

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2020

№ 68

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учредитель:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский
Томский государственный университет»

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), К.С. Рогаев (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.Ю. Веснин, А.Н. Ищенко, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, С.В. Панько, В.А. Скрипник, А.В. Старченко, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер.

EDITORIAL COUNCIL

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

EDITORIAL BOARD

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Elena G. Lazareva (Executive Editor of the Mathematics Section), Konstantin S. Rogaeve (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimатов, Aleksey M. Bubenchikov, Igor M. Vasenin, Andrei Yu. Vesnin, Aleksandr N. Ishchenko, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Sergey V. Panko, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесен в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферируется в MatSciNet.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Бахшалыева М.Н. Квадратурная формула для производной логарифмических потенциалов.....	5
Вильданов В.К., Гайдак В.А., Тимошенко Е.А. Об определяемости вполне разложимой группы ранга 2 её группой автоморфизмов	23
Забарина А.И., Фомина Е.А. О множестве K_p в конечных группах.....	33

МЕХАНИКА

Алифов А.А., Фарзалиев М.Г. О расчете методом линеаризации взаимодействия параметрических и автоколебаний при запаздывании и ограниченном возбуждении.....	41
Гладков С.О., Богданова С.Б. К теории пространственной брахистохроны.....	53
Дмитриев В.С., Миньков Л.Л., Костюченко Т.Г., Дердященко В.В., Панфилов Д.С. Виброактивность малошумных вентиляторов.....	61
Кагенов А.М., Костюшин К.В., Алигасанова К.Л., Котоногов В.А. Математическое моделирование взаимодействия составной сверхзвуковой струи с преградой.....	72
Липанов А.М., Русяк И.Г., Суфиянов В.Г. Исследование влияния колебаний ствола на угол вылета снаряда при выстреле	80
Лун-Фу А.В., Бубенчиков М.А., Жамбаа С., Цыдыпов С.Г.-Ц. Определение частот поперечных колебаний переходников и тупиковых ответвлений газопроводов.....	95
Орлов А.А., Русских А.С. Восстановление абсолютной проницаемости залежи углеводородов с вторичными фильтрационно-емкостными свойствами с использованием вейвлет-преобразований	106
Пестренин В.М., Пестренина И.В., Русаков С.В., Бузмакова Г.В. Исследование влияния скорости пневматического нагружения цилиндрической крупногабаритной оболочки на ее динамические параметры.....	118
Порязов В.А., Крайнов А.Ю. Математическое моделирование зажигания металлизированного твердого топлива конвективным высокотемпературным потоком.....	126
Редер Т., Тененев В.А., Чернова А.А. Численное моделирование неустойчивых режимов работы предохранительного клапана	141
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ	158

CONTENTS

MATHEMATICS

Bakhshaliyeva M.N. A quadrature formula for the derivative of logarithmic potentials	5
Vildanov V.K., Gaidak V.A., Timoshenko E.A. On determinability of a completely decomposable rank 2 group by its automorphism group.....	23
Zabarina A.I., Fomina E.A. On the set K_p in finite groups.....	33

MECHANICS

Alifov A.A., Farzaliev M.G. On the calculation by the method of linearization of the interaction of parametric and self-oscillations at delay and limited excitation	41
Gladkov S.O., Bogdanova S.B. On The theory of a space brachistochrone.....	53
Dmitriev V.S., Kostyuchenko T.G., Minkov L.L., Derdiyashchenko V.V., Panfilov D.S. Vibroactivity of low noise fans	61
Kagenov A.M., Kostyushin K.V., Aligasanova K.L., Kotonogov V.A. Mathematical modeling of a supersonic twin jet interaction with obstacle	72
Lipanov A.M., Rusyak I.G., Sufiyanov V.G. Study on the effects of gun barrel vibrations on the firing angle of a projectile.....	80
Lun-Fu A.V., Bubenchikov M.A., Jambaa S., Tsydypov S.G.-Ts. Determining frequencies of transverse vibrations for crossovers and dead ends of gas pipelines	95
Orlov A.A., Russkih A.S. Recovery of absolute permeability of hydrocarbon deposits with secondary filtration-capacitive properties using wavelet transforms	106
Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Rusakov S.V., Buzmakova G.V. Research of the impact of the pneumatic loading speed on dynamic parameters of a cylindrical large-sized shell	118
Poryazov V.A., Krainov A.Yu. Mathematical modeling on ignition of metallized solid propellant by a convective high temperature flow	126
Raeder T., Tenenev V.A., Chernova A.A. Numerical simulation of unstable safety valve modes.....	141
BRIEF INFORMATION ABOUT THE AUTHORS	158

МАТЕМАТИКА

УДК 517.2; 519.64
DOI 10.17223/19988621/68/1

MSC 2020: 45E05; 31B10

М.Н. Бахшалыева

КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ПРОИЗВОДНОЙ ЛОГАРИФИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Дан новый метод построения квадратурной формулы для криволинейного сингулярного интеграла, и на основе этого метода построены квадратурные формулы для производной логарифмического потенциала простого слоя и нормальной производной логарифмического потенциала двойного слоя.

Ключевые слова: *квадратурная формула, криволинейный сингулярный интеграл, производная логарифмического потенциала простого слоя, нормальная производная логарифмического потенциала двойного слоя.*

1. Введение и постановка задачи

Известно, что [1] краевые задачи для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ можно привести к криволинейному сингулярному интегральному уравнению, зависящему от производной логарифмического потенциала простого слоя

$$V(x) = \int_L \overline{\text{grad}}_x \Phi(x, y) \rho(y) dL_y, \quad x = (x_1, x_2) \in L, \quad (1)$$

и от нормальной производной логарифмического потенциала двойного слоя

$$\frac{\partial W(x)}{\partial \vec{n}(x)} = \frac{\partial}{\partial \vec{n}(x)} \left(\int_L \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \vec{n}(y)} \rho(y) dL_y \right), \quad x \in L, \quad (2)$$

где $L \subset R^2$ – простая замкнутая кривая Ляпунова с показателем $0 < \alpha \leq 1$, $\vec{n}(y)$ – внешняя единичная нормаль в точке $y \in L$, $\rho \in C(L)$, $C(L)$ – пространство всех непрерывных функций на L с нормой $\|\varphi\|_\infty = \max_{x \in L} |\varphi(x)|$, а $\Phi(x, y)$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа, т.е.

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|}, \quad x, y \in R^2, \quad x \neq y.$$

Так как во многих случаях невозможно найти точное решение сингулярных интегральных уравнений, то интересно исследовать приближенное решение этих уравнений. Поэтому, первостепенное значение приобретает вопрос построения квадратурной формулы для производной логарифмических потенциалов, чему и посвящена настоящая работа. Следует указать, что в работе [2] дана практическая формула вычисления нормальной производной акустического потенциала двойного слоя, а на основе этой формулы в [3] построена кубатурная формула для

нормальной производной акустического потенциала двойного слоя, используя которую авторами [4, 5] исследовано приближенное решение некоторых классов поверхностных интегральных уравнений первого и второго рода.

2. Квадратурная формула для прямого значения производной логарифмического потенциала простого слоя

Построим квадратурную формулу производной логарифмического потенциала простого слоя (1). Предположим, что кривая L задана параметрическим уравнением $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $t \in [a, b]$. Разобьем промежуток $[a, b]$ на $n > 2M_1(b-a)/d$ равных частей:

$$t_k = a + \frac{(b-a)k}{n}, \quad k = \overline{0, n},$$

где $M_1 = \max_{t \in [a, b]} \sqrt{(x'_1(t))^2 + (x'_2(t))^2} < +\infty$ (см. [6]) и d – радиус стандартной окружности (см. [7]). В качестве опорных точек возьмем $x(\tau_k)$, $k = \overline{1, n}$, где $\tau_k = a + \frac{(b-a)(2k-1)}{2n}$. Тогда кривая L разбивается на элементарные части

$$L = \bigcup_{l=1}^n L_l, \quad \text{где } L_k = \{x(t) : t_{k-1} \leq t \leq t_k\}. \text{ Известно, что [8]}$$

$$(1) \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\} : r_k(n) \sim R_k(n)^1, \quad \text{где}$$

$$r_k(n) = \min \{|x(\tau_k) - x(t_{k-1})|, |x(t_k) - x(\tau_k)|\}$$

$$\text{и} \quad R_k(n) = \max \{|x(\tau_k) - x(t_{k-1})|, |x(t_k) - x(\tau_k)|\};$$

$$(2) \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\} : R_k(n) \leq d/2;$$

$$(3) \quad \forall k, j \in \{1, 2, \dots, n\} : r_j(n) \sim r_k(n);$$

$$(4) \quad r(n) \sim R(n) \sim \frac{1}{n}, \quad \text{где } R(n) = \max_{k=1, n} R_k(n), \quad r(n) = \min_{k=1, n} r_k(n).$$

В дальнейшем такое разбиение будем называть разбиением кривой L на «регулярные» элементарные части: $L = \bigcup_{l=1}^n L_l$.

Лемма 1 [9]. *Существуют такие постоянные $C'_0 > 0$ и $C'_1 > 0$, независящие от n , для которых при $\forall k, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j \neq k$ и $\forall u \in L_j$ справедливо следующее неравенство:*

$$C'_0 |y - x(\tau_k)| \leq |x(\tau_j) - x(\tau_k)| \leq C'_1 |y - x(\tau_k)|. \quad (3)$$

Очевидно, что существует натуральное число n_0 такое, что

$$(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}} \leq \min \{1, d/2\}, \quad \forall n > n_0.$$

¹ $a(n) \sim b(n) \Leftrightarrow C_1 \leq a(n)/b(n) \leq C_2$, где C_1 и C_2 – положительные постоянные, не зависящие от n .

Через $H_\beta(L)$ обозначим линейное пространство всех непрерывных на L функций φ , удовлетворяющих условию

$$|\varphi(u_1) - \varphi(u_2)| \leq C_\varphi |u_1 - u_2|^\beta, \quad \forall u_1, u_2 \in L,$$

где $0 < \beta \leq 1$, а C_φ – положительная постоянная, зависящая от φ , а не от u_1 и u_2 . Кроме того, пусть

$$Q_l = \left\{ j \mid 1 \leq j \leq n, |x(\tau_l) - x(\tau_j)| > (R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}} \right\}.$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $L \subset R^2$ – простая замкнутая кривая Ляпунова с показателем $0 < \alpha \leq 1$ и $\rho \in H_\beta(L)$, $0 < \beta \leq 1$. Тогда выражение

$$V_m^n(x(\tau_l)) = \frac{b-a}{2\pi n} \sum_{j \in Q_l} \frac{x_m(\tau_j) - x_m(\tau_l)}{|x(\tau_l) - x(\tau_j)|^2} \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2} \rho(x(\tau_j)) \quad (4)$$

в опорных точках $x(\tau_l)$, $l = \overline{1, n}$, является квадратурной формулой для

$$V_m(x) = \int_L \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x_m} \rho(y) dL_y, \quad x = (x_1, x_2) \in L \quad (m = 1, 2),$$

причем $\max_{l=1, n} |V_m(x(\tau_l)) - V_m^n(x(\tau_l))| \leq M^2 \left(\|\rho\|_\infty n^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} + C_\rho n^{-\frac{\beta}{1+\alpha}} \right),$

где $C_\rho = \sup_{\substack{x, y \in L, \\ x \neq y}} \frac{|\rho(x) - \rho(y)|}{|x - y|^\beta}.$

Доказательство. Очевидно, что достаточно доказать теорему при $m = 1$. Нетрудно вычислить, что

$$V_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{y_1 - x_1}{|x - y|^2} \rho(y) dL_y,$$

где $y = (y_1, y_2)$ и интеграл существует в смысле главного значения Коши (см. [10]). Оценим погрешность квадратурной формулы (4). Известно, что

$$\begin{aligned} & V_1(x(\tau_l)) - V_1^n(x(\tau_l)) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in Q_l} \frac{x_1(\tau_j) - x_1(\tau_l)}{|x(\tau_l) - x(\tau_j)|^2} \left(\text{mes} L_j - \frac{b-a}{n} \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2} \right) \rho(x(\tau_j)) + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in Q_l} \int_{L_j} \left(\frac{y_1 - x_1(\tau_l)}{|x(\tau_l) - y|^2} - \frac{x_1(\tau_j) - x_1(\tau_l)}{|x(\tau_l) - x(\tau_j)|^2} \right) \rho(y) dL_y + \end{aligned}$$

² Здесь и далее через M будем обозначать положительные постоянные, разные в различных неравенствах.

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in Q_l} \int_{L_j} \frac{x_1(\tau_j) - x_1(\tau_l)}{|x(\tau_l) - x(\tau_j)|^2} (\rho(y) - \rho(x(\tau_j))) dL_y + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{\bigcup_{j \in Q_l} L_j} \frac{y_1 - x_1(\tau_l)}{|x(\tau_l) - y|^2} (\rho(y) - \rho(x(\tau_l))) dL_y + \frac{\rho(x(\tau_l))}{2\pi} \int_{\bigcup_{j \in Q_l} L_j} \frac{y_1 - x_1(\tau_l)}{|x(\tau_l) - y|^2} dL_y. \quad (5)
\end{aligned}$$

Учитывая неравенство

$$\left| \sqrt{(x'_1(t))^2 + (x'_2(t))^2} - \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2} \right| \leq M(R(n))^\alpha, \quad \forall t \in [t_{j-1}, t_j],$$

получаем, что

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\frac{b-a}{n} \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2}}{mesL_j} \right| = \\
& = \frac{\left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\sqrt{(x'_1(t))^2 + (x'_2(t))^2} - \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2} \right) dt \right|}{mesL_j} \leq \frac{M}{m_1} (R(n))^\alpha, \quad (6)
\end{aligned}$$

где $m_1 = \min_{t \in [a, b]} \sqrt{(x'_1(t))^2 + (x'_2(t))^2} > 0$ (см. [6]). Тогда, принимая во внимание (3),

получим

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{j \in Q_l} \frac{x_1(\tau_j) - x_1(\tau_l)}{|x(\tau_l) - x(\tau_j)|^2} \left(mesL_j - \frac{b-a}{n} \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2} \right) \rho(x(\tau_j)) \right| = \\
& = \left| \sum_{j \in Q_l} \left(1 - \frac{\frac{b-a}{n} \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2}}{mesL_j} \right) \rho(x(\tau_j)) \int_{L_j} \frac{x_1(\tau_j) - x_1(\tau_l)}{|x(\tau_l) - x(\tau_j)|^2} dL_y \right| \leq \\
& \leq M(R(n))^\alpha \|\rho\|_\infty \sum_{j \in Q_l} \int_{L_j} \frac{dL_y}{|x(\tau_l) - y|} \leq M(R(n))^\alpha \|\rho\|_\infty \int_{\frac{1}{(R(n))^{1+\alpha}}}^{\frac{diam L}{t}} \frac{dt}{t} \leq \\
& \leq M \|\rho\|_\infty (R(n))^\alpha |\ln R(n)|.
\end{aligned}$$

Пусть $y \in L_j$, $j \in Q_l$. Тогда

$$\left| \frac{y_1 - x_1(\tau_l)}{|x(\tau_l) - y|^2} - \frac{x_1(\tau_j) - x_1(\tau_l)}{|x(\tau_l) - x(\tau_j)|^2} \right| \leq M \frac{R(n)}{|x(\tau_l) - y|^2},$$

а, значит,

$$\left| \sum_{j \in Q_l} \int_{L_j} \left(\frac{y_1 - x_1(\tau_l)}{|x(\tau_l) - y|^2} - \frac{x_1(\tau_j) - x_1(\tau_l)}{|x(\tau_l) - x(\tau_j)|^2} \right) \rho(y) dL_y \right| \leq$$

$$\leq M \| \rho \|_{\infty} R(n) \int_{(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}}}^{\text{diam } L} \frac{dt}{t^2} \leq M \| \rho \|_{\infty} (R(n))^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Кроме того,

$$\left| \sum_{j \in Q_l} \int_{L_j} \frac{x_1(\tau_j) - x_1(\tau_l)}{|x(\tau_l) - x(\tau_j)|^2} (\rho(y) - \rho(x(\tau_j))) dL_y \right| \leq \\ \leq M C_{\rho} (R(n))^{\beta} \int_{(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}}}^{\text{diam } L} \frac{dt}{t} \leq M C_{\rho} (R(n))^{\beta} |\ln R(n)|.$$

Пусть $y \in \partial \left(\bigcup_{j \in P_l} L_j \right)$. Очевидно, что существуют натуральные числа

$$s \in P_l = \left\{ j \mid 1 \leq j \leq n, |x(\tau_l) - x(\tau_j)| \leq (R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}} \right\}$$

и $m \in Q_l$ такие, что $y \in \partial L_s$ и $y \in \partial L_m$. Отсюда имеем

$$|x(\tau_l) - y| \leq |x(\tau_l) - x(\tau_s)| + |x(\tau_s) - y| \leq (R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}} + R(n)$$

$$\text{и} \quad |x(\tau_l) - y| \geq |x(\tau_l) - x(\tau_m)| - |x(\tau_m) - y| > (R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}} - R(n),$$

следовательно,

$$(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}} - R(n) < |x(\tau_l) - y| \leq (R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}} + R(n), \quad \forall y \in \partial \left(\bigcup_{j \in P_l} L_j \right). \quad (7)$$

Тогда

$$\left| \int_{\bigcup_{j \in P_l} L_j} \frac{y_1 - x_1(\tau_l)}{|x(\tau_l) - y|^2} (\rho(y) - \rho(x(\tau_l))) dL_y \right| \leq M C_{\rho} (R(n))^{\frac{1}{1+\alpha} + R(n)} \int_0^{\text{diam } L} \frac{dt}{t^{1-\beta}} \leq M C_{\rho} (R(n))^{\frac{\beta}{1+\alpha}}.$$

Известно [7], что для любой точки $x \in L$ окрестность $L_d(x) = \{y \in L \mid |y - x| < d\}$ пересекается с прямой, параллельной нормали $\vec{n}(x)$, в единственной точке либо вообще не пересекается, т.е. множество $L_d(x)$ однозначно проектируется на промежуток $\Omega_d(x)$, лежащий на касательной прямой $\Gamma(x)$ к L в точке x . На куске $L_d(x(\tau_l))$ выберем локальную прямоугольную систему координат (u, v) с началом в точке $x(\tau_l)$, где направим ось v вдоль нормали $\vec{n}(x(\tau_l))$, а ось u вдоль положительного направления касательной прямой $\Gamma(x(\tau_l))$. Известно, что при этом координаты точек $x(\tau_l)$ будут $(0, 0)$. Кроме того, в этих координатах окрестность $L_d(x(\tau_l))$ можно задать уравнением $v = f(u)$, $u \in \Omega_d(x(\tau_l))$, причем

$$f \in H_{1,\alpha}(\Omega_d(x(\tau_l))) \text{ и } f(0) = 0, \quad f'(0) = 0,$$

где $H_{1,\alpha}(\Omega_d(x(\tau_l)))$ – линейное пространство всех непрерывно дифференцируемых на $\Omega_d(x(\tau_l))$ функций f , удовлетворяющих условию

$$|f'(u_1) - f'(u_2)| \leq M_f |u_1 - u_2|^\alpha, \quad \forall u_1, u_2 \in \Omega_d(x(\tau_l)),$$

где M_f – положительная постоянная, зависящая от f , а не от u_1 и u_2 .

Через Ω_l обозначим проекцию множества $\bigcup_{j \in P_l} L_j$ на касательную прямую $\Gamma(x(\tau_l))$. Пусть $d_l = \min_{\tilde{y} \in \partial \Omega_l} |x(\tau_l) - \tilde{y}|$. Тогда по формуле вычисления криволинейного интеграла получаем, что

$$\begin{aligned} \int_{\bigcup_{j \in P_l} L_j} \frac{y_l - x_l(\tau_l)}{|x(\tau_l) - y|^2} dL_y &= \int_{\Omega_l} \frac{u \sqrt{1 + (f'(u))^2}}{u^2 + (f(u))^2} du = \int_{-d_l}^{d_l} \frac{du}{u} + \int_{-d_l}^{d_l} \frac{u \left(\sqrt{1 + (f'(u))^2} - 1 \right)}{u^2 + (f(u))^2} du + \\ &+ \int_{-d_l}^{d_l} u \left(\frac{1}{u^2 + (f(u))^2} - \frac{1}{u^2} \right) du + \int_{\Omega_l \setminus (-d_l, d_l)} \frac{u \sqrt{1 + (f'(u))^2}}{u^2 + (f(u))^2} du. \end{aligned} \quad (8)$$

Первый интеграл в правой части равенства (8) существует в смысле главного значения Коши и равен нулю. Кроме того, учитывая неравенства

$$|f'(u)| \leq M |u|^\alpha \quad (9)$$

$$\text{и} \quad |f(u)| = |f(u) - f(0)| \leq M |u|^{1+\alpha}, \quad (10)$$

имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{-d_l}^{d_l} \frac{u \left(\sqrt{1 + (f'(u))^2} - 1 \right)}{u^2 + (f(u))^2} du \right| &\leq M (R(n))^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}, \\ \left| \int_{-d_l}^{d_l} u \left(\frac{1}{u^2 + (f(u))^2} - \frac{1}{u^2} \right) du \right| &\leq M (R(n))^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}. \end{aligned}$$

Теперь оценим последний интеграл в равенстве (8). Прежде всего, существует точка $\tilde{y}_* \in \Omega_l$, такая, что $d_l = |x(\tau_l) - \tilde{y}_*|$. Обозначим через $y_* \in \partial \left(\bigcup_{j \in P_l} L_j \right)$ прообраз точки $\tilde{y}_*$, а через $\alpha(\vec{a}, \vec{b})$ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Применяя неравенство (7), получаем, что

$$\begin{aligned} d_l &= |x(\tau_l) - y_*| \cos \alpha(y_* - x(\tau_l), \tilde{y}_* - x(\tau_l)) = \\ &= |x(\tau_l) - y_*| \sqrt{1 - \cos^2 \alpha(y_* - x(\tau_l), \vec{n}(x(\tau_l)))} \geq |x(\tau_l) - y_*| \sqrt{1 - M^2 |x(\tau_l) - y_*|^{2\alpha}} \geq \\ &\geq \left((R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}} - R(n) \right) \sqrt{1 - M^2 \left((R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}} + R(n) \right)^{2\alpha}} \geq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\geq \left((R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}} - R(n) \right) \sqrt{1 - M^2 \left(2(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}} \right)^{2\alpha}} \geq \\
 &\geq \left((R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}} - R(n) \right) \left(1 - 2^\alpha M (R(n))^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \right) \geq \\
 &\geq (R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}} - (1 + 2^\alpha M) R(n).
 \end{aligned} \tag{11}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 &\left| \int_{\Omega_I \setminus (-d_I, d_I)} \frac{u \sqrt{1 + (f'(u))^2}}{u^2 + (f(u))^2} du \right| \leq M \frac{(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha} + R(n)}}{(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}} - (1 + 2^\alpha M) R(n)} \frac{dt}{t} \leq \\
 &\leq M \frac{(2 + 2^\alpha M) R(n)}{(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}} - R(n)(1 + 2^\alpha M)} \leq M (R(n))^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.
 \end{aligned}$$

Суммируя полученные оценки для каждого слагаемого равенства (5), имеем

$$\left| V_1(x(\tau_l)) - V_1^n(x(\tau_l)) \right| \leq M \left(\|\rho\|_\infty (R(n))^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} + C_\rho (R(n))^{\frac{\beta}{1+\alpha}} \right).$$

В результате, принимая во внимание соотношение $R(n) \sim \frac{1}{n}$, получаем доказательство теоремы.

Замечание 1. Отметим, что методом построения квадратурной формулы для прямого значения производной логарифмического потенциала простого слоя можно построить квадратурную формулу и для других сингулярных интегралов по кривой Ляпунова.

3. Квадратурная формула для нормальной производной логарифмического потенциала двойного слоя

Теперь построим квадратурную формулу для нормальной производной логарифмического потенциала двойного слоя (2). Предположим, что кривая L задана параметрическим уравнением $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $t \in [a, b]$. Разобьем кривую L

на «регулярные» элементарные части, т.е. $L = \bigcup_{k=1}^n L_k$, и для функции $\varphi(x) \in C(L)$

введем модуль непрерывности вида

$$\omega(\varphi, \delta) = \delta \sup_{\tau \geq \delta} \frac{\bar{\omega}(\varphi, \tau)}{\tau}, \quad \delta > 0,$$

$$\text{где } \bar{\omega}(\varphi, \tau) = \max_{\substack{|x-y| \leq \tau \\ x, y \in L}} |\varphi(x) - \varphi(y)|.$$

Теорема 2. Пусть $L \subset R^2$ – простая замкнутая кривая Ляпунова с показателем $0 < \alpha \leq 1$, $\rho(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция на L и

$$\int_0^{\text{diam } L} \frac{\omega(\text{grad } \rho, t)}{t} dt < +\infty.$$

Тогда выражение

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial W}{\partial \bar{n}} \right)^n (x(\tau_l)) = & -\frac{b-a}{\pi n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n \frac{(x(\tau_l) - x(\tau_j), \bar{n}(x(\tau_j)))(x(\tau_l) - x(\tau_j), \bar{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_l) - x(\tau_j)|^4} \times \\ & \times \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2} (\rho(x(\tau_j)) - \rho(x(\tau_l))) + \\ & + \frac{b-a}{2\pi n} \sum_{j \in Q_l} \frac{(\bar{n}(x(\tau_j)), \bar{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_j) - x(\tau_l)|^2} \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2} (\rho(x(\tau_j)) - \rho(x(\tau_l))) \end{aligned}$$

в опорных точках $x(\tau_l)$, $l = \overline{1, n}$, является квадратурной формулой для $\frac{\partial W(x)}{\partial \bar{n}(x)}$,

причем справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \max_{l=1, n} \left| \frac{\partial W(x(\tau_l))}{\partial \bar{n}(x(\tau_l))} - \left(\frac{\partial W}{\partial \bar{n}} \right)^n (x(\tau_l)) \right| \leq M \left[\|\rho\|_\infty n^{-\alpha} + \|\text{grad } \rho\|_\infty n^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} + \int_0^{\frac{1}{1+\alpha}} \frac{\omega(\text{grad } \rho, t)}{t} dt \right], \\ \text{если } 0 < \alpha < 1, \\ \max_{l=1, n} \left| \frac{\partial W(x(\tau_l))}{\partial \bar{n}(x(\tau_l))} - \left(\frac{\partial W}{\partial \bar{n}} \right)^n (x(\tau_l)) \right| \leq M \left[\frac{\|\rho\|_\infty \ln n}{n} + \frac{\|\text{grad } \rho\|_\infty}{\sqrt{n}} + \int_0^{1/\sqrt{n}} \frac{\omega(\text{grad } \rho, t)}{t} dt \right], \\ \text{если } \alpha = 1. \end{aligned}$$

Доказательство. В работе [11] доказано, что $\frac{\partial W(x)}{\partial \bar{n}(x)} = T_1(x) + T_2(x)$, где

$$\begin{aligned} T_1(x) &= -\frac{1}{\pi} \int_L \frac{(x-y, \bar{n}(y))(x-y, \bar{n}(x))}{|x-y|^4} (\rho(y) - \rho(x)) dL_y, \\ T_2(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{(\bar{n}(y), \bar{n}(x))}{|x-y|^2} (\rho(y) - \rho(x)) dL_y, \quad x \in L, \end{aligned}$$

причем интеграл $T_2(x)$ существует в смысле главного значения Коши.

Построим квадратурную формулу для интеграла $T_1(x)$. Выражение

$$\begin{aligned} T_1^n(x(\tau_l)) = & -\frac{b-a}{\pi n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n \frac{(x(\tau_l) - x(\tau_j), \bar{n}(x(\tau_j)))(x(\tau_l) - x(\tau_j), \bar{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_l) - x(\tau_j)|^4} \times \\ & \times \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2} (\rho(x(\tau_j)) - \rho(x(\tau_l))) \end{aligned} \quad (12)$$

в опорных точках $x(\tau_l)$, $l = \overline{1, n}$, является квадратурной формулой для интеграла $T_1(x)$. Оценим погрешность квадратурной формулы (12). Очевидно, что

$$\begin{aligned}
 & T_1(x(\tau_l)) - T_1^n(x(\tau_l)) = \\
 & = -\frac{1}{\pi} \int_{L_l} \frac{(x(\tau_l) - y, \vec{n}(y))(x(\tau_l) - y, \vec{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_l) - y|^4} (\rho(y) - \rho(x(\tau_l))) dL_y - \\
 & \quad - \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n \frac{(x(\tau_l) - x(\tau_j), \vec{n}(x(\tau_j)))(x(\tau_l) - x(\tau_j), \vec{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_l) - x(\tau_j)|^4} \times \\
 & \quad \times \left(mesL_j - \frac{b-a}{n} \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2} \right) (\rho(x(\tau_j)) - \rho(x(\tau_l))) - \\
 & \quad - \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n \int_{L_j} \left[\frac{(x(\tau_l) - y, \vec{n}(y))(x(\tau_l) - y, \vec{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_l) - y|^4} - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{(x(\tau_j) - x(\tau_l), \vec{n}(x(\tau_j)))(x(\tau_j) - x(\tau_l), \vec{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_l) - y|^4} \right] (\rho(y) - \rho(x(\tau_l))) dL_y - \\
 & \quad - \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n \int_{L_j} \left(\frac{1}{|x(\tau_l) - y|^4} - \frac{1}{|x(\tau_l) - x(\tau_j)|^4} \right) \times \\
 & \quad \times (x(\tau_l) - x(\tau_j), \vec{n}(x(\tau_j)))(x(\tau_l) - x(\tau_j), \vec{n}(x(\tau_l))) (\rho(y) - \rho(x(\tau_l))) dL_y - \\
 & \quad - \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n \int_{L_j} \frac{(x(\tau_l) - x(\tau_j), \vec{n}(x(\tau_j)))(x(\tau_l) - x(\tau_j), \vec{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_l) - x(\tau_j)|^4} (\rho(y) - \rho(x(\tau_j))) dL_y.
 \end{aligned}$$

Слагаемые в выражении правой части последнего равенства обозначим через $r_1(T_1, x(\tau_l))$, $r_2(T_1, x(\tau_l))$, $r_3(T_1, x(\tau_l))$, $r_4(T_1, x(\tau_l))$ и $r_5(T_1, x(\tau_l))$ соответственно.

Так как функция $\rho(x)$ непрерывно дифференцируема, то существует такая точка $y^* = x + \theta(y - x)$ (здесь $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ и $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$), что

$$\rho(y) - \rho(x) = (\text{grad} \rho(y^*), y - x), \quad x, y \in L. \quad (13)$$

Тогда, применяя формулу вычисления криволинейного интеграла, имеем

$$|r_1(T_1, x(\tau_l))| \leq M \|\text{grad} \rho\|_\infty \int_{L_l} \frac{1}{|x(\tau_l) - y|^{1-2\alpha}} dL_y \leq M \|\text{grad} \rho\|_\infty (R(n))^{2\alpha}.$$

Принимая во внимание (3), (6) и (13), получим

$$\begin{aligned}
 |r_2(T_1, x(\tau_l))| &= \frac{1}{\pi} \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n \left(1 - \frac{\frac{b-a}{n} \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2}}{mesL_j} \right) \times \right. \\
 & \quad \times \int_{L_j} \frac{(x(\tau_l) - x(\tau_j), \vec{n}(x(\tau_j)))(x(\tau_l) - x(\tau_j), \vec{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_l) - x(\tau_j)|^4} (\rho(x(\tau_j)) - \rho(x(\tau_l))) dL_y \Big| \leq
 \end{aligned}$$

$$\leq M \|\text{grad} \rho\|_{\infty} (R(n))^{\alpha} \int_{R(n)}^{\text{diam} L} \frac{dt}{t^{1-2\alpha}} \leq M \|\text{grad} \rho\|_{\infty} (R(n))^{\alpha}.$$

Пусть $y \in L_j$ и $j \neq l$. Тогда, учитывая (3) и (13), получаем

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(x(\tau_l) - y, \bar{n}(y))(x(\tau_l) - y, \bar{n}(x(\tau_l))) - (x(\tau_j) - x(\tau_l), \bar{n}(x(\tau_j)))(x(\tau_j) - x(\tau_l), \bar{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_l) - y|^4} \times \right. \\ & \quad \left. \times (\rho(y) - \rho(x(\tau_l))) \right| = \left| (\rho(y) - \rho(x(\tau_l))) \times \right. \\ & \quad \times \left(\frac{((y - x(\tau_j), \bar{n}(y)) + (x(\tau_j) - x(\tau_l), \bar{n}(y) - \bar{n}(x(\tau_j))))(y - x(\tau_l), \bar{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_l) - y|^4} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{(x(\tau_j) - x(\tau_l), \bar{n}(x(\tau_j)))(y - x(\tau_j), \bar{n}(x(\tau_l)) - \bar{n}(y)) + (y - x(\tau_j), \bar{n}(y))}{|x(\tau_l) - y|^4} \right) \Bigg| \leq \\ & \leq M \|\text{grad} \rho\|_{\infty} \frac{(R(n))^{\alpha}}{|x(\tau_l) - y|^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|r_3(T_1, x(\tau_l))| \leq M (R(n))^{\alpha} \|\text{grad} \rho\|_{\infty} \int_{L \setminus L_l} \frac{1}{|x(\tau_l) - y|^{1-\alpha}} dL_y \leq M \|\text{grad} \rho\|_{\infty} (R(n))^{\alpha}.$$

Опять-таки принимая во внимание (3) и (13), получаем, что если $y \in L_j$ и $j \neq l$, то

$$\begin{aligned} & \left| \left(\frac{1}{|x(\tau_l) - y|^4} - \frac{1}{|x(\tau_l) - x(\tau_j)|^4} \right) (x(\tau_j) - x(\tau_l), \bar{n}(x(\tau_j))) \times \right. \\ & \quad \left. \times (x(\tau_j) - x(\tau_l), \bar{n}(x(\tau_l))) (\rho(y) - \rho(x(\tau_l))) \right| \leq M \|\text{grad} \rho\|_{\infty} \frac{R(n)}{|x(\tau_l) - y|^{2-\alpha}} \\ \text{и} \quad & \left| \frac{(x(\tau_j) - x(\tau_l), \bar{n}(x(\tau_j)))(x(\tau_j) - x(\tau_l), \bar{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_l) - x(\tau_j)|^4} (\rho(y) - \rho(x(\tau_j))) \right| \leq \\ & \leq M \|\text{grad} \rho\|_{\infty} \frac{R(n)}{|x(\tau_l) - y|^{2-\alpha}}. \end{aligned}$$

Тогда

$$|r_4(T_1, x(\tau_l))| \leq M R(n) \|\text{grad} \rho\|_{\infty} \int_{L \setminus L_l} \frac{1}{|x(\tau_l) - y|^{2-\alpha}} dL_y \leq M \|\text{grad} \rho\|_{\infty} (R(n))^{\alpha},$$

если $0 < \alpha < 1$,

$$|r_4(T_1, x(\tau_l))| \leq M \|\text{grad} \rho\|_{\infty} R(n) |\ln R(n)|, \text{ если } \alpha = 1,$$

$$\begin{aligned} \text{и} \quad & |r_5(T_1, x(\tau_l))| \leq M \|\text{grad } \rho\|_\infty (R(n))^\alpha, \text{ если } 0 < \alpha < 1, \\ & |r_5(T_1, x(\tau_l))| \leq M \|\text{grad } \rho\|_\infty R(n) |\ln R(n)|, \text{ если } \alpha = 1. \end{aligned}$$

Суммируя полученные оценки для выражений $r_j(T_1, x(\tau_l))$, $j = \overline{1, 5}$, получим

$$\begin{aligned} \max_{l=1, n} |T_1(x(\tau_l)) - T_1^n(x(\tau_l))| &\leq M \|\text{grad } \rho\|_\infty (R(n))^\alpha, \text{ если } 0 < \alpha < 1, \\ \max_{l=1, n} |T_1(x(\tau_l)) - T_1^n(x(\tau_l))| &\leq M \|\text{grad } \rho\|_\infty R(n) |\ln R(n)|, \text{ если } \alpha = 1. \end{aligned}$$

Теперь построим квадратурную формулу для интеграла $T_2(x)$. Выражение

$$\begin{aligned} T_2^n(x(\tau_l)) &= \frac{b-a}{2\pi n} \sum_{j \in Q_l} \frac{(\bar{n}(x(\tau_j)), \bar{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_j) - x(\tau_l)|^2} \times \\ &\times \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2} (\rho(x(\tau_j)) - \rho(x(\tau_l))) \end{aligned} \quad (14)$$

в опорных точках $x(\tau_l)$, $l = \overline{1, n}$, является квадратурной формулой для интеграла $T_2(x)$. Оценим погрешность квадратурной формулы (14).

Очевидно, что

$$\begin{aligned} T_2(x(\tau_l)) - T_2^n(x(\tau_l)) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in Q_l} \frac{(\bar{n}(x(\tau_j)), \bar{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_l) - x(\tau_j)|^2} \times \\ &\times \left(\text{mes } L_j - \frac{b-a}{n} \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2} \right) (\rho(x(\tau_j)) - \rho(x(\tau_l))) + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in Q_l} \int_{L_j} \left(\frac{\rho(y) - \rho(x(\tau_l))}{|x(\tau_l) - y|^2} (\bar{n}(y), \bar{n}(x(\tau_l))) - \frac{\rho(x(\tau_j)) - \rho(x(\tau_l))}{|x(\tau_l) - x(\tau_j)|^2} (\bar{n}(x(\tau_j)), \bar{n}(x(\tau_l))) \right) dL_y + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\bigcup_{j \in Q_l} L_j} \frac{\rho(y) - \rho(x(\tau_l))}{|x(\tau_l) - y|^2} (\bar{n}(y), \bar{n}(x(\tau_l))) dL_y. \end{aligned}$$

Слагаемые в выражении правой части последнего равенства обозначим через $r_1(T_2, x(\tau_l))$, $r_2(T_2, x(\tau_l))$ и $r_3(T_2, x(\tau_l))$ соответственно.

