в ходе моделирования. В том случае, если в запросе используются только предикаты отношения между переменными или локаторы контроля состояния процесса, обратный ход не представляет сложности, поскольку имена исходных переменных, процессов и состояний совпадают с соответствующими именами в dREAL спецификации. В случае, если в dREAL запросе используются контроллеры пустоты / полноты канала или чекеры присутствия сигнала в канале, то анализируется, к какому процессу направлен канал. В SDL сигналы хранятся в буфере процесса, который принимает сигналы. Значит, при обратном ходе из dREAL в SDL процесс, к которому направлен канал, и будет хранить сигналы.

3.3. Конвертер запросов (Конвертер2)

Конвертер запросов переводит запросы из терминов SDL в термины dREAL. При этом имена переменных, состояний и процессов, использующихся в запросах, сохраняются без изменений, контроллеры пустоты / полноты буфера переходят в контроллеры пустоты / полноты канала от процесса-буфера в процесс, чекер присутствия сигнала в буфере переводится в чекер присутствия сигнала в канале от процесса-буфера к процессу.

4. Верификация SDL-спецификаций

Для верификации SDL-спецификаций используются Транслятор1, переводящий SDL-спецификацию в dREAL-спецификацию, и Транслятор2, переводящий ее в Promela-спецификацию для использования в системе SPIN. Свойства SDL-спецификаций переводятся в LTL-формулы при помощи Конвертера1 (см. рис. 1).

Текущая версия транслятора из языка dREAL в язык Promela ориентирована на использование современной версии SPIN [8].

Временные конструкции. Поскольку в Promela отсутствуют встроенные средства для моделирования временных интервалов, для их моделирования в выходную Promela-спецификацию добавляется глобальная переменная *TICK* и специальный процесс *clock*, который увеличивает ее значение.

Статические конструкции. Как и в SDL и dREAL, в языке Promela есть переменные, массивы, каналы и процессы. Чтобы избежать коллизии имен, состояния (метки в Promela), каналы и сигналы языка dREAL при переводе получают префиксы.

При посылке сигнала в канал добавляется параметр, означающий в языке Promela идентификатор данного экземпляра процесса, а значение этого параметра при чтении сигнала сохраняется в переменной *aSENDER*.

Процедуры. Процедуры dREAL транслируются в inline-макроопределения языка Promela. В процедурах могут использоваться локальные переменные, для которых (локальных переменных) используются Promela-переменные с ключевым словом *local*.

Динамические конструкции. В языке Promela число одновременно существующих экземпляров процессов не может превосходить 255, поэтому такое же ограничение должно выполняться для языка dREAL.

В языке dREAL уничтожение экземпляра процесса осуществляется оператором *STOP* в уничтожаемом процессе. В системе SPIN можно уничтожать только последний созданный экземпляр процесса, причем его PID будет переиспользован при создании следующего экземпляра процесса. Поэтому процессы языка Promela, завершившие работу, не уничтожаются, а останавливаются в специальном состоянии. Это позволяет обеспечить уникальность идентификаторов процессов в системе SPIN. В текущей версии (SRDSVer3) добавлена возможность повторного использования PID, а для идентификации экземпляров добавлены дополнительные идентификаторы в каждый экземпляр. Это позволяет ослабить ограничение на общее количество процессов за счет усложнения трансляции и описания формул.

Логические спецификации. Рассматриваются логические спецификации, построенные из предикатов с помощью логических операций и кванторов по экземплярам процессов (в начале формул), моментам времени, а также кванторов общности по поведением выполнимой спецификации.

Оптимизация моделей. С целью сокращения размера модели можно использовать при трансляции ограничения на максимальное значение показаний часов, на общем количестве процессов и на размер тех каналов, которые были неограниченными в dREAL-спецификации.

5. Верификация системы управления сетью банкоматов

5.1. Обзор системы управления сетью банкоматов

Эта система состоит из банкоматов и сервера, к которому банкоматы обращаются за информацией о корректности карты, наличии средств на ней и списании суммы со счета. Каждый банкомат инициализируется с присвоением порядкового номера. Как только банкомат освободится или инициализируется, клиент из очереди подходит к банкомату и нажимает на кнопку начала сеанса. Банкомат сообщает о готовности и ожидает ввода карточки. Получив карту, банкомат запрашивает у клиента PIN-код, который отправляет на сервер для проверки корректности. Если введенный PIN-код неверен, карточка возвращается клиенту и сеанс работы заканчивается, счетчик неудачных попыток увеличивается. После трех неудачных попыток карта блокируется. Если PIN-код верен, то банкомат, в зависимости от вида операции, либо запрашивает сумму для снятия, либо запрашивает баланс, либо вводит сумму для пополнения счета. В первом случае, получив сумму, банкомат проверяет сумму на лимиты снятия через банкомат, затем запрашивает у сервера наличие требуемой суммы на счете. Если лимиты превышены или суммы на счете недостаточно, банкомат передает это сообщение клиенту и сеанс работы заканчивается. Если же денег достаточно, то сервер списывает сумму со счета. Клиент получает деньги и чек. Если клиент выбрал пополнение счета, то банкомат принимает деньги,