Принимая во внимание (3), (6) и (13), получим

$$\begin{aligned} & |r_1(T_2, x(\tau_l))| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{j \in Q_l} \left(1 - \frac{\frac{b-a}{n} \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2}}{\text{mes } L_j} \right) \int_{L_j} \frac{(\bar{n}(x(\tau_j)), \bar{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_l) - x(\tau_j)|^2} (\rho(x(\tau_j)) - \rho(x(\tau_l))) dL_y \right| \leq \\ &\leq M \|\text{grad } \rho\|_\infty (R(n))^\alpha \int_{\frac{1}{(R(n))^{1+\alpha}}}^{\text{diam } L} \frac{dt}{t} \leq M \|\text{grad } \rho\|_\infty (R(n))^\alpha |\ln R(n)|. \end{aligned}$$

Пусть $y \in S_j, j \in Q_l$. Тогда

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{\rho(y) - \rho(x(\tau_l))}{|x(\tau_l) - y|^2} (\bar{n}(y), \bar{n}(x(\tau_l))) - \frac{\rho(x(\tau_j)) - \rho(x(\tau_l))}{|x(\tau_l) - x(\tau_j)|^2} (\bar{n}(x(\tau_j)), \bar{n}(x(\tau_l))) \right| \leq \\
 & \leq \left| \frac{(\rho(y) - \rho(x(\tau_l))) (\bar{n}(y), \bar{n}(x(\tau_l))) (|x(\tau_l) - x(\tau_j)|^2 - |x(\tau_l) - y|^2)}{|x(\tau_l) - y|^2 |x(\tau_l) - x(\tau_j)|^2} \right| + \\
 & + \frac{|(\rho(y) - \rho(x(\tau_j))) (\bar{n}(y), \bar{n}(x(\tau_l)))|}{|x(\tau_l) - x(\tau_j)|^2} + \\
 & + \frac{|(\rho(x(\tau_j)) - \rho(x(\tau_l))) (\bar{n}(y) - \bar{n}(x(\tau_j)), \bar{n}(x(\tau_l)))|}{|x(\tau_l) - x(\tau_j)|^2} \leq \\
 & \leq M \|\text{grad } \rho\|_\infty \left(\frac{R(n)}{|x(\tau_l) - y|^2} + \frac{(R(n))^\alpha}{|x(\tau_l) - y|} \right).
 \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned}
 |r_2(T_2, x(\tau_l))| & \leq \frac{M}{2\pi} \|\text{grad } \rho\|_\infty \left(R(n) \int_{(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}}}^{\text{diam } L} \frac{dt}{t^2} + (R(n))^\alpha \int_{(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}}}^{\text{diam } L} \frac{dt}{t} \right) \leq \\
 & \leq M \|\text{grad } \rho\|_\infty (R(n))^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.
 \end{aligned}$$

Так как существует такая точка $\tilde{y}(l) = x(\tau_l) + \theta(y - x(\tau_l))$ (здесь $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ и $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$), что

$$\rho(y) - \rho(x(\tau_l)) = (\text{grad } \rho(\tilde{y}(l)), y - x(\tau_l)), \quad y \in \bigcup_{j \in P_l} L_j, \quad (15)$$

то выражение $r_3(T_2, x(\tau_l))$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 r_3(T_2, x(\tau_l)) & = \frac{1}{2\pi} \int_{\bigcup_{j \in P_l} L_j} \frac{(\text{grad } \rho(\tilde{y}(l)), y - x(\tau_l))}{|x(\tau_l) - y|^2} (\bar{n}(y) - \bar{n}(x(\tau_l)), \bar{n}(x(\tau_l))) dL_y + \\
 & + \frac{1}{2\pi} \int_{\bigcup_{j \in P_l} L_j} \frac{(\text{grad } \rho(\tilde{y}(l)) - \text{grad } \rho(x(\tau_l)), y - x(\tau_l))}{|x(\tau_l) - y|^2} dL_y + \\
 & + \frac{1}{2\pi} \int_{\bigcup_{j \in P_l} L_j} \frac{(\text{grad } \rho(x(\tau_l)), y - x(\tau_l))}{|x(\tau_l) - y|^2} dL_y.
 \end{aligned}$$

Пусть $y \in \partial \left(\bigcup_{j \in P_l} L_j \right)$. Тогда принимая во внимание неравенство (15), получим

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\bigcup_{j \in P_l} L_j} \frac{(\text{grad } \rho(\tilde{y}(l)), y - x(\tau_l))}{|x(\tau_l) - y|^2} (\vec{n}(y) - \vec{n}(x(\tau_l)), \vec{n}(x(\tau_l))) dL_y \right| \leq \\ & \leq M \|\text{grad } \rho\|_{\infty}^{(R(n))^{1+\alpha} + R(n)} \int_0^{\frac{1}{t^{1-\alpha}}} \frac{dt}{t^{1-\alpha}} \leq M \|\text{grad } \rho\|_{\infty}^{(R(n))^{1+\alpha} + R(n)} \frac{\alpha}{t^{1-\alpha}}, \\ & \left| \int_{\bigcup_{j \in P_l} L_j} \frac{(\text{grad } \rho(\tilde{y}(l)) - \text{grad } \rho(x(\tau_l)), y - x(\tau_l))}{|x(\tau_l) - y|^2} dL_y \right| \leq M^{(R(n))^{1+\alpha} + R(n)} \frac{\omega(\text{grad } \rho, t)}{t} dt. \end{aligned}$$

На куске $L_d(x(\tau_l))$ выберем локальную прямоугольную систему координат (u, v) с началом в точке $x(\tau_l)$, где направим ось v вдоль нормали $\vec{n}(x(\tau_l))$, а ось u вдоль положительного направления касательной прямой $\Gamma(x(\tau_l))$. Так как

$$\begin{aligned} & \int_{\bigcup_{j \in P_l} L_j} \frac{(\text{grad } \rho(x(\tau_l)), y - x(\tau_l))}{|x(\tau_l) - y|^2} dL_y = \\ & = \int_{\bigcup_{j \in P_l} L_j} \frac{(y_1 - x_1(\tau_l)) \frac{\partial \rho(x(\tau_l))}{\partial x_1} + (y_2 - x_2(\tau_l)) \frac{\partial \rho(x(\tau_l))}{\partial x_2}}{(y_1 - x_1(\tau_l))^2 + (y_2 - x_2(\tau_l))^2} dL_y, \end{aligned}$$

то по формуле вычисления криволинейного интеграла, получаем, что

$$\begin{aligned} & \int_{\bigcup_{j \in P_l} L_j} \frac{(\text{grad } \rho(x(\tau_l)), y - x(\tau_l))}{|x(\tau_l) - y|^2} dL_y = \\ & = \frac{\partial \rho(x(\tau_l))}{\partial x_1} \int_{-d_l}^{d_l} \frac{du}{u} + \frac{\partial \rho(x(\tau_l))}{\partial x_2} \int_{-d_l}^{d_l} \frac{f(u)}{u^2 + (f(u))^2} \sqrt{1 + (f'(u))^2} du + \\ & + \frac{\partial \rho(x(\tau_l))}{\partial x_1} \int_{-d_l}^{d_l} \frac{u \left(\sqrt{1 + (f'(u))^2} - 1 \right)}{u^2 + (f(u))^2} du + \frac{\partial \rho(x(\tau_l))}{\partial x_1} \int_{-d_l}^{d_l} u \left(\frac{1}{u^2 + (f(u))^2} - \frac{1}{u^2} \right) du + \\ & + \int_{\Omega_l \setminus (-d_l, d_l)} \frac{\frac{\partial \rho(x(\tau_l))}{\partial x_1} u + \frac{\partial \rho(x(\tau_l))}{\partial x_2} f(u)}{u^2 + (f(u))^2} \sqrt{1 + (f'(u))^2} du. \quad (16) \end{aligned}$$

Первый интеграл в равенстве (16) существует в смысле главного значения Коши и равен нулю. Кроме того, учитывая неравенства (9) и (10), имеем

$$\left| \frac{\partial \rho(x(\tau_l))}{\partial x_2} \int_{-d_l}^{d_l} \frac{f(u)}{u^2 + (f(u))^2} \sqrt{1 + (f'(u))^2} du \right| \leq M \|\text{grad } \rho\|_{\infty}^{(R(n))^{1+\alpha}},$$

$$\left| \frac{\partial \rho(x(\tau_l))}{\partial x_1} \int_{-d_l}^{d_l} \frac{u \left(\sqrt{1 + (f'(u))^2} - 1 \right)}{u^2 + (f(u))^2} du \right| \leq M \|\text{grad } \rho\|_{\infty} (R(n))^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}},$$

$$\left| \frac{\partial \rho(x(\tau_l))}{\partial x_1} \int_{-d_l}^{d_l} u \left(\frac{1}{u^2 + (f(u))^2} - \frac{1}{u^2} \right) du \right| \leq M \|\text{grad } \rho\|_{\infty} (R(n))^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}.$$

Принимая во внимание неравенство (11) для последнего интеграла в равенстве (16), получаем, что

$$\left| \int_{\Omega_l \setminus (-d_l, d_l)} \frac{\frac{\partial \rho(x(\tau_l))}{\partial x_1} u + \frac{\partial \rho(x(\tau_l))}{\partial x_2} f(u)}{u^2 + (f(u))^2} \sqrt{1 + (f'(u))^2} du \right| \leq$$

$$\leq M \|\text{grad } \rho\|_{\infty} \int_{(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha} - R(n)} (1+2^\alpha M)}^{(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha} + R(n)}} \frac{dt}{t} = M \|\text{grad } \rho\|_{\infty} \ln \frac{(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha} + R(n)}}{(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha} - R(n)} (1+2^\alpha M)} =$$

$$= M \|\text{grad } \rho\|_{\infty} \ln \left(1 + \frac{R(n)(2+2^\alpha M)}{(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha} - R(n)} (1+2^\alpha M)} \right) \leq$$

$$\leq M \|\text{grad } \rho\|_{\infty} \frac{R(n)(2+2^\alpha M)}{(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha} - R(n)} (1+2^\alpha M)} \leq M \|\text{grad } \rho\|_{\infty} (R(n))^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

В результате, имеем

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\bigcup_{j \in \bar{H}} L_j} \frac{(\text{grad } \rho(x(\tau_l)), y - x(\tau_l))}{|x(\tau_l) - y|^2} dL_y \right| \leq M \|\text{grad } \rho\|_{\infty} (R(n))^{\frac{\alpha}{1+\alpha}},$$

следовательно,

$$|r_3(T_2, x(\tau_l))| \leq M \left[\|\text{grad } \rho\|_{\infty} (R(n))^{\frac{\alpha}{1+\alpha} + (R(n))^{\frac{1}{1+\alpha} + R(n)}} \int_0^{(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha} + R(n)}} \frac{\omega(\text{grad } \rho, t)}{t} dt \right].$$

Суммируя полученные оценки для выражений $r_1(T_2, x(\tau_l))$, $r_2(T_2, x(\tau_l))$ и $r_3(T_2, x(\tau_l))$, получаем

$$\max_{l=1, n} |T_2(x(\tau_l)) - T_2^n(x(\tau_l))| \leq M \left[\|\text{grad } \rho\|_{\infty} (R(n))^{\frac{\alpha}{1+\alpha} + (R(n))^{\frac{1}{1+\alpha} + R(n)}} \int_0^{(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha} + R(n)}} \frac{\omega(\text{grad } \rho, t)}{t} dt \right].$$

В итоге, принимая во внимание соотношение $R(n) \sim \frac{1}{n}$, построенные квадратурные формулы для интегралов $T_1(x)$, $T_2(x)$ и оценки их погрешностей, получаем доказательство теоремы.

Замечание 2. Как видно, если $\rho \equiv C = \text{const}$, то $\left(\frac{\partial W}{\partial \bar{n}}\right)^n(x(\tau_l)) = 0$, $\forall l = \overline{1, n}$, и кроме того, по теореме Гаусса (см. [7])

$$\int_L \frac{(x-y, \bar{n}(y))}{|x-y|^2} dL_y = -\pi, \quad x \in L,$$

а, значит, $\frac{\partial W(x)}{\partial \bar{n}(x)} = 0$, $x \in L$. А это означает, что в классе постоянных функций ρ выполняется равенство

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \bar{n}}\right)^n(x(\tau_l)) = \frac{\partial W(x(\tau_l))}{\partial \bar{n}(x(\tau_l))} = 0, \quad \forall l = \overline{1, n},$$

т.е. построенная квадратурная формула для нормальной производной логарифмического потенциала двойного слоя является эффективной.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю к.ф.-м.н., доц. Э.Г. Халилову за постановку задач и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 311 с.
2. Халилов Э.Г. Некоторые свойства оператора, порожденного производной акустического потенциала двойного слоя // Сибирский математический журнал. Т. 55. № 3. 2014. С. 690–700.
3. Khalilov E. H. Cubic formula for the normal derivative of a double layer acoustic potential // Transactions of NAS of Azerbaijan, series of physical-technical and mathematical sciences. 2014. V. 34. No. 1. P. 73–82.
4. Халилов Э.Г. О приближенном решении одного класса граничных интегральных уравнений первого рода // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 9. С. 1277–1283.
5. Халилов Э.Г. Обоснование метода коллокации для одного класса поверхностных интегральных уравнений // Математические заметки. 2020. Т. 107. № 4. С. 604–622.
6. Мухомелов Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 599 с.
7. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 527 с.
8. Khalilov E.H., Bakhshaliyeva M.N. Quadrature formulas for simple and double layer logarithmic potentials // Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan. 2019. V. 45. No. 1. P. 155–162.
9. Кустов Ю.А., Мусаев Б.И. Кубатурная формула для двумерного сингулярного интеграла и ее приложения // Деп. в ВИНТИ. № 4281–81. 60 с.
10. Bakhshaliyeva M.N. On the properties of operator generated by the direct value of the derivative of simple layer logarithmic potential // Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics. 2019. V. 7. No. 1. P. 11–24.
11. Халилов Э.Г., Бахшалиева М.Н. О производной логарифмического потенциала двойного слоя // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 62. С. 38–54.

Статья поступила 22.04.2020

Bakhshaliyeva M.N. (2020) A QUADRATURE FORMULA FOR THE DERIVATIVE OF LOGARITHMIC POTENTIALS *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 68. pp. 5–22

DOI 10.17223/19988621/68/1

Keywords: quadrature formula, curvilinear singular integral, derivative of the logarithmic potential of a simple layer, normal derivative of the logarithmic potential of a double layer.

In this work, we give a new method for constructing a quadrature formula for a curvilinear singular integral and, based on this method, we construct quadrature formulas for the derivative of the logarithmic potential of a simple layer

$$V(x) = \int_L \overline{\text{grad}}_x \Phi(x, y) \rho(y) dL_y, \quad x = (x_1, x_2) \in L,$$

and for the normal derivative of the logarithmic potential of a double layer

$$\frac{\partial W(x)}{\partial \bar{n}(x)} = \frac{\partial}{\partial \bar{n}(x)} \left(\int_L \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \bar{n}(y)} \rho(y) dL_y \right), \quad x \in L,$$

where $L \subset R^2$ is a simple closed Lyapunov curve with the exponent $0 < \alpha \leq 1$; $\bar{n}(y)$ is the external unit normal at the point $y \in L$; ρ is a continuous function on L ; and $\Phi(x, y)$ is the fundamental solution of the Laplace equation, i.e.,

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|}, \quad x, y \in R^2, \quad x \neq y.$$

Assume that the curve L is defined by the parametric equation $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $t \in [a, b]$. Let us partition the segment $[a, b]$ into $n > 2M_1(b-a)/d$ equal parts:

$t_k = a + \frac{(b-a)k}{n}$, $k = \overline{0, n}$, where $M_1 = \max_{t \in [a, b]} \sqrt{(x'_1(t))^2 + (x'_2(t))^2} < +\infty$ and d is the radius of

the standard circle. As reference points, we take $x(\tau_k)$, $k = \overline{1, n}$, where $\tau_k = a + \frac{(b-a)(2k-1)}{2n}$.

Also let $Q_l = \left\{ j \mid 1 \leq j \leq n, |x(\tau_l) - x(\tau_j)| > (R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}} \right\}$, where $R(n) = \max_{k=1, n} R_k(n)$,

$R_k(n) = \max \{ |x(\tau_k) - x(t_{k-1})|, |x(t_k) - x(\tau_k)| \}$.

The following theorems are proved.

Theorem 1. Let $L \subset R^2$ be a simple closed Lyapunov curve with the exponent $0 < \alpha \leq 1$ and $\rho \in H_\beta(L)$, $0 < \beta \leq 1$. Then the expression

$$V_m^n(x(\tau_l)) = \frac{b-a}{2\pi n} \sum_{j \in Q_l} \frac{x_m(\tau_j) - x_m(\tau_l)}{|x(\tau_l) - x(\tau_j)|^2} \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2} \rho(x(\tau_j))$$

at the reference points $x(\tau_l)$, $l = \overline{1, n}$, is a quadrature formula for

$$V_m(x) = \int_L \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x_m} \rho(y) dL_y, \quad x = (x_1, x_2) \in L \quad (m = 1, 2);$$

here,

$$\max_{l=1, n} |V_m(x(\tau_l)) - V_m^n(x(\tau_l))| \leq M \left(\|\rho\|_\infty n^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} + C_\rho n^{-\frac{\beta}{1+\alpha}} \right),$$

where $H_\beta(L)$ is the Hölder space with the exponent $0 < \beta \leq 1$, $\|\rho\|_\infty = \max_{x \in L} |\rho(x)|$, M is a positive constant, and $C_\rho = \sup_{\substack{x, y \in L, \\ x \neq y}} \frac{|\rho(x) - \rho(y)|}{|x - y|^\beta}$.

Theorem 2. Let $L \subset \mathbb{R}^2$ be a simple closed Lyapunov curve with the exponent $0 < \alpha \leq 1$, $\rho(x)$ be a continuously differentiable function on L , and

$$\int_0^{\text{diam } L} \frac{\omega(\text{grad } \rho, t)}{t} dt < +\infty.$$

Then the expression

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial W}{\partial \bar{n}} \right)^n (x(\tau_l)) = & -\frac{b-a}{\pi n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n \frac{(x(\tau_l) - x(\tau_j), \bar{n}(x(\tau_j)))(x(\tau_l) - x(\tau_j), \bar{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_l) - x(\tau_j)|^4} \times \\ & \times \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2} (\rho(x(\tau_j)) - \rho(x(\tau_l))) + \\ & + \frac{b-a}{2\pi n} \sum_{j \in Q_l} \frac{(\bar{n}(x(\tau_j)), \bar{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_j) - x(\tau_l)|^2} \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2} (\rho(x(\tau_j)) - \rho(x(\tau_l))) \end{aligned}$$

at the reference points $x(\tau_l)$, $l = \overline{1, n}$, is a quadrature formula for $\frac{\partial W(x)}{\partial \bar{n}(x)}$; moreover, the following estimates are true:

$$\begin{aligned} \max_{l=1, n} \left| \frac{\partial W(x(\tau_l))}{\partial \bar{n}(x(\tau_l))} - \left(\frac{\partial W}{\partial \bar{n}} \right)^n (x(\tau_l)) \right| \leq M \left[\|\rho\|_\infty n^{-\alpha} + \|\text{grad } \rho\|_\infty n^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} + \int_0^{\frac{1}{1+\alpha}} \frac{\omega(\text{grad } \rho, t)}{t} dt \right], \\ \text{if } 0 < \alpha < 1, \\ \max_{l=1, n} \left| \frac{\partial W(x(\tau_l))}{\partial \bar{n}(x(\tau_l))} - \left(\frac{\partial W}{\partial \bar{n}} \right)^n (x(\tau_l)) \right| \leq M \left[\frac{\|\rho\|_\infty |\ln n|}{n} + \frac{\|\text{grad } \rho\|_\infty}{\sqrt{n}} + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{\omega(\text{grad } \rho, t)}{t} dt \right], \\ \text{if } \alpha = 1, \end{aligned}$$

where M is a positive constant.

AMS Mathematical Subject Classification: 45E05; 31B10

Mehpara N. BAKHSHALIYEVA (PhD student of the General and Applied Mathematics Department of Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan). E-mail: mehpara.bakhshalieva@mail.ru

REFERENCES

1. Colton D.L., Kress R. (1983) *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. John Wiley & Sons.
2. Khalilov E.H. (2014) Some properties of the operators generated by a derivative of the acoustic double layer potential. *Siberian Mathematical Journal*. 55(3). pp. 564–573. DOI: 10.1134/S0037446614030173.
3. Khalilov E.H. (2014) Cubic formula for the normal derivative of a double layer acoustic potential. *Transactions of NAS of Azerbaijan, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences*. 34(1). pp.73–82. http://imm.az/journals/AMEA_xeberleri/cild34_N1_2014/meqaleler/73-82.pdf.

4. Khalilov E.H. (2016) On an approximate solution of a class of boundary integral equations of the first kind. *Differential Equations*. 52(9). pp. 1234–1240. DOI: 10.1134/S0012266116090147.
5. Khalilov E.H. (2020) Justification of the collocation method for a class of surface integral equations. *Mathematical Notes*. 107(4). pp. 663–678. DOI: 10.1134/S0001434620030335.
6. Muskhelishvili N.I. (1958) *Singular Integral Equations*. Springer Netherlands.
7. Vladimirov V.S. (1971) *Equations of Mathematical Physics*. New York: Marcel Dekker.
8. Khalilov E.H., Bakhshaliyeva M.N. (2019) Quadrature formulas for simple and double layer logarithmic potentials. *Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan*. 45(1). pp. 155–162. <http://proc.imm.az/volumes/45-1/45-01-12.pdf>.
9. Kustov Yu.A., Musaev B.I. (1981) *Kubaturnaya formula dlya dvumernogo singulyarnogo integrala i eio prilozheniya* [The cubature formula for a two-dimensional singular integral and its applications]. Submitted to VINITI. 4281-81.
10. Bakhshaliyeva M.N. (2019) On the properties of operator generated by the direct value of the derivative of simple layer logarithmic potential. *Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics*. 7(1). pp. 11–24.
11. Khalilov E.H., Bakhshaliyeva M.N. (2019) On the derivative of the double-layer logarithmic potential. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 62. pp. 38–54. DOI: 10.17223/19988621/62/4.

Received: April 22, 2020

В.К. Вильданов, В.А. Гайдак, Е.А. Тимошенко

ОБ ОПРЕДЕЛЯЕМОСТИ ВПОЛНЕ РАЗЛОЖИМОЙ ГРУППЫ РАНГА 2 ЕЁ ГРУППОЙ АВТОМОРФИЗМОВ¹

Найдены необходимые и достаточные условия, при которых две вполне разложимые абелевы группы без кручения ранга 2 имеют изоморфные группы автоморфизмов. Получен ответ на вопрос о том, при каких условиях вполне разложимая абелева группа ранга 2 однозначно определяется своей группой автоморфизмов.

Ключевые слова: матрица, инволюция, вполне разложимая группа, группа автоморфизмов.

Пусть $B \in X$, где X – некоторый класс абелевых групп. Мы будем говорить, что B определяется своей группой автоморфизмов в классе X , если из изоморфизма групп автоморфизмов $\text{Aut } B$ и $\text{Aut } B'$, где $B' \in X$, всегда следует $B \cong B'$.

Всюду ниже под X понимается класс всех вполне разложимых групп (без кручения) ранга 2. Данная статья служит продолжением работы [1] и развивает некоторые идеи работы [2], посвящённой определяемости групп класса X их группами автоморфизмов. Напомним, что *вполне разложимой группой ранга n* называется всякая группа B , представляемая в виде прямой суммы n групп ранга 1; хорошо известно (см. [3]), что любые два таких разложения группы B будут изоморфны. Так как всякая группа ранга 1 изоморфна некоторой *рациональной группе* (т.е. ненулевой подгруппе аддитивной группы поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$), то для удобства можно сразу рассматривать группы из класса X как прямые суммы двух рациональных групп.

В статье [2] были получены необходимые и достаточные условия существования изоморфизма $\text{Aut } B \cong \text{Aut } B'$ для 2-делимых групп $B, B' \in X$. В настоящей работе аналогичная задача решена уже для произвольных групп класса X .

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел. Для всякого множества $L \subset \mathbb{P}$ будем обозначать символом $\mathbb{Q}^{(L)}$ то подкольцо поля $\mathbb{Q}$, которое порождается элементом 1 и числами p^{-1} , где $p \in L$. Хорошо известно, что все подкольца поля $\mathbb{Q}$ исчерпываются кольцами вида $\mathbb{Q}^{(L)}$.

Через $\mathbf{t}(Y)$ обозначается тип группы Y ранга 1; подробнее о типах см. [3]. Для рациональных групп Y и Z положим $\Gamma_{YZ} = \{\alpha \in \mathbb{Q} \mid \alpha Y \subset Z\}$. Несложно проверить, что справедливы следующие свойства:

- 1) $(\Gamma_{YZ}, +)$ – абелева группа, изоморфная группе гомоморфизмов $\text{Hom}(Y, Z)$.
- 2) $\Gamma_{YY} = \mathbb{Q}^{(L)}$, где L – множество всех простых чисел p , таких, что $pY = Y$. При этом кольцо Γ_{YY} изоморфно кольцу эндоморфизмов $E(Y)$ группы Y , а группа обратимых элементов $U(\Gamma_{YY})$ кольца Γ_{YY} изоморфна группе $\text{Aut } Y$.
- 3) $\Gamma_{KY} \Gamma_{YZ} \subset \Gamma_{KZ}$.
- 4) Если неравенство $\mathbf{t}(Y) \leq \mathbf{t}(Z)$ не выполнено, то $\Gamma_{YZ} = 0$.

¹ Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для молодых учёных – докторов наук МД-108.2020.1.

5) Если $\mathbf{t}(Y) \leq \mathbf{t}(Z)$, то $\Gamma_{YZ} \neq 0$ и $\mathbf{t}(\Gamma_{YZ}) = \mathbf{t}(Z) : \mathbf{t}(Y)$.

Нетрудно видеть, что кольцо эндоморфизмов $E(B)$ вполне разложимой группы $B = Y \oplus Z$ ранга 2 изоморфно кольцу матриц

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{YY} & \Gamma_{ZY} \\ \Gamma_{YZ} & \Gamma_{ZZ} \end{pmatrix} \quad (1)$$

(с обычными операциями сложения и умножения). Поэтому в дальнейшем будем отождествлять кольцо $E(B)$ с подкольцом (1) кольца матриц $M(2, \mathbf{Q})$ порядка 2 над полем $\mathbf{Q}$ и считать, что группа $\text{Aut } B$ совпадает с матричной группой $U(E(B))$.

Группы матриц порядка 2 над подкольцами поля $\mathbf{Q}$

Для коммутативного кольца с единицей R через $GL_2(R)$ обозначается группа обратимых (2×2) -матриц с элементами из R ; эта группа состоит из тех матриц

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ где } a, b, c, d \in R, \quad (2)$$

для которых определитель $|A| = ad - bc$ есть обратимый элемент кольца R .

Введём обозначения

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X(h) = \begin{pmatrix} 1+h & h \\ -h & 1-h \end{pmatrix}, \quad W(h) = \begin{pmatrix} 1-h & h \\ -h & 1+h \end{pmatrix},$$

$$T(h) = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следующая лемма носит технический характер.

Лемма 1. а) Для любых $g, h \in \mathbf{Q}$ выполнены равенства $T(g)T(h) = T(g+h)$, $P(g)P(h) = P(g+h)$, $X(g)X(h) = X(g+h)$ и $W(g)W(h) = W(g+h)$.

б) Если $h \neq 0$, то $T(h)$ не является инволюцией.

в) Если для некоторого $h \in \mathbf{Q}$ матрица A вида (2) равна какой-то из матриц $T(h)$, $-T(h)$, $P(h)$, $-P(h)$, то число h с данным свойством определено однозначно.

г) Если для некоторого $h \in \mathbf{Q}$ матрица A вида (2) равна какой-то из матриц $X(h)$, $-X(h)$, $W(h)$, $-W(h)$, то число h с данным свойством определено однозначно.

д) Если $g, h \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$, то $T(h)P(g) \neq P(g)T(h)$ и $X(h)W(g) \neq W(g)X(h)$.

Доказательство. Утверждения а) и б) проверяются непосредственно.

в) Легко заметить, что во всех четырёх случаях выполнено $h = a(b+c)$.

г) Во всех четырёх случаях имеем $h = b(a+d)/2$.

д) Первая часть утверждения следует из того, что элементы, стоящие в левом верхнем углу матриц $T(h)P(g)$ и $P(g)T(h)$, равны $1+gh$ и 1 соответственно. Вторая часть утверждения следует из того, что элементы, стоящие в правом верхнем углу матриц $X(h)W(g)$ и $W(g)X(h)$, равны соответственно $g+h+2gh$ и $g+h-2gh$. ■

Множество $ML_2(R) \subset GL_2(R)$, элементами которого служат матрицы с определителем ± 1 , очевидно, является подгруппой в $GL_2(R)$. В [1] было показано, что если R – подкольцо поля $\mathbf{Q}$, то множество всех нецентральных инволюций группы $ML_2(R)$ совпадает с множеством матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \text{ где } a^2 + bc = 1. \quad (3)$$

Следующий результат подчёркивает важность инволюций J и I :

Теорема 2 [1]. Если R – подкольцо в $\mathbf{Q}$, то всякая нецентральная инволюция группы $ML_2(R)$ сопряжена в этой группе хотя бы с одной из инволюций J и I . ■

Через $C_G(A)$ будем обозначать централизатор элемента A группы G .

Предложение 3. Пусть R – подкольцо поля $\mathbf{Q}$ и $G = ML_2(R)$. Тогда:

- а) $C_G(J) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in R \text{ и } ad = \pm 1 \right\}$.
- б) $C_G(I) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in R \text{ и } (a+b)(a-b) = \pm 1 \right\}$.

в) Если R совпадает с кольцом целых чисел $\mathbf{Z}$, то множества $C_G(J)$ и $C_G(I)$ состоят из 4 элементов; если $R \neq \mathbf{Z}$, то множества $C_G(J)$ и $C_G(I)$ бесконечны.

Доказательство. а) Матрица A вида (2) принадлежит $C_G(J)$ тогда и только тогда, когда $AJ = JA$ (т.е. $b = c = 0$) и $|A| = \pm 1$. Отсюда следует нужное утверждение.

б) Для матрицы A вида (2) из равенства $AI = IA$ следует $d = a$ и $c = b$. Условие $A \in G$ для матрицы A с такими свойствами эквивалентно равенству $a^2 - b^2 = \pm 1$.

в) Если $R = \mathbf{Z}$, то произведение двух элементов из R равно ± 1 тогда и только тогда, когда каждый из этих элементов равен ± 1 . С учётом а) и б) отсюда следует, что $C_G(J) = \{E, -E, J, -J\}$ и $C_G(I) = \{E, -E, I, -I\}$.

Предположим теперь, что $R \neq \mathbf{Z}$. Тогда найдётся простое число p , такое, что $pR = R$. Множества $C_G(J)$ и $C_G(I)$ в этом случае бесконечны, так как

$$\begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & p^{-n} \end{pmatrix} \in C_G(J), \quad \begin{pmatrix} (p^n + p^{-n})/2 & (p^n - p^{-n})/2 \\ (p^n - p^{-n})/2 & (p^n + p^{-n})/2 \end{pmatrix} \in C_G(I)$$

для любого натурального n (заметим, что элементы второй из этих матриц действительно принадлежат R как при нечётном p , так и в случае $p = 2$). ■

Теорема 4. Если R и S – подкольца поля $\mathbf{Q}$ и $ML_2(R) \cong ML_2(S)$, то $R = S$.

Доказательство. Пусть $G = ML_2(R)$, $H = ML_2(S)$ и $\varphi: G \rightarrow H$ – какой-то изоморфизм. Тогда φ переводит нецентральную инволюцию $J \in G$ в некоторую нецентральную инволюцию $A \in H$. В силу теоремы 2 инволюция A сопряжена в H хотя бы с одной из инволюций J и I , т.е. найдётся внутренний автоморфизм группы H , переводящий A в J или в I . Значит, существует изоморфизм $G \rightarrow H$, переводящий J в J или в I . В связи с этим будем сразу считать, что $\varphi(J) \in \{J, I\}$.

Ясно, что φ переводит $C_G(J)$ в множество $C_H(\varphi(J))$. Если $S = \mathbf{Z}$, то $C_H(\varphi(J))$ содержит ровно 4 элемента (см. предложение 3). Тогда $C_G(J)$ также содержит ровно 4 элемента. Снова применяя предложение 3, получаем, что $R = \mathbf{Z}$.

Далее считаем, что $S \neq \mathbf{Z}$. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in C_G(J)$ имеем

$$AT(h)A^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ahd^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T(ahd^{-1}).$$

Так как $T(h)$ и $T(ahd^{-1})$ коммутируют, то для любых $A \in C_G(J)$ и $h \in R$ выполнено $T(h)AT(h)A^{-1} = AT(h)A^{-1}T(h)$. Поскольку φ переводит множество $C_G(J)$ в $C_H(\varphi(J))$, то для матрицы $U = \varphi(T(h)) \in H$ и для произвольной матрицы $F \in C_H(\varphi(J))$ имеем

$$UFUF^{-1} = FUF^{-1}U. \quad (4)$$

Поскольку $T(h)J$ – нецентральная инволюция, то $U\varphi(J)$ тоже является нецентральной инволюцией. Будем считать, что матрица $U\varphi(J)$ задана формулой (3), где $a, b, c \in S$. Рассмотрим два возможных случая.

- I. Пусть $\varphi(J) = J$. Тогда $U = UJ \cdot J = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & a \end{pmatrix}$.

Для произвольной матрицы $F = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \in C_H(J)$ имеем

$$FUF^{-1} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ c & a \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{|F|} \cdot \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \frac{1}{|F|} \cdot \begin{pmatrix} axy & -bx^2 \\ cy^2 & axy \end{pmatrix}.$$

Отсюда мы получаем, что элементы, которые стоят в левом верхнем углу матриц $|F| \cdot UFUF^{-1}$ и $|F| \cdot FUF^{-1}U$, равны $a^2xy - bcy^2$ и $a^2xy - bcx^2$ соответственно. В силу равенства (4) из этого следует, что $bcx^2 = bcy^2$ при всех допустимых x и y .

Поскольку $S \neq \mathbb{Z}$, то x и y можно выбрать так, чтобы $x^2 \neq y^2$ (см. доказательство пункта в) предложения 3). Это означает, что $bc = 0$. Так как $a^2 + bc = 1$, получаем, что матрица U равна какой-то из матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix},$$

т.е. имеет вид $T(f)$, $-T(f)$, $P(f)$ или $-P(f)$, где $f \in S$.

Мы доказали, что для любого $h \in R$ матрица $\varphi(T(h))$ имеет вид $T(f_h)$, $-T(f_h)$, $P(f_h)$ или $-P(f_h)$; из леммы 1 следует, что элемент $f_h \in S$ определён однозначно.

Заметим, что $T(0) = E = P(0)$. Если $h \neq 0$, то $T(h)$ не является инволюцией и, следовательно, $\varphi(T(h))$ тоже не является инволюцией. Значит, $\varphi(T(h))$ не может совпадать с $\pm T(0)$ или с $\pm P(0)$. Таким образом, при всех $h \in R \setminus \{0\}$ имеем $f_h \neq 0$.

Докажем, что либо при всех $h \in R \setminus \{0\}$ выполнено $\varphi(T(h)) = \varepsilon_h T(f_h)$, либо при всех $h \in R \setminus \{0\}$ выполнено $\varphi(T(h)) = \varepsilon_h P(f_h)$ (где $\varepsilon_h \in \{-1, 1\}$ для всех $h \in R \setminus \{0\}$). Допустим противное: пусть существуют $g, h \in R \setminus \{0\}$, такие, что $\varphi(T(g)) = \varepsilon_g P(f_g)$ и $\varphi(T(h)) = \varepsilon_h T(f_h)$ (тогда $f_g, f_h \neq 0$). Так как $T(g)$ и $T(h)$ коммутируют, то матрицы $\varphi(T(g))$ и $\varphi(T(h))$ также коммутируют. Но это значит, что $T(f_h)P(f_g) = P(f_g)T(f_h)$ — получаем противоречие с пунктом д) леммы 1.

При $h = 0$ имеем $\varphi(T(h)) = \varphi(E) = E = T(0) = P(0)$. Поэтому доказанное утверждение можно усилить: либо для всех $h \in R$ выполнено $\varphi(T(h)) = \varepsilon_h T(f_h)$, либо для всех $h \in R$ выполнено $\varphi(T(h)) = \varepsilon_h P(f_h)$, где $\varepsilon_h \in \{-1, 1\}$ при всех $h \in R$.

В первом из этих случаев для любых $g, h \in R$ имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{g+h} T(f_{g+h}) &= \varphi(T(g+h)) = \varphi(T(g) \cdot T(h)) = \varphi(T(g))\varphi(T(h)) = \\ &= \varepsilon_g T(f_g) \cdot \varepsilon_h T(f_h) = \varepsilon_g \varepsilon_h T(f_g)T(f_h) = \varepsilon_g \varepsilon_h T(f_g + f_h). \end{aligned}$$

Поскольку $\varepsilon_g \varepsilon_h \in \{-1, 1\}$, то ввиду пункта в) леммы 1 отсюда следует равенство $f_{g+h} = f_g + f_h$; точно так же показывается, что это равенство справедливо во втором из упомянутых случаев.

Мы доказали, что сопоставление $h \rightarrow f_h$ задаёт гомоморфизм из $(R, +)$ в $(S, +)$. Он инъективен, так как ранее было установлено, что $f_h \neq 0$ при всех $h \neq 0$.

II. Пусть теперь $\varphi(J) = I$. Тогда $U = UI \cdot I = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ -a & c \end{pmatrix}$.

Для произвольной матрицы $F = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \in C_H(I)$ имеем

$$\begin{aligned} FUF^{-1} &= \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & a \\ -a & c \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{|F|} \cdot \begin{pmatrix} x & -y \\ -y & x \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{|F|} \cdot \begin{pmatrix} bx^2 - 2axy - cy^2 & ax^2 + (c-b)xy + ay^2 \\ -ax^2 - (c-b)xy - ay^2 & cx^2 + 2axy - by^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда можно вывести, что элементы, находящиеся в правом верхнем углу матриц $|F| \cdot UFUF^{-1}$ и $|F| \cdot FUF^{-1}U$, равны выражениям $a(b+c)x^2 + (2a^2 + bc - b^2)xy$ и $a(b+c)x^2 + (c^2 - bc - 2a^2)xy$ соответственно. С учётом равенства (4) получаем, что при всех допустимых значениях x и y выполнено $(2a^2 + bc - b^2)xy = (c^2 - bc - 2a^2)xy$ и, следовательно, $(4a^2 - (b-c)^2)xy = 0$.

Поскольку $S \neq \mathbb{Z}$, то x и y можно выбрать так, чтобы $xy \neq 0$ (см. доказательство пункта в) предложения 3). Это означает, что $(b-c)^2 = 4a^2$, т.е. $b-c = \pm 2a$. Далее, имеем $4 = 4a^2 + 4bc = (b-c)^2 + 4bc = (b+c)^2$, откуда $b+c = \pm 2$. Мы получаем четыре различных системы уравнений относительно неизвестных b и c . Решая эти системы, можно заключить, что матрица U равна какой-то из матриц

$$\begin{pmatrix} 1+a & a \\ -a & 1-a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a-1 & a \\ -a & -a-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-a & a \\ -a & 1+a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a-1 & a \\ -a & a-1 \end{pmatrix}$$

(т.е. имеет вид $X(f)$, $-X(f)$, $W(f)$ или $-W(f)$, где $f \in S$).

Мы доказали, что для любого $h \in R$ матрица $\varphi(T(h))$ имеет вид $X(f_h)$, $-X(f_h)$, $W(f_h)$ или $-W(f_h)$; из леммы 1 следует, что элемент $f_h \in S$ определён однозначно.

Заметим, что $X(0) = E = W(0)$. Если $h \neq 0$, то $\varphi(T(h))$ не является инволюцией и, следовательно, не может совпадать с $\pm X(0)$ или с $\pm W(0)$. Таким образом, при всех $h \in R \setminus \{0\}$ выполнено $f_h \neq 0$.

Как и в случае I, с помощью пункта д) леммы 1 можно доказать, что либо при всех $h \in R$ выполнено равенство $\varphi(T(h)) = \varepsilon_h X(f_h)$, либо при всех $h \in R$ выполнено $\varphi(T(h)) = \varepsilon_h W(f_h)$ (где $\varepsilon_h \in \{-1, 1\}$ при всех $h \in R$).

Применяя теперь пункт а) той же леммы, можно убедиться, что для любых $g, h \in R$ справедливо равенство $f_{g+h} = f_g + f_h$ (рассуждения проводятся аналогично случаю I). Таким образом, сопоставление $h \rightarrow f_h$ задаёт гомоморфизм из $(R, +)$ в $(S, +)$; он инъективен, так как $f_h \neq 0$ при всех $h \neq 0$.

Итак, во всех рассмотренных случаях существует групповой мономорфизм $R \rightarrow S$; в силу симметрии существует также мономорфизм $S \rightarrow R$. Так как R и S — подкольца (с единицей) поля $\mathbb{Q}$, то отсюда следует $R = S$. ■

Из теоремы 4 получается

Теорема 5. Для подколец R и S поля $\mathbb{Q}$ эквивалентны условия:

- 1) $GL_2(R) \cong GL_2(S)$;
- 2) $ML_2(R) \cong ML_2(S)$;
- 3) $R = S$.

Доказательство. Импликация 3) $\Rightarrow$ 1) очевидна; импликация 2) $\Rightarrow$ 3) доказана в теореме 4.

Из того факта, что кольцо R евклидово, можно вывести, что специальная линейная группа $SL_2(R)$ порождается матрицами вида $T(h)$ и $P(h)$, где $h \in R$. Так как матрицы $T(h)$ и $P(h)$ представимы в виде произведения инволюций из $GL_2(R)$:

$$T(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

то аналогичное утверждение верно и для произвольной матрицы из $SL_2(R)$. Далее, всякая матрица из $ML_2(R)$ либо сама принадлежит $SL_2(R)$, либо может быть записана в виде UJ , где $U \in SL_2(R)$. Следовательно, каждая матрица из $ML_2(R)$ также может быть представлена как произведение инволюций группы $GL_2(R)$. Так как все инволюции этой группы лежат в $ML_2(R)$, то $ML_2(R)$ есть подгруппа группы $GL_2(R)$, порождённая всеми принадлежащими $GL_2(R)$ инволюциями.

Таким образом, строение группы $ML_2(R)$ однозначно определяется группой $GL_2(R)$, откуда следует справедливость импликации 1) $\Rightarrow$ 2). ■

Определяемость группой автоморфизмов

Теперь мы готовы приступить непосредственно к решению вопроса об определяемости вполне разложимой группы ранга 2 её группой автоморфизмов.

Будем называть вполне разложимую группу $B = Y \oplus Z \in \mathbf{X}$:

- *диагональной*, если типы $\mathbf{t}(Y)$ и $\mathbf{t}(Z)$ несравнимы;
- *треугольной*, если один из типов $\mathbf{t}(Y)$ и $\mathbf{t}(Z)$ строго меньше другого;
- *однородной*, если $\mathbf{t}(Y) = \mathbf{t}(Z)$.

Прилагательные «диагональная» и «треугольная» выбраны, конечно, в связи с нашей договорённостью о том, что мы отождествляем кольцо $E(B)$ с матричным кольцом (1).

Если $\mathbf{t}(Y) = \mathbf{t}(Z)$, то $Y \cong Z$; можно считать, что $Y = Z$. В этом случае кольцо $E(B)$ совпадает с кольцом матриц $M(2, \Gamma_{YY})$, а группа $\text{Aut } B$ – с группой $GL_2(\Gamma_{YY})$. Если неравенство $\mathbf{t}(Y) \leq \mathbf{t}(Z)$ не выполнено, то $\Gamma_{YZ} = 0$ и легко убедиться, что

$$\text{Aut } B = \begin{pmatrix} U(\Gamma_{YY}) & \Gamma_{ZY} \\ 0 & U(\Gamma_{ZZ}) \end{pmatrix} \quad (5)$$

(как в случае $\Gamma_{ZY} \neq 0$, так и в случае $\Gamma_{ZY} = 0$).

Докажем некоторые свойства коммутанта $(\text{Aut } B)'$ группы $\text{Aut } B$.

Предложение 6. Пусть $B = Y \oplus Z \in \mathbf{X}$. Тогда:

- а) Если B – однородная группа, то $(\text{Aut } B)'' \neq \{E\}$.
- б) Если неравенство $\mathbf{t}(Y) \leq \mathbf{t}(Z)$ не выполнено, то группа $(\text{Aut } B)'$ изоморфна аддитивной группе $(\Gamma_{ZY}, +)$.

в) Если B – треугольная группа, то $(\text{Aut } B)' \neq \{E\} = (\text{Aut } B)''$.

г) Если B – диагональная группа, то $(\text{Aut } B)' = \{E\}$.

Доказательство. а) Как было отмечено выше, можно считать, что $Y = Z$ и $\text{Aut } B = GL_2(\Gamma_{YY})$. Найдём коммутатор $[I, T(h)] = I^{-1}(T(h))^{-1}IT(h)$ принадлежащих группе $\text{Aut } B$ матриц I и $T(h)$, где $h \in \Gamma_{YY}$:

$$[I, T(h)] = IT(-h)IT(h) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & h \\ -h & 1-h^2 \end{pmatrix}.$$

В частности, из этих равенств видно, что

$$[I, T(1)] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in (\text{Aut } B)', \quad [I, T(-1)] = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in (\text{Aut } B)'.$$

Так как матрицы $[I, T(1)]$ и $[I, T(-1)]$ не коммутируют, то $(\text{Aut } B)'' \neq \{E\}$.

б) Легко заметить, что коммутатор любых двух матриц из группы $\text{Aut } B$, задаваемой равенством (5), имеет вид $T(h)$, где $h \in \Gamma_{ZY}$. Ввиду пункта а) леммы 1 получаем, что $(\text{Aut } B)'$ содержится в группе $\{T(h) \mid h \in \Gamma_{ZY}\}$ (изоморфной аддитивной группе Γ_{ZY}). Найдём теперь для $h \in \Gamma_{ZY}$ коммутатор матриц $J, T(h) \in \text{Aut } B$:

$$[J, T(h)] = JT(-h)JT(h) = \begin{pmatrix} 1 & -h \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = T(2h).$$

Из этих равенств видно, что $(\text{Aut } B)'$ содержит множество $\{T(2h) \mid h \in \Gamma_{ZY}\}$. Таким образом, $(\text{Aut } B)' \cong (D, +)$, где D – подгруппа группы Γ_{ZY} , такая, что $2\Gamma_{ZY} \subset D$.

Так как факторгруппа $\Gamma_{ZY}/2\Gamma_{ZY}$ содержит не более 2 элементов, то в ней нет нетривиальных подгрупп. Следовательно, справедливо хотя бы одно из равенств $D = \Gamma_{ZY}$ и $D = 2\Gamma_{ZY}$. В обоих случаях $D \cong \Gamma_{ZY}$, что и требовалось.

Утверждения в) и г) непосредственно следуют из б). ■

Следствие 7. Если для групп $B, B' \in \mathbf{X}$ выполнено $\text{Aut } B \cong \text{Aut } B'$ и B – диагональная (треугольная, однородная) группа, то B' – тоже диагональная (соответственно треугольная, однородная) группа. ■

Для рациональной группы Y будем обозначать через $\mathbf{P}_\infty(Y)$ множество всех простых p , таких, что $pY = Y$. Легко видеть, что группа $U(\Gamma_{YY})$ представляет собой ограниченное прямое произведение (аналог понятия прямой суммы, который используется в случае мультипликативной записи) циклической группы порядка 2 и $|\mathbf{P}_\infty(Y)|$ бесконечных циклических групп.

Для диагональной группы $B = Y \oplus Z \in \mathbf{X}$ в силу равенства (5) будет выполнено $\text{Aut } B \cong U(\Gamma_{YY}) \times U(\Gamma_{ZZ})$. С учётом единственности (с точностью до изоморфизма) разложения группы в ограниченное прямое произведение неразложимых циклических групп получаем следующее

Предложение 8. Для диагональных групп $B = Y \oplus Z$ и $B' = Y' \oplus Z'$ из класса $\mathbf{X}$ эквивалентны условия:

- 1) $\text{Aut } B \cong \text{Aut } B'$.
- 2) $|\mathbf{P}_\infty(Y)| + |\mathbf{P}_\infty(Z)| = |\mathbf{P}_\infty(Y')| + |\mathbf{P}_\infty(Z')|$. ■

Для треугольных групп справедлив следующий критерий.

Предложение 9. Пусть группы $B = Y \oplus Z$ и $B' = Y' \oplus Z'$ из класса $\mathbf{X}$ – треугольные, причём $\mathbf{t}(Y) > \mathbf{t}(Z)$ и $\mathbf{t}(Y') > \mathbf{t}(Z')$. Следующие условия эквивалентны:

- 1) $\text{Aut } B \cong \text{Aut } B'$.
- 2) $\text{Hom}(Z, Y) \cong \text{Hom}(Z', Y')$ и $\text{Aut } Z \cong \text{Aut } Z'$.

Доказательство. Как и раньше, будем считать, что Y, Z, Y' и Z' – рациональные группы; напомним, что группа $\text{Aut } B$ задаётся равенством (5). Для краткости положим $G = \text{Aut } B$ и $H = \text{Aut } B'$. Заметим, что для всякого простого p из $pZ = Z$ следует $pY = Y$. Это означает, что $\Gamma_{ZZ} \subset \Gamma_{YY}$.

1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $G \cong H$. Тогда ввиду пункта б) предложения 6 имеем

$$\text{Hom}(Z, Y) \cong \Gamma_{ZY} \cong (G', \cdot) \cong (H', \cdot) \cong \Gamma_{Z'Y'} \cong \text{Hom}(Z', Y').$$

Найдём центр $Z(G)$ группы G . Так как $U(\Gamma_{ZZ}) \subset U(\Gamma_{YY})$, то все матрицы вида dE , где $d \in U(\Gamma_{ZZ})$, лежат в $Z(G)$.

Обратно, допустим, что матрица A вида (2) есть элемент группы $Z(G)$ (тогда сразу $c = 0$). Из равенства $AJ = JA$ следует, что $b = 0$. Далее, так как $AT(h) = T(h)A$, где $h \in \Gamma_{ZY} \setminus \{0\}$, то $a = d \in U(\Gamma_{ZZ})$ и $A = dE$. Итак,

$$Z(G) = \{dE \mid d \in U(\Gamma_{ZZ})\} \cong U(\Gamma_{ZZ}) \cong \text{Aut } Z.$$

Так как аналогичные соотношения имеют место для $Z(H)$, то из $G \cong H$ получаем $\text{Aut } Z \cong Z(G) \cong Z(H) \cong \text{Aut } Z'$, что и требовалось.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть $\text{Hom}(Z, Y) \cong \text{Hom}(Z', Y')$ (т.е. $\Gamma_{ZY} \cong \Gamma_{Z'Y'}$) и $\text{Aut } Z \cong \text{Aut } Z'$ (тогда $U(\Gamma_{ZZ}) \cong U(\Gamma_{Z'Z'})$). В этом случае найдётся ненулевое число $\alpha \in \mathbf{Q}$, для которого $\Gamma_{Z'Y'} = \alpha \Gamma_{ZY}$, и изоморфизм $\psi: U(\Gamma_{ZZ}) \rightarrow U(\Gamma_{Z'Z'})$. Далее, для всякого $p \in \mathbf{P}$ справедливости эквивалентности

$$pY = Y \Leftrightarrow p\Gamma_{ZY} = \Gamma_{ZY} \Leftrightarrow p\Gamma_{Z'Y'} = \Gamma_{Z'Y'} \Leftrightarrow pY' = Y',$$

отсюда $\Gamma_{YY} = \Gamma_{Y'Y'}$. Так как $U(\Gamma_{ZZ}) \cap U(\Gamma_{Z'Z'}) \subset U(\Gamma_{YY}) \cap U(\Gamma_{Y'Y'}) = U(\Gamma_{YY})$, то для всякого $d \in U(\Gamma_{ZZ})$ выполняется включение $d^{-1}\psi(d) \in U(\Gamma_{YY})$. Если, кроме того, $b \in \Gamma_{ZY}$, то имеем $\alpha b d^{-1}\psi(d) \in \alpha \Gamma_{ZY} \Gamma_{YY} \subset \alpha \Gamma_{ZY} = \Gamma_{Z'Y'}$. Таким образом, мы можем задать отображение $\varphi: G \rightarrow H$, полагая

$$\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad^{-1}\psi(d) & \alpha b d^{-1}\psi(d) \\ 0 & \psi(d) \end{pmatrix}$$

для всех $a \in U(\Gamma_{YY})$, $b \in \Gamma_{ZY}$ и $d \in U(\Gamma_{ZZ})$. Имеем

$$\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \varphi \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & w \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} uw^{-1}\psi(w) & \alpha vw^{-1}\psi(w) \\ 0 & \psi(w) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} aud^{-1}w^{-1}\psi(d)\psi(w) & \alpha(av+bw)d^{-1}w^{-1}\psi(d)\psi(w) \\ 0 & \psi(d)\psi(w) \end{pmatrix} = \\ = \varphi \begin{pmatrix} au & av+bw \\ 0 & dw \end{pmatrix} = \varphi \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & w \end{pmatrix} \right),$$

т.е. φ – гомоморфизм. В силу симметрии задаваемое равенством

$$\varepsilon \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uw^{-1}\psi^{-1}(w) & \alpha^{-1}vw^{-1}\psi^{-1}(w) \\ 0 & \psi^{-1}(w) \end{pmatrix}$$

отображение $\varepsilon: H \rightarrow G$ также будет гомоморфизмом. При этом

$$\varepsilon \left(\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) = \varepsilon \begin{pmatrix} ad^{-1}\psi(d) & abd^{-1}\psi(d) \\ 0 & \psi(d) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} ad^{-1}\psi(d)(\psi(d))^{-1}d & \alpha^{-1}\alpha bd^{-1}\psi(d)(\psi(d))^{-1}d \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

а значит, $\varepsilon \circ \varphi$ – тождественный автоморфизм группы G . Аналогично проверяется, что $\varphi \circ \varepsilon$ есть тождественный автоморфизм группы H . Таким образом, φ и ε – изоморфизмы и $G \cong H$. ■

Наконец, для однородных групп имеет место

Теорема 10. Для однородных групп $B = Y \oplus Y$ и $B' = Z \oplus Z$ из класса $\mathbf{X}$ эквивалентны условия:

- 1) $\text{Aut } B \cong \text{Aut } B'$.
- 2) $E(Y) \cong E(Z)$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Так как $GL_2(\Gamma_{YY}) = \text{Aut } B \cong \text{Aut } B' = GL_2(\Gamma_{ZZ})$, то ввиду теоремы 5 имеем $E(Y) \cong \Gamma_{YY} = \Gamma_{ZZ} \cong E(Z)$.

2) $\Rightarrow$ 1). Поскольку выполнено $\Gamma_{YY} \cong E(Y) \cong E(Z) \cong \Gamma_{ZZ}$, то $GL_2(\Gamma_{YY}) \cong GL_2(\Gamma_{ZZ})$, т.е. $\text{Aut } B \cong \text{Aut } B'$, что и требовалось. ■

Нам понадобится одна вспомогательная конструкция. Пусть Y – рациональная группа и $1 \in Y$. Обозначим p -высоту элемента 1 в группе Y через $h_p(1)$ и рассмотрим группу Y_0 , такую, что $Y \subset Y_0 \subset \mathbf{Q}$ и что p -высота элемента 1 в группе Y_0 равна $h_p(1) + 1$ для всех $p \in \mathbf{P}$. Построенная группа Y_0 обладает следующими свойствами:

- 1) $\mathbf{P}_\infty(Y_0) = \mathbf{P}_\infty(Y)$;
- 2) $E(Y_0) \cong E(Y)$ и, значит, $\text{Aut } Y_0 \cong \text{Aut } Y$;
- 3) $\mathbf{t}(Y_0) \geq \mathbf{t}(Y)$;
- 4) $Y_0 \cong Y$ тогда и только тогда, когда группа Y почти делима, т.е. когда $pY = Y$ почти для всех простых p ;

- 5) $\mathbf{t}(Y_0) \geq \mathbf{t}(Z_0)$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{t}(Y) \geq \mathbf{t}(Z)$;

- 6) Если $\mathbf{t}(Y) \geq \mathbf{t}(Z)$, то $\mathbf{t}(Y_0) : \mathbf{t}(Z_0) = \mathbf{t}(Y) : \mathbf{t}(Z)$.

Теорема 11. Группа $B \in \mathbf{X}$ определяется в $\mathbf{X}$ своей группой автоморфизмов тогда и только тогда, когда $B \cong Y \oplus Y$, где Y – почти делимая группа ранга 1.

Доказательство. Пусть $B \cong Y \oplus Y$ и группа Y почти делима. Предположим, что выполнено $B' \in \mathbf{X}$ и $\text{Aut } B' \cong \text{Aut } B$. Применяя следствие 7 и теорему 10, получаем, что $B' \cong Z \oplus Z$, где Z – группа ранга 1, такая, что $E(Z) \cong E(Y)$. Из почти делимости группы Y следует, что аддитивная группа кольца $E(Y)$ изоморфна Y . Тогда аддитивная группа кольца $E(Z)$ также изоморфна Y , что возможно лишь в случае $Z \cong Y$. Итак, $B' \cong B$, т.е. B определяется своей группой автоморфизмов в классе $\mathbf{X}$.

Обратно, пусть группа $B \in \mathbf{X}$ определяется своей группой автоморфизмов в $\mathbf{X}$. Предположим сначала, что B – однородная группа; можно считать, что $B = Y \oplus Y$,

где Y – рациональная группа, содержащая 1. Так как $E(Y_0) \cong E(Y)$, то ввиду теоремы 10 получаем, что $\text{Aut } B \cong \text{Aut}(Y_0 \oplus Y_0)$. В силу нашего предположения отсюда следует, что $B \cong Y_0 \oplus Y_0$ и, значит, $Y \cong Y_0$. Следовательно, группа Y почти делима, что и требовалось.

Допустим теперь, что группа B не является однородной. Можно считать, что $B = Y \oplus Z$, где Y и Z – рациональные группы, такие, что неравенство $t(Y) \leq t(Z)$ не выполнено и $1 \in Y \cap Z$. Положим $B' = Y_0 \oplus Z_0$ и рассмотрим два возможных случая.

а) Пусть группа B является диагональной. Тогда типы $t(Y_0)$ и $t(Z_0)$ несравнимы и выполнено $P_\infty(Y_0) = P_\infty(Y)$, $P_\infty(Z_0) = P_\infty(Z)$. Применяя предложение 8, получаем $\text{Aut } B \cong \text{Aut } B'$. В силу нашего предположения из этого следует, что $B \cong B'$. Так как $t(Y_0) \geq t(Y)$ и $t(Z_0) \geq t(Z)$, то на самом деле $Y_0 \cong Y$ и $Z_0 \cong Z$, т.е. группы Y и Z почти делимы. Тогда в силу предложения 8 для любых различных простых p и q имеем $\text{Aut } B \cong \text{Aut}(\mathbf{Q}^{(p)} \oplus \mathbf{Q}^{(q)})$. Получаем противоречие с тем, что B определяется своей группой автоморфизмов в классе $\mathbf{X}$.

б) Осталось рассмотреть случай, когда группа B треугольная. Тогда $t(Y) > t(Z)$, откуда $t(Y_0) > t(Z_0)$. Далее, тип $t(Y_0) : t(Z_0)$ группы $\text{Hom}(Z_0, Y_0)$ равен типу $t(Y) : t(Z)$ группы $\text{Hom}(Z, Y)$, а значит, $\text{Hom}(Z_0, Y_0) \cong \text{Hom}(Z, Y)$. Поскольку $\text{Aut } Z_0 \cong \text{Aut } Z$, то по предложению 9 имеем $\text{Aut } B \cong \text{Aut } B'$. Как и в случае а), отсюда можно вывести, что Y и Z – почти делимые группы. Тогда $Y \cong \mathbf{Q}^{(L)}$ и $Z \cong \mathbf{Q}^{(M)}$, где $M \subset L \subset \mathbf{P}$, причём M содержит почти все простые числа. Если N есть бесконечное собственное подмножество множества M , то $\text{Hom}(\mathbf{Q}^{(N)}, Y) \cong Y \cong \text{Hom}(Z, Y)$ и $\text{Aut } \mathbf{Q}^{(N)} \cong \text{Aut } Z$, откуда по предложению 9 получаем $\text{Aut}(Y \oplus \mathbf{Q}^{(N)}) \cong \text{Aut } B$. Но группы $Y \oplus \mathbf{Q}^{(N)}$ и B не изоморфны, что противоречит определяемости группы B группой $\text{Aut } B$. Тем самым теорема доказана. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Гайдак В.А., Тимошенко Е.А. Инволюции полной линейной группы GL_2 над подкольцом поля $\mathbf{Q}$ // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 62. С. 19–26. DOI: 10.17223/19988621/62/2.
2. Вильданов В.К. Определяемость вполне разложимой абелевой группы без кручения ранга 2 своей группой автоморфизмов // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 3(1). С. 174–177.
3. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. М.: Мир, 1977.

Статья поступила 26.07.2020

Vildanov V. K., Gaidak V.A., Timoshenko E.A. (2020) ON DETERMINABILITY OF A COMPLETELY DECOMPOSABLE RANK 2 GROUP BY ITS AUTOMORPHISM GROUP. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 68. pp. 23–32

DOI 10.17223/19988621/68/2

Keywords: matrix, involution, completely decomposable group, automorphism group.

Let $B \in \mathbf{X}$, where $\mathbf{X}$ is a class of Abelian groups. We say that B is *determined by its automorphism group in the class $\mathbf{X}$* if $\text{Aut } B \cong \text{Aut } B'$ implies $B \cong B'$ for every $B' \in \mathbf{X}$.

In what follows, $\mathbf{X}$ denotes the class of all rank 2 completely decomposable torsion-free groups. We find necessary and sufficient conditions for the isomorphism of $\text{Aut } B$ with $\text{Aut } B'$ provided that $B, B' \in \mathbf{X}$.

As usual, $GL_2(R)$ denotes the group of invertible 2×2 matrices over a ring R (with 1); the set $ML_2(R) \subset GL_2(R)$ of all matrices with determinant ± 1 is a subgroup of $GL_2(R)$.

Theorem 5. For subrings R and S of the field $\mathbf{Q}$, the following are equivalent:

- 1) $GL_2(R) \cong GL_2(S)$.

2) $ML_2(R) \cong ML_2(S)$.

3) $R = S$.

Let Y and Z be rank 1 torsion-free groups. We shall say that the group $B = Y \oplus Z$ is:

– *diagonal* if the types $\mathbf{t}(Y)$ and $\mathbf{t}(Z)$ are incomparable;

– *triangular* if $\mathbf{t}(Y) < \mathbf{t}(Z)$ or $\mathbf{t}(Z) < \mathbf{t}(Y)$;

– *homogeneous* if $\mathbf{t}(Y) = \mathbf{t}(Z)$.

Corollary 7. If two groups $B, B' \in \mathbf{X}$ satisfy $\text{Aut } B \cong \text{Aut } B'$ and B is a diagonal (resp. triangular, homogeneous) group, then B' is a diagonal (resp. triangular, homogeneous) group.

Let $\mathbf{P}_\infty(Y)$ denote the set of all primes p such that $pY = Y$.

Proposition 8. For diagonal groups $B = Y \oplus Z \in \mathbf{X}$ and $B' = Y' \oplus Z' \in \mathbf{X}$, the following are equivalent:

1) $\text{Aut } B \cong \text{Aut } B'$.

2) $|\mathbf{P}_\infty(Y)| + |\mathbf{P}_\infty(Z)| = |\mathbf{P}_\infty(Y')| + |\mathbf{P}_\infty(Z')|$. ■

Proposition 9. Let $B = Y \oplus Z \in \mathbf{X}$ and $B' = Y' \oplus Z' \in \mathbf{X}$ be triangular groups with $\mathbf{t}(Y) > \mathbf{t}(Z)$ and $\mathbf{t}(Y') > \mathbf{t}(Z')$. The following conditions are equivalent:

1) $\text{Aut } B \cong \text{Aut } B'$.

2) $\text{Hom}(Z, Y) \cong \text{Hom}(Z', Y')$ and $\text{Aut } Z \cong \text{Aut } Z'$.

Theorem 10. For homogeneous groups $B = Y \oplus Y \in \mathbf{X}$ and $B' = Z \oplus Z \in \mathbf{X}$, the following are equivalent:

1) $\text{Aut } B \cong \text{Aut } B'$.

2) Y and Z have isomorphic endomorphism rings.

An Abelian group Y is said to be *almost divisible* if $pY = Y$ for almost all primes p . The last theorem gives a criterion for determinability of a rank 2 completely decomposable group by its automorphism group in the class $\mathbf{X}$:

Theorem 11. A group $B \in \mathbf{X}$ is determined by its automorphism group in $\mathbf{X}$ if and only if $B \cong Y \oplus Y$ with Y being a rank 1 almost divisible group.

AMS 2020 Mathematical Subject Classification: 15B33, 20H25, 20K15

Financial support. The research was supported by the President of the Russian Federation Grant for young Russian scientists MD-108.2020.1.

Vadim K. VILDANOV (Candidate of Physics and Mathematics, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod, Russian Federation). E-mail: kadirovi4@gmail.com

Violetta A. GAIDAK (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: gaidakvioletta@gmail.com

Egor A. TIMOSHENKO (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tea471@mail.tsu.ru

REFERENCES

1. Gaidak V.A., Timoshenko E.A. (2019) Involyutsii polnoy lineynoy gruppy GL_2 nad podkol'tsom polya $\mathbf{Q}$ [Involutions of the general linear group GL_2 over a subring of the field $\mathbf{Q}$]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 62. pp. 19–26. DOI: 10.17223/19988621/62/2.
2. Vildanov V.K. (2011) Opredeyaemost' vpolne razlozhimoy abelevoy gruppy bez krucheniya ranga 2 svoey gruppy avtomorfizmov [Determinability of completely decomposable torsion-free Abelian group of rank 2 by its automorphism group]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo – Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod*. 3(1). pp. 174–177.
3. Fuchs L. (1973) *Infinite Abelian groups*. Vol. 2. New York; London: Academic Press.

Received: July 26, 2020

А.И. Забарина, Е.А. Фомина

О МНОЖЕСТВЕ K_p В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

Рассмотрены свойства множества K_p , состоящего из элементов неабелевой группы, коммутирующих ровно с p элементами группы. В частности, свойства множества K_p в группах подстановок и некоторых разрешимых группах. Приведено ещё одно доказательство, что все инволюции конечной простой неабелевой группы G с непустым множеством K_3 образуют один класс сопряжённых элементов.

Ключевые слова: группа, централизатор элемента, инволюция, силовские и холловы подгруппы.

В [1, 2] изучались некоторые свойства конечных групп, в которых существуют элементы порядка 2 и 3, порядок централизатора которых равен порядку элемента, то есть неединичные элементы, перестановочные ровно с двумя (тремя) элементами группы. Множества таких элементов мы обозначали $K_2(G)$, $K_3(G)$. В настоящей работе рассмотрено множество $K_p(G)$, где p – произвольное простое число.

1. Обозначения и некоторые свойства множества $K_p(G)$

Пусть $\langle G, \cdot \rangle$ – произвольная конечная неабелева группа, $|G| = n$, p – простой делитель n . Введём следующие обозначения:

$$X_p(G) = \{g \in G \mid o(g) = p\},$$

$$K_p(G) = \{g \in G \mid g \neq e \wedge |C(g)| = p\}.$$

В том случае, когда понятно, о какой группе G идёт речь, вместо $X_p(G)$, $K_p(G)$ будем писать: X_p , K_p соответственно.

Так как p – простое число, то из того, что $x \in K_p$ следует

$$\{x, x^2, \dots, x^{p-1}\} \subset X_p \text{ и } \{x, x^2, \dots, x^{p-1}\} \subset K_p.$$

Приведём ряд свойств множества K_p .

Предложение 1. Пусть $|G| = n$. Тогда, если K_p не пусто, то n делится на p и не делится на p^2 .

Предложение 2. Множество K_p является инвариантным подмножеством G , то есть вместе с каждым $x \in K_p$ и каждым $g \in G$ элемент x^g принадлежит K_p .

Предложение 3. Пусть $|G| = n$. Тогда $|K_p| \in \left\{0, \frac{n}{p}, \frac{2n}{p}, \dots, \frac{(p-1)n}{p}\right\}$.

Доказательства указанных утверждений аналогичны доказательствам свойств множества $K_3(G)$, приведённым в [2].

2. Множества K_p в группах S_n и A_n

Рассмотрим указанные множества при различных значениях p .

1) Пусть $p = 2$.

1.1. Так как при $n > 3$ $|S_n| \vdots 4$, то, согласно предложению 1, в указанных группах $K_2(S_n) = \emptyset$.

Обратимся к S_3 . Заметим, что для каждого $a \in S_3$ элемент $a \in K_2(S_3)$ тогда и только тогда, когда $a = (\alpha_1 \alpha_2)$.

Так как $|(\alpha_1 \alpha_2)^{S_3}| = 3$, то $|C_{S_3}(\alpha_1 \alpha_2)| = 2$. Следовательно, $|K_2(S_3)| = \frac{|S_3|}{2}$.

1.2. В каждой неабелевой знакопеременной группе A_n множество $K_2(A_n)$ пусто, так как для каждого натурального $n \geq 4$ порядок группы A_n делится нацело на 4.

2) Пусть теперь $p \geq 3$.

Обратимся сначала к группам S_n .

Согласно предложению 1, если $K_p(S_n) \neq \emptyset$, то $p \leq n < 2p$. Таким образом, для фиксированного p достаточно рассмотреть множество групп $\{S_p, S_{p+1}, \dots, S_{2p-1}\}$.

2.1. Пусть $0 \leq n - p \leq 1$. Имеем

$$X_p(S_n) = \{a \in S_n \mid a = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p)\}.$$

Следовательно, для каждого $a \in X_p(S_n)$ $a^{S_n} = \{(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_p)\}$ – множество всех p -членных циклов. Следовательно,

$$|a^{S_n}| = \frac{n(n-1) \cdots (n-p+1)}{p},$$

где $(n-p) \in \{0, 1\}$. Отсюда

$$\forall a \in X_p(S_n) \quad |C_{S_n}(a)| = p,$$

то есть $a \in K_p$.

Таким образом, если $0 \leq n - p \leq 1$, то $K_p(S_n) = X_p(S_n)$ и $|K_p(S_n)| = \frac{|S_n|}{p}$.

2.2. Пусть $n - p > 1$, $n \in \{p+2, \dots, 2p-1\}$.

Каждый элемент порядка p из S_n является p -членным циклом: $\forall a \in X_p(S_n)$ $a = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p)$.

Так как существует двучленный цикл $b = (\beta_1 \beta_2)$, такой что $ab = ba$, то $|C_{S_n}(a)| > p$. То есть $K_p(S_n) = \emptyset$ при указанных значениях n .

Пример. $K_3(S_5) = K_5(S_7) = \emptyset$.

3) Обратимся теперь к множеству $K_p(A_n)$.

В силу предложения 1, при $p \geq 3$ если $K_p(A_n) \neq \emptyset$, то $p \leq n < 2p$. Рассмотрим следующие три случая.

3.1. Пусть $0 \leq n - p \leq 1$. То есть рассмотрим множество K_p в группах A_p, A_{p+1} .

Пусть $a \in K_p(S_p)$. Согласно 2.1, $a = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p)$ и $C_{S_p}(a) = \langle a \rangle$.

Заметим, что $C_{S_p}(a) \subset A_p$. Следовательно, $K_p(A_p) = K_p(S_p)$ и $|K_p(A_p)| = \frac{2|A_p|}{p}$.

Очевидно, те же рассуждения имеют место для $n = p + 1$:

$$|K_p(A_{p+1})| = \frac{2|A_{p+1}|}{p}.$$

В частности, $|K_3(A_4)| = \frac{2|A_4|}{3}$, $|K_5(A_5)| = \frac{2|A_5|}{5}$.

3.2. Пусть $2 < n - p < p$.

Заметим, что для каждого $a \in X_p(A_n)$ существует $b = (\beta_1\beta_2\beta_3)$, такое, что $ab = ba$. То есть: $|C_{A_n}(a)| > p$. Таким образом, $K_p(A_n) = \emptyset$.

Пример. $K_5(A_8) = K_5(A_9) = \emptyset$.

3.3. Пусть $n - p = 2$.

Рассмотрим произвольное $a \in A_n$, $o(a) = p$.

Имеем: $a = (\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_p)$, $a^{S_n} = \{(x_1, x_2, \dots, x_p)\}$ – множество всех p -членных циклов и $|a^{S_n}| = \frac{n(n-1)\dots 3}{p}$.

Следовательно, $|C_{S_n}(a)| = \frac{n!p}{n(n-1)\dots 3} = 2p$.

Заметим, что существует такой элемент $b \in S_n$, что $b = (\beta_1\beta_2)$ и $ab = ba$.

Следовательно, $C_{S_n}(a) = \{e, a, \dots, a^{p-1}, b, ab, a^2b, \dots, a^{p-1}b\}$, где $b, ab, a^2b, \dots, a^{p-1}b \notin A_n$. Имеем:

$$C_{A_n}(a) = \{e, a, \dots, a^{p-1}\}.$$

Тогда $|K_p(A_n)| = \frac{n!}{2p} = \frac{|A_n|}{p}$.

В частности, $|K_3(A_5)| = \frac{|A_5|}{3}$, $|K_{11}(A_{13})| = \frac{|A_{13}|}{11}$.

3. Множества K_p в некоторых разрешимых группах

Прежде всего, заметим, что если G – конечная нильпотентная группа, $|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i} \dots p_k^{\alpha_k}$, $k > 1$, то согласно теореме Бернсайда – Виланда [3, с. 155]

$$G = H_1 \times \dots \times H_i \times \dots \times H_k,$$

где H_i – соответствующие силовские подгруппы. Пусть p_i – произвольный простой делитель $|G|$.

а) Если $\alpha_i > 1$, то согласно предложению 1, $K_{p_i} = \emptyset$.

б) Пусть $\alpha_i = 1$. Согласно свойству нильпотентных групп [3, с. 148], для каждого $j \in \overline{1, k}$ $Z(G) \cap H_j \neq \{e\}$. Следовательно, $H_i \subset Z(G)$ и $H_i \neq Z(G)$.

Таким образом, для каждого элемента $x \in X_{p_i}$ выполнено $|C_G(x)| > p_i$. Следовательно, $K_{p_i} = \emptyset$.

Рассмотрим следующее семейство разрешимых групп: $G = \mathbf{Z}_p^* \rtimes \mathbf{Z}_p$, где p – простое число, $p > 2$ [4, с. 111].

Каждый элемент $g \in G$ единственным образом можно представить в виде $g = (x, y)$, где $x \in \mathbf{Z}_p^*$, $y \in \mathbf{Z}_p$.

Операция умножения элементов в G определена по правилу

$$(a, b)(c, d) = (ac, bc + d).$$

Нейтральным элементом является $e = (1, 0)$, обратный элемент: $(x, y)^{-1} = (x^{-1}, -yx^{-1})$.

Очевидно, что отображение $f: G \rightarrow \mathbf{Z}_p^*$ такое, что $f(x, y) = x$ является сюръективным гомоморфизмом G на $\mathbf{Z}_p^*$, ядро которого

$$\text{Ker } f = \{(1, b) \mid b \in \mathbf{Z}_p\}.$$

Так как $\mathbf{Z}_p$ и $\mathbf{Z}_p^*$ – разрешимые группы, то, согласно свойству разрешимых групп, G – разрешимая неабелева группа для каждого $p > 2$.

Заметим, что $|G| = (p-1) \cdot p$ и множество всех элементов $\{(1, y) \mid y \in \mathbf{Z}_p\}$ образует нормальный делитель G , изоморфный $\mathbf{Z}_p$. Очевидно, $X_p = \{(1, y) \mid y \neq 0\}$.

Пусть $b \neq 0$ и $(1, b)(c, d) = (c, d)(1, b)$. Отсюда: $bc + d = d + b$, $bc = b$, $c = 1$. Таким образом, при $b \neq 0$ $|C_G(1, b)| = p$, отсюда $K_p = X_p$, $|K_p| = p - 1$.

Обратимся теперь к $p = 1$. Если $p = 3$, то $|G| = 6$, $G \cong S_3$. Согласно 1.1 и 2.1 раздела 2 данной статьи для группы S_3 $|K_2| = 3$, $|K_3| = 2$.

Пусть число $p - 1$ не является простым и $p - 1 = p_1 p_2 \dots p_k q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_s^{\beta_s}$, где каждое $\beta_i > 1$. Согласно предложению 1, $K_{q_i} = \emptyset$ для каждого q_i .

Рассмотрим произвольный элемент $(a, 0) \in G$, где $a \neq 1$ и найдём множество $(a, 0)^G$ – всех элементов G , сопряжённых к $(a, 0)$:

$$\forall (x, y) \in G \quad (x, y)^{-1}(a, 0)(x, y) = (x^{-1}, -yx^{-1})(ax, y) = (a, y(1-a))$$

Таким образом, $(a, 0)^G = \{(a, b) \mid b \in \mathbf{Z}_p\}$. Следовательно, $|(a, 0)^G| = p$ для каждого $a \neq 1$. Отсюда $|C_G(a, b)| = p - 1$. Итак, если $p - 1 \neq 2$, то (так как $p_i < p - 1$) $K_{p_i} = \emptyset$.

Обратимся теперь к двум семействам неабелевых разрешимых групп, все силовские подгруппы которых являются циклическими.

I. Пусть G – неабелева группа, $|G| = pq$, где p, q – различные простые числа, $p < q$.

Согласно [5, с. 61, 167], $G = \langle a, b \rangle$, где $o(a) = p$, $o(b) = q$, коммутант $G' = \langle b \rangle$. Кроме того $q \equiv 1 \pmod{p}$ и существует $r \in \mathbf{N}$, такое что $r \not\equiv 1 \pmod{q}$ и $r^p \equiv 1 \pmod{q}$.

Операция в G задаётся следующим образом:

$$\begin{aligned} a^{u_1} b^{v_1} a^{u_2} b^{v_2} &= a^{u_1+u_2} b^{(v_1 r^{u_2} + v_2)}; \\ (a^u b^v)^{-1} &= a^{p-u} b^{-(r^{p-u} v)}. \end{aligned} \quad (*)$$

В дальнейшем будем считать, что u, u_i, v, v_i принадлежат множествам $\overline{0, p-1}$, $\overline{0, q-1}$ соответственно.

Заметим, что согласно (*) если $o(a^u b^v) = q$, то $a^{uq} = e$, то есть $u = 0$. Следовательно, $X_q(G) = \langle b \rangle \setminus \{e\}$. Пусть $v \neq 0$ и

$$a^{u_1} b^{v_1} a^0 b^v = a^0 b^v a^{u_1} b^{v_1}.$$

Отсюда $b^{v_1+v} = b^{v r^{u_1} + v_1}$, то есть $v(r^{u_1} - 1) \vdots q$. Так как $r^p \equiv 1 \pmod{q}$, $r \not\equiv 1 \pmod{q}$ и $u_1 < p$, то $u_1 = 0$. Следовательно, $|C_G(b^v)| = q$ для каждого $v \neq 0$, то есть $|K_q(G)| = q - 1$.

Покажем, что для каждого $s \in \overline{1, p-1}$ $a^s \in K_p(G)$.

Имеем

$$a^u b^v \cdot a^s b^0 = a^s b^0 \cdot a^u b^v \Leftrightarrow b^{v r^s} = b^v \Leftrightarrow v(r^s - 1) \vdots q \Leftrightarrow v = 0.$$

Следовательно, $|(a^s)^G| = q$.

Так как для каждого $g \in G$

$$a^u b^v (a^u b^v)^{-1} (a^s b^0) (a^u b^v) = a^s b^t,$$

то для каждого $s \in \overline{1, p-1}$

$$(a^s)^G = \{a^s b^0, a^s b, a^s b^2, \dots, a^s b^{q-1}\}.$$

Согласно предложению 2, для каждого $s \in \overline{1, p-1} \forall i \in \overline{0, q-1} a^s b^i \in K_p(G)$. То есть $|K_p(G)| = q(p-1)$.

В частности, в группе $D_{2p} = D(C_p)$ при $p > 2$ $|K_2(D_{2p})| = p$, $|K_p(D_{2p})| = p-1$.