передает информацию на сервер и выдает клиенту чек. В случае простого просмотра баланса терминал выдает информацию о счете на экран. В конце сеанса клиент завершает свою работу, а банкомат переходит в режим ожидания нового клиента из очереди.

5.2. Эксперименты с системой моделирования

Эксперименты проводились с использованием следующих данных: к трем банкоматам подходят пять клиентов, каждый из которых хочет снять определенную сумму денег со своей банковской карточки. Был проведен эксперимент со спецификацией, в которую намеренно внесли ошибку. В месте проверки введенной клиентом суммы строгое неравенство было заменено на нестрогое. В результате, если клиент запрашивает всю сумму со счета, то не получает ее.

В экспериментах полученная dREAL-спецификация и соответствующий запрос пользователя были поданы на вход системы моделирования. Целью эксперимента были моделирование выполнения спецификации и проверка ее основных свойств с помощью запросов пользователя.

Понятия, использующиеся в запросах: *Client[PID]* – экземпляр процесса Client, *wants_summ[]* – запрашиваемая клиентом сумма денег; *gotten_summ[]* – полученная сумма денег. Состояния экземпляра процесса Client: *Client[PID].good*, означающее, что требуемая сумма получена; *Client[PID].term_no_money* – в терминале недостаточно средств.

В процессе эксперимента были проверены следующие запросы.

1. В любой конфигурации запрашиваемая сумма денег больше единовременного лимита, но клиент не получит эту информацию и может даже получить деньги.

```
All PROCESS Client, PID { if((Client[PID] AT Client[PID].look && wants_summ[PID] >
ONE_TIME_LIMIT && correct_code IN BUF Client[PID]) => (Client[PID] AT Client[PID].good))
PAUSE; }
```

2. Существует конфигурация, в которой запрашиваемая сумма денег корректна, карта корректна и код верен, но клиент не получит деньги.

```
Ex PROCESS Client, PID { if((Client[PID] AT Client[PID].look && wants_summ[PID] <=
ONE_TIME_LIMIT && correct_code IN BUF Client[PID]) => NOT(Client[PID] AT Client[PID].good ||
Client[PID] AT Client[PID]. term_no_money) PAUSE; }
```

Если один из этих запросов выполняется, то SDL-спецификация содержит ошибки.

Входными данными для моделирования работы системы является информация о клиенте: номер его карточки, пин-код, запрашиваемая сумма и вид операции. Эксперимент проводился с пограничными наборами данных и со случайными.

Также был проведен эксперимент с некорректной спецификацией. При возникновении ошибочной ситуации система позволила проследить путь исполнения спецификации в исходной SDL-спецификации.

5.3. Эксперименты с системой SPIN

Эксперименты также проводились с шестью банкоматами и различным числом клиентов с исходными данными, описанными в начале этого раздела.

Также были проведены эксперименты с большим количеством клиентов, превышающим обычные ограничения для количества процессов. В обычном случае все созданные процессы после своего завершения принудительно останавливаются в специальном завершающем состоянии «*_end_of_process*», чтобы можно было однозначно определить экземпляр процесса по его PID. Но это ограничивает общее количество созданных процессов (даже если число одновременно выполняющихся процессов не очень велико). Для преодоления этого недостатка была введена дополнительная переменная *LPID* (от Long Process Identifier), которая однозначно идентифицирует экземпляр процесса.

Из-за того, что в системе SPIN в формулах не используются локальные переменные, эти переменные отмечены в SDL-спецификации как REVEALED, что делает их глобальными массивами при

перевод в dREAL. Таким образом, локальный массив SDL-процесса, не имеющего экземпляров, становится глобальным массивом, а скалярная переменная SDL-процесса с экземплярами становится в dREAL глобальным массивом, индексированным идентификаторами процессов.

В силу специфики системы SPIN для верификации используются отрицания проверяемых формул, для которых SPIN находит контрпримеры.

Так как язык SPLan содержит кванторы по экземплярам процессов, а язык временной логики LTL не имеет кванторов по переменным, то заданное свойство, содержащее такие кванторы, проверяется для каждого экземпляра процесса.

Для представления свойств были определены следующие функции и предикаты.

Функции: количество денег на счете клиента; количество денег в банкомате; суточный лимит выдачи в банкомате; количество денег, нужное клиенту; количество денег, полученное клиентом.

Предикаты: клиент получил сообщение о состоянии счета; на счете достаточно денег; в банкомате достаточно денег; суточный лимит выдачи не превышен; клиент получил некоторую сумму денег; клиент получил нужную ему сумму денег; пин-код правильный.

Были рассмотрены следующие свойства:

- 1) если клиенту нужна некоторая сумма, он знает пин-код и везде (на счете и в банкомате, и лимит не превышен) достаточно денег, то он получит нужную ему сумму;
- 2) если на счете клиента недостаточно денег, он не получит ничего;
- 3) если в банкомате недостаточно денег, клиент не получит ничего;
- 4) для «ошибочной спецификации», когда клиент пытается снять все свои деньги, ему это не удастся (из-за нестроого неравенства в ошибочной спецификации для сервера).

Подробные результаты можно найти в Bitbucket-репозитории [9].

С помощью системы SPIN для систем с шестью банкоматами и пятью клиентами была доказана истинность всех этих свойств, а для систем с шестью банкоматами и 100 клиентами – свойств 1, 2 и 3.

Заключение

Язык Dynamic-REAL является комбинированным языком спецификаций как распределенных систем, так и их свойств. Преимущества языка dREAL обусловлены синтаксисом, допускающим графическое представление выполнимых спецификаций, формальной операционной семантикой и выразительным языком представления свойств. Разработанный программный комплекс SRDSVer3 является мощной системой, которая включает трансляторы из SDL в dREAL и из dREAL во входной язык Promela системы верификации SPIN, системы симуляции и автоматического моделирования dREAL-спецификаций. Входной язык этого комплекса включает все базовые конструкции языка SDL, которые широко применяются на практике [10, 11]. Система автоматического моделирования играет важную роль, так как может успешно применяться и в тех случаях, когда система верификации SPIN неприменима из-за громоздких моделей SDL-спецификаций. Преимущества нашего подхода иллюстрируются автоматическим моделированием и верификацией динамической системы управления сетью банкоматов.

Программный комплекс SRDSVer3 является существенным развитием нашего комплекса, описанного в работе [6]. Комплекс SRDSVer3 позволяет пользователю задавать спецификации распределенных систем и их свойства, а также получать контрпримеры в терминах SDL.

Планируется дальнейшее развитие комплекса SRDSVer3 с целью верификации более широкого подмножества языка SDL-2010. Это предполагает как расширение языка dREAL, так и расширение систем данного комплекса. Также предполагается расширить язык запросов системы автоматического моделирования с целью обнаружения тупиков и заикливания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Specification and Description Language (SDL) : ITU-T Recommendation : Z.100. 2015.
2. Reed R. Data encoding for SDL in ITU-T Rec. Z.104 // Lecture Notes in Computer Science: System Analysis and Modeling. 2005. V. 3319. P. 80–95.

3. Reed R. SDL-2010: Background, rationale, and survey // Lecture Notes in Computer Science: SDL 2011: Integrating System and Software Modeling. 2012. V. 7083. P. 4–25.
4. Vlaovic B., Vreže A., Brezočnik Z. Applying automated model extraction for simulation and verification of real-life SDL Specification with Spin // IEEE Access. 2017. P. 1–12. DOI: 10.1109/ACCESS.2017.2685238
5. Bozga M., Graf S., Ober II., Ober Iu., Sifakis J. The IF toolset // Lecture Notes in Computer Science: SFM-RT 2004: Formal Methods for the Design of Real-Time Systems. 2004. V. 3185. P. 237–267.
6. Непомнящий В.А., Бодин Е.В., Веретнов С.О. Язык Dynamic-REAL и его применение для верификации SDL-спецификаций распределенных систем // Программирование. 2014. Т. 40, No. 5. С. 34–44
7. Shi H., Ma W., Yang M., Zhang X. A Case study of model checking retail banking system with SPIN // Journal of Computers. 2012. V. 7. P. 2503–2510.
8. Holzmann G.J. The SPIN model checker. Primer and reference manual. Addison-Wesley, 2004. 596 p.
9. SRDSV3 examples // Bitbucket repository. URL: <https://bitbucket.org/drealsdlan/SRDSV3>
10. Grammes R., Gotzhein R. SDL Profiles – Formal Semantics and Tool Support // Lecture Notes in Computer Science: Fundamental Approaches to Software Engineering. 2007. V. 4422. P. 200–214.
11. Doldi L. Validation of communications systems with SDL. Wiley, 2003. 312 p.