II. Пусть $|G| = p_1 p_2 p_3$, где p_1, p_2, p_3 – различные простые числа, $p_1 < p_2 < p_3$, G – неабелева группа.

Согласно доказательству теоремы 9.4.3 [5, с. 167] и теоремы 9.4.1 [5, с. 165], имеем

1) G – разрешимая группа;

2) $G = \langle a, b \rangle$, $|G| = mn$, $G' = \langle a \rangle$, $G/G' = \langle bG' \rangle$, $o(a) = m$, $o(b) = n$, $(m, n) = 1$;

$$b^{-1}ab = a^r, \text{ где } (r-1, m) = 1, r^n \equiv 1 \pmod{m},$$

$$b^j a^i \cdot b^k a^t = b^{j+k} a^{ir^k + t}; \quad (**)$$

3) Холловы подгруппы $H_{p_2 p_3}$, H_{p_3} являются нормальными делителями G ($|H_{p_2 p_3}| = p_2 p_3$, $|H_{p_3}| = p_3$).

Задача: исследовать K_{p_1} в группе G .

Так как $|G/H_{p_2 p_3}| = p_1$, то $G' \subset H_{p_2 p_3}$. Возможны три случая: $G' = H_{p_2 p_3}$, $G' = H_{p_2}$, $G' = H_{p_3}$. Рассмотрим каждый из них.

• $G' = H_{p_2 p_3} = \langle a \rangle$, $o(a) = p_2 p_3$, $o(b) = p_1$.

Пусть $b^i a^j \in C_G(b)$, то есть $b \cdot b^i a^j = b^i a^j \cdot b$, $i < p_2 p_3$. Согласно (**), $a^{i(r-1)} = e$. Так как $(r-1, p_2 p_3) = 1$, то $i = 0$.

Следовательно, $|C(b)| = p_1$, то есть $\langle b \rangle \setminus \{e\} \subset K_{p_1}$, $b^G \subset K_{p_1}$, таким образом $K_{p_1} \neq \emptyset$.

Пусть $o(g) \in \{p_2, p_3\}$. Тогда $\langle g \rangle \subset H_{p_2 p_3}$; следовательно $K_{p_2} = K_{p_3} = \emptyset$.

• Пусть $G' = H_{p_2}$. Так как $H_{p_3} \triangleleft G$ и $H_{p_3} \cap H_{p_2} = \{e\}$, то $H_{p_3} \subset Z(G)$. Поэтому $K_{p_1} = K_{p_2} = K_{p_3} = \emptyset$.

• $G' = H_{p_3}$. Согласно условию, $p_1 < p_2 < p_3$. Заметим, что $|G : H_{p_2}| = p_1 p_3$, $p_1 \not\equiv 1 \pmod{p_2}$. Группа H_{p_2} не является максимальной подгруппой в G . Тогда, если $p_3 \not\equiv 1 \pmod{p_2}$, то, воспользовавшись [8, с. 60, 5.52], получаем $H_{p_2} \triangleleft G$. Так как $H_{p_2} \cap G' = \{e\}$, то $H_{p_2} \subset Z(G)$ и $K_{p_1} = K_{p_2} = K_{p_3} = \emptyset$.

При $p_3 \equiv 1 \pmod{p_2}$ ответ не получен.

4. О конечных простых группах с непустым множеством $K_3(G)$

В заключение обратимся к конечным простым группам и приведём ещё одно доказательство [2] следующего утверждения.

Теорема. Если в конечной простой группе G множество $K_3(G) \neq \emptyset$, то все её инволюции образуют один класс сопряжённых элементов.

Количество классов сопряжённых инволюций является одной из важных характеристик конечных простых групп [6, с. 96, 97, 100–103].

Эта задача сформулирована в [7, с. 81]. Доказательство использует указанные ниже теорему Бернсайда [5], лемму 33, следствия [7, с. 79, 80] и предложение, непосредственно следующее из леммы.

Теорема Бернсайда [5, с. 227]. Если силовская подгруппа P конечной группы G содержится в центре своего нормализатора, то G обладает таким нормальным делителем H , что в качестве представителей смежных классов по H можно выбрать элементы P .

Предложение. Пусть G – конечная простая группа, D – её исключительное подмножество, $H = N_G(D)$, φ_1 – главный характер H . Если существуют два неглавных неприводимых характера φ_i и φ_j группы H , такие, что функция $\theta = \varphi_1 + \varphi_i - \varphi_j$ исчезает на $H \setminus D$, то каждая инволюция группы G сопряжена с некоторой инволюцией из H .

Итак, пусть G – конечная простая группа, $k \in K_3(G)$. Тогда:

I. $D = \{k, k^2\}$ – исключительное множество группы G [7, с. 78], то есть удовлетворяет следующим двум условиям:

1) для любых $i_1, i_2 \in G$ $o(i_1) = o(i_2) = 2$ и если $i_1 i_2 \in D$, то $i_2 i_1 \in D$.

Действительно, если $i_1 i_2 = k$, то $i_2 i_1 = k^2$; если $i_1 i_2 = k^2$, то $i_2 i_1 = k$.

2) для каждого $g \in G \setminus N_G(D)$ ($D \cap D^g = \emptyset$).

Пусть $k \in D^g$, то есть $k^g = k$ или $(k^2)^g = k$. Очевидно, что $g \in N_G(D)$. Аналогично для $k^2 \in D^g$.

II. Рассмотрим $H = N_G(D)$. Имеем: $H = \langle k \rangle \cup \{t \in G \mid k^t = k^{-1}\}$.

Обозначим $T = \{t \in G \mid k^t = k^{-1}\}$. Согласно теореме Бернсайда, $T \neq \emptyset$.

Покажем, что множество T состоит из инволюций G . Из [2] следует, что порядок любого элемента $t \in T$ – число чётное и очевидно, что $(k^2)^t = (k^2)^{-1}$. Заметим, что для каждого $t \in T$

$$k^{t^2} = (k^2)^t = k, \text{ то есть } t^2 \in C_G(k).$$

Таким образом, $t^2 \in \{e, k, k^2\}$ для каждого $t \in T$. Если $t^2 \in D$, то $k \notin K_3(G)$. Следовательно, $t^2 = e$, то есть t – инволюция группы G .

Покажем, что $|T| = 3$. Действительно, пусть $i^* \in T$. Тогда $\{i^*, i^*k, i^*k^2\} \subset T$. Пусть $i \in T$. Так как $iki = i^*ki^*$, то $(i^*i)k = k(i^*i)$, то есть $i^*i \in \{e, k, k^2\}$. Следовательно, $i \in \{i^*, i^*k, i^*k^2\}$. Таким образом, $|H| = 6$ и, следовательно, $H \cong S_3$.

III. Воспользуемся таблицей неприводимых характеров группы S_3 [8, с. 104].

S_3	(12)	(123)	e
φ_1	1	1	1
φ_2	-1	1	1
φ_3	0	-1	2

Имеем: $k = (123)$, $H \setminus D = \{e, i_1, i_2, i_3\}$, $o(i_1) = o(i_2) = o(i_3) = 2$.

$$(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3)(e) = 1 + 1 - 2 = 0.$$

Для каждой инволюции $i \in H \setminus D$ $(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3)(i) = 1 - 1 - 0 = 0$.

Следовательно, функция $\theta = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3$ исчезает на $H \setminus D$. Итак, каждая инволюция из G сопряжена с некоторой инволюцией из H . Осталось заметить, что все инволюции в S_3 попарно сопряжены. Таким образом, каждые две инволюции группы G попарно сопряжены.

ЛИТЕРАТУРА

1. Забарина А.И., Гусельникова У.А., Фомина Е.А. О коммутирующих элементах группы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 6(38). С. 27–32. DOI: 10.17223/19988621/38/3.
2. Забарина А.И., Фомина Е.А. О множестве $K_3(G)$ элементов конечных групп, коммутирующих ровно с тремя элементами группы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 55. С. 5–11. DOI: 10.17223/19988621/55/1.
3. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. М.: Наука, 1982. 288 с.
4. Шнеперман Л.Б. Курс алгебры и теории чисел в задачах и упражнениях: в 2 ч. Ч. 2. Минск: Вышэйшая школа, 1987. 256 с.
5. Холл М. Теория групп. М.: ИЛ, 1962. 468 с.
6. Горенштейн Д. Конечные простые группы: введение в их классификацию. М.: Мир, 1985. 352 с.
7. Белоногов В.А., Фомин А.Н. Матричные представления в теории конечных групп. М.: Наука, 1976. 126 с.
8. Чехлов А.Р. Упражнения по основам теории групп. Томск: Том. гос. ун-т, 2004. 275 с.

Статья поступила 14.04.2020

Zabarina A.I., Fomina E.A. (2020) ON THE SET K_p IN FINITE GROUPS *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 68. pp. 33–40

DOI 10.17223/19988621/68/3

Keywords: group, centralizer of an element, involution, Sylow and Hall subgroups.

Let G be an arbitrary finite multiplicative group, $|G| = n$. We define the sets $X_p(G)$ and $K_p(G)$ as follows:

$$X_p(G) = \{g \in G \mid o(g) = p\},$$

$$K_p(G) = \{g \in G \mid g \neq e \wedge |C(g)| = p\}.$$

In the case when it is clear which group G is in question, instead of $X_p(G)$, $K_p(G)$ we write: X_p , K_p , respectively.

It follows from this definition K_p that if $x \in K_p$, then $\{x, x^2, \dots, x^{p-1}\} \subset X_p$ and $\{x, x^2, \dots, x^{p-1}\} \subset K_p$.

The following properties of the set K_p have been proved.

Proposition 1. If $K_p(G) \neq \emptyset$, then $|G| \vdots p$ and $|G| \nmid p^2$.

Proposition 2. If $x \in K_p(G)$, then $x^g \in K_p(G)$ for each $g \in G$.

Proposition 3. Let $|G| = n$. Then $|K_p| \in \left\{0, \frac{n}{p}, \frac{2n}{p}, \dots, \frac{(p-1)n}{p}\right\}$.

We consider the sets K_p in the non-abelian groups S_n and A_n .

1) Let $p = 2$.

1.1. If $n > 3$, then $K_2(S_n) = \emptyset$. If $n = 3$, then $|K_2(S_3)| = \frac{|S_3|}{2}$.

1.2. $\forall n \in \mathbb{N} (n \geq 4 \Rightarrow |A_n| \vdots 4) \Rightarrow K_2(A_n) = \emptyset$.

2) Let $p \geq 3$. First, we consider the sets K_p in the groups S_n .

2.1. If $0 \leq n - p \leq 1$, then $|K_p(S_n)| = \frac{|S_n|}{p}$.

2.2. If $n - p > 1$, then $K_p(S_n) = \emptyset$.

3) Let $p \geq 3$. Now, we consider the sets K_p in the groups A_n .

3.1. If $0 \leq n - p \leq 1$, then $|K_p(A_n)| = \frac{2|A_n|}{p}$.

3.2. If $2 < n - p < p$, then $K_p(A_n) = \emptyset$.

3.3. If $n - p = 2$, then $|K_p(A_n)| = \frac{n!}{2p} = \frac{|A_n|}{p}$.

Also, the sets K_p are considered in some solvable groups. One more proof is given for the fact that all involutions of a finite simple non-Abelian group G with a nonempty set K_3 form one class of conjugate elements.

AMS 2020 Mathematical Subject Classification: 20D99

Anna I. ZABARINA (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State Pedagogical University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: aizabarina@gmail.com

Elena A. FOMINA (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State Pedagogical University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ef254@mail.ru

REFERENCES

1. Zabarina A.I., Guselnikova U.A., Fomina E.A. (2015) O kommutiruyushchikh elementakh gruppy [On commuting elements of a group]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 38(6). pp. 27–32. DOI: 10.17223/19988621/38/3.
2. Zabarina A.I., Fomina E.A. (2018) O mnozhestve $K_3(G)$ elementov konechnykh grupp, kommutiruyushchih rovnno s tremya elementami gruppy [On the set $K_3(G)$ of finite groups' elements commuting exactly with three elements]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 55(3). pp. 5–11. DOI: 10.17223/19988621/55/1.
3. Kargapolov M.I., Merzlyakov Y.I. (1982) *Osnovy teorii grupp* [Foundations of the group theory]. Moscow: Nauka.
4. Shneperman L.B. (1987) *Kurs algebrы i teorii chisel v zadachakh i uprazhneniyakh* [A course of algebra and number theory in problems and exercises]. Minsk: Vysheyschaya shkola.
5. Hall M. (1959) *The Theory of Groups*. New York: The Macmillan Company.
6. Gorenstein D. (1982) *Finite Simple Groups: An Introduction to Their Classification*. New York: Springer Science & Business Media.
7. Belonogov V.A., Fomin A.N. (1976) *Matrichnye predstavleniya v teorii konechnykh grupp* [Matrix representations in the theory of finite groups]. Moscow: Nauka. 126 p.
8. Chekhlov A.R. (2004) *Uprazhneniya po osnovam teorii grupp* [Exercises on foundations of the group theory]. Tomsk: TGU.

Received: April 26, 2020

МЕХАНИКА

УДК 534.16
DOI 10.17223/19988621/68/4

А.А. Алифов, М.Г. Фарзалиев

**О РАСЧЕТЕ МЕТОДОМ ЛИНЕАРИЗАЦИИ
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ И АВТОКОЛЕБАНИЙ
ПРИ ЗАПАЗДЫВАНИИ И ОГРАНИЧЕННОМ ВОЗБУЖДЕНИИ**

Рассмотрено взаимодействие автоколебаний и параметрических колебаний во фрикционной системе при наличии запаздывания, нелинейной упругости и источника энергии ограниченной мощности. Автоколебания возникают под действием нелинейной силы трения, которая содержит запаздывание. Для построения решений нелинейных дифференциальных уравнений движения использованы методы прямой линеаризации нелинейностей. Получены уравнения нестационарных и стационарных движений в области основного параметрического резонанса. Приведены условия устойчивости стационарных колебаний.

Ключевые слова: *взаимодействие, параметрические колебания, автоколебания, запаздывание, источник энергии, метод, прямая линеаризация.*

Человечество вступило в эпоху глобального экологического кризиса, и множество фактов различного характера свидетельствуют о его движении к экологической катастрофе глобального, общепланетарного масштаба. Эффективное решение экологических проблем предполагает отказ от модели общества потребления, в том числе роста потребляемой энергии. Рациональное использование этой энергии является одним из ряда путей решения экологических проблем. Как отмечено в работе [1]: «В любой отрасли промышленности экономия ресурсов энергии, материалов и комплектующих – насущная проблема. Значительная часть энергии потребляется различного рода приводами машин и технологического оборудования». В данном контексте достаточно значимую актуальность приобрела созданная В.О. Кононенко систематическая теория колебательных систем с ограниченным возбуждением. Ее основой является физический эффект, экспериментально обнаруженный немецким ученым А. Зоммерфельдом в 1902 г. Эта теория изложена в основополагающей монографии В.О. Кононенко [2], изданной также в Англии [3]. Она привела к возникновению нового направления в теории колебаний, за которым закрепились также следующие названия: теория взаимодействия колебательных систем с источниками энергии; теория колебательных систем с источниками энергии ограниченной мощности; теория колебательных систем с неидеальными источниками энергии. В целом ряде стран появилось много работ в этом направлении, в том числе [4] и ряд других. Среди современных работ можно отметить [5–8] и др. В вышедшей в 2018 г. статье [5], приведен обзор исследований в данном направлении теории колебаний.

Как известно, в электронике, устройствах автоматического управления, следящих системах, транспортных системах (ленточные транспортеры и др.), пневмосистемах, цифровых системах управления, станах холодного проката металла, биотехнологических системах саморегулирования, текстильной промышленности и др. широко распространено запаздывание. Под названием транспортное запаздывание оно присутствует, например, во многих технических процессах, текстильной и химической промышленности. Следует отметить, что интерес к системам с транспортным запаздыванием в последнее время растет. Как отмечено в работе [9], «Звенья с чистым запаздыванием часто встречаются в различных технологических процессах, когда материал перемещается из одной точки в другую с помощью ленточных транспортеров; в системах регулирования толщины листа при прокатке; в системах магнитной записи и воспроизведения и т. д.». Под действием запаздывания возникают колебательные процессы, которые могут быть вредными или полезными. В последнем случае запаздывание вводится в систему специально.

Задачи с запаздыванием при идеальном источнике энергии рассматривались в достаточно большом числе работ [10–13 и др.]. В отличие от этого, задачи о колебаниях в системе с запаздыванием при ограниченной мощности источника энергии изучались в весьма малом числе исследований. Для математического описания систем с запаздыванием чаще всего используются нелинейные дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. Так как решение таких уравнений связано с большими трудностями, то выделяется класс квазилинейных систем. Для изучения последних привлекаются приближенные методы нелинейной механики (усреднения, энергетического баланса, гармонической линеаризации и др.), среди которых широко используется асимптотический метод усреднения Крылова – Боголюбова [14, 15].

Цель работы – развитие способов расчета нелинейных колебательных систем на основе методов прямой линеаризации нелинейностей [16–20]. В отличие от известных методов нелинейной механики, методы прямой линеаризации позволяют значительно легче получить конечные расчетные соотношения независимо от конкретного вида характеристики, тратить достаточно малый труд и время. Результаты на основе известных методов нелинейной механики и методов прямой линеаризации совпадают *качественно*, имеются лишь незначительные *количественные* отличия. Сравнение этих количественных результатов при различных значениях параметра точности линеаризации приведено в [16].

Модель системы и уравнения движения

Во множестве работ, посвященных исследованию нелинейных систем, а также в [2–4, 21, 22], изучение автоколебаний проводилось на основе часто используемой известной модели механической фрикционной автоколебательной системы. В этой модели удерживаемое пружиной тело массы m расположено на движущейся со скоростью V непрерывной ленте на двух колесах (рис. 1). В месте контакта тела и ленты возникает трение, вызывающее фрикционные автоколебания. Такого типа автоколебания возникают, например, при медленных движениях ползунов в направляющих металлорежущих станков [23], в прядильном оборудовании [24], в текстильных машинах, в тормозах и фрикционных передачах и др.

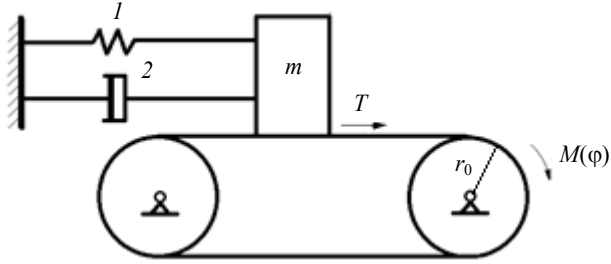


Рис. 1. Модель системы

Fig. 1. System model

Рассмотрим описанную модель при наличии запаздывания в силе трения $T(U)$, параметрического воздействия, нелинейной силы упругости пружины и источника энергии ограниченной мощности (двигателя). Характеристику (разрывную) зависящей от скорости $U = V - \dot{x}$ силы трения без запаздывания представим в виде

$$T(U) = R[\operatorname{sgn} U + F(U)], \quad F(U) = \sum_{i=1}^5 \delta_i U^i,$$

$$\operatorname{sgn} U = \begin{cases} 1, & U > 0, \\ -1, & U < 0, \end{cases}$$

где R – нормальная сила реакции, $\delta_i = \text{const}$.

Заметим, что в реальных условиях широко распространена характеристика силы трения, в которой

$$F(U) = -\delta_1 U + \delta_3 U^3. \quad (1)$$

Как следует из результатов работы [25], характеристика $T(U)$ с (1) наблюдалась также при измерении сил трения в условиях космического эксперимента.

Скорость V в случае идеального источника энергии постоянна, а источника энергии ограниченной мощности переменна, т.е. $V = r_0 \dot{\phi}$, где r_0 – радиус колеса (точнее, точки приложения силы трения), приводящего в движение ленту, $\dot{\phi}$ – скорость вращения ротора двигателя. При наличии запаздывания Δ относительная скорость $U_\Delta = V - \dot{x}_\Delta$, $\dot{x}_\Delta = \dot{x}(t - \Delta)$ и сила трения $T(U) \rightarrow T(U_\Delta)$.

Преобразуем $F(U)$ и представим в требуемой в дальнейшем форме

$$F(\dot{x}) = \sum_{n=0}^5 \alpha_n \dot{x}^n, \quad (2)$$

где $\alpha_0 = \delta_1 V + \delta_2 V^2 + \delta_3 V^3 + \delta_4 V^4 + \delta_5 V^5$,

$$\alpha_1 = -(\delta_1 + 2\delta_2 V + 3\delta_3 V^2 + 4\delta_4 V^3 + 5\delta_5 V^4),$$

$$\alpha_2 = \delta_2 + 3\delta_3 V + 6\delta_4 V^2 + 10\delta_5 V^3,$$

$$\alpha_3 = -(\delta_3 + 4\delta_4 V + 10\delta_5 V^2),$$

$$\alpha_4 = \delta_4 + 5\delta_5 V, \quad \alpha_5 = -\delta_5.$$

Движение системы описывается уравнениями

$$m\ddot{x} + k_0\dot{x} + c_0x = T(U_\Delta) - f(x) - bx \cos vt, \\ J\ddot{\phi} = M(\phi) - r_0 T(U_\Delta), \quad (3)$$

где $m = \text{const}$, $k_0 = \text{const}$ – коэффициент демпфирования демпфера 2, c_0x и $f(x)$ – соответственно линейная и нелинейная части силы упругости пружины 1, $c_0 = \text{const}$, $bx \cos vt$ – параметрическое воздействие, $b = \text{const}$, J – суммарный момент инерции вращающихся частей, $M(\phi)$ – разность вращающего момента двигателя и момента сил сопротивления вращению, которую будем называть характеристикой источника энергии.

Нелинейную часть силы упругости представим полиномиальной функцией

$$f(x) = \sum_s \gamma_s x^s,$$

где $\gamma_s = \text{const}$, $s = 2, 3, 4, \dots$.

Замена методом прямой линеаризации нелинейных функций линейными

По методу прямой линеаризации [16] нелинейные функции $f(x)$ и $F(\dot{x})$ заменим соответственно линейными функциями

$$f_*(x) = B_f + k_f x, \quad F_*(\dot{x}) = B_F + k_F \dot{x}. \quad (4)$$

В (4) символы B_f , k_f , B_F , k_F представляют коэффициенты линеаризации и определяются выражениями

$$B_f = \sum_s N_s \gamma_s a^s, \quad s = 2, 4, 6, \dots (s - \text{четное}), \quad (5)$$

$$k_f = \sum_s \bar{N}_s \gamma_s a^{s-1}, \quad s = 3, 5, 7, \dots (s - \text{нечетное}),$$

$$B_F = \sum_n N_n \alpha_n v^n, \quad n = 0, 2, 4, \dots (n - \text{четное}),$$

$$k_F = \sum_n \alpha_n \bar{N}_n v^{n-1}, \quad n = 1, 3, 5, \dots (n - \text{нечетное}).$$

Здесь $a = \max |x|$, $v = \max |\dot{x}|$, $N_s = (2r+1)/(2r+1+s)$, $\bar{N}_s = (2r+3)/(2r+2+s)$, $N_n = (2r+1)/(2r+1+n)$, $\bar{N}_n = (2r+3)/(2r+2+n)$. Параметр r определяет точность линеаризации (степень близости решения линеаризованного уравнения к точному решению нелинейного уравнения) и его величина может быть различной. Как показано в [16], он может быть выбран из промежутка (0, 2).

Уравнения (3) с учетом (5) принимают вид

$$m\ddot{x} + k_0\dot{x} + cx = B + R \operatorname{sgn} U_\Delta + Rk_F \dot{x}_\Delta - bx \cos vt, \\ J\ddot{\phi} = M(\phi) - r_0 R (\operatorname{sgn} U_\Delta + B_F + k_F \dot{x}_\Delta), \quad (6)$$

где $B = RB_F - B_f$, $c = c_0 + k_f$.

Построение решений линеаризованных уравнений

Решение линеаризованного уравнения можно построить двумя методами [16]. Одним из них является *метод замены переменных с усреднением*, позволяющий рассмотреть стационарные и нестационарные процессы. Нелинейное уравнение достаточно общего вида представлено в работе [16] в линеаризованном виде и получены стандартной формы соотношения для определения нестационарных значений амплитуды и фазы. Поскольку первое уравнение (3) является частным случаем такого общего вида нелинейного уравнения, то эта стандартная форма позволяет непосредственно выписать результаты для первого уравнения (6), осуществляя вычисление лишь его правой части. А в отношении второго уравнения (6) пользуемся процедурой усреднения, описанной в [18]. Следует отметить, что в соответствии с этой процедурой скорость $V = r_0 \dot{\phi}$ заменяется на $u = r_0 \Omega$, где Ω – усредненное значение скорости $\dot{\phi}$ источника энергии.

Прежде чем перейти к приведению соотношений для стационарных и нестационарных процессов, заметим, что имеются два принципиально различных случая, при которых существуют качественно различные режимы колебаний. Они определяются скоростью U , которая может быть положительной и отрицательной. В случае $U > 0$ имеет место выражение $u \geq ap$, а в случае $U < 0$ – выражение $u < ap$, причем для вывода соотношений при $u < ap$ использован способ, описанный в [4]. Как показано в этих работах аналитически и моделированием на вычислительной машине, характеры решений $x(t)$, $\dot{x}(t)$ при скоростях $u \geq ap$ и $u < ap$ качественно различны.

На практике основной интерес представляет главный резонанс. В случае параметрического воздействия он происходит тогда, когда половина частоты воздействия близка к собственной частоте системы. С учетом $\dot{x}_\Delta = -ap \sin(\psi - p\Delta)$ искомые решения при основном параметрическом резонансе имеют вид

$$x = a \cos \psi, \quad \dot{x} = -ap \sin \psi, \quad \psi = pt + \xi, \quad p = \nu/2, \quad \dot{\phi} = \Omega. \quad (7)$$

В соответствии с (7) в выражениях (4) будет $\nu = ap$.

На основе отмеченной выше стандартной формы соотношений использования метода прямой линеаризации при анализе общего вида нелинейной системы, можно выписать следующие уравнения нестационарных движений для (6):

а) $u \geq ap$:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{a(k_0 - Rk_F \cos p\Delta)}{2m} + \frac{ba}{4pm} \sin 2\xi, \\ \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\omega^2 - p^2}{2p} - \frac{Rk_F}{2m} \sin p\Delta + \frac{b}{4pm} \cos 2\xi, \\ \frac{du}{dt} &= \frac{r_0}{J} \left[M\left(\frac{u}{r}\right) - r_0 R(1 + B_F) \right]; \end{aligned} \quad (8, a)$$

б) $u < ap$:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{a}{2m} [(k_0 - Rk_F \cos p\Delta) + 4R(\pi a^2 p^2)^{-1} (a^2 p^2 - u^2)^{1/2}] + \frac{ba}{4pm} \sin 2\xi,$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\omega^2 - p^2}{2p} - \frac{Rk_F}{2m} \sin p\Delta + \frac{b}{4pm} \cos 2\xi, \quad (8,6)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{r_0}{J} \left[M\left(\frac{u}{r}\right) - r_0 R(1 - B_F) - \frac{r_0 R}{\pi} (3\pi - 2\Psi_*) \right],$$

где $\omega^2 = c/m = (c_0 + k_f)/m = \omega_0^2 + (k_f/m)$, $\omega_0^2 = c_0/m$, $\Psi_* = 2\pi - \arcsin(u/ap)$.

Так как в области резонанса разность частот $\omega_0 - p$ достаточно мала, то можно принять $(\omega_0^2 - p^2)/2p \approx \omega_0 - p$.

В ряде практических случаев представляет интерес смещение центра колебаний x_0 , с учетом которого имеем $x = x_0 + a \cos \psi$, где

$$а) \ u \geq ap: \quad x_0 = \frac{1}{c_0 + k_f} [R(1 + B_F) - B_f],$$

$$б) \ u < ap: \quad x_0 = \frac{1}{c_0 + k_f} \left[R(1 - B_F) - B_f - \frac{1}{\pi} (3\pi - 2\Psi_*) \right].$$

Условия $\dot{a} = 0$, $\dot{\xi} = 0$ доставляют в случае $u \geq ap$ следующие соотношения для определения стационарных значений амплитуды и фазы колебаний:

$$p^2 (k_0 - Rk_F \cos p\Delta)^2 + [m(\omega^2 - p^2) - pRk_F \sin p\Delta]^2 = 0.25b^2, \quad (9)$$

$$\operatorname{tg} 2\xi = - \frac{p(k_0 - Rk_F \cos p\Delta)}{m(\omega^2 - p^2) - pRk_F \sin p\Delta}.$$

В случае $u < ap$ стационарное значение амплитуды колебаний определяется приближенным равенством $ap \approx u$, справедливым при малом внешнем воздействии. Это приближенное соотношение и первое уравнение (9) позволяют для различных значений запаздывания строить представляющую некоторую поверхность зависимость амплитуды от частоты и скорости $a(p, u)$ в широком диапазоне, начиная со значения скорости $u = 0$. При этом зависимость амплитуды от скорости u строится для фиксированных значений частоты $p = v/2$ в области резонанса.

Из условия $\dot{u} = 0$ следует для $u \geq ap$ и $u < ap$ уравнение общего вида

$$M(u/r) - S(u) = 0, \quad (10)$$

где нагрузка $S(u)$ на источник энергии равна:

$$а) \ u \geq ap: \quad S(u) = r_0 R(1 + B_F),$$

$$б) \ u < ap: \quad S(u) = r_0 R \left[(1 - B_F) + \pi^{-1} (3\pi - 2\Psi_*) \right].$$

Кривая нагрузки $S(u)$ строится с использованием амплитудно-частотно-скоростной зависимости $a(p, u)$. Стационарные значения скорости u , которые могут быть реализованы, определяются точками пересечения кривых $M(u/r)$ и $S(u)$.

Условия устойчивости стационарных решений

Стационарные колебания в одних случаях желательны, а в других – нет. Поэтому чтобы их реализовать в первом случае и устранить – во втором, эти движения необходимо проверить на устойчивость. С этой целью составляем уравнения

в вариациях для (8) и, пользуясь критериями Рауса – Гурвица, получаем следующие условия устойчивости:

$$D_1 > 0, \quad D_3 > 0, \quad D_1 D_2 - D_3 > 0, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} D_1 &= -(b_{11} + b_{22} + b_{33}), \\ D_2 &= b_{11}b_{33} + b_{11}b_{22} + b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21} - b_{13}b_{31}, \\ D_3 &= b_{11}b_{23}b_{32} + b_{12}b_{21}b_{33} - b_{11}b_{22}b_{33} - b_{12}b_{23}b_{31} - b_{13}b_{21}b_{32}. \end{aligned}$$

В случае $u \geq ar$ имеем

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{r_0}{J} (Q - r_0 R \frac{\partial B_F}{\partial u}), \quad b_{12} = -\frac{r_0^2 R}{J} \frac{\partial B_F}{\partial a}, \\ b_{13} &= 0, \quad b_{21} = \frac{Ra}{2m} \frac{\partial k_F}{\partial u} \cos p\Delta, \\ b_{22} &= -\frac{1}{2m} (k - Rk_F \cos p\Delta - aR \frac{\partial k_F}{\partial a} \cos p\Delta) + \frac{b}{4pm} \sin 2\xi, \\ b_{23} &= \frac{ab}{2pm} \cos 2\xi, \quad b_{31} = -\frac{R}{2m} \frac{\partial k_F}{\partial u} \sin p\Delta, \\ b_{32} &= \frac{1}{2pm} \frac{\partial k_f}{\partial a} - \frac{R}{2m} \frac{\partial k_F}{\partial a} \sin p\Delta, \quad b_{33} = -\frac{b}{2pm} \sin 2\xi, \end{aligned} \quad (12,a)$$

а в случае $u < ar$ изменяются лишь коэффициенты

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{r_0}{J} \left[Q - r_0 R \frac{\partial B_F}{\partial u} - \frac{2r_0 R}{\pi \sqrt{a^2 p^2 - u^2}} \right], \\ b_{12} &= -\frac{Rr_0^2}{J} \left[\frac{\partial B_F}{\partial a} + \frac{2u}{\pi a \sqrt{a^2 p^2 - u^2}} \right], \\ b_{21} &= \frac{a}{2m} \left[R \frac{\partial k_F}{\partial u} \cos p\Delta + \frac{4uR}{\pi a^2 p^2 \sqrt{a^2 p^2 - u^2}} \right], \\ b_{22} &= -\frac{1}{2m} (k - Rk_F \cos p\Delta - aR \frac{\partial k_F}{\partial a} \cos p\Delta + \frac{4Ru^2}{\pi a^2 p^2 \sqrt{a^2 p^2 - u^2}}) + \frac{b}{4pm} \sin 2\xi, \end{aligned} \quad (12,б)$$

где $Q = \frac{d}{du} M(\frac{u}{r})$.

С учетом того, что при усреднении $\dot{\phi} = \Omega$, $u = r_0 \Omega$, входящие в (12) производные определяются выражениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_F}{\partial u} &= \frac{\partial \alpha_0}{\partial u} + N_2(ap)^2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial u} + N_4(ap)^4 \frac{\partial \alpha_4}{\partial u}, \\ \frac{\partial k_F}{\partial u} &= \bar{N}_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} + \bar{N}_3(ap)^2 \frac{\partial \alpha_3}{\partial u} + \bar{N}_5(ap)^4 \frac{\partial \alpha_5}{\partial u}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial B_F}{\partial a} = 2ap^2(N_2\alpha_2 + 2N_4\alpha_4a^2p^2),$$

$$\frac{\partial k_F}{\partial a} = 2ap^2(\bar{N}_3\alpha_3 + 2\bar{N}_5\alpha_5a^2p^2),$$

$$\frac{\partial k_f}{\partial a} = 2a(\bar{N}_3\gamma_3 + 2\bar{N}_5\gamma_5a^2 + 3\bar{N}_7\gamma_7a^4 + \dots),$$

$$\frac{\partial \alpha_0}{\partial u} = \delta_1 + 2\delta_2u + 3\delta_3u^2 + 4\delta_4u^3 + 5\delta_5u^4,$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial u} = -2(\delta_2 + 3\delta_3u + 6\delta_4u^2 + 10\delta_5u^3),$$

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial u} = 3(\delta_3 + 4\delta_4u + 10\delta_5u^2),$$

$$\frac{\partial \alpha_3}{\partial u} = -4(\delta_4 + 5\delta_5u),$$

$$\frac{\partial \alpha_4}{\partial u} = 5\delta_5, \quad \frac{\partial \alpha_5}{\partial u} = 0.$$

Заметим, что при вычислении $\partial B_F/\partial u$, $\partial B_F/\partial a$ учитываются лишь четные степени n и соответственно α_0 , α_2 , α_4 , а вычисления $\partial k_F/\partial u$, $\partial k_F/\partial a$ – нечетные степени n и соответственно α_1 , α_3 , α_5 , причем в выражениях α_n в (2) вместо V будет u . Точно так же при вычислении $\partial k_f/\partial a$ учитываются нечетные степени s (соответственно γ_1 , γ_3 , γ_5 и т.д.).

Как видно из приведенных выше результатов, применение методов прямой линеаризации достаточно просто. Они позволяют легко получить конечные расчетные соотношения и на несколько порядков снизить затраты труда и времени при вычислениях. Данные преимущества весьма значительно повышают эффективность использования этих методов на практике.

Расчеты

Чтобы получить информацию о динамике системы, проводились расчеты при следующих параметрах: $\omega_0 = 1 \text{ с}^{-1}$, $m = 1 \text{ кгс} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{см}^{-1}$, $k_0 = 0.02 \text{ кгс} \cdot \text{с} \cdot \text{см}^{-1}$, $b = 0.07 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-1}$, $J = 1 \text{ кгс} \cdot \text{с} \cdot \text{см}^2$, $r_0 = 1 \text{ см}$, $R = 0.5 \text{ кгс}$, $\delta_1 = 0.84 \text{ с} \cdot \text{см}^{-1}$, $\delta_3 = 0.18 \text{ с}^3 \cdot \text{см}^{-3}$. Характеристика силы трения была выбрана в форме $T(U) = R(\text{sgn} U - \delta_1 U + \delta_3 U^3)$, где δ_1 и δ_3 – положительные постоянные. Такая характеристика трения широко распространена на практике и, как отмечалось выше, она наблюдалась также в условиях космического эксперимента [25].

Некоторые результаты расчетов в случае $u = 1.2 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ и линейной упругости представлены на рис. 2. Для расчета амплитудно-частотных кривых, показанных на рис. 2, использован параметр точности $r = 1.5$, приведенный в (5).

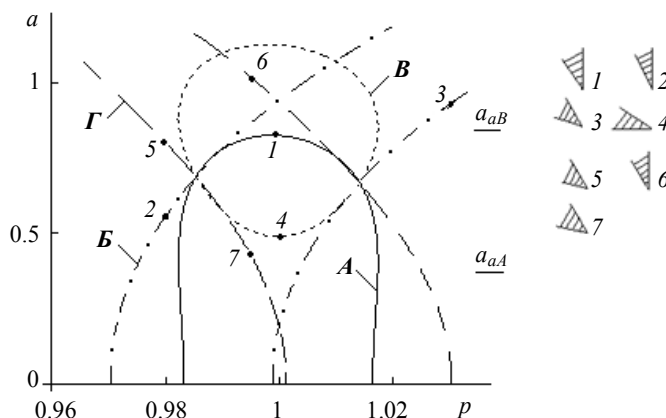


Рис. 2. Амплитудно-частотные кривые
Fig. 2. Amplitude-frequency curves

Сплошная кривая A соответствует $p\Delta = 0$, штрих-пунктирная B – $p\Delta = \pi/2$, пунктирная B – $p\Delta = \pi$, штриховая Γ – $p\Delta = 3\pi/2$. Амплитуды автоколебаний при $p\Delta = 0$ и $p\Delta = \pi$ отмечены соответственно как a_{aA} и a_{aB} (в соответствии с обозначениями кривых A и B). Заметим, что эти кривые полностью совпадают с кривыми, полученными по методу Крылова – Боголюбова, который широко используется для расчета нелинейных систем. При неидеальном источнике энергии устойчивость колебаний зависит от характеристики источника, что видно из выражения коэффициента b_{11} в (12). Например, колебания с амплитудами, соответствующими точкам 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, устойчивы, если $Q = dM/du$ в (12) для характеристики источника $M(u/r_0)$ находится в пределах заштрихованных секторов. Как видно из результатов расчета, запаздывание оказывает значительное влияние на ширину и положение области резонанса, амплитуду и устойчивость резонансных колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волков А.Н., Мацко О.Н., Мосалова А.В. Выбор энергосберегающих законов движения мехатронных приводов технологических машин // Научно-технические ведомости СПбПУ. Естественные и инженерные науки. 2018. Т. 24. № 4. С.141–149. DOI: 10.18721/JEST.24414.
2. Кононенко В.О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. М.: Наука, 1964. 236 с.
3. Kononenko V.O. Vibrating Systems with Limited Power-Supply. London: Iliffe. 1969.
4. Alifov A.A., Frolov K.V. Interaction of Nonlinear Oscillatory Systems with Energy Sources. New York; Washington; Philadelphia; London: Hemisphere Publishing Corporation, 1990. 327 p.
5. Краснопольская Т.С., Ганиев Р.Ф. Научное наследие В.О. Кононенко: эффект Зоммерфельда – Кононенко // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2018. № 5. С. 3–15. DOI: 10.31857/S023571190001552-8.
6. Kovrigin D.A. Synchronization and Sommerfeld effect as typical resonant patterns // Archive Appl. Mech. 2012. V. 82. P. 591–604.
7. Samantaray A.K., Dasgupta S.S. and Bhattacharyya R. Sommerfeld effect in rotationally symmetric planar dynamical systems // International Journal of Engineering Science. 2010. V. 48. P. 21–36. doi: 10.1016/j.ijengsci.2009.06.005.