Поступила в редакцию 20 марта 2020 г.

Nepomniaschy V.A., Bodin E.V., Veretnov S.O. (2020) THE ANALYSIS AND VERIFICATION OF SDL-SPECIFICATIONS OF DISTRIBUTED SYSTEMS USING DYNAMIC-REAL LANGUAGE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 53. pp. 118–126

DOI: 10.17223/19988605/53/12

At present, the role of formal methods used to develop distributed systems, such as control systems and communication protocols, is quite significant. SDL language is widely used to specify distributed systems. Therefore, the problem of analysis and verification of SDL-specifications of distributed systems is actual.

This problem has been considered in a number of publications where the use of the well-known SPIN system for verification of SDL specifications using IF language as the intermediate language is described. In contrast to that approach, along with the SPIN verification system, we use a system for modeling the behavior of SDL specifications, as well as a system for finding errors in SDL specifications with the help of the obtained counterexamples. This allows us to analyze the SDL-specifications even when the SPIN system is not applicable.

This paper describes the new software package SRDSVer3 (SDL / REAL Distributed Systems Verifier), intended for modeling, analysis and verification of SDL-specifications. The input language of the software package SRDSVer3 includes the basic base constructs of the SDL-2010 language, such as BLOCK, PROCESS, SIGNALROUTE, CHANNEL, SAVE, SIGNAL.

To describe the properties of SDL-specifications, an SDL Properties Language (SPLan) was developed, based on linear time logic (LTL), extended by quantifiers for process instances. For modeling and analysis of SDL-specifications, a query language was developed.

This software package uses the intermediate specification language Dynamic-REAL (dREAL), which is a combined specification language for both distributed systems and their properties. The advantages of dREAL are caused by its syntax for textual and graphical presentation of specifications, formal operational semantics and expressive language for representing properties.

The developed software package SRDSVer3 is a powerful tool that includes a translator from language SDL to language dREAL and two tools for analysis and verification. The first tool includes a translator from language dREAL to the input language Promela of the SPIN verification system, a converter of properties of SDL-specifications to LTL formulas, and a SPIN verification system. The second tool consists of a tool for simulation and automatic modeling of dREAL specifications, and a converter for translating queries expressed in SDL into dREAL. The automatic modeling tool plays an important role, since it can be successfully applied in the cases when the SPIN verification system is not applicable due to the large size of the SDL-specification models. The input language of software package SRDSVer3 includes the basic base language constructions of language SDL-2010 widely used in practice. The package SRDSVer3 allows the user to verify specifications of distributed systems with respect to their properties represented in the language SPLan, as well as to obtain the counterexamples in terms of SDL.

The advantages of this approach are illustrated by automatic modeling and verification of a dynamic ATM network management system. An experiment was also conducted with an incorrect specification of this management system, where an error was introduced at the level of the SDL specification. If an error is detected, the package allows to trace the execution path in the original SDL specification.

Keywords: distributed systems; SDL language; Dynamic-REAL language; modeling analysis; verification; Promela language; SPIN verifier.

NEPOMNIASCHY Valery Aleksandrovich (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Siberian Division of the Russian Academy of Sciences A.P. Ershov Institute of Informatics Systems, Novosibirsk, Russian Federation).
E-mail: vnep@iis.nsk.su

BODIN Evgeniy Viktorovich (Researcher, Siberian Division of the Russian Academy of Sciences A.P. Ershov Institute of Informatics Systems, Novosibirsk, Russian Federation).
E-mail: bodin@iis.nsk.su

VERETNOV Sergey Olegovich (Junior Researcher, Siberian Division of the Russian Academy of Sciences A.P. Ershov Institute of Informatics Systems, Novosibirsk, Russian Federation).
E-mail: veretnovs@mail.ru

REFERENCES

1. ITU-T (2015). Specification and description language (SDL). *ITU-T Recommendation*, Z.100.
2. Reed, R. (2005) Data encoding for SDL in ITU-T Rec. Z.104. *Lecture Notes in Computer Science: System Analysis and Modeling*. 3319. pp. 80–95. DOI: 10.1007/978-3-540-31810-1_6
3. Reed, R. (2012) SDL-2010: Background, rationale, and survey. *Lecture Notes in Computer Science: SDL 2011: Integrating System and Software Modeling*. 083. pp. 4–25. DOI: 10.1007/978-3-642-25264-8_3
4. Vlaovic, B., Vreže, A. & Brezočnik, Z. (2017) Applying automated model extraction for simulation and verification of Real-Life SDL specification with spin. *IEEE Access*. pp. 1–12. DOI:10.1109/ACCESS.2017.2685238
5. Bozga, M., Graf, S., Ober, Il., Ober, Iu. & Sifakis, J. (2004) The IF toolset. *Lecture Notes in Computer Science: SFM-RT 2004: Formal Methods for the Design of Real-Time Systems*. 3185. pp. 237–267. DOI: 10.1007/978-3-540-30080-9_8
6. Nepomnyashchy, V.A., Bodin, E.V. & Veretnov, S.O. (2015) The language dynamic-real and its application for verification of SDL-specified distributed system. *Программирование – Programming and Computer Software*. 40(5). pp. 34–44. DOI: 10.1134/S0361768815010053
7. Shi, H., Ma, W., Yang M., & Zhang, X. (2012) A case study of model checking retail banking system with SPIN. *Journal of Computers*. 7. pp. 2503–2510. DOI:10.4304/jcp.7.10.2503-2510
8. Holzmann, G.J. (2004) *The SPIN model checker. Primer and reference manual*. Addison-Wesley.
9. SRDSVer3 examples – Bitbucket repository: <https://bitbucket.org/drealsdian/SRDSVer3>
10. Grammes, R. & Gotzhein, R. (2007) SDL Profiles-formal semantics and tool support. *Lecture Notes in Computer Science: Fundamental Approaches to Software Engineering*. 4422. pp. 200–214. DOI: 10.1007/978-3-540-71289-3_17
11. Doldi, L. (2003) *Validation of communications systems with SDL*. Wiley.

ХРОНИКИ: МЕМУАРЫ, ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ, ПЕРСОНАЛИИ

DOI: 10.17223/19988605/53/13

ПАМЯТИ ГЕННАДИЯ АЛЕКСЕЕВИЧА МЕДВЕДЕВА

10 октября 2020 года ушел из жизни доктор физико-математических наук, профессор, организатор образования по прикладной математике и кибернетике в Томском государственном университете, первый декан факультета прикладной математики и кибернетики ТГУ Геннадий Алексеевич МЕДВЕДЕВ.

Г.А. Медведев родился в г. Уссурийске 22 февраля 1935 г., после окончания школы с серебряной медалью (1952) поступил на радиофизический факультет ТГУ. Во время учебы в университете активно занимался общественной работой: избирался комсоргом группы, членом бюро и секретарем бюро ВЛКСМ факультета. В 1957 г. окончил университет по специальности «радиофизика» с квалификацией «физик-радиоэлектроник». Еще студентом Г.А. Медведев начал работать лаборантом в Сибирском физико-техническом институте (СФТИ), а после окончания университета – научным сотрудником. С 1 декабря 1957 г. по 1 декабря 1960 г. – аспирант кафедры радиофизики (научный руководитель профессор В.Н. Кессених). Будучи аспирантом, он с октября 1958 г. по 1 января 1960 г. по совместительству продолжил работу научным сотрудником лаборатории счетно-решающих устройств (после ее реорганизации – лаборатория статистических методов отдела кибернетики) СФТИ. С 1 декабря 1960 г. – старший инженер-программист проблемной лаборатории счетно-решающих устройств, с 1 сентября 1961 г. – ассистент, со 2 декабря того же года – доцент. С 18 июня 1963 г. – заведующий кафедрой электронной вычислительной техники и автоматики ТГУ (ЭВТиА). С 5 октября 1965 – старший научный сотрудник (докторант). С 1 марта 1967 г. – доцент, с 26 апреля 1967 г. по 1 марта 1970 г. – профессор, заведующий кафедрой ЭВТиА. В 1969 г. – заведующий кафедрой вычислительной и прикладной математики механико-математического факультета. С 1 сентября того же года по 15 апреля 1974 г. – заведующий кафедрой прикладной математики спецфакультета прикладной мате-

матики. С 1 сентября 1967 г. по 1 марта 1970 г. – декан радиофизического факультета, заведующий кафедрой электронно-вычислительной техники и автоматики. С 1 августа 1970 г. по 2 апреля 1973 г. – декан спецфакультета прикладной математики.