8. Cveticanin L., Zukovic M., Cveticanin D. Non-ideal source and energy harvesting // *Acta Mech.* 2017. V. 228. P. 3369–3379. DOI: 10.1007/s00707-017-1878-4.
9. Теория автоматического управления. Ч. I. Теория линейных систем автоматического управления / под ред. А.А. Воронова. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Высш. шк., 1986. 367 с.
10. Рубаник В.П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М.: Наука, 1969. 288 с.
11. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 256 с.
12. Асташев В.К., Герц М.Е. Автоколебания вязко-упругого стержня с ограничителями при действии запаздывающей силы // *Машиноведение.* 1973. № 5. С. 3–11.
13. Жирнов Б.М. Об автоколебаниях механической системы с двумя степенями свободы при наличии запаздывания // *Прикладная механика.* 1973. Т. 9. № 10. С. 83–87.
14. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
15. *Вибрации в технике: Справочник: в 6 т. / пред. ред. совета В.Н. Челомей.* М.: Машиностроение, 1979. Т. 5. Колебания нелинейных механических систем / под ред. И.И. Блехмана. 1979. 351 с.
16. Алифов А.А. Методы прямой линеаризации для расчета нелинейных систем. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2015. 74 с.
17. Alifov A.A. Method of the direct linearization of mixed nonlinearities // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability.* 2017. V. 46. No. 2. P. 128–131. DOI: 10.3103/S1052618817020029.
18. Алифов А.А. О расчете колебательных систем с ограниченным возбуждением методами прямой линеаризации // *Проблемы машиностроения и автоматизации.* 2017. № 4. С. 92–97.
19. Alifov A.A., Farzaliev M.G., Jafarov E.N. Dynamics of a self-oscillatory system with an energy source // *Russian Engineering Research.* 2018. V. 38. No. 4. P. 260–262. DOI: 10.3103/S1068798X18040032.
20. Alifov A.A. About application of methods of direct linearization for calculation of interaction of nonlinear oscillatory systems with energy sources // *Proc. of the Second International Symposium of Mechanism and Machine Science (ISMMS – 2017), September 11–14, 2017, Baku, Azerbaijan.* P. 218–221.
21. Журавлёв В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.
22. Фролов К.В. Избранные труды: в 2 т. Т.1. Вибрация и техника. М.: Наука, 2007. 351 с.
23. Кудинов В.А. Динамика станков. М.: Машиностроение, 1967.
24. Коритыцкий Я.И. Крутильные автоколебания вытяжных приборов прядильных машин при граничном трении в опорах скольжения // *Нелинейные колебания и переходные процессы в машинах: сб. М.: Наука, 1972.*
25. Броновец М.А., Журавлёв В.Ф. Об автоколебаниях в системах измерения сил трения // *Изв. РАН. МТТ.* 2012. № 3. С. 3–11.

Статья поступила 14.03.2019

Alifov A.A., Farzaliev M.G. (2020) ON THE CALCULATION BY THE METHOD OF LINEARIZATION OF THE INTERACTION OF PARAMETRIC AND SELF-OSCILLATIONS AT DELAY AND LIMITED EXCITATION. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 68. pp. 41–52

DOI 10.17223/19988621/68/4

Keywords: interaction, parametric oscillations, self-oscillations, delay, energy source, method, direct linearization.

The aim of the study is to develop methods for calculating nonlinear oscillatory systems with limited excitation on the basis of direct linearization of nonlinearities. Unlike the known methods of nonlinear mechanics, direct linearization methods simplify obtaining of the finite calculating formulas regardless of the particular type of characteristics and require less labor and time. The results obtained using the known methods of nonlinear mechanics and methods of direct linearization coincide qualitatively, but there are some insignificant quantitative differences which disappear in some cases. The interaction of self-oscillations and parametric oscillations in the presence of delay, nonlinear elasticity, and an energy source of limited power, is considered. A well-known model of mechanical friction self-oscillating system is used, in which self-oscillations occur under the nonlinear friction force action with a delay. The solution of the system of nonlinear differential equations of motion is obtained using direct linearization methods. Applying these methods, the linearization of nonlinear functions is first performed, and then the equations of unsteady and steady motions in the main parametric resonance region are derived. The stability conditions of steady-state oscillations are further considered using the Routh-Hurwitz criteria. To gain information about dynamics of the system, calculations are performed. Amplitude-frequency characteristics are plotted with determination of their stable and unstable regions both at an ideal source of energy and under limited excitation.

Alishir A. ALIFOV (Doctor of Technical Sciences, Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute of RAS, Moscow, Russian Federation). E-mail: a.alifov@yandex.ru

Mezahir G. FARZALIEV (Doctor of Technical Sciences, Professor, Azerbaijan State University of Economics, Baku, Azerbaijan). E-mail: mezahir-ferzeliyev@rambler.ru

REFERENCES

1. Volkov A.N., Matsko O.N., Mosalova A.V. (2018) Vybora energosberegayushchikh zakonov dvizheniya mekhatronnykh privodov tekhnologicheskikh mashin [Selecting of the energy-saving laws of motion for mechatronic drives of production machines]. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbPU. Estestvennye i inzhenernye nauki – St. Petersburg Polytechnic University Journal of Engineering Science and Technology*. 24(4). pp. 141–149. DOI: 10.18721/JEST.24414.
2. Kononenko V.O. (1964) *Kolebatel'nye sistemy s ogranichenym vozbuzhdeniem* [Vibrating systems with limited power-supply]. Moscow: Nauka.
3. Kononenko V.O.. (1969) *Vibrating Systems with Limited Power-Supply*. London: Iliffe.
4. Alifov A.A., Frolov K.V. (1990) *Interaction of Nonlinear Oscillatory Systems with Energy Sources*. New York, Washington, Philadelphia, London: Hemisphere Publishing Corporation.
5. Krasnopolskaya T.S., Ganiev R.F. (2018) Nauchnoe nasledie V.O. Kononenko: effekt Zommerfelda-Kononenko [Scientific heritage of V.O. Kononenko: the Sommerfeld-Kononenko effect]. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin – Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 5. pp. 35. DOI: 10.31857/S023571190001552-8.
6. Kovriguine D.A. (2012) Synchronization and Sommerfeld effect as typical resonant patterns. *Archive Appl. Mech.* 82. pp. 591–604.
7. Samantaray A.K., Dasgupta S.S., Bhattacharyya R. (2010) Sommerfeld effect in rotationally symmetric planar dynamical systems. *International Journal of Engineering Science*. 48. pp. 2136. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2009.06.005.
8. Cveticanin L., Zukovic M., Cveticanin D. (2017) Non-ideal source and energy harvesting. *Acta Mech.* 228, pp. 3369–3379. DOI: 10.1007/s00707-017-1878-4.
9. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya* (1986) [Automatic control theory]. Vol. 1. Moscow: Vysshaya shkola.
10. Rubanik V.P. (1969) *Kolebaniya kvazilineynykh sistem s zapazdyvaniem* [Oscillations of quasilinear systems with delay]. Moscow: Nauka.
11. Butenin N.V., Neymark Yu.I., Fufaev N.A. (1976) *Vvedenie v teoriyu nelineynykh kolebaniy* [Introduction to the theory of nonlinear oscillations]. Moscow: Nauka.

12. Astashev V.K., Gerts M.E. (1973) Avtokolebaniya vyazko-uprugogo sterzhnya s ogranichitel'nyimi pri deystvii zapazdyvayushchey sily [Self-oscillations of a visco-elastic rod with limiters under the action of a lagging force]. *Mashinovedenie – Soviet Machine Science*. 5. pp. 3–11.
13. Zhirnov B.M. (1973) Ob avtokolebaniyakh mekhanicheskoy sistemy s dvumya stepenyami svobody pri nalichii zapazdyvaniya [On self-oscillations of a mechanical system with two degrees of freedom in the presence of a delay]. *Prikladnaya mekhanika – International Applied Mechanics*. 9(10). pp. 83–87.
14. Bogolyubov N.N., Mitropolskiy Yu.A. (1974) *Asimptoticheskie metody v teorii nelineynykh kolebaniy* [Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations]. Moscow: Nauka.
15. *Vibratsii v tekhnike* (1979) [Vibrations in technical equipment]. Vol. 5. Moscow: Mashinostroenie.
16. Alifov A.A. (2015) *Metody pryamoy linearizatsii dlya rascheta nelineynykh sistem* [Methods of direct linearization for calculation of nonlinear systems]. Moscow-Izhevsk: Regul'yarnaya i khaoticheskaya dinamika.
17. Alifov A.A. (2017) Method of the direct linearization of mixed nonlinearities. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 46(2). pp. 128–131. DOI: 10.3103/S1052618817020029.
18. Alifov A.A. (2017) O raschete kolebatel'nykh sistem s ogranichenным возбуждением metodami pryamoy linearizatsii [On the calculation of oscillating systems with limited power-supply by direct linearization methods]. *Problemy mashinostroeniya i avtomatizatsii – Engineering & Automation Problems*. 4. pp. 92–97.
19. Alifov A.A., Farzaliev M.G., Jafarov E.N. (2018) Dynamics of a self-oscillatory system with an energy source. *Russian Engineering Research*. 38(4). pp. 260–262. DOI: 10.3103/S1068798X18040032.
20. Alifov A.A. (2017) About application of methods of direct linearization for calculation of interaction of nonlinear oscillatory systems with energy sources. *Proceedings of the Second International Symposium of Mechanism and Machine Science (ISMMS – 2017)*. Baku, 11-14 September 2017. Baku: AzTU. pp. 218–221.
21. Zhuravlev V.F., Klimov D.M. (1988) *Prikladnye metody v teorii kolebaniy* [Applied methods in the theory of oscillations]. Moscow: Nauka.
22. Frolov K.V. (2007) *Izbrannyye trudy* [Selected Works]. Vol. 1. Moscow: Nauka.
23. Kudinov V.A. (1967) *Dinamika stankov* [Machine dynamics]. Moscow: Mashinostroenie.
24. Koritysskiy Ya.I. (1972) *Krutil'nye avtokolebaniya vytyazhnykh priborov pryadil'nykh mashin pri granichnom trenii v oporakh skol'zheniya* [Torsional self-oscillations of exhaust devices spinning machines with boundary friction in the sliding bearings]. *Nelineynye kolebaniya i perekhodnye protsessy v mashinakh*. Moscow: Nauka.
25. Bronovets M.A., Zhuravlev V.F. (2012) Ob avtokolebaniyakh v sistemakh izmereniya sil treniya [On self-excited vibrations in friction force measurement systems]. *Izv. RAN. MTT – Mechanics of Solids*. 3. pp. 3–11.

Received: March 14, 2019

УДК 531.332

DOI 10.17223/19988621/68/5

С.О. Гладков, С.Б. Богданова

К ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ БРАХИСТОХРОНЫ

Приводится общий вид функционала для задачи о брахистохроне в случае n -мерного евклидова пространства. С помощью основных принципов вариационного исчисления получена система дифференциальных уравнений, позволяющая найти формальное решение поставленной задачи. Найдено параметрическое решение системы уравнений в трехмерном и n -мерном случаях. Аналитически и численно доказано, что в пространственном случае, так же, как и в двухмерном, линией наибо́льшего скатывания будет плоская кривая, что подтверждается графической иллюстрацией полученных решений.

Ключевые слова: *трехмерная брахистохрона, n -мерный случай, функционал, экстремаль.*

Во всех известных нам публикациях, касающихся анализа задач, так или иначе связанных с брахистохроной, речь всегда ведется о двухмерной задаче (см., к примеру, работы [1–7] и монографию [8]) за исключением работы [9], в которой был рассмотрен трехмерный случай вращающейся брахистохроны.

В этом коротком сообщении мы проведем подробное исследование в том случае, когда брахистохрона многомерная, но вначале подробно остановимся на трехмерном случае при условии, что координаты y, z являются независимыми и могут зависеть лишь от третьей координаты x , как от параметра.

При этом совершенно понятно, что геометрия желоба, по которому скатывается тело массой m , имеет абсолютно произвольную ориентацию в пространстве.

Решение и анализ задачи в 3-мерном случае

В рамках поставленной задачи общий функционал в результате будет иметь вполне очевидный вид

$$\delta t \{y, z\} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{\sqrt{h-z}} dx, \quad (1)$$

где δt – интервал времени в условиях скатывания тела, g – ускорение силы тяжести, h – максимальная высота тела над Землей.

С целью решения поставленной задачи удобно воспользоваться уравнениями Эйлера – Лагранжа [10], которые имеют вид

$$\begin{cases} F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0, \\ F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где функция $F = \frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{\sqrt{h-z}}$. Заметим, что в силу линейности уравнений (2)

множитель $\frac{1}{\sqrt{2g}}$ не существен, и мы его учитывать не будем.

Из верхнего уравнения системы (2) следует, что

$$F_{y'} = C_1 = \text{const}, \quad (3)$$

а нижнее, в силу независимости подинтегральной функции от x , дает

$$F - z'F_{z'} = C_2, \quad (4)$$

где C_2 – константа интегрирования.

После простых вычислений приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} y' = C_1 \sqrt{h-z} \sqrt{1+y'^2+z'^2}, \\ 1+y'^2 = C_2 \sqrt{h-z} \sqrt{1+y'^2+z'^2}. \end{cases} \quad (5)$$

Поделив их друг на друга и вводя новую константу $A = \frac{C_1}{C_2}$, приходим к соотношению

$$\frac{1+y'^2}{y'} = \frac{C_1}{C_2} = A, \quad (6)$$

где $A = \text{const}$.

Отсюда сразу же следует решение

$$y = ax + b, \quad (7)$$

где $a = \frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} - 1}$, а b – константа интегрирования.

Заменяя в верхнем уравнении системы (5) производную y' на a , получаем

$$a = C_1 \sqrt{h-z} \sqrt{1+a^2+z'^2}. \quad (8)$$

Уравнение (8) тривиально решается с помощью подстановки

$$z' = \sqrt{1+a^2} \operatorname{tg} \beta, \quad (9)$$

где угловая переменная β представляет собой параметр.

В результате простого интегрирования немедленно находим решение уравнения (8) в параметрическом виде

$$z = h - \frac{1+a^2}{C_1^2} \cos^2 \beta. \quad (10)$$

Поскольку согласно (9), $dz = \sqrt{1+a^2} \operatorname{tg} \beta dx$, то отсюда следует, что

$$x = C_3 + \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \int \operatorname{ctg} \beta \frac{dz}{d\beta} d\beta,$$

где C_3 – константа интегрирования. В результате подстановки сюда (10) приходим к следующему решению:

$$x = C_3 + \frac{\sqrt{1+a^2}}{C_1^2} \left(\beta + \frac{1}{2} \sin 2\beta \right). \quad (11)$$

Таким образом, собирая решения (7), (10) и (11) в единую систему, получаем решение задачи о пространственной брахистохроне в виде

$$\begin{cases} x = C_3 + \frac{\sqrt{1+a^2}}{C_1^2} \left(\beta + \frac{1}{2} \sin 2\beta \right), \\ y = ax + b, \\ z = h - \frac{1+a^2}{2C_1^2} (1 + \cos 2\beta). \end{cases} \quad (12)$$

Выбирая константу C_1^2 в виде

$$C_1^2 = \frac{1+a^2}{h}, \quad (13)$$

вместо (12) находим

$$\begin{cases} x = C_3 + \frac{h}{\sqrt{1+a^2}} \left(\beta + \frac{1}{2} \sin 2\beta \right), \\ y = ax + b, \\ z = \frac{h}{2} (1 - \cos 2\beta). \end{cases} \quad (14)$$

Считая, наконец, что брахистохрона «привязана» к началу координат, получим $b = C_3 = 0$, и решение становится вполне компактным:

$$\begin{cases} x = \frac{h}{\sqrt{1+a^2}} \left(\beta + \frac{1}{2} \sin 2\beta \right), \\ y = \frac{ah}{\sqrt{1+a^2}} \left(\beta + \frac{1}{2} \sin 2\beta \right), \\ z = \frac{h}{2} (1 - \cos 2\beta). \end{cases} \quad (15)$$

Полагая в предельном случае $a = 0$, приходим к параметрическим уравнениям обычной двумерной брахистохроны

$$\begin{cases} x = h \left(\beta + \frac{1}{2} \sin 2\beta \right), \\ z = \frac{h}{2} (1 - \cos 2\beta). \end{cases} \quad (16)$$

Полагая в уравнениях (15), например, $a = \sqrt{3}$, получаем

$$\begin{cases} x = \frac{h}{2} \left(\beta + \frac{1}{2} \sin 2\beta \right), \\ y = \frac{h\sqrt{3}}{2} \left(\beta + \frac{1}{2} \sin 2\beta \right), \\ z = \frac{h}{2} (1 - \cos 2\beta). \end{cases} \quad (17)$$

Из решений (17) видно, что на плоскостях $x-z$ и $y-z$ будут наблюдаться типичные двухмерные брахистохроны, только на плоскости $y-z$ амплитуда будет в $\sqrt{3}$ раз больше (см. рис. 1).

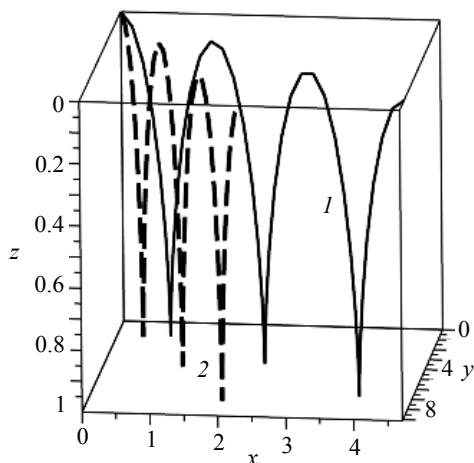


Рис. 1. Решения системы (17): линия 1 построена в предположении, что $h=1$, $a=\sqrt{3}$, линия 2 построена при $h=1$, $a=\sqrt{15}$. Параметр t принадлежит сегменту $[0, 3\pi]$

Fig. 1. Solutions to system (17): line 1 corresponds to a case of $h=1$, $a=\sqrt{3}$ and line 2, to a case of $h=1$, $a=\sqrt{15}$. The parameter t belongs to the interval of $[0, 3\pi]$

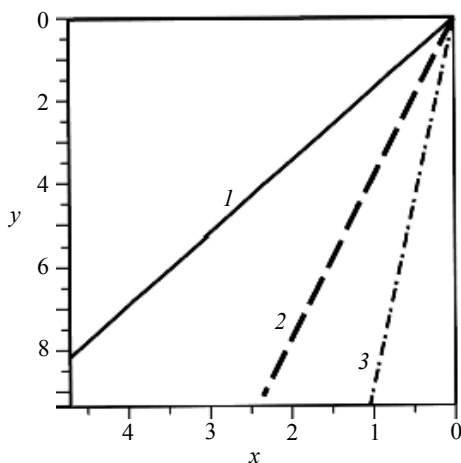


Рис. 2. Проекция на плоскость xoy трех пространственных брахистохрон: линия 1 – проекция брахистохроны с параметрами $h=1$, $a=\sqrt{3}$; линия 2 – $h=1$, $a=\sqrt{15}$; линия 3 – $h=1$, $a=\sqrt{80}$ для $t \in [0; 3\pi]$

Fig. 2. Projections of three nonpolar brachistochrones on the plane xoy : line 1 corresponds to a brachistochrone at $h=1$, $a=\sqrt{3}$, line 2, at $h=1$, $a=\sqrt{15}$, and line 3, at $h=1$, $a=\sqrt{80}$ for $t \in [0; 3\pi]$

***n*-Мерный случай**

Рассмотрим теперь случай n -мерного евклидового пространства. В этом случае функционал (1) должен быть заменен на

$$\delta t \{ \mathbf{x} \} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + x_2'^2 + x_3'^2 + \dots + x_n'^2}}{\sqrt{h - x_n}} dx_1, \quad (18)$$

где вектор $\mathbf{x} = (x_2, x_3, \dots, x_n)$.

В соответствии с уравнениями Эйлера – Лагранжа получаем в результате следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x'_2 = C_1 \sqrt{h - x_n} \sqrt{1 + x_2'^2 + x_3'^2 + \dots x_n'^2}, \\ x'_3 = C_2 \sqrt{h - x_n} \sqrt{1 + x_2'^2 + x_3'^2 + \dots x_n'^2}, \\ \dots\dots\dots, \\ 1 + x_2'^2 + x_3'^2 + \dots + x_{n-1}'^2 = C_{n-1} \sqrt{h - x_n} \sqrt{1 + x_2'^2 + x_3'^2 + \dots x_n'^2}. \end{cases} \quad (19)$$

Деля почленно верхние $n - 2$ уравнения друг на друга, находим

$$\begin{cases} \frac{x'_2}{x'_3} = \frac{C_1}{C_2} = a_1, \\ \frac{x'_2}{x'_4} = \frac{C_1}{C_3} = a_2, \\ \frac{x'_2}{x'_5} = \frac{C_1}{C_4} = a_3, \\ \dots\dots\dots, \\ \frac{x'_2}{x'_{m-2}} = \frac{C_1}{C_{m-3}} = a_{m-4}. \end{cases} \quad (20)$$

где $m \geq 4$, а коэффициент $a_0 = 1$.

Таким образом, имеется следующее рекуррентное соотношение:

$$x'_{m-2} = \frac{x'_2}{a_{m-4}}, \quad (21)$$

где число m подчиняется неравенству

$$4 \leq m \leq n + 2. \quad (22)$$

Подставляя теперь (21) в нижнее уравнение системы (19), немедленно получаем такое уравнение:

$$1 + x_2'^2 + \frac{x_2'^2}{a_3^2} + \frac{x_2'^2}{a_4^2} \dots + \frac{x_2'^2}{a_{n-1}^2} = C_{n-1} \sqrt{h - x_n} \sqrt{1 + x_2'^2 + \frac{x_2'^2}{a_3^2} + \frac{x_2'^2}{a_4^2} \dots + \frac{x_2'^2}{a_{n-1}^2} + x_n'^2}.$$

$$\text{Или} \quad 1 + g_{n-1} x_2'^2 = C_{n-1} \sqrt{h - x_n} \sqrt{1 + g_{n-1} x_2'^2 + x_n'^2}, \quad (23)$$

$$\text{где} \quad g_{n-1} = 1 + \frac{1}{a_3^2} + \frac{1}{a_4^2} \dots + \frac{1}{a_{n-1}^2} \geq 1.$$

Учитывая верхнее уравнение системы (19), приходим к замкнутой системе из двух уравнений, а именно

$$\begin{cases} x'_2 = C_1 \sqrt{h - x_n} \sqrt{1 + g_{n-1} x_2'^2 + x_n'^2}, \\ 1 + g_{n-1} x_2'^2 = C_{n-1} \sqrt{h - x_n} \sqrt{1 + g_{n-1} x_2'^2 + x_n'^2}. \end{cases} \quad (24)$$

Решение этой системы точно такое же, как и системы (5). Поэтому, делая по-членно уравнения друг на друга, будем иметь

$$\frac{x_2'}{1 + g_{n-1}x_2'^2} = \frac{C_1}{C_{n-1}} = \frac{1}{p_{n-1}}.$$

$$\text{Откуда} \quad x_2 = A_{n-1}x_1 + B, \quad (25)$$

где B – константа интегрирования, а новый коэффициент

$$A_{n-1} = \frac{p_{n-1} - \sqrt{p_{n-1}^2 - 4g_{n-1}}}{2g_{n-1}}. \quad (26)$$

Поэтому из нижнего уравнения системы (24) получим

$$1 + g_{n-1}A_{n-1}^2 = C_1\sqrt{h - x_n}\sqrt{1 + g_{n-1}A_{n-1}^2 + x_n'^2}. \quad (27)$$

Совершая здесь подстановку

$$x_n' = \sqrt{1 + g_{n-1}A_{n-1}^2} \operatorname{tg} \theta, \quad (28)$$

находим

$$x_n = h - \frac{(1 + g_{n-1}A_{n-1}^2) \cos^2 \theta}{C_1^2}. \quad (29)$$

Поэтому согласно (28), получаем

$$x_1 = \frac{\sqrt{1 + g_{n-1}A_{n-1}^2}}{C_1^2} \left(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) + C, \quad (30)$$

где C – константа интегрирования.

И, значит, согласно (25) из (21) следует, что

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{A_{n-1}}{a_1} x_1 + \frac{B}{a_1}, \\ x_4 &= \frac{A_{n-1}}{a_2} x_1 + \frac{B}{a_2}, \\ x_5 &= \frac{A_{n-1}}{a_3} x_1 + \frac{B}{a_3}, \\ &\dots\dots\dots, \\ x_{n-1} &= \frac{A_{n-1}}{a_{n-3}} x_1 + \frac{B}{a_{n-3}}. \end{aligned} \quad (31)$$

Решения (29) – (31) отвечают на вопрос о форме брахистохроны в многомерном случае.

Заключение

В заключение отметим:

1. Дано решение задачи о брахистохроне в n -мерном случае и, как пример, приводится подробное решение для трехмерного случая.

2. Отмечено принципиальное отличие многомерной брахистохроны от классической двухмерной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гладков С.О., Богданова С.Б. Геометрический фазовый переход в задаче о брахистохроне // Ученые записки физического факультета МГУ. 2016. № 1. С. 161101-1-5.
2. Гладков С.О. О траектории движения тела, входящего в жидкость под произвольным углом // Ученые записки физического факультета МГУ. 2016. № 4. С. 164002-1-5.
3. Гладков С.О., Богданова С.Б. К теории движения тел с переменной массой // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 65. С. 83–91. DOI: 10.17223/19988621/65/6.
4. Denman Harry H. Remarks on brachistochrone – tautochrone problems // Amer. J. Phys. 1985. V. 53. P. 224–227.
5. Scarpello G.M. and Ritelli D. Planar brachistochrone of a particle attracted in vacuo by an infinite rod // New Zealand J. Math. 2007. V. 36. P. 241–252.
6. Goldstein H. and Bender C. Relativistic brachistochrone // J. Math. Phys. 1986. V. 27. N 2. P. 507–511.
7. Scarpello G.M. and Ritelli D. Relativistic brachistochrones under electric or gravitational uniform fields // Z. Angew. Math. Mech. 2006. V. 86. No. 9. P. 736–743.
8. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.
9. Гладков С.О., Богданова С.Б. К теории движения шарика по вращающейся брахистохроне с учетом сил трения // Ученые записки физического факультета МГУ. 2017. С. 172101-1-6.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Физматлит, 2004. 210 с.

Статья поступила 14.12.2019

Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2020) TO THE THEORY OF n -DIMENSIONAL BRACHISTOCHRONE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 68. pp. 53–60

DOI 10.17223/19988621/68/5

Keywords: three-dimensional brachistochrone, n -dimensional case, functional, extremal.

In this paper, a solution to the problem of the motion of a brachistochrone in the n -dimensional Euclidean space is firstly presented. The very first formulation of the problem in a two-dimensional case was proposed by J. Bernoulli in 1696. It represented an analytical description of the trajectory for the fastest rolling down under gravitational force only. Thereafter, a number of problems devoted to a brachistochrone were considered with account for gravitational forces, dry and viscous drag forces, and a possible variation in the mass of a moving body.

Analytical solution to the formulated problem is presented in details by an example of the body moving along a brachistochrone in three-dimensional Cartesian coordinates. The obtained parametric solution is confirmed by a graphical interpretation of the calculated result. The formulated problem is solved for an ideal case when drag forces are neglected. If dry and viscous friction forces are taken into account, the plane shape of the brachistochrone remains the same, while the analysis of the solution becomes more complicated. When, for example, a side air flow is taken into account, the plane curve is replaced by a three-dimensional brachistochrone.

Sergey O. GLADKOV (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation). E-mail: sglad51@mail.ru

Sofiya B. BOGDANOVA (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation). E-mail: sonjaf@list.ru

REFERENCES

1. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2016) Geometricheskiiy fazovyy perekhod v zadache o brakhistokhrone [Geometrical phase transition in a problem on brachistochrone]. *Uchenye zapiski fizicheskogo fakul'teta Moskovskogo universiteta – Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*. 1. pp. 161101-1–5.
2. Gladkov S.O. (2016) O traektorii dvizheniya tela, vkhodyashchego v zhidkost' pod proizvol'nym uglom [On the trajectory of the body entering the fluid at an arbitrary angle]. *Uchenye zapiski fizicheskogo fakul'teta Moskovskogo universiteta – Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*. 4. pp. 164002-1–5.
3. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2020) K teorii dvizheniya tel s peremennoy massoy [To the theory of motion of bodies with variable mass]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 65. pp. 83–91. DOI: 10.17223/19988621/65/6.
4. Denman H.H. (1985) Remarks on brachistochrone – tautochrone problems. *American Journal of Physics*. 53. pp. 224–227.
5. Scarpello G.M., Ritelli D. (2007) Planar brachistochrone of a particle attracted in vacuo by an infinite rod. *New Zealand Journal of Mathematics*. 36. pp. 241–252.
6. Goldstein H., Bender C. (1986) Relativistic brachistochrone. *Journal of Mathematical Physics*. 27(2). pp. 507–511.
7. Scarpello G.M., Ritelli D. (2006) Relativistic brachistochrones under electric or gravitational uniform fields. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 86(9). pp. 736–743.
8. Elsholz L.E. (1969) *Differentsial'nye uravneniya i variatsionnoe ischislenie* [Differential equations and calculus of variations]. Moscow: Nauka.
9. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2017) K teorii dvizheniya sharika po vrashchayushcheysya brakhistokhrone s uchetom sil treniya [To the question of analysis equations for moving due to the rotating of the plane brachistohron]. *Uchenye zapiski fizicheskogo fakul'teta Moskovskogo universiteta – Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*. 2. pp. 172101-1–6.
10. Landau L., Lifshitz E. (1976) *Mechanics*. Oxford: Butterworth-Heinemann.

Received: December 14, 2019

УДК 534.647

DOI 10.17223/19988621/68/6

**В.С. Дмитриев, Л.Л. Миньков, Т.Г. Костюченко,
В.В. Дердященко, Д.С. Панфилов**

ВИБРОАКТИВНОСТЬ МАЛОШУМНЫХ ВЕНТИЛЯТОРОВ¹

Малошумный вентилятор как многопараметрическая электромеханическая система подвергается целому комплексу периодических механических воздействий: статических, динамических, электромагнитных, акустических. Представлено сравнение качества разработок малошумных вентиляторов в зависимости от выбранного типа сопротивления. Аналитически и практически показана эффективность демпфирования колебаний механической системы (малошумного вентилятора) в зависимости от вида применяемого момента сопротивления. Рассмотрены технические обоснованные направления совершенствования (модернизации) этих вентиляторов на основе аналитических и технических решений, обеспечивающих дальнейшее повышение качества малошумных вентиляторов.

Ключевые слова: *малошумный вентилятор, вибрация, амплитуда, колебания, крыльчатка.*

В настоящее время обеспечение экологических условий для жизнедеятельности человека становится необходимым для всех сфер его обитания: от подводной среды до космического пространства [1–2].

Кроме того, создание экологических условий в рабочей среде и среде обитания человека становится одной из главных технологических задач, и постепенно она превращается, в определенных случаях, в научно-техническую проблему [3–7].

Шум в технических системах возникает вследствие упругих колебаний как механизма в целом, так и отдельных его модулей. Причиной возникновения колебаний служит наличие возбуждающих сил различной природы: механических, гидродинамических, электромагнитных, акустических [8–11].

Имеется также целый класс механизмов, подверженных вибрациям вследствие колебаний рабочей среды, вызванными различными протекающими в механизмах гидродинамическими и аэродинамическими процессами, такими как вихревые процессы в потоке рабочей среды, колебание среды, вызванное вращением лопастных колес и т.п.

Малошумный вентилятор, будучи неотъемлемой частью системы жизнеобеспечения, является электромеханической системой, содержащей элементы массы и упругости, поэтому при действии на нее периодических сил от внутреннего источника (электродвигателя) в условиях эксплуатации он находится в вибрационном состоянии.

Упругие и инерционные силы, существующие в сплошной среде, окружающей вентилятор, вызывают одно за другим сжатие и разряжение окружающей среды (колебания), которые распространяются от источника возмущения с определенной скоростью и эти колебания воспринимаются как звук.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 0721-2020-0028

Современный малошумный вентилятор, состоящий из установленного в звукопоглощающем корпусе электродвигателя с закрепленной на его валу крыльчаткой, является многопараметрической электромеханической системой, которая содержит несколько групп эксплуатационных параметров различной физической природы: механические статического и динамического типа, электромагнитные и акустические. Поэтому протекание процесса «вибрация – шум» в рабочей среде является довольно сложным в понимании проявления взаимосвязи таких понятий, как сопротивление массы, сопротивление упругости и сопротивление сил трения. К тому же именно колебательная скорость, а не колебательное смещение (амплитуда) определяет величину энергии, излучаемой при колебаниях, и степень звукоизоляции конструкции.

В работе показаны аналитические и технические решения для улучшения акустической характеристики вентилятора. Предложена концепция виброзвукопоглощающей конструкции корпуса вентилятора.

Анализ виброактивности вентилятора

Рассмотрим модель вентилятора массой m_1 , состоящего из ротора 1, статора с корпусом 2, который крепится к неподвижному основанию 3 с помощью пружин 4 жесткостью $k/2$ и демпфера 5 с коэффициентом сопротивления μ , рис. 1. Для удобства проведения анализа изменения амплитуды перемещения (реакции технической системы на возбуждающие силы) считаем, что механическая система может перемещаться только в направлении X .

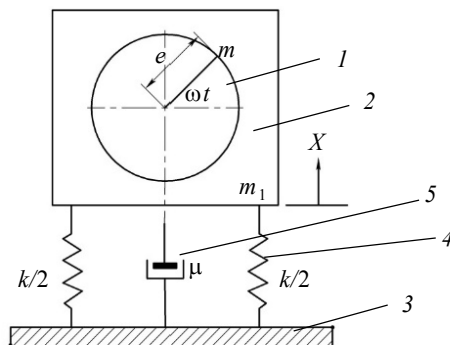


Рис. 1. Модель вентилятора: 1 – ротор, 2 – статор с корпусом, 3 – неподвижное основание, 4 – пружина, 5 – демпфер

Fig. 1. Fan model: 1 – rotor, 2 – stator with housing, 3 – fixed base, 4 – spring, and 5 – damper

Пусть ротор вентилятора радиуса e , вращающийся с угловой скоростью ω вокруг оси O , имеет эксцентричную массу m , которая сосредоточена на расстоянии e от центра вращения ротора. Тогда эта масса будет совершать в вертикальном направлении относительно центра вращения ротора перемещения по закону $e \cdot \sin \omega t$, а сила инерции, действующая на эксцентричную массу m , будет равна $F_a \sin \omega t$, где $F_a = me\omega^2$. Уравнение движения эксцентричной массы относительно неподвижного основания (3) запишется в виде

$$m_1 \ddot{x} + \mu \dot{x} + kx = F_a \sin \omega t \quad (1)$$

$$\text{или} \quad \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_c^2 x = f_a \sin \omega t, \quad (2)$$

где $\lambda = \mu/(2m_1)$ – коэффициент демпфирования, $\omega_c = \sqrt{k/m_1}$ – собственная частота вентилятора как системы, $f_a = F_a/m_1$ – удельная сила.

Известно, что решение этого уравнения для случая $\omega_c > \lambda$ представляет собой суперпозицию общего решения соответствующего однородного уравнения $x_o = Ae^{-\lambda t} \sin(\omega_1 t + \alpha)$, где $\omega_1 = \sqrt{\omega_c^2 - \lambda^2}$, и частного решения, которое будем искать в комплексной форме [12]

$$x_u = X_a e^{j\omega t}. \quad (3)$$

Для этого уравнение (2) перепишем в виде

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_c^2 x = f_a e^{j\omega t}. \quad (4)$$

После подстановки (3) в (4) получим выражение для комплексной амплитуды колебаний эксцентричной массы:

$$X_a = \frac{f_a}{\omega_c^2 - \omega^2 + 2\lambda\omega j}. \quad (5)$$

Представив (5) в виде $X_a = be^{j\varphi}$, имеем

$$b = \frac{f_a}{\sqrt{(\omega_c^2 - \omega^2)^2 + (2\lambda\omega)^2}}, \quad \varphi = -\arctg\left(\frac{2\lambda\omega}{\omega_c^2 - \omega^2}\right). \quad (6)$$

Тогда общее решение уравнения (2) принимает вид

$$x = Ae^{-\lambda t} \sin(\omega_1 t + \alpha) + b \sin(\omega t + \varphi). \quad (7)$$

Видно, что при $t \rightarrow \infty$ первое слагаемое в (7) стремится к нулю и установившееся движение системы будет описываться частным решением $x = b \sin(\omega t + \varphi)$.

Введем безразмерные переменные: частоту $r = \omega/\omega_c$, коэффициент демпфирования $\xi = \lambda/\omega_c$ и амплитуду вынужденных колебаний $\Delta = b/e$. Тогда выражение для амплитуды вынужденных колебаний (6) принимает вид

$$\Delta = \frac{m}{m_1} \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}. \quad (8)$$

Из соотношения (8) видно, что амплитуду колебаний эксцентричной массы можно уменьшить за счет: 1) увеличения массы вентилятора; 2) уменьшения частоты вращения ротора; 3) увеличения коэффициента демпфирования; 4) изменения разницы собственных и вынужденных круговых частот.

Поскольку величину энергии, излучаемой при колебаниях, определяет скорость колебания, то имеет смысл проанализировать выражение для амплитуды скорости вынужденных колебаний рассматриваемой механической системы. Из зависимости (3) следует, что амплитуда скорости колебания системы $\dot{X}_a$ равна $X_a j\omega$. Используя (5), получим

$$\dot{X}_a = \frac{F_a}{j(\omega m_1 - k/\omega) + 2\lambda m_1}. \quad (9)$$

Знаменатель в соотношении (9) является полным механическим сопротивлением системы.

Полное механическое сопротивление вентилятора складывается:

1) из механического сопротивления массы, которое пропорционально частоте вращения ротора вентилятора и массе вентилятора:

$$Z_m = j\omega m_1;$$

2) механического сопротивления упругого элемента системы, которое обратно пропорционально частоте вращения ротора вентилятора и прямо пропорционально коэффициенту жесткости пружин:

$$Z_k = -j \frac{k}{\omega};$$

3) механического сопротивления сил трения, которое не зависит от частоты вращения ротора вентилятора, пропорционально коэффициенту демпфирования и массе вентилятора

$$Z_\lambda = 2\lambda m_1.$$

Как видно из приведенных соотношений для сопротивлений элементов системы, лишь при действии силы трения сдвиг фазы между силой и амплитудой скорости колебания отсутствует. Механическое сопротивление массы обуславливает сдвиг по фазе на величину 90° , а действие сил упругости – сдвиг по фазе на величину -90° .

Практическая эффективность сопротивления при демпфировании колебаний

В технике с точки зрения максимального эффекта вибропоглощения используют различного типа демпферы: воздушные, жидкостные, устройства с использованием упругих свойств материала.

В отдельных специальных случаях возможен эффект локального виброгашения массой, например, ослабление поперечной звуковой вибрации протяженной пластины отдельно расположенной массой, которая обеспечивает локальное ослабление колебаний в точке установки массы.

Из вышеизложенного следует основополагающий для практики проектирования малошумных вентиляторов вывод. Только сопротивление трения вызывает необратимые потери энергии и является максимально эффективным способом снижения виброактивности. Поэтому его называют активным сопротивлением, а сопротивление массы и упругости вызывает лишь явление сдвига фазы между силой и скоростью, но не потерю энергии и поэтому являются реактивными.

Практическое подтверждение данного вывода об эффективности вибродемпфирования различного вида сопротивлениями вынужденных колебаний в вентиляторах проиллюстрировано на примере малошумных вентиляторов (см. таблицу).