Основные курсы и спецкурсы, прочитанные им в ТГУ: теория вероятностей с элементами теории информации; основы математической статистики и теории случайных процессов; теория релейных схем; теория самонастраивающихся систем; статистическая радиофизика; теория систем автоматического регулирования и их статистическая динамика; вычислительные машины и программирование; исследование операций и сетевое планирование; математическое программирование; математические модели экономики.

Г.А. Медведев – инициатор открытия в ТГУ спецфакультета прикладной математики, его первый декан. Будучи студентом 5-го курса, он в составе группы студентов (руководитель аспирант А.Д. Закревский), в которую, помимо него, вошли А. Уткин, В. Тарасенко, был направлен в Пензу на курсы, а затем участвовал в установке и пуске первой в Сибири ЭВМ Урал-1 в ТГУ. С начала 1960-х гг. Г.А. Медведев работал в области статистической радиотехники, изучая воздействие случайных потоков сигналов на радиосхемы, и опубликовал ряд статей на эту тему. Однако затем он обратился к исследованиям по статистической теории дискретных автоматических систем и занялся решением сложных проблем анализа таких систем со случайным поведением. Им была предложена интерпретация марковских цепей в виде стохастических графов, что позволило эффективно решать многие трудные задачи. Эти и другие идеи Г.А. Медведева получили развитие в исследованиях его учеников (Б.А. Беседин, Б.А. Гладких, А.М. Горцев, А.М. Кориков, В.П. Лисьев, А.П. Серых, В.П. Илюхин, Ю.М. Гармаш, В.П. Марков, А.П. Рыжак, Ю.С. Харин и др.).

Основным направлением научной работы Г.А. Медведева в Томском, а затем в Белорусском университете были разработки вероятностных и статистических методов анализа и синтеза систем, используемых в прикладных областях: анализ и разработка математических моделей финансовых временных рядов; развитие методов теории марковских процессов и массового обслуживания в интересах исследования систем, в частности локальных информационно-вычислительных сетей; разработка методов анализа и оптимизации сетей связи, в частности информационных систем связи с использованием искусственных спутников Земли и цифровых сетей интегрального обслуживания; разработка методов оценивания параметров случайных процессов и полей, описываемых регрессионными и авторегрессионными моделями, в частности разработка рекуррентных оценок по зависимым наблюдениям, поступающим в темпе текущего времени; синтез оптимальных и асимптотически оптимальных систем автоматического управления; разработка адаптивных алгоритмов управления в самонастраивающихся системах и анализ их эффективности; местоопределение радиотехнических средств методами пассивной пеленгации с движущегося носителя; поведение экстремальных систем автоматического управления, подверженных влиянию случайного дрейфа; поведение радиотехнических устройств, находящихся под воздействием случайных сигналов, в том числе импульсных; использование случайных сигналов для эффективного радиопротиводействия; обнаружение, классификация и оценивание параметров радиосигналов (в том числе сигналов связи), принимаемых в присутствии шумов высокого уровня; создание программного обеспечения для численного анализа и имитационного моделирования систем и процессов в вышеперечисленных прикладных областях.

19 мая 1961 г. в совете при Томском политехническом институте Г.А. Медведев защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. В 1963 г. в связи с организацией на радиофизическом факультете подготовки специалистов по статистической радиофизике и общей теории связи он был назначен заведующим специализацией. В феврале 1967 г. в совете при ТГУ защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук.

В конце 1968 г., когда Совет министров СССР принял постановление о развитии в стране прикладной математики и в связи с этим встал вопрос об открытии в ТГУ новой учебной специальности «прикладная математика», Г.А. Медведев, будучи деканом радиофизического факультета и заведующим кафедрой ЭВТИА, выступил инициатором подготовки кадров по новой специальности. В 1969 г. был осуществлен набор 50 студентов на отделение прикладной математики, созданное при механико-математическом факультете ТГУ, где Г.А. Медведев возглавил кафедру вычислительной и прикладной математики. В 1970 г. в ТГУ был открыт факультет прикладной математики в составе четырех кафедр.

Г.А. Медведев был научным руководителем и активным участником выполнения более 20 научно-исследовательских работ по отдельным постановлениям СМ СССР по тематике секции прикладных проблем АН СССР. Активное участие он принимал и в работе международных, всесоюзных и республиканских научных конференций и совещаний, в том числе II Всесоюзного симпозиума по экстремальным задачам (Рига), Всесоюзного совещания по статистическим проблемам управления (Ташкент), V Всесоюзного совещания по проблемам управления (Москва) и др. Г.А. Медведев был удостоен премии ТГУ (1968) за научную работу «Вероятностные методы исследования экстремальных систем».