В таблице приведены основные эксплуатационные характеристики малошумных вентиляторов, выпускаемых ведущими фирмами. Сравнение вентиляторов типа РСС2 с другими, представленными в таблице, показывает существенно худшие эксплуатационные характеристики у РСС2, в которых для снижения виброактивности используется реактивное сопротивление – сопротивление массы.

Основные эксплуатационные характеристики вентиляторов

Название	Q , м ³ /ч	P , кВт	m , кг	A , дБ	n , об/мин	Габариты, мм	Страна
PCC2-2,5/25	250	0.5	60	не публ.	2890	352×391×457	Россия
VENT-100	290	0.075	3	47	2500	Ø243×194	Испания
TD 200/120	330	0.027	5	23	2450	250×200×460	Испания
PCC2-10/10	1000	0.55	40	не публ.	3000	508×393×404	Россия
VENT-200	1000	0.17	5	52	2600	Ø333×223	Испания
TD 1000/200	1300	0.13	8.7	21	2450	327×264×568	Испания
PCC2-25/25	2500	3.35	230	не публ.	2960	595×530×570	Россия
KD315XL1	2770	0.27	14.2	52	2730	Ø455×484	Швеция
TD 4000/355	3750	0.4	19	41	1360	451×426×474	Испания
PCC2-63/25	6300	8	203	не публ.	3000	825×646×682	Россия
KD500M3	7848	1.24	32	65	1315	Ø500×699	Швеция
PCC2-100/16	10000	11	268	не публ.	1500	906×1002×1007	Россия
НСВВ/4-560/Н	13400	1.43	22	70	1433	Ø710×710	Испания
PCC2-160/16	16000	22	425	не публ.	1500	1300×1124×1265	Россия
НСВВ/4-630/Н	16720	1.88	25	71	1360	Ø800×800	Испания

Приведенные примеры конструкций маломощных вентиляторов разделены в таблице на 6 групп по производительности (графа Q): от 250 до 330 м³/ч; от 1000 до 1300 м³/ч; от 2500 до 3750 м³/ч; от 6300 до 7848 м³/ч; от 10000 до 13400 м³/ч и от 16000 до 16720 м³/ч. Сравнение эксплуатационных характеристик вентиляторов внутри этих групп (с точки зрения использования типа сопротивления) показывает, что высокая масса вентилятора (графа m) ведет, с одной стороны, к высокой потребляемой мощности (графа P), это отличие может достигать целого порядка, и с другой стороны – к увеличению габаритов изделия, до 100–200 мм на одну сторону при примерном равенстве рабочих оборотов электродвигателей.

Акустические колебания и вибрации

Как отмечено во введении, вибрационный режим вентилятора порождает звук различной интенсивности. Поэтому одной из краеугольных задач является снижение виброактивности механической системы (вентилятора). При проведении расчетов параметров маломощного вентилятора их оптимизация позволяет значительно снизить уровень шума расчетным путем, но при этом в маломощных вентиляторах большой производительности (десятки тысяч м³/ч) уровень шумов для закрытых помещений может оказаться достаточно высоким с точки зрения экологических и медицинских требований. Поэтому на этапе разработки конструкторской документации необходимо реализовывать различные технические решения, обеспечивающие максимальное шумопоглощение.

Для решения этих вопросов, во-первых, применена канальная схема маломощных вентиляторов, корпус которых с внутренней стороны выложен звукопоглощающим материалом; во-вторых, встроено спрямляющее устройство для устранения турбулентности в воздушном потоке, которая повышает уровень звукового давления; в-третьих, также для снижения звукового давления применена крыльчатка с лопастями специальной формы; в-четвертых, в конструкцию корпуса маломощного вентилятора встроены жидкостной демпфер для снижения уровня вибрации.

Проведенный анализ всего многообразия существующих конструкций вентиляторов показал, что различные типы вентиляторов (канальный, приточно-вытяжной, улитка, крышной, центробежный, потолочный и т.п.), если взять за основу тип аэродинамической схемы, можно свести к двум основополагающим модификациям – осевой и радиальной. При таком подходе упрощается комплексное решение как технической, так и экономической задач. Если сравнить конструкторско-аэродинамические схемы малошумных вентиляторов – осевого прямооточного и радиального прямооточного с круглым корпусом, то отчетливо видно их подобие (рис. 2 и 3).

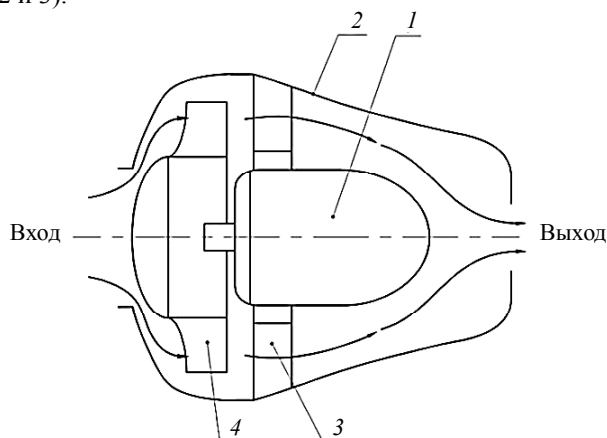


Рис. 2. Схема движения воздуха в осевом вентиляторе:
1 – электродвигатель, 2 – корпус, 3 – кронштейн крепления электродвигателя, 4 – крыльчатка

Fig. 2. Air flow diagram in the axial fan: 1 – electric motor, 2 – housing, 3 – motor mounting bracket, and 4 – impeller

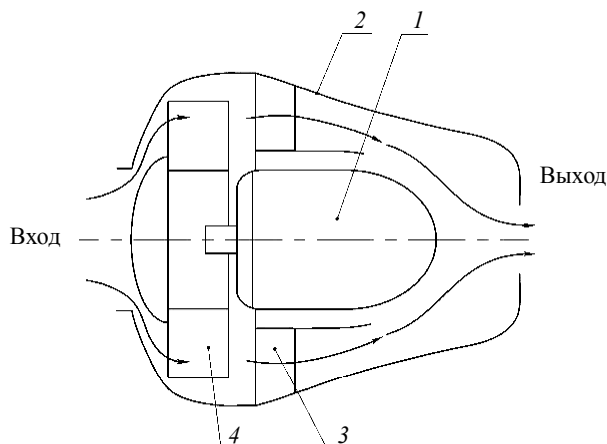


Рис. 3. Схема движения воздуха в радиальном вентиляторе:
1 – электродвигатель, 2 – корпус, 3 – спрямляющий блок и кронштейн крепления электродвигателя, 4 – крыльчатка

Fig. 3. Air flow diagram in the radial fan: 1 – electric motor, 2 – housing, 3 – straightening unit and motor mounting bracket, and 4 – impeller

В рассматриваемых схемах рационально обеспечивается движение воздушного потока с сохранением аэродинамических характеристик. Техническая идея прямоточного вентилятора (рис. 4) в настоящее время уже не является оригинальной. Такая схема в зарубежных странах уже используется, а в России пока практически неизвестна (по публикуемым материалам), хотя исследования в этом направлении в СССР проводились в 50-х годах 20 века. В США такие вентиляторы называют трубными вентиляторами, их выпускают фирмы TwinCity, Penn-Barry, Greenheck, Soler&Palan. Вентиляторы этих фирм обладают высокими аэродинамическими характеристиками и КПД. На такой аэродинамической схеме хорошо реализуется параметрический ряд, в основу которого положена производительность вентилятора.

В целях унификации конструкции осевого и радиального вентиляторов предлагается следующее техническое решение. Так как лопастное колесо радиального вентилятора является, по сути, центробежным, то необходимо учитывать закручивание воздуха по длине канала вентилятора. Это явление уменьшит массовый расход воздуха и снизит скорость потока, что отрицательно скажется на рабочих характеристиках электровентилятора. К тому же появятся дополнительные шумы из-за завихрения потоков, что может привести к срыву потока. Поэтому необходимо было провести моделирование потока воздуха с целью оптимизации его сглаживания.

Для анализа движения потока использован модуль Flow simulation CAD-системы SolidWorks. На рис. 4 показаны линии закрученного потока воздуха в схеме радиального вентилятора без спрямляющего блока.

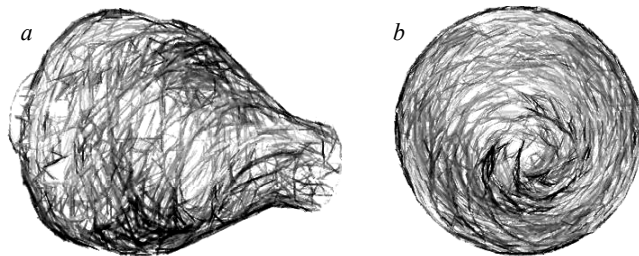


Рис. 4. Симуляция движения воздуха в радиальном вентиляторе
Fig. 4. Simulation of the air flow in the radial fan

Для того чтобы избежать закручивания потока воздуха, необходимо плавно направить поток по прямой. В этом и заключается функциональная роль спрямляющих лопаток. С помощью направляющих лопаток специальной формы хаотичное движение воздушных масс (турбулентное, рис. 4) преобразуется в прямолинейное ламинарное течение (рис. 6).

На рис. 5 показана конструкция со спрямляющими лопатками воздуховода.

На рис. 6 представлена симуляция потока в вентиляторе со спрямляющими лопатками. Форма лопаток создает направление движения воздуха от крыльчатки к выходу потока воздуха. Технически в спрямляющих лопатках силы трения устраняют закручивание потоков воздуха и одновременно снижают уровень шума. Также данное техническое решение позволяет получить высокую степень унификации конструктива за счет использования однотипных корпусов для осевых и радиальных вентиляторов.

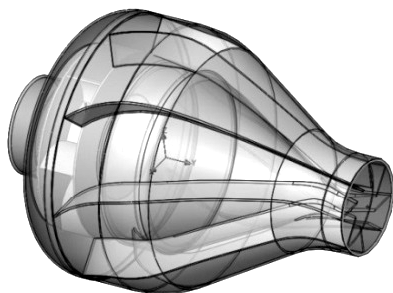


Рис. 5. Радиальный вентилятор со спрямляющими лопатками

Fig. 5. Radial fan with straightening vanes

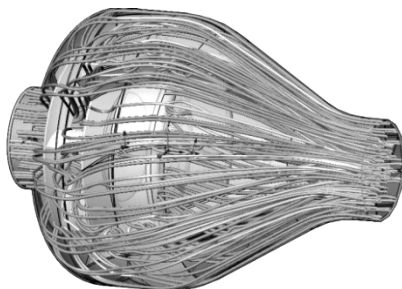


Рис. 6. Симуляция потока воздуха в радиальном вентиляторе со спрямляющими лопатками

Fig. 6. Simulation of the air flow in the radial fan with straightening vanes

На рис. 7 приведены 3D-модели осевого и радиального вентиляторов с круглым корпусом. Такая форма корпуса обусловлена также технологическими соображениями.

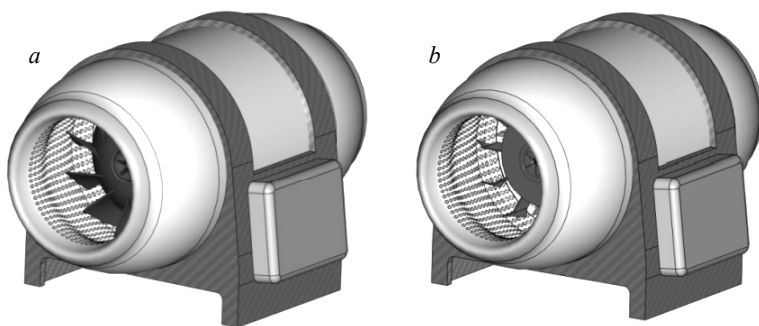


Рис. 7. 3D-модели: *a* – осевого и *b* – радиального канальных вентиляторов

Fig. 7. 3D models of the (*a*) axial and (*b*) radial duct fans

В рассматриваемых вентиляторах электродвигатели с крыльчаткой находятся в специальном шумоизолированном корпусе (типа «сэндвич»), состоящем из скрепленных звуко- и вибропоглощающих слоев, которые обеспечивают их малозумную работу.

На рис. 8 представлена обобщенная структурная схема унификации осевых и радиальных вентиляторов. Здесь наглядно видна высокая степень унификации функциональных блоков вентиляторов, что позволяет организовать производство большой серийности.



Рис. 8. Обобщенная структурная схема унификации осевого и радиального вентиляторов
Fig. 8. Generalized block diagram of unification of the axial and radial fans

Заключение

Исходя из сравнительного анализа эксплуатационных характеристик малошумных вентиляторов (см. таблицу), можно сделать заключение, что демпфирование виброактивности вентиляторов активным элементом сопротивления является единственным технически обоснованным способом снижения их уровня рабочего шума в процессе эксплуатации.

В расчетном этапе при проектировании малошумных вентиляторов должно быть предусмотрено максимально возможная разница частот собственных колебаний и частот возмущающих сил (8).

Предложенное технико-экономическое решение для обеспечения максимальной степени унификации осевых и радиальных малошумных вентиляторов существенно повышает как качество, так и серийность их производства и соответственно повышает их конкурентоспособность за счет снижения себестоимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. СН 2.2.4/2.1.8.562-96. Шум на рабочих местах, в помещениях жилых, общественных зданий и на территории жилой застройки. Санитарные нормы. URL: <https://dikipedia.ru/document/3982778>.
2. Гусев В.П. Средства снижения воздушного и структурного шума систем вентиляции, кондиционирования и холодоснабжения // АВОК. 2005. № 4. С. 86–92.
3. Кочетов О.С., Булаев В.А., Гапоненко А.В. Расчет эффективности снижения аэродинамического шума вентиляционных систем // Сборник статей Международной научно-практической конференции «Роль науки в развитии общества», Уфа, 2014 г. Уфа: РИО МЦИИ ОМЕГА САЙНС, 2014. С. 21–25.
4. ГОСТ 23941–2002. Шум машин. Методы определения шумовых характеристик. Общие требования. URL: <https://dikipedia.ru/document/5164315>.
5. Караджи В.Г., Московко Ю.Г. О спектрах шума вентилятора // Инженерные системы. АВОК-Северо-Запад. 2006. № 2. С. 34–41.
6. Кочетов О.С., Гетия И.Г., Гетия С.И., Леонтьева И.Н. Параметры аэродинамического шума вентиляционных систем // Сборник научных трудов 4-й Международной научно-практической конференции «Техника и технологии: Пути инновационного развития», Курск, 2014 г.. Курск: Юго-Западный государственный университет, 2014. С. 151–156.

7. Гусев В.П. Акустический расчет как основа для проектирования малошумной системы вентиляции (кондиционирования) // АВОК. 2006. № 6. С. 60 – 66.
8. Веретина И.А., Гончаренко И.А., Калашникова Н.К., Клименкова О.И., Руднева Е.А. Снижение шума вентиляционными глушителями // Материалы научно-технического семинара «Актуальные проблемы защиты от шума зданий и территорий застройки». Севастополь, 2007. С. 225–227.
9. Клюкин И.И. Борьба с шумом и звуковой вибрацией на судах. Л.: Судостроение, 1971. 416 с.
10. Дмитриев В.С., Иванова В.С. Основы теории колебаний и моделирование колебательных систем в технике. Томск: Изд-во ТПУ, 2012. 215 с.
11. Магнус. К. Колебания. Введение в исследование колебательных систем. М.: Мир, 1982. 304 с.
12. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Наука, 1965. 204 с.

Статья поступила 16.03.2020

Dmitriev V.S., Kostyuchenko T.G., Minkov L.L., Derdiyashchenko V.V., Panfilov D.S. (2020) VIBROACTIVITY OF LOW-NOISE FANS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 68. pp. 61–71

DOI 10.17223/19988621/68/6

Keywords: low-noise fan, vibration, amplitude, oscillations, impeller.

Low-noise fans are widely used in the sphere of human life for sanitary and technological purposes. Creation of low-noise fans is currently an advanced scientific and technical area. In some fields of their application, reduced vibrations and noises are of paramount importance not only in terms of sanitation and health, but also from a scientific point of view.

This work presents a comparison of the quality of low-noise fan development depending on the selected resistance type. The efficiency of the damping of mechanical system (a low-noise fan) vibrations according to the type of resistance moment used is confirmed analytically and practically.

Nowadays, a number of fan types implemented in hundreds of designs have been developed and are in service. In this work, the whole variety of the produced nomenclature of low-noise fans is reduced to two basic types – axial and radial. The paper reports that to ensure minimum noise in the operating mode of the low-noise fans presented in the work, a wideband vibration damper is needed as a required functional unit, and the walls of the fan housing should be sandwich-like with layers made of sound absorbing, sound insulating, and vibration damping materials.

Financial support. This work was carried out with financial support from the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (State assignment No. 0721-2020-0028)

Victor S. DMITRIEV (Doctor of Technical Sciences, Professor, Division for Electronic Engineering, Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: dmitriev@tpu.ru

Tamara G. KOSTYUCHENKO (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Tutor of Children's Technopark "Quantorium", Tomsk, Russian Federation). E-mail: ktg@tpu.ru

Leonid L. MINKOV (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematical Physics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: lminkov@ftf.tsu.ru

Vladimir V. DERDIYASHCHENKO (Head of the Department, Research and Production Center Polyus, Tomsk, Russian Federation). E-mail: derdiyashchenkvv@mail.ru

Dmitriy S. PANFILOV (Design Engineer, Scientific Production Center Polyus, Tomsk, Russian Federation). E-mail: panfilovds8@gmail.com

REFERENCES

1. SN 2.2.4/2.1.8.562-96. *Shum na rabochikh mestakh, v pomeshcheniyakh zhilykh, obshchestvennykh zdaniy i na territorii zhiloy zastroyki. Sanitarnye normy* [Noise in workplaces, accommodations, public buildings, and residential areas. Sanitary standards]. Access mode: <https://dokipedia.ru/document/3982778>.
2. Gusev V.P. (2005) Sredstva snizheniya vozdušnogo i strukturnogo shuma sistem ventilyatsii, konditsionirovaniya i kholodosnabzheniya [Means for reducing air and structural noise of ventilation, air conditioning, and cooling systems]. *Ventilyatsiya, otoplenie, konditsionirovanie vozdukha, teplosnabzhenie i sroitel'naya teplofizika – Engineers for Heating, Ventilation, Air-Conditioning, Heat Supply and Building Thermal Physics*. 4. pp. 86–92.
3. Kochetov O.S., Bulaev V.A., Gaponenko A.V. (2014) Raschet effektivnosti snizheniya aerodinamicheskogo shuma ventilyatsionnykh sistem [Calculation of the efficiency of reducing aerodynamic noise in ventilation systems]. *Proceedings of the International Scientific-Practical Conference «The Role of Science in the Development of Society»*, Ufa, 2014. pp. 21–25.
4. GOST 23941-2002. *Shum mashin. Metody opredeleniya shumovykh kharakteristik. Obshchie trebovaniya* [Machinery noise. Methods for determining of noise characteristics. General requirements]. Access mode: <https://dokipedia.ru/document/5164315>.
5. Karadzhi V.G., Moskovko Yu.G. (2006) O spektrakh shuma ventilyatora [On fan noise spectra]. *Inzhenernye sistemy. AVOK Severo-Zapad*. 2. pp. 34–41.
6. Kochetov O.S., Getiya I.G., Getiya S.I., Leont'eva I.N. (2014) Parametry aerodinamicheskogo shuma ventilyatsionnykh sistem [Parameters of aerodynamic noise in ventilation systems]. *Proceedings of the 4th International Scientific-Practical Conference «Technics and Technologies: Ways of Innovative Development»*, Kursk, 2014. pp. 151–156.
7. Gusev V.P. (2006) Akusticheskiy raschet kak osnova dlya proektirovaniya maloshumnoy sistemy ventilyatsii (konditsionirovaniya) [Acoustic calculation as a basis for designing of low-noise ventilation (air conditioning) system]. *Ventilyatsiya, otoplenie, konditsionirovanie vozdukha, teplosnabzhenie i sroitel'naya teplofizika – Engineers for Heating, Ventilation, Air-Conditioning, Heat Supply and Building Thermal Physics*. 6. pp. 60–66.
8. Veretina I.A., Goncharenko I.A., Kalashnikova N.K., Klimenkova O.I., Rudneva E.A. (2007) Snizhenie shuma ventilyatsionnymi glushitelyami. [Noise reduction by ventilation silencers]. *Proceedings of the Scientific and Technical Seminar «Advanced Problems of Noise Protection of Buildings and Built-up Areas»*, Sevastopol, 2007. pp. 225–227.
9. Klyukin I.I. (1971) *Bor'ba s shumom i zvukovoy vibratsiey na sudakh* [Suppression of noise and sound vibration on ships]. Leningrad: Sudostroenie.
10. Dmitriev V.S., Ivanova V.S. (2012) *Osnovy teorii kolebaniy i modelirovanie kolebatel'nykh sistem v tekhnike* [Fundamentals of the theory of oscillations and modeling of oscillatory systems in engineering]. Tomsk: TPU.
11. Magnus K. (1982) *Kolebaniya. Vvedenie v issledovanie kolebatel'nykh sistem* [Oscillations. Introduction to the study of oscillatory systems]. Moscow: Mir.
12. Landau L.D., Lifshitz E.M. (1976) *Course of Theoretical Physics: Vol. 1, Mechanics*. Amsterdam: Elsevier Butterworth-Heinemann.

Received: March 16, 2020

УДК: 533.17, 519.62

DOI 10.17223/19988621/68/7

А.М. Кагенов, К.В. Костюшин, К.Л. Алигасанова, В.А. Котоногов**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
СОСТАВНОЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ СТРУИ С ПРЕГРАДОЙ¹**

Представлены результаты математического моделирования взаимодействия составных сверхзвуковых струй с преградой. Исследовано влияние расстояния между соплами на ударно-волновую структуру течения газа для чисел Маха на срезе сопел 4.5. Расстояние варьировалось от 0.1 до 4 диаметров среза сопла. Получено, что с увеличением расстояния между соплами ударно-волновая структура течения существенно перестраивается, максимум давления на преграде возрастает, затем убывает и наблюдается переход от стационарного режима к автоколебательному.

Ключевые слова: *составная сверхзвуковая струя, многоблочная сверхзвуковая струя, ударно-волновая структура, математическое моделирование, метод Годунова, OpenFOAM.*

В настоящее время практический интерес представляет изучение сверхзвукового взаимодействия струй ($M > 3$ на срезе сопла) с преградами для задач старта и посадки космических аппаратов. Взаимодействию многоблочных и составных струй с преградами посвящен ряд экспериментальных и теоретических работ. В работе [1] представлены результаты расчетно-экспериментальных исследований взаимодействия 8 и 16 струй с перпендикулярно и наклонно расположенной поверхностью посадки возвращаемого модуля. Показаны визуальные структуры течения и результаты численных расчетов, которые согласуются с экспериментальными данными. Экспериментальные исследования многоструйных взаимодействий с плоской преградой приведены в работе [2]. Рассмотрены натекания одной, двух и четырех струй с числами Маха на срезе сопла от 1 до 2.5. Описан характер течения при различных конфигурациях составных струй. Результаты экспериментальных исследований приведены в работах [3, 4] в виде теневых фотографий истечения газовых струй из односоплового блока и многосопловых устройств. Показаны особенности истечения двух и четырех струй из многосопловых устройств, число Маха варьировалось от 1 до 2.5. Цикл работ расчетно-экспериментального исследования взаимодействия одиночных и многоблочных сверхзвуковых турбулентных струй с преградой проведен в работах [5, 8]. Данные исследования посвящены изучению процессов, протекающих при старте изделий ракетно-космической техники. Показаны различные особенности физических процессов, сопровождающиеся истечением струй продуктов сгорания ракетных топлив. Математическая модель состоит из трехмерных уравнений Навье – Стокса, осредненных по Рейнольдсу, совместно с моделью турбулентности Ментера SST. Моделирование выполнялось с использованием пакета прикладных программ ЛОГОС. Расчет взаимодействия недорасширенных сверхзвуковых струй, исте-

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Томской области в рамках научного проекта № 19-41-703005.

кающих из многосопловой компоновки проведен авторами [9]. Представлены результаты для трех-, четырех- и шестисопловой компоновки. Интегрирование системы уравнений, описывающих пространственные сверхзвуковые течения, выполнено с помощью явной монотонной конечно-разностной схемы сквозного счета первого порядка точности на гладких решениях. В работах зарубежных авторов [10–13] приведены результаты численного и экспериментального исследований взаимодействия сверхзвуковых струй с преградами при различном давлении окружающей среды и расстоянии до преграды. Исследования представлены для двух посадочных модулей NASA Mars Science Laboratory и космического аппарата Phoenix. Численные расчеты проведены с привлечением ANSYS Fluent.

Экспериментально исследовано в основном натекание струй (числа Маха на срезе сопла $M < 3$) на плоские (в том числе наклонные) преграды при атмосферных условиях. При теоретических исследованиях проведены циклы работ по моделированию одиночных и многоблочных (составных) турбулентных струй и их взаимодействию с плоскими преградами при варьировании различных параметров. Несмотря на определенный объем накопленных знаний, наблюдается недостаток исследований особенностей газодинамических процессов для многоблочных недорасширенных струй с числами Маха на срезе сопел 4–5 в условиях Марса. Поэтому целью настоящей работы является математическое моделирование и параметрические исследования натекания составной сверхзвуковой струи на плоскую преграду для $M = 4.5$ на срезе сопла в условиях Марса с использованием реализованного метода С.К. Годунова в OpenFOAM.

Физико-математическая постановка задачи и метод решения

В случаях истечения газа из многосопловой установки сверхзвуковые струи образуют многоблочную (составную) струю. В результате натекания многоблочной струи на поверхность формируется сложный поток с разветвленной системой скачков уплотнения, содержащий области местного дозвукового течения, контактные разрывы и участки течения с большими градиентами параметров газа. В зависимости от степени нерасчетности расстояния от среза сопла до поверхности, формы и угла наклона поверхности и расположения двигателей относительно друг друга структура их газодинамических картин разная. Струи могут смыкаться, влиять друг на друга, сказываясь на форме каждой струи, периферийном течении и силовом влиянии на обтекаемые поверхности. Наибольшее влияние на формирование структуры составной струи в основном оказывают разнос сопел, расстояние до преграды, степень нерасчетности и число Маха на срезе сопла. На рис. 1 приведена схема структуры набегающей составной и многоблочной струи на перпендикулярно расположенную преграду в зависимости от расстояния между соплами двигательной установки.

При небольшом расстоянии L составная струя имеет один центральный скачок TT и качественно совпадает со структурой одиночной струи, набегающей на преграду (рис. 1, *a*). Увеличение L ведет к изменению структуры течения (рис. 1, *b*), возникает интерференционная волна AV , которая, взаимодействуя с OT , образует результирующую ударную волну VT . Волна VT , взаимодействуя с центральным скачком TT , образует TE , которая проходя к оси составной струи, образует EE . Газовый поток, проходящий суммарный ударный фронт, тормозится до дозвуковой скорости, а газ, проходящий через TB , остается сверхзвуковым. При дальнейшем увеличении L струи не смыкаются (рис. 1, *c*). Система скачков сохраняется

как у одиночной струи. При этом реализуется обратное течение, направленное против потока.

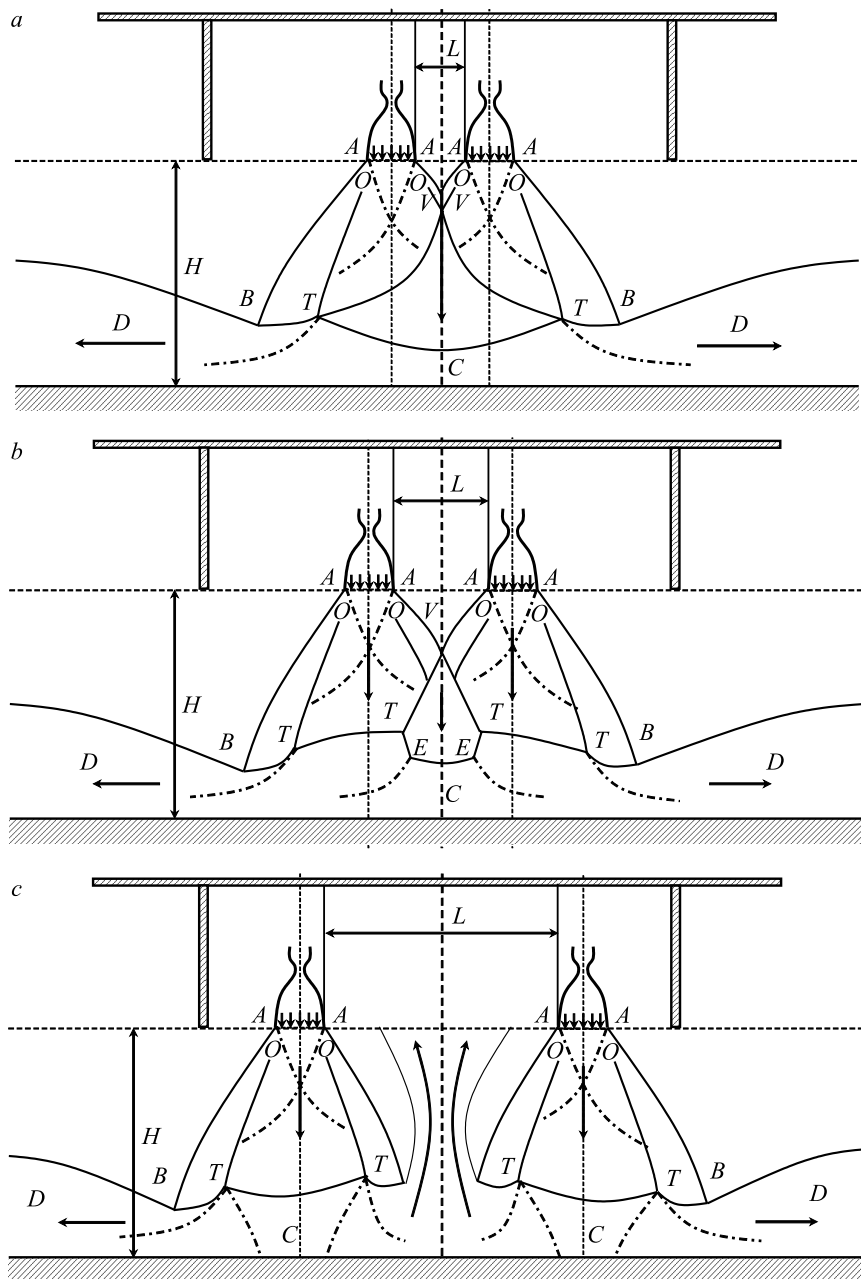


Рис. 1. Схема конфигурации взаимодействия сверхзвуковой струи с плоской поверхностью: *a*, *b* – составная струя; *c* – многоблочная струя

Fig. 1. Schematic diagram of the interaction of a supersonic jet with a flat obstacle: (*a*), (*b*) twin jet, and (*c*) multiple plume

Для математического описания физической постановки задачи использовалась система уравнений Навье – Стокса, осредненная по Фавру [14], совместно с моделью турбулентности SST [15] для вязкого сжимаемого газа. Система уравнений с граничными условиями приведена в [16]. Для реализации физико-математической модели и проведения параметрических численных исследований применялось свободное программное обеспечение OpenFOAM Extended. Использовался метод С.К. Годунова со схемой TVD и ограничителем Venkatakrishnan. Дискретизация по времени производилась методом Рунге-Кутты второго порядка аппроксимации. Все численные исследования выполнены с использованием вычислительных ресурсов суперкомпьютера Национального исследовательского Томского государственного университета СКИФ Cyberia.

Результаты численных исследований

В численных экспериментах использовалось профилированное коническое сопло с числом Маха на срезе $M = 4.5$, диаметром критического сечения $D_* = 0.036$ м, диаметром среза сопла $D_a = 0.194$ м и углом полураствора сопла 10° . Параметры на входном сечении сопла задавались следующими: давление $P_0 = 1.962$ МПа, температура $T_0 = 1336$ К, показатель адиабаты $k = 1.292$. Параметры окружающей среды (условия Марса): давление $P_a = 650$ Па, температура $T_a = 250$ К, среда неподвижна. Степень нерасчетности составляет $n = 6.85$ (давление на срезе сопел

$P_e = 4452$ Па). Расстояние от среза сопел до преграды во всех вариантах расчетов фиксировано $H = 1$ м, а расстояние между соплами L варьировалось в следующем диапазоне $L/D = 0.1 - 4$.

Для иллюстрации ударно-волновой структуры сверхзвуковых струй на рис. 2 изображен модуль градиента плотности $\nabla \rho = (\partial \rho / \partial x, \partial \rho / \partial y, \partial \rho / \partial z)$, выбраны варианты расчетов, соответствующие схемам на рис. 1. На рис. 3 и 4 приведено распределение давления вдоль преграды в плоскости, проходящей через оси симметрии сопел.

При $L/D_a = 0.1$ наблюдаются один максимум давления 20 кПа и стационарный режим взаимодействия составной струи с преградой, так как составная струя имеет один центральный скачок TT . Увеличению L/D_a приводит к возникновению интерференционных волн (рис. 2, *b*) и на преграде реализуются два максимума давления от результирующих ударных волн VT (рис. 3, кр. 2–4) и (рис. 4, кр. 5 и 6).

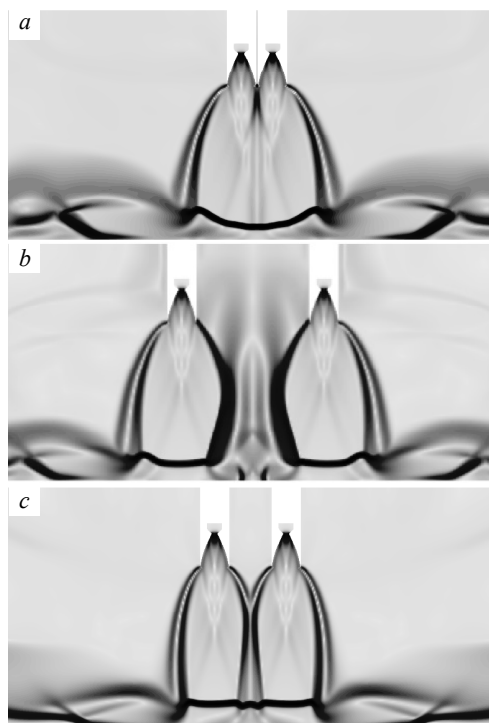


Рис. 2. Градиент плотности:
a – $L/D_a = 0.1$; *b* – $L/D_a = 1.5$; *c* – $L/D_a = 4$
Fig. 2. Density gradient:
 $L/D_a = (a) 0.1, (b) 1.5, \text{ and } (c) 4$

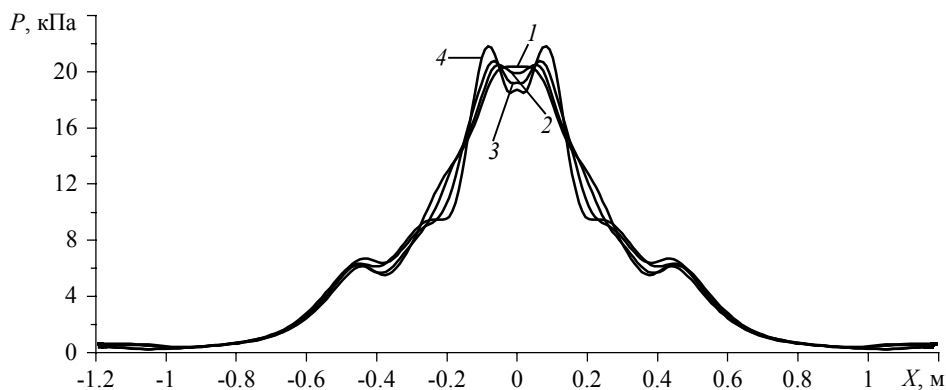


Рис. 3. Распределение давления вдоль преграды:
1 – $L/D_a = 0.1$, 2 – $L/D_a = 0.2$; 3 – $L/D_a = 0.3$; 4 – $L/D_a = 0.4$

Fig. 3. Pressure distribution along the obstacle:
 $L/D_a = (1) 0.1, (2) 0.2, (3) 0.3, \text{ and } (4) 0.4$

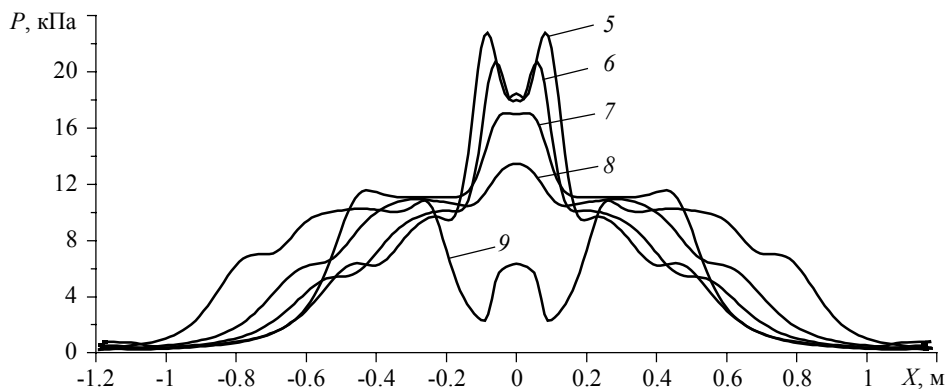


Рис. 4. Распределение давления вдоль преграды:
5 – $L/D_a = 0.5$, 6 – $L/D_a = 1.0$; 7 – $L/D_a = 1.5$; 8 – $L/D_a = 2.0$; 9 – $L/D_a = 4.0$

Fig. 4. Pressure distribution along the obstacle:
 $L/D_a = (5) 0.5, (6) 1.0, (7) 1.5, (8) 2.0, \text{ and } (9) 4.0$

Заметное изменение ударно-волновой структуры составной струи наблюдается при превышении $L/D_a = 0.4$ в сравнении с $L/D_a = 0.1$. Это наглядно видно на рис. 3. Для $L/D_a = 1.5$ и $L/D_a = 2$ реализуется структура ударных волн, схема которой показана на рис. 1, *b*, внешние границы струй смыкаются, наблюдается один максимум давления на преграде в результате формирования скачка *EE* (рис. 4, кр. 7 и 8), который составляет 17 кПа для $L/D_a = 1.5$ и 13 кПа – для $L/D_a = 2$. Это на 3 и 7 кПа меньше в сравнении с $L/D_a = 0.1$, при этом возникает автоколебательный режим. Для $L/D_a = 4$ (рис. 2, *c*) структура струй соответствует схеме рис. 1, *c*. Здесь наблюдаются два максимума давления по 10 кПа на оси каждой струй. В области между струями, периферийный поток газа каждой струи встречается, образуется скачок (рис. 4, кр. 9 – при $X = 0$ давление 6.3 кПа), газ разворачивается и движется в направлении, противоположном основному потоку струй, истекающих из сопел. В данном случае ($L/D_a = 4$) так же как для $L/D_a = 1.5$ и $L/D_a = 2$ наблюдается автоколебательный режим взаимодействия многоблочных струй с преградой.