После отъезда из Томска Г.А. Медведев с 15 апреля 1974 г. был заведующим кафедрой теории вероятностей и математической статистики факультета прикладной математики и информатики Белорусского университета (Минск), с 1980 г. – научным руководителем лаборатории прикладного вероятностного анализа. Во время работы в Минске им выполнен ряд научно-исследовательских работ по заказу Правительства СССР через секцию прикладных проблем АН СССР в области исследования эффективности средств связи, включая сети ЭВМ и информационные сети. В последние годы он занимался проблемами в области стохастической финансовой математики. В течение последних лет Г.А. Медведев выполнил ряд проектов в области финансовой и актуарной математики. Результаты этой работы были представлены на международных конференциях в Айова Сити (США), Атланте (США), Бирмингеме (Англия), Брюсселе (Бельгия), Кракове (Польша), Минске (неоднократно), Монтерее (США), Нюрнберге (Германия), Оксфорде (Англия), Тромсё (Норвегия), Трондхейме (Норвегия) и др. Г.А. Медведев организовал в Белорусском университете новую учебную специальность «Актуарная математика» и обучение по этой специальности, а также по финансовой математике. Он был Президентом Белорусского актуарного общества (1995–1999), членом совета международной ассоциации финансовых инженеров (Нью Йорк, США) и председателем ее Минского комитета (с 1996). Был представителем Института актуариев Великобритании в Беларуси (с 1998), членом ЕВРОгруппы по финансовому моделированию (с 1994). Под научным руководством Г.А. Медведева подготовлено свыше 50 кандидатов наук по статистическому анализу, случайным процессам, автоматическому управлению и компьютерным наукам. Более 10 из них стали докторами наук или профессорами. Г.А. Медведев – организатор многих научных конференций в области статистического анализа, случайных процессов, автоматического управления и финансовой математики с участием зарубежных ученых, в том числе свыше 10 научных школ по теории массового обслуживания. Он был председателем Западно-Сибирского координационного совета МВ и ССО РСФСР по технической кибернетике, членом общественной редакции совета издательства «Советское радио» по кибернетике, членом советов по присуждению ученых степеней по физико-математическим наукам при ТГУ и председателем совета ТГУ по присуждению ученых степеней (1970–1974).

Г.А. Медведев был действительным членом Международной академии информатизации (Москва, 1993), членом-корреспондентом Петровской академии наук и искусств (Санкт-Петербург, 1994), членом Национальной академии по автоматическому управлению (Минск, 1994). Он был награжден нагрудным знаком МВ и ССО СССР «За отличные успехи в работе» (1972), почетными грамотами Президиума Верховного Совета Белоруссии (1982, 1996) и медалью «За доблестный труд. В ознаменование 100-летия со дня рождения Владимира Ильича Ленина» (1970).

В 2010 г. за выдающиеся заслуги перед Томским государственным университетом Г.А. Медведев, будучи профессором Белорусского государственного университета, был награжден Золотой медалью «В благодарность за вклад в развитие Томского государственного университета».

Геннадия Алексеевича уважали и ценили преподаватели, студенты и сотрудники ТГУ. Он всегда уделял много внимания и времени работе со студентами и аспирантами.

Светлая и долгая память о Геннадии Алексеевиче Медведеве – выдающемся ученом, преподавателе и замечательном человеке – сохранится в памяти учеников, коллег и всех, кто с ним общался.

*Институт прикладной математики и компьютерных наук.
Редколлегия журнала «Вестник Томского государственного университета.
Управление, вычислительная техника и информатика».
Кафедра прикладной математики*

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АБАЕВА Нигяр Бахрам кызы – диссертант кафедры дифференциальных уравнений и оптимизации Сумгаитского государственного университета (г. Сумгаит, Азербайджан). E-mail: abayeveldar404@gmail.com

АФАНАСОВ Леонид Сергеевич – младший научный сотрудник лаборатории математического моделирования сложных физических систем Амурского государственного университета (г. Благовещенск). E-mail: l.a.1996@mail.ru

БОДИН Евгений Викторович – научный сотрудник Института систем информатики им. А.П. Ершова СО РАН (г. Новосибирск). E-mail: bodin@iis.nsk.su

ВАВИЛОВА Дайана Дамировна – аспирант, ассистент кафедры математического обеспечения информационных систем Ижевского государственного технического университета им. М.Т. Калашникова. E-mail: vavilova_dd@mail.ru

ВЕРЕТНОВ Сергей Олегович – младший научный сотрудник Института систем информатики им. А.П. Ершова СО РАН (г. Новосибирск). E-mail: veretnovs@mail.ru

ЖУКОВ Игорь Андреевич – аспирант Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: Ig.Zhukov963@yandex.ru

КЕТОВА Каролина Вячеславовна – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического обеспечения информационных систем Ижевского государственного технического университета им. М.Т. Калашникова. E-mail: ketova_k@mail.ru

КОДНЯНКО Владимир Александрович – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры стандартизации, метрологии и управления качеством Политехнического института Сибирского федерального университета (г. Красноярск). E-mail: kowlad@rambler.ru

КОСТЮК Юрий Леонидович – профессор, доктор технических наук, профессор Института прикладной математики и компьютерных наук Национального Исследовательского Томского государственного университета. E-mail: kostyuk_y_1@sibmail.com

МАТЮНИН Александр Сергеевич – адъюнкт Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского (г. Санкт-Петербург). E-mail: ac0243555@mail.ru

МЕДВЕДЕВ Александр Васильевич – доктор технических наук, профессор базовой кафедры интеллектуальных систем управления Института космических и информационных технологий Сибирского федерального университета (г. Красноярск). E-mail: mav2745@mail.ru

МЕЛИКОВ Агаси Зарбали оглы – действительный член академии наук Азербайджана, профессор, доктор технических наук, заведующий лабораторией Института систем управления Национальной академии наук Азербайджана (г. Баку, Азербайджан). E-mail: agassi.melikov@gmail.com

МЕХБАЛЫЕВА Эсмירה Видади кызы – кандидат технических наук, докторант Сумгаитского государственного университета (г. Сумгаит, Азербайджан). E-mail: esmira.mehbaliyeva@mail.ru

ЛЕМЕШКО Борис Юрьевич – профессор, доктор технических наук, профессор Новосибирского государственного технического университета. E-mail: Lemeshko@ami.nstu.ru

ЛЕМЕШКО Станислав Борисович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник Новосибирского государственного технического университета. E-mail: skyer@mail.ru

МАСЛОВСКАЯ Анна Геннадьевна – доцент, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и моделирования, главный научный сотрудник лаборатории математического моделирования сложных физических систем Амурского государственного университета (г. Благовещенск). E-mail: maslovskayaag@mail.ru

НЕЖЕЛЬСКАЯ Людмила Алексеевна – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: ludne@mail.ru

НЕПОМНЯЩИЙ Валерий Александрович – кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией теоретического программирования Института систем информатики им. А.П. Ершова СО РАН (г. Новосибирск). E-mail: vnep@iis.nsk.su

РУДЬКО Игорь Михайлович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (г. Москва). E-mail: igor-rudko@mail.ru

РУСЯК Иван Григорьевич – профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой математического обеспечения информационных систем Ижевского государственного технического университета им. М.Т. Калашникова. E-mail: primat@istu.ru

СЕНЬЧЕНКОВ Валентин Иванович – профессор, доктор технических наук, профессор Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского (г. Санкт-Петербург). E-mail: svi9@rambler.ru

ТУМАШКИНА Диана Александровна – аспирант кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета. E-mail: diana1323@mail.ru

ФЕЙЗИЕВ Фикрат Гюльали оглы – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и оптимизации Сумгаитского государственного университета (г. Сумгаит, Азербайджан). E-mail: FeuziyevFG@mail.ru

ЯРЕЩЕНКО Дарья Игоревна – старший преподаватель базовой кафедры интеллектуальных систем управления Института космических и информационных технологий Сибирского федерального университета (г. Красноярск). E-mail: YareshenkoDI@yandex.ru

Научный журнал

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

**УПРАВЛЕНИЕ,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И ИНФОРМАТИКА**

**TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE**

2020. № 53

Редактор Е.Г. Шумская
Оригинал-макет Е.Г. Шумской
Редакторы-переводчики: Г.М. Кошкин; В.Н. Горенинцева
Дизайн обложки Л.Д. Кривцовой

Подписано к печати 25.12.2020 г. Формат 60x84^{1/8}.
Гарнитура Times. Усл. печ. л. 15,4.
Тираж 250 экз. Заказ № 4540. Цена свободная.

Дата выхода в свет 14.01.2020 г.

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании
Издательства Томского государственного университета
634050, г. Томск, Ленина, 36
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: rio.tsu@mail.ru