Заключение

Представлены результаты математического моделирования взаимодействия составных и многоблочных сверхзвуковых струй с преградой. Выполнены численные исследования по влиянию расстояния между соплами с числом Маха на срезе сопел $M=4.5$ на ударно-волновую структуру течения. Расстояние между соплами варьировалось в диапазоне $L/D_a=0.1-4$. Показано, что с увеличением расстояния от $L/D_a=0.1$ до $L/D_a=0.5$ структура течения перестраивается, возникают два максимума давления, которые возрастают по сравнению с $L/D_a=0.2$. Переход от стационарного режима к автоколебательному наблюдается при превышении $L/D_a>1.5$. Уменьшение давления на преграде происходит при $L/D_a>1.0$. Для $L/D_a=4$ реализуется многоблочная струя с двумя максимумами давления, при этом силовое воздействие каждой струи в два раза меньше по сравнению с результирующим силовым воздействием составной струи $L/D_a=0.1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dyadkin A.A., Sukhorukov V.P., Trashkov G.A., Volkov V.F., Zapryagaev V.I., Kiselev N.P. Flow structure in the base region of re-entry vehicle with supersonic braking plumes impinging with landing surface // 29th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences. 7–12 September. St. Petersburg, 2014. Paper no. 2014_0640.
2. Рудов Ю.М. Многоструйные взаимодействия с преградами // Сверхзвуковые газовые струи: сборник статей. 1983. С. 155–163.
3. Сизов А.М. Составные сверхзвуковые струи // Сверхзвуковые газовые струи: сб. статей. 1983. С. 85–102.
4. Сизов А.М. Газодинамика и теплообмен газовых струй в металлургических процессах. М.: Металлургия, 1987. 256 с.
5. Кудимов Н.Ф., Сафронов А.В., Третьякова О.Н. Результаты экспериментальных исследований взаимодействия многоблочных сверхзвуковых турбулентных струй с преградой // Электронный журнал «Труды МАИ». 2013. № 69. С. 1–11.
6. Кудимов Н.Ф., Сафронов А.В., Третьякова О.Н. Численное моделирование взаимодействия многоблочных сверхзвуковых турбулентных струй с преградой // Электронный журнал «Труды МАИ». 2013. № 70. С. 1–14.
7. Кудимов Н.Ф., Сафронов А.В., Третьякова О.Н. Прикладные задачи газодинамики и теплообмена в энергетических установках ракетной техники. М.: Изд-во МАИ, 2014. 168 с.
8. Дегтярь В.Г., Меркулов Е.С., Хлыбов В.И., Сафронов А.В. Результаты расчетно-экспериментальных исследований газодинамических процессов при взаимодействии многоблочных струй ракетных двигателей с газоотражателем стартового сооружения // Космонавтика и ракетостроение. 2013. Т. 70, № 1. С. 37–45.
9. Иванов М.Я., Назаров В.П. Расчет взаимодействия недорасширенных сверхзвуковых струй, истекающих из многосопловой компоновки // Ученые записки ЦАГИ. 1980. Т. 11. № 9. С. 63–71.
10. Mehta M., Sengupta A., Renno N.O., Van Norman J.W., Huseman P.G., Gulick S.D., Pokora M. Thruster plume surface interactions: applications for spacecraft landings on planetary bodies // AIAA Journal. 2013. V. 51. No. 12. P. 2800–2818.
11. Mehta M., Renno N.O., Cotel A.J., Grover III R.M. Characterization of the impingement dynamics of pulsed rocket plumes with the ground at low ambient pressure // 43rd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit. 2007. P. 1–11.
12. Plemmons D.H., Mehta M., Clark B.C., Kounaves S.P., Peach Jr. L.L., Renno N.O., Tampari L., Young S.M.M. Effect if the Phoenix lander descent thruster plume on the Martian surface // Journal of Geophysical research. 2008. V. 113. P. 1–12.
13. Sengupta A., Kulleck J., Sell S., Norman J.V., Mehta M., Pokora M. Mars lander engine plume impingement environment of the Mars science laboratory // IEEE/AIAA Aerospace Conference. 2008. No. 1349. P. 1–10.

14. Wilcox D.C. Turbulence Modeling for CFD // California: DCW Industries, Inc. 1993. 460 p.
15. Menter F.R., Kuntz M., Langtry R. Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model // Proceedings of the 4th International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer, Begell House Inc., West Redding. 2003. P. 625–632.
16. Глазунов А.А., Кагенов А.М., Костюшин К.В., Еремин И.В., Котоногов В.А., Алигасанова К.Л. Математическое моделирование взаимодействия одиночной сверхзвуковой струи с преградами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 63. С. 87–101. DOI: 10.17222/19988621/63/8.

Статья поступила 29.04.2020

Kagenov A.M., Kostyushin K.V., Aligasanova K.L., Kotonogov V.A. (2020) MATHEMATICAL MODELING OF A SUPERSONIC TWIN JET INTERACTION WITH AN OBSTACLE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 68. pp. 72–79

DOI 10.17223/19988621/68/7

Keywords: supersonic twin jet, multiple plume, shock wave structure, mathematical modeling, Godunov method, OpenFOAM.

The paper presents the results of the mathematical modeling of a supersonic twin jet interaction with an obstacle for the Mach number of 4.5 specified at the nozzle exit. Mathematical formulation of the problem includes a system of Favre-averaged Navier-Stokes equations and SST turbulence model for a viscous compressible ideal gas. The calculations are carried out using the free software OpenFOAM Extended with the Godunov method employed. The effect of the distance between nozzles on the shock-wave structure of the gas flow and on the force action of the plumes on the obstacle is studied. The distance between the nozzles varied in the range of 0.1–4. It is found that with an increase in the distance from 0.1 to 0.5, the flow structure is significantly rearranged, and two pressure maxima arise, which increase in comparison to the distance of 0.2. A decrease in pressure on the obstacle is observed at the distance over 1.0. For a distance of 4, two pressure maxima occur on the axis of each jet, while the force action of each jet is half as high as the resultant jet force action for a distance of 0.1. The transition from a stationary regime to a self-oscillating one is observed when the distance exceeds the value of 1.5.

Financial support. The reported study was funded by RFBR and Tomsk region according to the research project No. 19-41-703005.

Anuar M. KAGENOV (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: anuar@ftf.tsu.ru

Kirill V. KOSTYUSHIN (Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kostushin@niipmm.tsu.ru

Kristina L. ALIGASANOVA (Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: aligasanova@niipmm.tsu.ru

Vasily A. KOTONOGOV (Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kot@niipmm.tsu.ru

REFERENCES

1. Dyadkin A.A., Sukhorukov V.P., Trashkov G.A., Volkov V.F., Zapryagaev V.I., Kiselev N.P. (2014) Flow structure in the base region of re-entry vehicle with supersonic braking plumes impinging with landing surface. *29th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences*. Paper No. 2014_0640.
2. Rudov Yu.M. (1983) Mnogostruynnye vzaimodeystviya s pregradami [Multi-jet interactions with obstacles]. *Sverkhzvukovye gazovye strui: sbornik statey*. pp. 155–163.

3. Sizov A.M. (1983) Sostavnye sverkhzvukovye strui [Multiple supersonic jets]. *Sverkhzvukovye gazovye strui: sbornik statey*. pp. 85–102.
4. Sizov A.M. (1987) *Gazodinamika i teploobmen gazovykh struy v metallurgicheskikh protsessakh* [Gas dynamics and heat transfer of gas jets in metallurgical processes]. Moscow: Metallurgiya.
5. Kudimov N.F., Safronov A.V., Tret'yakova O.N. (2013) Rezul'taty eksperimental'nykh issledovaniy vzaimodeystviya mnogoblochnykh sverkhzvukovykh turbulentnykh struy s pregradoy [The results of the experimental studies of the interaction of multiblock supersonic turbulent jets with an obstacle]. *Trudy MAI*. 69. pp. 1–11.
6. Kudimov N.F., Safronov A.V., Tret'yakova O.N. (2013) Chislennoe modelirovanie vzaimodeystviya mnogoblochnykh sverkhzvukovykh turbulentnykh struy s pregradoy [Numerical simulation of the interaction of multiblock supersonic turbulent jets with an obstacle]. *Trudy MAI*. 70. pp. 1–14.
7. Kudimov N.F., Safronov A.V., Tret'yakova O.N. (2014) *Prikladnye zadachi gazodinamiki i teploobmena v energeticheskikh ustanovkakh raketnoy tekhniki* [Applied problems of gas dynamics and heat transfer in power plants of rocket engineering]. Moscow: Izdatel'stvo MAI.
8. Degtyar' V.G., Merkulov E.S., Hlybov V.I., Safronov A.V. (2013) Rezul'taty raschetno-eksperimental'nykh issledovaniy gazodinamicheskikh protsessov pri vzaimodeystvii mnogoblochnykh struy raketnykh dvigateley s gazootrazhatelem startovogo sooruzheniya [The results of computational and experimental studies of gas–dynamic processes in the interaction of multi-block jets of rocket engines with a gas reflector of a launch facility]. *Kosmonavtika i raketostroyeniye – Cosmonautics and Rocket Engineering*. 70. pp. 37–45.
9. Ivanov M.Ya., Nazarov V.P. (1980) Raschet vzaimodeystviya nedorasshirennykh sverkhzvukovykh struy, istekayushchikh iz mnogoplokovoy komponentki [Calculation of the interaction of underexpanded supersonic jets flowing out of a multi-nozzle assembly]. *Uchenye zapiski TSAGI – TsAGI Science Journal*. pp. 63–71.
10. Mehta M., Sengupta A., Renno N.O., Van Norman J.W., Huseman P.G., Gulick S.D., Pokora M. (2013) Thruster plume surface interactions: applications for spacecraft landings on planetary bodies. *AIAA Journal*. 51(12). pp. 2800–2818. DOI: 10.2514/1.J052408.
11. Mehta M., Renno N.O., Cotel A.J., Grover R.M.III (2007) Characterization of the impingement dynamics of pulsed rocket plumes with the ground at low ambient pressure. *43rd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*. pp. 1–11. DOI: 10.2514/6.2007-5707.
12. Plemmons D.H., Mehta M., Clark B.C., Kounaves S.P., Peach L.L.Jr., Renno N.O., Tamppari L., Young S.M.M. (2008) Effect of the Phoenix lander descent thruster plume on the Martian surface. *Journal of Geophysical research*. 113. pp. 1–12. DOI: 10.1029/2007JE003059.
13. Sengupta A., Kulleck J., Sell S., Norman J.V., Mehta M., Pokora M. (2008) Mars lander engine plume impingement environment of the Mars science laboratory. *IEEE/AIAA Aerospace Conference*. pp. 1–10. DOI: 10.1109/AERO.2009.4839345.
14. Wilcox D.C. (1993) *Turbulence Modeling for CFD*. California: DCW Industries.
15. Menter F.R., Kuntz M., Langtry R. (2003) Ten years of industrial experience with the SST turbulence model. *Proceedings of the 4th International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer*. Begell House Inc., West Redding. 2003. pp. 625–632.
16. Glazunov A.A., Kagenov A.M., Kostyushin K.V., Eremin I.V., Kotonogov V.A., Aliganova K.L. (2019) Matematicheskoe modelirovanie vzaimodeystviya odinochnoy sverkhzvukovoy strui s pregradami [Mathematical modeling of the interaction of a single supersonic jet with obstacles]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 61. pp. 87–101. DOI: 10.17222/19988621/63/8.

Received: April 29, 2020

УДК 004.942, 623.526.4

DOI 10.17223/19988621/68/8

А.М. Липанов, И.Г. Русяк, В.Г. Суфиянов

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТВОЛА
НА УГОЛ ВЫЛЕТА СНАРЯДА ПРИ ВЫСТРЕЛЕ¹**

Рассмотрена задача о продольно-поперечных колебаниях ствола артиллерийского орудия при выстреле в одномерной постановке с учетом начального гравитационного прогиба, массовых сил, давления пороховых газов и массы снаряда. Разностные схемы для решения уравнений продольных и поперечных колебаний ствола получены на основе интегро-интерполяционного метода. Показано, что в вертикальной плоскости имеют место существенные колебания ствола, при этом время затухания колебаний больше промежутка времени между выстрелами, что оказывает влияние на разброс снарядов при стрельбе очередью.

Ключевые слова: *внутренняя баллистика, колебания ствола, математическая модель, вычислительный алгоритм, угол бросания снаряда, угол возвышения орудия.*

Точность и кучность стрельбы для ствольных систем имеет важное практическое значение. Во многом они определяются корректным заданием начальных данных. Одним из определяющих факторов здесь является отклонение угла бросания снаряда θ (угла стрельбы) от угла возвышения φ вследствие деформации и колебания ствола под влиянием давления пороховых газов и движения снаряда внутри ствола в процессе выстрела [1, 2]. Вибрации ствола в особенности необходимо учитывать в автоматических пушках, в которых стрельба происходит очередями и за небольшой промежуток времени между выстрелами ствол не успевает стабилизироваться. Одной из первых работ, посвященных данной теме, является монография [3], в которой учитывается множество факторов, влияющих на взаимодействие снаряда со стволом. Наиболее полная постановка задачи о колебании стволов артиллерийских систем при выстреле, в рамках одномерной модели упругой динамики, представлена в работе [4]. Там же предложен конечно-разностный подход для моделирования рассматриваемых процессов. Вопросам учета радиальных колебаний ствола на начальные внешнебаллистические параметры посвящена работа [5]. Решение одномерной задачи о колебании ствола автоматической пушки методом разделения Фурье и его влиянии на кучность стрельбы рассматривается в работах [6]. Анализ влияния колебания подвижного ствола на точность выстрела из снайперской винтовки дан в работе [7]. В работе [8] представлены результаты трехмерного моделирования в системе LS-Dyne взаимодействия всех частей артиллерийского орудия на точность стрельбы. Данный подход с использованием современных систем инженерного проектирования и суперкомпьютерного моделирования, таких как Ansys, Logos, Nastran, Abaqus и др. находит широкое применение в работах как российских, так и зарубежных авторов. Особенно

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00072\20.

интенсивно публикуют результаты исследований в этой области ученые из Китая [9], Индии [10], США [11], Турции [12], Великобритании [13], Словакии [14], Израиля [15] и ряда других стран [16, 17]. Несмотря на то, что в большинстве исследований [12–17] используются системы трехмерного моделирования и инженерного проектирования, много работ по моделированию колебаний ствола основываются на одномерных моделях, например [9–11]. Значительный вклад в разработку математической теории упругих колебаний стержней внес С.П. Тимошенко [18]. Математические модели, представленные в работах [4, 18], с учетом дополнительных сил были использованы при проведении представленного в статье исследования для решения задач продольных и поперечных колебаний ствола.

Заметим, что одно из направлений повышения эффективности применения ствольной артиллерии связано с комплексным моделированием различных последовательных стадий процесса выстрела, что предполагает учет переходных процессов между ними. Один из таких переходных процессов между внутренней и внешней баллистикой – колебательный процесс ствола орудия.

Целью данной работы является повышение точности определения начальных внешнебаллистических условий стрельбы на основе совместного решения основной задачи внутренней баллистики, включая период последствий, и задачи о колебании ствола при стрельбе очередями. В этой связи, представляет определенный интерес также оценка отличия результатов моделирования колебаний ствола на основе одномерных уравнений по сравнению с трехмерными моделями, реализуемыми с использованием высокопроизводительных вычислительных систем.

1. Постановка задачи о колебании ствола

Рассмотрим постановку задачи о продольных и поперечных колебаниях ствола артиллерийского орудия в одномерном приближении [4]. Поперечные колебания будем рассматривать только в вертикальной плоскости относительно оси симметрии орудия. В горизонтальной плоскости колебаниями ствола будем пренебрегать. Выберем декартову систему координат $Oxuz$ (рис. 1), связанную с недеформированным стволом орудия. Начало координат O находится в центре казенного среза ствола. Направим ось Ox вдоль оси симметрии ствола. Ось Oy находится в вертикальной плоскости перпендикулярно оси Ox . Ось Oz образует правостороннюю систему координат.

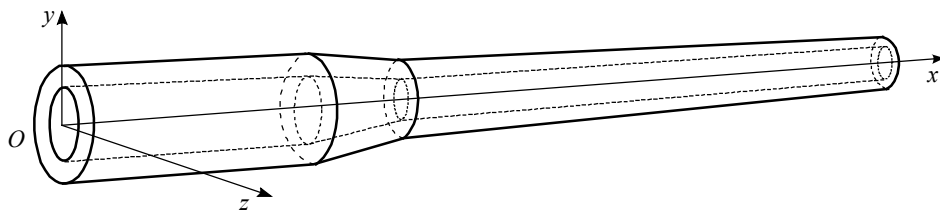


Рис. 1. Система координат, связанная со стволом

Fig. 1. Barrel-related coordinate system

Совместим начало координат $Oxuz$ с осью местной системы координат $OXYZ$. Направим ось Ox орудия в плоскости OXY под углом возвышения φ к оси OX (рис. 2). Ось OY направим в сторону, противоположную направлению силы тяжести $\vec{g}$. Ось OZ совместим с остальными осями так же, как и ось Oz .

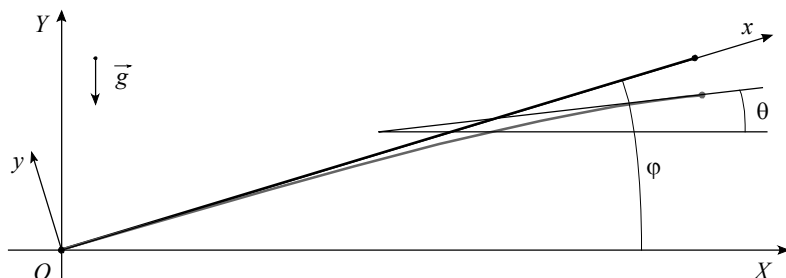


Рис. 2. Местная система координат OXYZ

Fig. 2. Local coordinate system OXYZ

Под действием силы тяжести и других сил ствол будет испытывать изгиб. Угол бросания снаряда θ (рис. 2) вычисляется как угол, образованный осью Ox и направлением касательной к линии, совпадающей с центром канала ствола, в точке дульного среза в момент вылета снаряда.

1.1. Уравнение продольных колебаний

Рассмотрим дифференциальное уравнение, описывающее в одномерном приближении нестационарные продольные колебания канала ствола, учитывающее силу тяжести, давление пороховых газов и взаимодействие снаряда со стволом. Уравнение продольных колебаний ствола в направлении оси Ox имеет вид [4]

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} (F\sigma + 2\nu Sp) + p \frac{\partial S}{\partial x} - q_x(x, t) = 0, \quad (1)$$

где $u = u(x, t)$ – величина продольной деформации; ρ – плотность материала ствола; $F = F(x)$ – переменная площадь сечения ствола; $S = S(x)$ – переменная площадь канала ствола; $\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x}$ – напряжение в сечении x ; E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; $p = p(x, t)$ – давление внутри канала ствола; $q_x = q_x(x, t)$ – распределенные продольные силы.

Задача (1) решается при заданных начальных условиях:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = u_1(x) \quad (2)$$

и граничных условиях:

$$u(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \quad (3)$$

где функция $u_0(x)$ определяется из решения стационарной задачи гравитационного прогиба, в которой рассматриваются только сила тяжести; $l = L_{\text{км}} + L_{\text{д}}$ – длина артиллерийской системы; $L_{\text{км}}$ – длина камеры; $L_{\text{д}}$ – длина ствола.

Распишем продольные силы, действующие на канал ствола:

$$q_x(x, t) = -\rho F g \sin \varphi - q_x^{\text{сн}}(x, t) + q_x^{\text{тр}}(x, t), \quad (4)$$

где $q_x^{\text{ch}}(x, t)$ – массовая сила, действующая на ствол со стороны снаряда в направлении оси Ox ; $q_x^{\text{tp}}(x, t)$ – сила трения и взаимодействия снаряда с нарезами в направлении оси Ox ; g – ускорение свободного падения. При определении этих сил снаряд будем считать эквивалентным по объему цилиндру, радиус которого совпадает с радиусом канала ствола. Длина эквивалентного снаряда равна $\Delta l_{\text{ch}} = V_{\text{ch}} / S_{\text{kh}}$, где S_{kh} – площадь сечения цилиндрической части канала ствола; V_{ch} – объем снаряда. Средняя плотность такого снаряда равна $\rho_{\text{ch}} = q / V_{\text{ch}}$, где q – масса снаряда. Тогда можно записать:

$$q_x^{\text{ch}}(x, t) = \begin{cases} \rho_{\text{ch}} S_{\text{kh}} g \sin \varphi, & x \in [x_{\text{ch}}, x_{\text{ch}} + \Delta l_{\text{ch}}], \\ 0, & x \notin [x_{\text{ch}}, x_{\text{ch}} + \Delta l_{\text{ch}}], \end{cases} \quad (5)$$

где положение снаряда $x_{\text{ch}} = x_{\text{ch}}(t)$ определяется из решения основной задачи внутренней баллистики.

Распределенная сила, обусловленная взаимодействием снаряда с нарезами:

$$q_x^{\text{tp}}(x, t) = \begin{cases} R_x / \Delta l_{\text{ch}}, & x \in [x_{\text{ch}}, x_{\text{ch}} + \Delta l_{\text{ch}}], \\ 0, & x \notin [x_{\text{ch}}, x_{\text{ch}} + \Delta l_{\text{ch}}], \end{cases} \quad (6)$$

где R_x – сосредоточенная сила, действующая на стенки канала ствола в направлении оси Ox .

1.2. Уравнение поперечных колебаний в вертикальной плоскости

Рассмотрим нестационарное одномерное уравнение упругих колебаний стержня с одним закрепленным и вторым свободным концом. Уравнение продольных колебаний в вертикальной плоскости Oxy представляет собой бигармоническое уравнение вида [4]

$$\rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[(F \sigma - Sp) \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} E J_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - q_y(x) = 0, \quad (7)$$

где $v = v(x, t)$ – поперечные деформации ствола в направлении оси Oy ; $J_z = J_z(x)$ – момент инерции ствола относительно оси z ; $q_y(x)$ – распределенные по длине ствола силы, действующие в направлении оси Oy .

Начальные условия для уравнения (7):

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad \left. \frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} \right|_{t=0} = v_1(x), \quad (8)$$

где $v_0(x)$ – начальный прогиб ствола, определяемый из решения стационарной задачи, в которой рассматривается только постоянная сила тяжести в направлении оси Oy ; $v_1(x)$ – начальная скорость ствола в направлении оси Oy .

Граничные условия закрепления будем рассматривать при $x = 0$:

$$v(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0. \quad (9)$$

Условия свободного конца при $x = l$ имеют вид

$$\left. \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial x} \left(EJ_z \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right) \right|_{x=l} = 0. \quad (10)$$

Распределенные силы для рассматриваемой системы запишем как

$$q_y(x, t) = -\rho g F \cos \varphi - q_y^{\text{ch}}(x, t), \quad (11)$$

где $q_y^{\text{ch}}(x, t)$ – массовая сила, действующая на ствол со стороны снаряда в направлении оси Оу:

$$q_y^{\text{ch}}(x, t) = \begin{cases} \rho_{\text{ch}} S_{\text{кн}} g \cos \varphi, & x \in [x_{\text{ch}}, x_{\text{ch}} + \Delta l_{\text{ch}}], \\ 0, & x \notin [x_{\text{ch}}, x_{\text{ch}} + \Delta l_{\text{ch}}]. \end{cases} \quad (12)$$

2. Постановка задачи о статическом гравитационном изгибе ствола

Рассмотрим одномерное уравнение статического прогиба упругого стержня с одним закрепленным и вторым свободным концом под действием только силы тяжести. Решение данного уравнения будет начальным условием для решения задачи о колебаниях ствола. Дифференциальное уравнение для продольных деформаций с учетом только силы тяжести примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(FE \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) = q_x^0(x), \quad (13)$$

с граничными условиями:

$$u_0(0) = 0, \quad \left. \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 \quad (14)$$

и распределенными массовыми силами, действующими на канал ствола в направлении оси Ох:

$$q_x^0(x) = -\rho F g \sin \varphi - q_x^{\text{ch}}(x, 0). \quad (15)$$

Уравнение поперечного прогиба представляет собой бигармоническое уравнение вида

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} EJ_z \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} = q_y^0(x), \quad (16)$$

с граничными условиями при $x = 0$:

$$v_0(0) = 0, \quad \left. \frac{\partial v_0(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0. \quad (17)$$

Условия свободного конца при $x = l$ имеют вид

$$\left. \frac{\partial^2 v_0(x)}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial x} \left(EJ_z \frac{\partial^2 v_0(x)}{\partial x^2} \right) \right|_{x=l} = 0. \quad (18)$$

Распределенные массовые силы для рассматриваемого уравнения:

$$q_y^0(x) = -\rho g F \cos \varphi - q_y^{\text{ch}}(x, 0). \quad (19)$$

Из решения уравнения (13) с граничными условиями (14) и распределенными силами (15) определяются начальные условия для решения задачи о продольных колебаниях. Аналогично, из решения уравнения (16) с граничными условиями (17), (18) и распределенными силами (19) определяются начальные условия для решения задачи о поперечных колебаниях в вертикальной плоскости.

3. Постановка основной задачи внутренней баллистики

Внутрибаллистические параметры и динамика движения снаряда внутри ствола определялись в рамках термодинамического подхода [19]. В результате решения задачи определяются $x_{\text{сн}}(t)$ – положение снаряда, $p_{\text{сн}}(t)$ – давление на дно снаряда, $p_{\text{кн}}(t)$ – давление на дно канала и $p(x, t)$ – распределение давления вдоль ствола орудия, которое рассчитывалось на основе гипотезы осреднения плотности газопороховой смеси по заснарядному объему.

После вылета снаряда из канала ствола, принимается, что среднее давление и средняя плотность газов изменяются вследствие истечения газов из дульного среза со скоростью звука. Этот период называется периодом последствий. Он приближенно описывается уравнениями:

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = -\frac{B(k)S_{\text{кн}}p}{W_{\text{д}}\sqrt{RT_{\text{д}}}}, \\ p = \rho RT_{\text{д}}, \end{cases} \quad (20)$$

где $B(k) = \sqrt{k \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}}$ – постоянная расхода; ρ – плотность пороховых газов;

$T_{\text{д}}$ – температура пороховых газов в момент вылета снаряда из канала ствола, которая принимается постоянной в течении всего периода последствий; $W_{\text{д}} = W_{\text{км}} + L_{\text{д}}S_{\text{кн}}$ – суммарный объем камеры и канала ствола.

В качестве начальных условий в данном случае принимались параметры состояния продуктов горения в момент вылета снаряда из канала ствола при $t = t_{\text{д}}$:

$$\rho = \rho_{\text{д}} = \frac{\omega}{W_{\text{д}}}, \quad T = T_{\text{д}}, \quad p_{\text{д}} = \rho_{\text{д}}RT_{\text{д}}. \quad (21)$$

При принятых допущениях решение задачи (20) – (21) имеет вид:

$$p = p_{\text{д}} \exp\left(-\frac{t}{t_{\text{п}}}\right), \quad (22)$$

$$\text{где } t_{\text{п}} = \frac{W_{\text{д}}}{B(k)S_{\text{кн}}\sqrt{RT_{\text{д}}}}.$$

4. Алгоритмы решения задач

Система уравнений внутренней баллистики решалась с использованием двухшаговой схемы Рунге-Кутты второго порядка точности [20].

В литературе представлены различные методы решения одномерных задач упругих колебаний ствола в частных производных: метод конечных разностей [21], метод конечных элементов [22], метод Фурье [18], сведение задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений [1] и другие методы [23]. Наиболее эффективным среди рассматриваемых методов является метод конечных разностей.

Рассматривалась расчетная сетка во временной области $0 \leq t \leq T$:

$$\Xi = \left\{ t_n = n \cdot \tau \mid i \in \{0, 1, \dots, N\}, \tau = \frac{T}{N} \right\} \quad (23)$$

и пространственной области $0 \leq x \leq l$:

$$\Omega = \left\{ x_i = i \cdot h \mid i \in \{0, 1, \dots, I\}, h = \frac{l}{I} \right\}. \quad (24)$$

Разностная аппроксимация дифференциальных уравнений в частных производных (1), (7), (13) и (16) проводилась интегро-интерполяционным методом [21], который позволяет построить разностную схему для моделей с негладкими и разрывными коэффициентами и получить наиболее точное физическое решение. Применительно к рассматриваемой задаче этот метод наиболее актуален для аппроксимации граничных условий, в которых имеются разрывные параметры, а также для правильного учета влияния подвижных элементов артиллерийской системы на колебания ствола. В результате получена неявная разностная схема 2-го порядка точности по координате и времени. Разностная задача в итоге была сведена к трехдиагональной системе линейных алгебраических уравнений для дифференциальных уравнений (1) и (13) и к пятидиагональной – для дифференциальных уравнений (7) и (16), которые решались методом прогонки.

Верификация результатов численных расчетов в одномерной постановке осуществлялась на основе сравнения с результатами моделирования в Ansys.

5. Результаты расчетов

Как показали результаты комплексного моделирования взаимодействия пороховых газов и снаряда со стволом в трехмерной постановке, только для одного расчета в Ansys Autodyn на достаточно грубой сетке на современном персональном компьютере требуется более суток [24], при этом возникают сложности с заданием динамических граничных условий внутри ствола, что требует написания отдельного модуля.

В работе рассматривается 30-мм автоматическая нарезная пушка с массой снаряда $q = 0.18 \text{ кг}$. Алгоритмы моделирования в одномерной постановке верифицировались на основе сравнения с результатами математического моделирования в трехмерной постановке в системе инженерного проектирования Ansys.

Первая задача верификации – сравнение гравитационного прогиба ствола. Угол возвышения ствола φ принимался равным 0° . Параметры материала ствола соответствуют стандартной стали: плотность – $\rho = 7850 \text{ кг/м}^3$; модуль упругости – $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; коэффициент Пуассона – $\nu = 0.3$. Рассматривалась структурированная сетка, состоящая из 3348 конечных гексагональных элементов. При решении одномерных конечно-разностных уравнений была использована сетка с постоянным шагом по пространству $h = 0.01 \text{ м}$. Количество точек разбиения расчетной области составило $I = 180$.

Одномерная модель была реализована на языке Python 3.8.3. Трехмерные расчеты проводились с использованием Ansys 2020 R1 Academic Edition (расчетный модуль Mechanical APDL) в среде Windows 10 на стандартном компьютере, оснащенном процессором Intel Core i7-2600K 3.4 ГГц и 16 Гб оперативной памяти.

Сравнение гравитационных прогибов ствола 30-мм пушки, полученное в результате моделирования по рассматриваемой одномерной модели (13) – (19) и в Ansys, представлено на рис. 3.

Как видно на рис. 3, а, гравитационные прогибы, полученные в одномерной и трехмерной постановках, практически совпадают. Смещение дульного среза по

одномерной модели составило $-v_0(l) = 2.58$ мм, а по трехмерной модели – 2.59 мм. Отклонение результатов составляет 0.4 %.

Вторая задача верификации – сравнение свободных поперечных колебаний ствола под действием сил тяжести. Принимались нулевые начальные условия и конечное время $T = 0.3$ с. Время расчета в Ansys (расчетный модуль Autodyn) составило 15 мин. В одномерной постановке задача о свободных поперечных колебаниях ствола (7) – (12) с учетом массовых сил решалась 30 с.

Как видно из рис. 3, *b*, динамика свободных колебаний для рассматриваемых решений имеют одинаковую структуру, которая описывается затухающими синусоидальными колебаниями. На рассматриваемом временном отрезке амплитуды отличаются на ~8 %, а период колебаний на ~3 %.

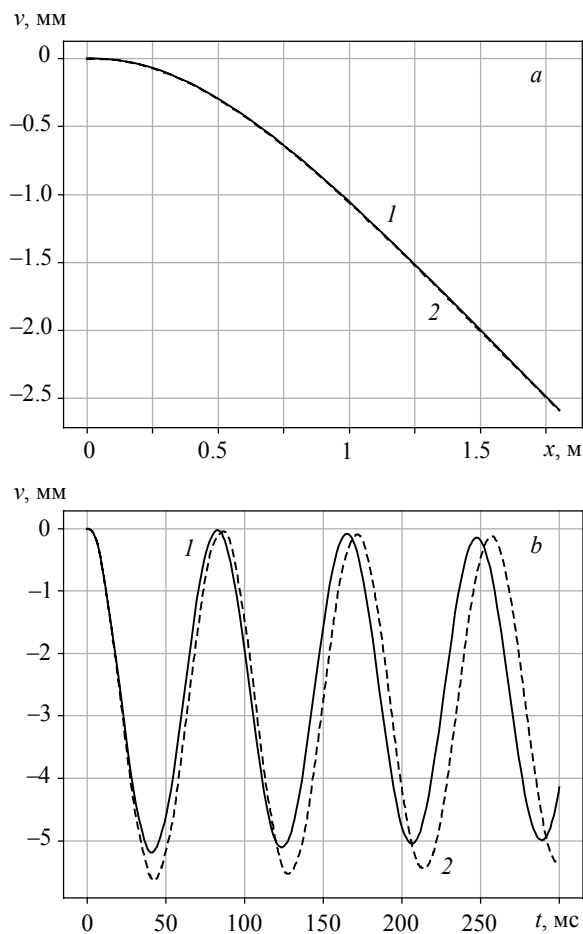


Рис. 3. Сравнение гравитационных прогибов (*a*) и динамики свободных колебаний (*b*) ствола 30-мм пушки, полученных по одномерной (1) и трехмерной моделям (2)

Fig. 3. Comparison of (*a*) gravitational deflections and (*b*) dynamics of free vibrations of a 30 mm gun barrel obtained using (1) a one-dimensional model and (2) a three-dimensional model

При расчете внутренней баллистики пушки начальное давление принималось равным $p_n = 3$ МПа. В момент достижения давления форсирования $p_\phi = 30$ МПа снаряд начинал движение. После достижения снарядом дульного среза расчеты периода последействия проводились по формуле (22). Внутрибаллистические характеристики в течение одного периода выстрела приведены на рис. 4.

Максимальное давление внутри ствола составило $p_{\max} = 370$ МПа, скорость снаряда на дульном срезе – $v_{\text{сн}} = 890$ м/с, время выстрела – $t_d = 4.5$ мс (рис. 4, а). Период последействия составил 24.5 мс (рис. 4, б). В расчетах рассматривалась автоматическая стрельба со скоростью 800 выстрелов в минуту, что соответствует периоду между выстрелами $t_{\text{пер}} = 75$ мс.

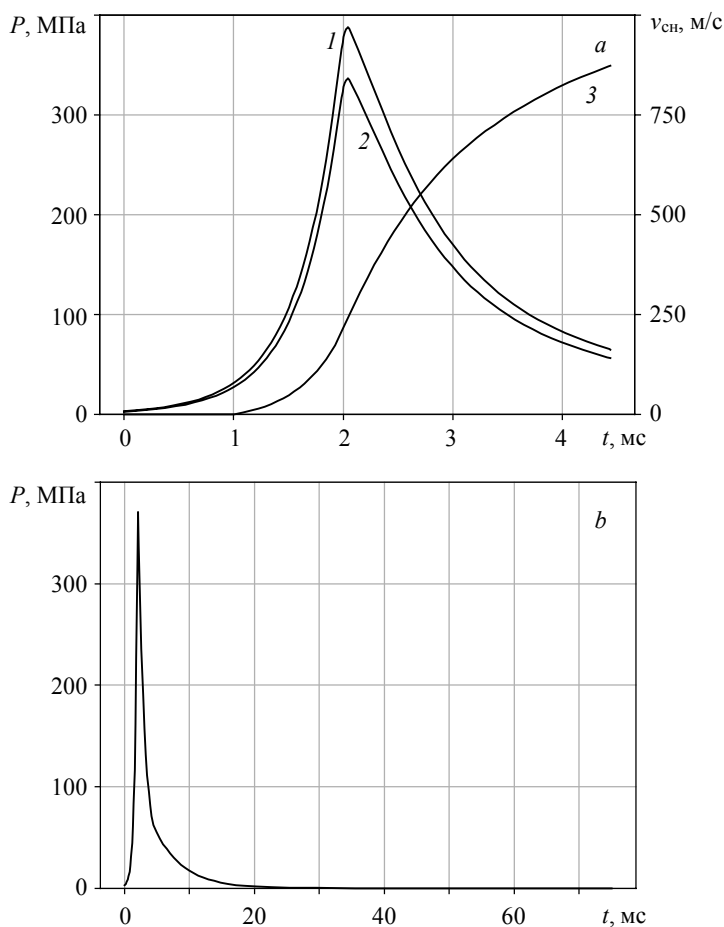


Рис. 4. Расчетные внутрибаллистические параметры выстрела для 30-мм пушки: а – давление на дно канала (1), давление на дно снаряда (2) и скорость снаряда (3) в период выстрела; б – среднее давление в период выстрела и в период последействия

Fig. 4. Estimated ballistic parameters of a shot from a 30 mm gun: (a) 1, pressure on the bore bottom; 2, pressure on the projectile bottom; and 3, velocity of the projectile during the shot period; (b) average pressure during the shot period and in the subsequent period

Расчеты продольных и поперечных колебаний ствола артиллерийского орудия проводились по уравнениям (1) и (7) с учетом воздействия давления, взаимодействия снаряда со стволом и массовых сил. Результаты расчета продольных и поперечных колебаний дульного среза ствола представлены на рис. 5.

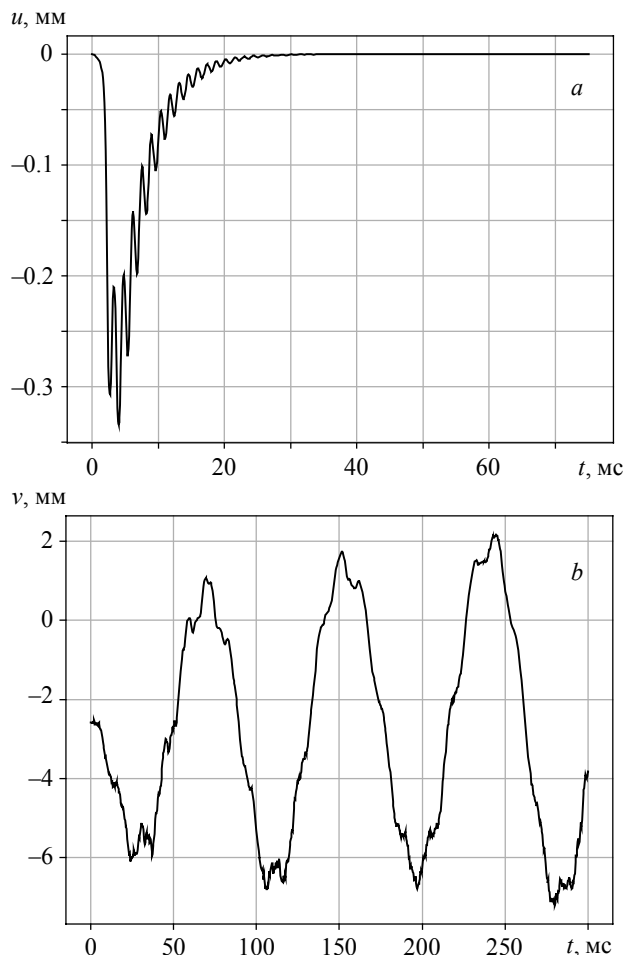


Рис. 5. Продольные (а) (1 выстрел) и поперечные (б) (4 выстрела) колебания дульного среза 30-мм пушки

Fig. 5. (a) Longitudinal (1 shot) and (b) transverse (4 shots) barrel vibrations of a 30 mm gun

Как видно из рис. 5, максимальная амплитуда продольных колебаний дульного среза ствола составила 0.33 мм, а поперечных – более 9 мм. Отклонение угла стрельбы θ от угла возвышения φ определяется направлением касательной к линии канала ствола в точке дульного среза в момент вылета снаряда из орудия:

$$\gamma = \theta - \varphi = \arctg \left(\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \bigg|_{x=l, t=t_d} \right). \quad (25)$$

Зависимость этого отклонения от времени представлена на рис. 6.

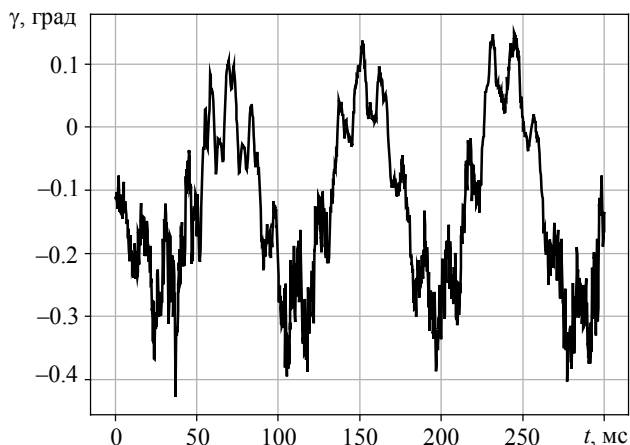


Рис. 6. Динамика отклонения угла стрельбы от угла возвышения при стрельбе очередью

Fig. 6. Dynamics of firing angle deviations from the angle of elevation in the burst mode

Как видно из результатов моделирования поперечных колебаний (рис. 6), угол стрельбы отклоняется от угла возвышения в пределах $\gamma = [-0.4^\circ \div 0.1^\circ]$. Для оценки влияния колебаний ствола в указанных пределах на точность стрельбы был проведен расчет внешнебаллистической траектории снаряда по методике [25]. При угле возвышения $\varphi = 0^\circ$ на расстояние 1 км до цели изменение высоты полета снаряда составило 8.7 м: от -14.9 м при $\theta = -0.4^\circ$ до -6.2 м при $\theta = 0.1^\circ$.

Заключение

Исследование влияния колебаний ствола имеет важное практическое значение для определения точности и кучности стрельбы для ствольных систем. Рассмотрены совместные модели упругих продольно-поперечных колебаний ствола, описываемые одномерными дифференциальными уравнениями в частных производных, и модель внутренней баллистики, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Представленные в работе алгоритмы комплексного моделирования колебания ствола при выстреле позволяют уточнить углы вылета снаряда на внешнебаллистическую траекторию.

Разностная аппроксимация дифференциальных уравнений колебаний ствола проводилась интегро-интерполяционным методом; построены консервативные неявные разностные схемы 2-го порядка точности по координате и времени. Система дифференциальных уравнений внутренней баллистики решалась методом Рунге-Кутты второго порядка точности. Решение задач реализовано в виде программного кода на языке Python.

Верификация метода проводилась на основе сравнения решений задач в одномерной и трехмерной постановках. Результаты решений задачи стационарного гравитационного прогиба по одномерной и трехмерной моделям практически совпадают (отклонение составило 0.4 %). При решении задачи о свободных коле-

баниях ствола отклонения составили 8 % по амплитуде и 3 % по периоду колебаний. Однако на одинаковых вычислительных ресурсах время расчета колебаний ствола по трехмерной модели на несколько порядков превосходит время расчетов в одномерной модели.

Проведено моделирование упругих колебаний ствола при стрельбе из 30-мм нарезной автоматической пушки с учетом массовых сил, давления пороховых газов, а также взаимодействия снаряда с каналом ствола. Показано, что продольные колебания затухают в течении 30 мс, что намного меньше промежутка времени между выстрелами в очереди, который составляет 75 мс. Результаты моделирования поперечных колебаний ствола в вертикальной плоскости выявили отклонения угла стрельбы при вылете снаряда в пределах до 0.5° , что оказывает существенное влияние на точность стрельбы одиночными выстрелами и разброс снарядов при стрельбе очередью. Так, при стрельбе из 30-мм пушки изменение угла стрельбы на 0.5° приводит на дальности 1 км к изменению высоты точки поражения цели на 8.7 м.

ЛИТЕРАТУРА

1. Орлов Б.В., Ларман Э.К., Маликов В.Г. Устройство и проектирование стволов артиллерийских орудий. М.: Машиностроение, 1976. 432 с.
2. Дмитриевский А.А., Лысенко Л.Н. Внешняя баллистика. М.: Машиностроение, 2005. 608 с.
3. Серебряков М.Е. Внутренняя баллистика ствольных систем и пороховых ракет. М.: Оборонгиз, 1962. 705 с.
4. Хоменко Ю.П., Ищенко А.Н., Касимов В.З. Математическое моделирование внутриваллистических процессов в ствольных системах. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 256 с.
5. Гордон В.А., Семенова Г.А. Влияние радиальных осесимметричных колебаний ствола на начальные внешнебаллистические характеристики // Известия Орловского государственного технического университета. Серия: Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. 2008. № 4 (272). С. 3–7.
6. Игнатов А.В., Богомолов С.Н., Федянин Н.Д. Метод расчета свободных поперечных колебаний ствола автоматической пушки при заданном условии закрепления // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2017. Вып. 11. Ч. 2. С. 70–77.
7. Артемова М.О., Скоробогатский В.Н., Федоров С.В. Колебания подвижного ствола и угол вылета пули при выстреле // Экстремальные состояния вещества. Детонация. Ударные волны: сборник Материалов международной конференции XIII Харитоновские тематические научные чтения. 2011. С. 540–549.
8. Маликов Н.Ш., Слуцкий В.Е. Пространственная модель исследования динамики взаимодействия в системе «орудие – ствол – выстрел» для решения задач точности стрельбы // Труды Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева. 2014. № 5(107). С. 184–190.
9. Yang Z., Qizheng Z., Pengfei Y. Research on vibration characteristics of gun barrel based on contact model // AIP Conference Proceedings 1829. 2017. 020017. <https://doi.org/10.1063/1.4979749>.
10. Chaturvedi E. Numerical investigation of dynamic interaction with projectile and harmonic behaviour for T-finned machine gun barrels // Defence Technology. 2020. No. 16. P. 460–469. <https://doi.org/10.1016/j.dt.2019.07.018>.
11. Eichhorst Ch., Minnicino M., Hopkins D., Drysdale W.H. Inclusion of Rifling and Variable Centerline in Gun Tubes for Enhanced Modeling of Launch Dynamics // Proceedings of 26th International Symposium on Ballistics. Miami, Florida USA, 12–16 September, 2011. P. 966–975.
12. Koc M.A., Esen I., Cay Y. Dynamic analysis of gun barrel vibrations due to effect of an unbalanced projectile considering 2-D transverse displacements of barrel tip using a 3-D element technique // Latin American Journal of Solids and Structures. 2018. V. 15. No. 9. <https://doi.org/10.1590/1679-78254972>.

13. Ahmed N., Brown R.D., Hetherington J.G. Modeling of dynamic interaction between gun system components during the recoil motion of the gun // International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. 2009. P. 733–738. <https://doi.org/10.1115/DETC2009-87292>.
14. Stivnický M., Lisý P. Influence of barrel vibrations on the barrel muzzle position at the moment when the bullet exits // Advanced Military Technology. 2013. No. 8(Issue 1). P. 89–102. http://aimt.unob.cz/articles/13_01/13_01%20%288%29.pdf.
15. Azulayl I., Touatiz D., Manilovz B., Gur Y. Launch dynamics of the APAM-MP round // Proceedings of 26th International Symposium on Ballistics. Miami, Florida USA, 12–16 September, 2011. P. 956–965.
16. Keinänen H., Moilanen S., Tervokoski J., et al. Influence of rotating band construction on gun tube loading – Part I: Numerical approach // Journal of Pressure Vessel Technology. 2012. 134(4):041006. <https://doi.org/10.1115/1.4006354>.
17. Leonhardt D., Garnich M. A Finite Element Model to Predict the Influence of Asymmetries on Barrel Dynamics in Small Arms // Proceedings of 31st International Symposium on Ballistics, Hyderabad, India, 4–8 November 2019. DOI: 10.12783/ballistics2019/33139.
18. Тимошенко С.П. Прочность и колебания элементов конструкций. М.: Наука. 1975. 704 с.
19. Русяк И.Г., Липанов А.М., Ушаков В.М. Физические основы и газовая динамика горения порохов в артиллерийских системах. М.: Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2016. 456 с.
20. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2011. 640 с.
21. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 553 с.
22. Зенкевич О.С. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
23. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
24. Суфиянов В.Г. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния ствола при выстреле // Интеллектуальные системы в производстве. 2016. № 3. С. 13–17. <http://dx.doi.org/10.22213/2410-9304-2016-3-13-17>.
25. Королев С.А., Русяк И.Г., Суфиянов В.Г. Исследование влияния возмущающих факторов на траекторию движения снарядов и ракет при стрельбе с подвижного носителя // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2017. № 11-3. С. 23–33.

Статья поступила 30.06.2020

Lipanov A.M., Rusyak I.G., Sufyanov V.G. (2020) A STUDY ON THE EFFECTS OF GUN BARREL VIBRATIONS ON THE FIRING ANGLE OF A PROJECTILE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 68. pp. 80–94

DOI 10.17223/19988621/68/8

Keywords: internal ballistics, gun barrel vibrations, mathematical model, computational algorithm, firing angle, gun elevation angle.

The problem of longitudinal and transverse vibrations of an artillery gun barrel during firing is considered. Unsteady stress-strain equations for the gun barrel are solved together with equations of internal ballistics. Ballistic parameters and dynamics of the projectile motion inside a gun bore are determined using a thermodynamic approach. Formulation of the vibration problem accounts for the initial gravitational deflection of the barrel, mass forces, varying distribution of the propellant gas pressure, and the effect of moving projectile mass on gun barrel vibrations. To solve the equations for longitudinal and transverse gun barrel vibrations, difference schemes are obtained by integro-interpolation method. It has been revealed that the solution to the problem in a one-dimensional formulation is almost as accurate as the results obtained in a three-dimensional formulation. Moreover, the former case is significantly less time consuming. The decay time of

the barrel longitudinal vibrations after shot is shown to be much less than the time between shots in the burst. Deviations of the transverse barrel vibrations from the initial firing angle are more significant, and the vibration decay time is longer than the time between shots, which affects the accuracy of single shots and the dispersion of shells in the burst mode. Thus, when firing from a 30 mm gun at the range of 1 km, lateral vibrations lead to a change in the height of target hit point by 8.7 m.

Financial support. The reported study was funded by RFBR, project number 20-01-00072\20.

Aleksey M. LIPANOV (Doctor of Technical Sciences, Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Chief Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics Russian Academy of Sciences, Izhevsk, Russian Federation). E-mail: AML35@yandex.ru

Ivan G. RUSYAK (Doctor of Technical Sciences, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Missile and Artillery Sciences, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation). E-mail: primat@istu.ru

Vadim G. SUFIYANOV (Doctor of Technical Sciences, Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation). E-mail: vsufiy@mail.ru

REFERENCES

1. Orlov B.V., Larman E.K., Malikov V.G. (1976) *Ustroystvo i proektirovanie stvolov artilleriyskikh orudiy* [Arrangement and design of artillery barrels]. Moscow: Mashinostroenie.
2. Dmitrievskiy A.A., Lysenko L.N. (2005) *Vneshnyaya ballistika* [External Ballistics]. Moscow: Mashinostroenie.
3. Serebryakov M.E. (1962) *Vnutrennyaya ballistika stvol'nykh sistem i porokhovykh raket* [Internal ballistics of barrel systems and powder rockets]. Moscow: Oborongiz.
4. Khomenko Yu.P., Ishchenko A.N., Kasimov V.Z. (1999) *Matematicheskoe modelirovanie vnutriballisticheskikh protsessov v stvol'nykh sistemakh* [Mathematical modeling of interior ballistic processes in barrel systems]. Novosibirsk: Publishing House SB RAS.
5. Gordon V.A., Semenova G.A. (2008) Vliyanie radial'nykh osesimmetrichnykh kolebaniy stvola na nachal'nye vneshneballisticheskie kharakteristiki [Influence of the radial axisymmetric vibration of barrel on the initial extraballistic characteristics]. *Izvestiya Orlovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Fundamental'nye i prikladnye problemy tekhniki i tekhnologii – Izvestia Orel State Technical University: Fundamental and Applied Problems of Engineering and Technology*. 4(272). pp. 3–7.
6. Ignatov A.V., Bogomolov S.N., Fedyanin N.D. (2017) Metod rascheta svobodnykh poperechnykh kolebaniy stvola avtomaticheskoy pushki pri zadannom uslovii zakrepleniya [Calculation of free transverse vibrations of an automatic gun barrel under specified conditions]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki. – Izvestiya Tula State University. Technical Sciences*. 11. pp. 70–77.
7. Artemova M.O., Skorobogatskiy V.N., Fedorov S.V. (2011) Kolebaniya podvizhnogo stvola i ugol vyleta puli pri vystrele [Vibrations of a moving barrel and the angle of bullet departure when fired]. *Ekstremal'nye sostoyaniya veshchestva. Detonatsiya. Udarnye volny. Materialy mezhdunarodnoy konferentsii XIII Kharitonovskie tematicheskie nauchnye chteniya*. pp. 540–549.
8. Malikov N.Sh., Slutskiy V.E. (2014) Prostranstvennaya model' issledovaniya dinamiki vzaimodeystviya v sisteme «orudie – stvol – vystrel» dlya resheniya zadach tochnosti strel'by [3D model for a research on interaction dynamics within "gun-barrel-shot" system for solving the problems on the shooting accuracy]. *Trudy Nizhegorodskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. R.E. Alekseeva – Transactions of NNSTU n.a. R.E. Alekseev*. 5(107). pp. 184–190.
9. Yang Z., Qizheng Z., Pengfei Y. (2017) Research on vibration characteristics of gun barrel based on contact model. *AIP Conference Proceedings*. 1829. 020017. DOI: 10.1063/1.4979749.

10. Chaturvedi E. (2020) Numerical investigation of dynamic interaction with projectile and harmonic behaviour for T-finned machine gun barrels. *Defence Technology*. 16. pp. 460–469. DOI: 10.1016/j.dt.2019.07.018.
11. Eichhorst Ch., Minnicino M., Hopkins D., Drysdale W.H. (2011) Inclusion of rifling and variable centerline in gun tubes for enhanced modeling of launch dynamics. *Proceedings of 26th International Symposium on Ballistics*. Miami, Florida USA. pp. 966–975.
12. Koc M.A., Esen I., Cay Y. (2018) Dynamic analysis of gun barrel vibrations due to effect of an unbalanced projectile considering 2-D transverse displacements of barrel tip using a 3-D element technique. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 15(9). DOI: 10.1590/1679-78254972.
13. Ahmed N., Brown R.D., Hetherington J.G. (2009) Modeling of dynamic interaction between gun system components during the recoil motion of the gun. *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. pp. 733–738. DOI: 10.1115/DETC2009-87292.
14. Stiavnický M., Lisý P. (2013) Influence of barrel vibrations on the barrel muzzle position at the moment when the bullet exits. *Advanced Military Technology*. 8(1). pp. 89–102.
15. Azulayl I., Touatiz D., Manilovz B., Gur Y. (2011) Launch dynamics of the APAM-MP round. *Proceedings of 26th International Symposium on Ballistics*, Miami, Florida USA. pp. 956–965.
16. Keinänen H., Moilanen S., Tervokoski J., et al. (2012) Influence of rotating band construction on gun tube loading. Part I: Numerical approach. *Journal of Pressure Vessel Technology*. 134(4). 041006. DOI: 10.1115/1.4006354.
17. Leonhardt D., Garnich M. (2019) A finite element model to predict the influence of asymmetries on barrel dynamics in small arms. *Proceedings of 31st International Symposium on Ballistics*, Hyderabad, India. DOI: 10.12783/ballistics2019/33139.
18. Timoshenko S.P. (1975) *Prochnost' i kolebaniya elementov konstruksiy* [Strength and vibrations of structural elements]. Moscow: Nauka.
19. Rusyak, I.G., Lipanov A.M., Ushakov V.M. (2016) *Fizicheskie osnovy i gazovaya dinamika goreniya porokhov v artilleriysskikh sistemakh* [Physical fundamentals and gas dynamics of gunpowder combustion in artillery systems]. Moscow, Izhevsk: Institute of Computer Studies.
20. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M. (2011) *Chislennyye metody* [Numerical methods]. Moscow: Binom. Laboratoriya znaniy.
21. Samarskiy A.A. (1971) *Vvedenie v teoriyu raznostnykh skhem* [Introduction to the theory of difference schemes]. Moscow: Nauka.
22. Zienkiewicz O.S. (1971) *The Finite Element Method in Engineering Science*. London: McGraw-Hill Publishing Company.
23. Muskhelishvili N.I. (1966) *Nekotorye osnovnyye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti* [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity]. Moscow: Nauka.
24. Sufyanov V.G. (2016) Matematicheskoe modelirovaniye napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya stvola pri vystrele [Mathematical modelling of stress-strain state of gun barrel at shot]. *Intellektual'nyye sistemy v proizvodstve – Intelligent Systems in Manufacturing*. 14(3). pp. 13–17. DOI: 10.22213/2410-9304-2016-3-13-17.
25. Korolev S.A., Rusyak I.G., Sufyanov V.G. (2017) Issledovanie vliyaniya vozmushchayushchikh faktorov na traektoriyu dvizheniya snaryadov i raket pri strel'be s podvizhnogo nositelya [Study of the effect of disturbing factors on the trajectory of projectiles and rockets shooting from a moving carrier]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskyye nauki – Izvestiya Tula State University. Technical sciences*. 11. pp. 23–33.

Received: July 30, 2020

УДК 534.2

DOI 10.17223/19988621/68/9

А.В. Лун-Фу, М.А. Бубенчиков, С. Жамбаа, С.Г.-Ц. Цыдыпов**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ
ПЕРЕХОДНИКОВ И ТУПИКОВЫХ ОТВЕТВЛЕНИЙ ГАЗОПРОВОДОВ**

С помощью волнового уравнения для упругой деформации осевой линии трубы, а также метода разделения переменных и функции Крылова, найдено точное решение задачи о распространении малых деформаций по трубе, имеющей различные способы закрепления на концах выделенного фрагмента трубопровода. Представлены также компактные программы расчета форм и частот колебаний во всех рассматриваемых случаях закрепления концов трубы.

Ключевые слова: *фрагмент трубопровода, упругая волна, стоячая волна осевой линии, спектр частот, основной тон колебаний.*

Вибрации трубопроводов являются основным фактором, который выводит систему газоподачи из строя. Поэтому важными являются углубленное понимание явлений, приводящих к вибрациям, и построение эффективных математических моделей колебаний стенок трубы. В работе [1] на основе экспериментальных исследований описаны возможные причины акустически-индуцированной вибрации и предложены меры по снижению вибрационной нагрузки газопровода. В [2] рассмотрена модель вибрационного анализа трубопровода под действием пульсационной муфты давления газа. Приводится уравнение вынужденной вибрации трубопровода, позволяющее определить скорости вибрационного смещения трубопровода в зависимости от скорости подачи газа. В [3] описан метод конечных элементов, применяемый для определения виброакустических характеристик трубопроводной системы. Разработанные методики ориентированы на диаметр трубопровода, значительно меньший, чем длина акустической волны в жидкости. Результаты теоретических исследований подтверждены экспериментальными данными, полученными на гидравлическом стенде. Работа [4] посвящена обсуждению механизмов, приводящих к вибрациям трубопроводов, а также разработке мер корректирующего обслуживания трубопроводов. В [5] предлагается новый метод поиска и уплотнения отличительных признаков акустических сигналов, поступающих с микрофонных датчиков, установленных на системе охлаждения атомной электростанции лабораторного масштаба. Предлагаемый метод позволяет улучшить точность классификации данных, несмотря на громкие машинные шумы поблизости.

Таким образом, изменяющееся давление в системах подачи среды, газа или жидкости, является причиной возникновения вибраций в трубопроводе, которые при определенных условиях могут приводить к резонансным явлениям и разрушению узла технической системы.

Дифференциальное уравнение статического прогиба трубы под действием поперечной нагрузки

На рис. 1 показан пример трубы длины L , закрепленной с одного или двух концов, на которую действует поперечная нагрузка $q(x)$. Требуется найти дифференциальное уравнение, описывающее прогиб $w(x)$ оси этой полой конструкции.

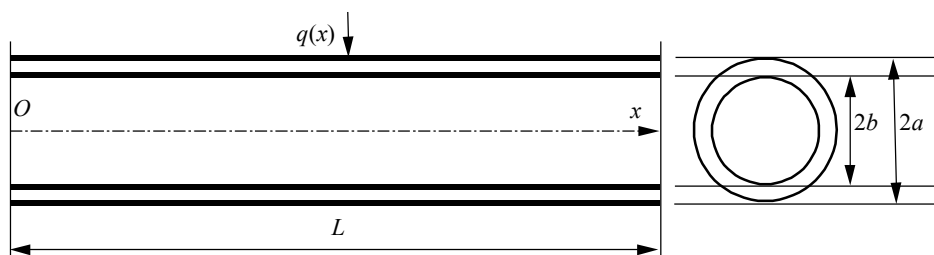


Рис. 1. Эскиз балки, выполненной конструктивно в виде цилиндрической трубы, закрепленной с одного или двух концов

Fig. 1. Beam design represented constructively as a cylindrical pipe fixed at one or two ends

Приближенная инженерная теория, пригодная для малых деформаций, основана на предположении о том, что потенциальная энергия упругих деформаций пропорциональна квадрату кривизны осевой линии и выражается интегралом

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EJ \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (1)$$

В нем $y = w(x)$ – искомое уравнение осевой линии, а выражение EJ называется коэффициентом жесткости на изгиб и состоит из произведения модуля Юнга E и геометрического момента инерции J поперечного сечения балки относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения, и перпендикулярной к плоскости изгиба.

Так, например, в справочниках можно найти, что для стали модуль Юнга равен $E = 20.6 \cdot 10^{10}$ Н/м². Для круглой цилиндрической трубы, показанной на рис. 1, площадь поперечного сечения S и момент инерции J

$$S = \pi(a^2 - b^2), \quad J = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_b^a \sin^2 \varphi r^3 dr = \pi \frac{a^4 - b^4}{4} = S \cdot \frac{a^2 + b^2}{4}. \quad (2)$$

С другой стороны, потенциальная энергия упругих деформаций (1) образовалась за счет работы A сил поперечной нагрузки $q(x)$ на перемещении $w(x)$

$$A = \int_0^L q w dx. \quad (3)$$

Таким образом, приравнявая выражения (1) и (3), получаем равенство

$$\frac{1}{2} \int_0^L EJ \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx = \int_0^L q w dx. \quad (4)$$

Из интегрального выражения (4) нужно определить функцию $w(x)$, такую, которая придает минимальное значение функционалу (4). Это достигается применением средств вариационного исчисления. Вычисляя вариацию от обеих частей равенства (4), находим:

$$\int_0^L EJ w'' \delta(w'') dx = \int_0^L q(x) \delta(w) dx. \quad (5)$$

Под вариацией $\delta(w)$ обычно подразумевается произвольная функция от переменной x , которая ограничена тем условием, что должна обращаться в ноль на концах интервала интегрирования. Кроме того, операция вариации перестановочна с операцией дифференцирования, т.е. выполняется равенство

$$\delta(w') = \frac{d}{dx} \delta(w). \quad (6)$$

Учитывая это обстоятельство, можно интеграл в левой части (5) проинтегрировать два раза по частям. Интегрируя первый раз, получим

$$\int_0^L EJ w'' \delta(w'') dx = \int_0^L EJ w'' \frac{d}{dx} \delta(w') dx = EJ w'' \delta(w') \Big|_0^L - \int_0^L \frac{d}{dx} (EJ w'') \delta(w') dx. \quad (7)$$

Точно так же, после второго интегрирования по частям, получается выражение

$$\int_0^L EJ w'' \delta(w'') dx = EJ w'' \delta(w') \Big|_0^L - \frac{d}{dx} [EJ w''] \delta(w) \Big|_0^L + \int_0^L \frac{d^2}{dx^2} (EJ w'') \delta(w) dx. \quad (8)$$

Таким образом, формула (5) после подстановки (8) приобретает вид

$$EJ w'' \delta(w') \Big|_0^L - \frac{d}{dx} [EJ w''] \delta(w) \Big|_0^L + \int_0^L \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - q(x) \right] \delta(w) dx = 0. \quad (9)$$

Вне-интегральные члены в уравнении (9) обращаются в ноль, так как считается, что вариации $\delta(w)$ и $\delta(w')$ равны нулю на концах рассматриваемой области (при $x = 0$ и при $x = L$).

Это приводит к равенству нулю интегрального члена в формуле (9), что, в свою очередь, требует равенства нулю выражения в квадратных скобках. В результате приходим к дифференциальному уравнению, определяющему функцию прогиба $w(x)$:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = q(x). \quad (10)$$

Таким образом, если нам известна поперечная нагрузка на трубу $q(x)$, то для получения прогиба $w(x)$ нужно просто решать дифференциальное уравнение (10) аналитическим или численным способом с соответствующими граничными условиями на концах. Поскольку это уравнение четвертого порядка, то нужно задавать четыре граничных условия, в качестве которых можно задавать значения функции $w(x)$ и ее производных, или их линейные комбинации, при $x = 0$ и $x = L$. Уравнение (10) является основным уравнением, описывающим поперечные колебания фрагмента трубопровода. Оно обычно приводится в учебниках по сопротивлению материалов без подробного вывода, так как уравнение (10) можно получить многими различными способами.

Отметим следующие важные для расчета формулы. Изгибающий момент $M(x)$ и поперечная сила $F(x)$, которые приложены к трубе в сечении $x = const$, определяются выражениями:

$$EJ \frac{d^2 w}{dx^2} = M(x), \quad \frac{d}{dx} \left[EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \right] = F(x). \quad (11)$$

Формулы (11) можно использовать для расчета этих величин, если известна функция прогиба $w(x)$.

Такая элементарная теория прогиба широко применяется в строительной механике при изучении прогиба мостов или других балочных конструкций под действием неподвижных или подвижных грузов при различных условиях закрепления концов конструкций.

Граничные условия при решении дифференциального уравнения (10) должны выбираться в зависимости от способа закрепления концов трубы. Так, например, если оба конца жестко зажаты, то должны выполняться следующие четыре граничных условия:

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad w(L) = 0, \quad w'(L) = 0. \quad (12)$$

Если второй конец свободен, то на нем должны быть равны нулю сила и момент, приложенные в сечении $x = L$. Тогда из (11) следует, что для трубы постоянного сечения граничные условия будут иметь вид

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad w''(L) = 0, \quad w'''(L) = 0. \quad (13)$$

То есть на свободном конце вторая и третья производная от функции прогиба $w(x)$ должны обе обращаться в ноль.

Конечно, вся теория прогиба значительно усложняется, если поперечное сечение трубы не симметрично. В этом случае не существуют чисто изгибные деформации, поскольку появляются еще крутильные деформации. Поперечные сечения трубы при этом получаются не плоскими фигурами. В таких случаях трубы совершают совместные упруго-крутильные деформации.

Поперечные изгибные колебания упругой трубы

Дифференциальное уравнение поперечных колебаний упругой трубы можно получить из основного статического уравнения (10), заменяя в нем нагрузку $q(x)$ силой инерции единичного фрагмента трубы:

$$q(x) = -\rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (14)$$

Здесь S – площадь сечения, а ρ – плотность материала трубы. Для стали эта плотность приблизительно равна $\rho \approx 8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

Таким образом, уравнение изгибных колебаний трубы имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (15)$$

Если труба имеет постоянное поперечное сечение, то коэффициент жесткости EJ можно вынести за скобку и уравнение (15) упрощается:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\rho S}{EJ} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (16)$$

Решение уравнения (16) можно искать в виде произведения двух множителей, один из которых является периодической функцией времени и колеблется с угловой частотой ω :

$$w(x, t) = \cos(\omega t + \varepsilon) W(x). \quad (17)$$

Тогда для функции $W(x)$ получается обыкновенное дифференциальное уравнение, определяющее стоячую волну осевой линии:

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - \frac{1}{L^4} \left(\frac{\rho S \omega^2 L^4}{EJ} \right) W = 0. \quad (18)$$

Выражение в круглых скобках в формуле (18) представляет собой безразмерную величину. Поэтому имеет смысл ввести для него специальное обозначение:

$$\frac{\rho S \omega^2 L^4}{EJ} = \lambda^4. \quad (19)$$

Если значение параметра λ нам известно, то из (19) можно найти частоту колебаний трубы:

$$\omega^2 = \frac{EJ\lambda^4}{\rho SL^4}, \quad \omega = \frac{\lambda^2}{L^2} \sqrt{\frac{J}{S}} \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (20)$$

Радикалы в формуле (20) имеют следующий физический смысл: $\sqrt{J/S}$ – радиус инерции поперечного сечения трубы, величина $\sqrt{E/\rho}$ имеет размерность скорости и определяет порядок величины скорости перемещения точек поперечного сечения трубы при изгибных деформациях. Для стальной трубы $\sqrt{E/\rho} \approx 13622$ м/с. Из формулы (2) также имеем, что для цилиндрической трубы с внешним радиусом a и внутренним b радиус инерции поперечного сечения конструкции будет равен $\sqrt{J/S} = \sqrt{a^2 + b^2}/2 \approx a/\sqrt{2}$. Таким образом, угловая частота поперечных колебаний трубы зависит от ее размеров и от безразмерного параметра λ , который можно найти из условий закрепления ее концов.

Стационарное уравнение для средних положений колеблющихся точек осевой линии с учетом обозначения (19) записывается в виде

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - \frac{\lambda^4}{L^4} W = 0. \quad (21)$$

Его общее решение с произвольными константами A, B, C, D выражается через гиперболические и тригонометрические функции и записывается в виде

$$W(x) = A \operatorname{ch} \lambda \frac{x}{L} + B \cos \lambda \frac{x}{L} + C \operatorname{sh} \lambda \frac{x}{L} + D \sin \lambda \frac{x}{L}. \quad (22)$$

Решения для частных случаев закрепления концов трубы

Рассмотрим решения уравнения (21) для трех случаев закрепления краев трубы: оба конца жестко зажаты; оба конца являются свободными; один конец жестко зажат, а второй является свободным.

В первом случае должны выполняться граничные условия:

$$W(0) = 0, \quad W'(0) = 0; \quad W(L) = 0, \quad W'(L) = 0. \quad (23)$$

Они означают, что осевая линия $y = W(x)$ соприкасается с прямолинейным отрезком длины L на его концах. В этом случае решение вида (22) можно составить в виде следующей линейной комбинации из двух функций:

$$W(x) = A \left[\operatorname{ch} \lambda \frac{x}{L} - \cos \lambda \frac{x}{L} \right] + B \left[\operatorname{sh} \lambda \frac{x}{L} - \sin \lambda \frac{x}{L} \right]. \quad (24)$$

Здесь, очевидно, обе функции в квадратных скобках, называемые обычно функциями Крылова, удовлетворяют уравнению (21) и обращаются в ноль вместе с первой производной при $x = 0$. Граничные условия (23) для выражения (24) на втором конце трубы (при $x = L$) запишем в виде двух равенств:

$$\begin{aligned} W(L) &= A[\operatorname{ch} \lambda - \cos \lambda] + B[\operatorname{sh} \lambda - \sin \lambda] = 0, \\ W'(L) &= A \frac{\lambda}{L} [\operatorname{sh} \lambda + \sin \lambda] + B \frac{\lambda}{L} [\operatorname{ch} \lambda - \cos \lambda] = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Таким образом, получаем однородную систему двух алгебраических уравнений относительно коэффициентов A и B :

$$\begin{aligned} A[\operatorname{ch} \lambda - \cos \lambda] + B[\operatorname{sh} \lambda - \sin \lambda] &= 0, \\ A[\operatorname{sh} \lambda + \sin \lambda] + B[\operatorname{ch} \lambda - \cos \lambda] &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Для того чтобы эта система имела ненулевое решение, необходимо, чтобы ее определитель был равен нулю, и, кроме того, можно выразить коэффициент B через коэффициент A по формуле

$$B = -A \frac{\operatorname{ch} \lambda - \cos \lambda}{\operatorname{sh} \lambda - \sin \lambda}. \quad (27)$$

Подставляя (27) в (24), получаем следующее выражение для поперечного прогиба трубы, жестко закрепленной на ее концах, с точностью до постоянного множителя A :

$$W(x) = \left[\operatorname{ch} \lambda \frac{x}{L} - \cos \lambda \frac{x}{L} \right] - \frac{\operatorname{ch} \lambda - \cos \lambda}{\operatorname{sh} \lambda - \sin \lambda} \left[\operatorname{sh} \lambda \frac{x}{L} - \sin \lambda \frac{x}{L} \right]. \quad (28)$$

Параметр λ найдем из условия равенства нулю определителя системы (26):

$$\begin{vmatrix} \operatorname{ch} \lambda - \cos \lambda & \operatorname{sh} \lambda - \sin \lambda \\ \operatorname{sh} \lambda + \sin \lambda & \operatorname{ch} \lambda - \cos \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

После вычисления и упрощения этого определителя, получаем

$$\begin{aligned} &(\operatorname{ch} \lambda - \cos \lambda)^2 - (\operatorname{sh} \lambda + \sin \lambda)(\operatorname{sh} \lambda - \sin \lambda) = \\ &\operatorname{ch}^2 \lambda - 2 \operatorname{ch} \lambda \cos \lambda + \cos^2 \lambda - \operatorname{sh}^2 \lambda + \sin^2 \lambda = 2 - 2 \operatorname{ch} \lambda \cos \lambda = 0. \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение для определения параметра λ имеет вид

$$\operatorname{ch} \lambda \cdot \cos \lambda = 1. \quad (29)$$

Уравнение (29) имеет бесконечное множество корней. Корню $\lambda = 0$ соответствует решение $W(x) = 0$. Остальные положительные корни уравнения (29) можно вычислить каким-либо численным способом. Они имеют следующие приближенные числовые значения:

$$\lambda_1 = 4.730, \quad \lambda_2 = 7.853, \quad \lambda_3 = 10.996, \quad \lambda_4 = 14.137, \quad \lambda_5 = 17.279... \quad (30)$$

Причем для больших значений $n > 3$ с хорошей точностью выполняется следующее соотношение:

$$\lambda_{n+1} \approx \lambda_n + \pi.$$

Так как для каждого значения корня λ_n существует своя частота колебаний, вычисляемая по формуле (20), и своя форма колебаний (см. (28)), то

$$W_n(x) = \left[\operatorname{ch} \lambda_n \frac{x}{L} - \cos \lambda_n \frac{x}{L} \right] - \frac{\operatorname{ch} \lambda_n - \cos \lambda_n}{\operatorname{sh} \lambda_n - \sin \lambda_n} \left[\operatorname{sh} \lambda_n \frac{x}{L} - \sin \lambda_n \frac{x}{L} \right]. \quad (31)$$

Подобные формулы можно получить и для других способов закрепления концов трубы.

Во втором случае закрепления, когда оба конца являются свободными, граничные условия сводятся к равенству нулю силы и момента (11), т.е. на обоих концах должны равняться нулю вторая и третья производная по x от функции $W(x)$:

$$W''(0) = 0, \quad W'''(0) = 0; \quad W''(L) = 0, \quad W'''(L) = 0. \quad (32)$$

Для этого случая решение уравнения колебаний (21) следует искать в виде

$$W(x) = A \left[\operatorname{ch} \lambda \frac{x}{L} + \cos \lambda \frac{x}{L} \right] + B \left[\operatorname{sh} \lambda \frac{x}{L} + \sin \lambda \frac{x}{L} \right]. \quad (33)$$

Действительно, здесь обе функции в квадратных скобках удовлетворяют условию равенства нулю второй и третьей производной при $x = 0$. Чтобы эти условия выполнялись также и при $x = L$, имеем следующую однородную систему линейных уравнений относительно коэффициентов A и B :

$$\begin{aligned} A[\operatorname{ch} \lambda - \cos \lambda] + B[\operatorname{sh} \lambda - \sin \lambda] &= 0, \\ A[\operatorname{sh} \lambda + \sin \lambda] + B[\operatorname{ch} \lambda - \cos \lambda] &= 0. \end{aligned}$$

Она оказалась в точности совпадающей с аналогичной системой (26) для трубы с двумя зажатыми концами. Поэтому корни характеристического уравнения λ_n будут совпадать с числами (30). Это говорит о том, что частоты колебаний для трубы со свободными концами будут такими же, как и для трубы с зажатыми концами. Однако формы их колебаний в этом случае будут другими. Они, в отличие от формулы (31), имеют следующий вид:

$$W_n(x) = \left[\operatorname{ch} \lambda_n \frac{x}{L} + \cos \lambda_n \frac{x}{L} \right] - \frac{\operatorname{ch} \lambda_n - \cos \lambda_n}{\operatorname{sh} \lambda_n - \sin \lambda_n} \left[\operatorname{sh} \lambda_n \frac{x}{L} + \sin \lambda_n \frac{x}{L} \right]. \quad (34)$$

Из этого решения видно, что функция $W_n(x)$ и ее производная по x не равны нулю при $x = 0$ и при $x = L$.

Третий случай: труба защемлена в точке $x = 0$, а другой ее конец свободен. Тогда граничные условия для уравнения (21) имеют вид

$$W(0) = 0, \quad W'(0) = 0; \quad W''(L) = 0, \quad W'''(L) = 0. \quad (35)$$

В этом случае решение следует искать в форме (28), т.е.

$$W(x) = A \left[\operatorname{ch} \lambda \frac{x}{L} - \cos \lambda \frac{x}{L} \right] + B \left[\operatorname{sh} \lambda \frac{x}{L} - \sin \lambda \frac{x}{L} \right]. \quad (36)$$

Приравняв к нулю в точке $x = L$ вторую и третью производные от функции (36) по переменной x , получим систему двух линейных уравнений относительно коэффициентов A и B , которая имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} A[\operatorname{ch} \lambda + \cos \lambda] + B[\operatorname{sh} \lambda + \sin \lambda] &= 0, \\ A[\operatorname{sh} \lambda - \sin \lambda] + B[\operatorname{ch} \lambda + \cos \lambda] &= 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Из ее первого уравнения находим коэффициент B :

$$B = -A \frac{\operatorname{ch} \lambda + \cos \lambda}{\operatorname{sh} \lambda + \sin \lambda}. \quad (38)$$

Раскрывая и упрощая определитель системы (37), имеем

$$(\operatorname{ch} \lambda + \cos \lambda)^2 - (\operatorname{sh}^2 \lambda - \sin^2 \lambda) = 2 + 2 \operatorname{ch} \lambda \cdot \cos \lambda = 0.$$

Отсюда следует, что величины λ_n являются корнями характеристического уравнения

$$\operatorname{ch} \lambda \cdot \cos \lambda = -1. \quad (39)$$

Они не совпадают с корнями (30). Вычисленные численным методом, они имеют следующие приближенные значения:

$$\lambda_1 = 1.875, \lambda_2 = 4.694, \lambda_3 = 7.855, \lambda_4 = 10.996, \lambda_5 = 14.137, \lambda_6 = 17.279 \dots (40)$$

Сравнение этих значений с данными предыдущих задач (30) показывает, что отличия касаются только первых трех корней, а остальные корни практически совпадают. Таким образом, для трубы, у которой один конец закреплен, а другой свободен, первые три тона колебаний имеют более низкую частоту, а остальные тоны имеют те же частоты, что и труба с двумя зажатыми или с двумя свободными концами.

Формы колебаний трубы, у которой один конец зажат, а другой конец свободен, определяются следующим выражением:

$$W_n(x) = \left[\operatorname{ch} \lambda_n \frac{x}{L} - \cos \lambda_n \frac{x}{L} \right] - \frac{\operatorname{ch} \lambda_n + \cos \lambda_n}{\operatorname{sh} \lambda_n + \sin \lambda_n} \left[\operatorname{sh} \lambda_n \frac{x}{L} - \sin \lambda_n \frac{x}{L} \right]. \quad (41)$$

Пример расчета

Предполагается, что нам известны числа λ как корни соответствующих характеристических уравнений (см. (30) и (40)):

$$\operatorname{ch} \lambda \cdot \cos \lambda = 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{ch} \lambda \cdot \cos \lambda = -1.$$

Для расчета собственных частот $f = \omega/2\pi$ по формулам (20) и соответствующих форм колебаний по выражениям (31), (34) и (41) составлена программа.

Результаты работы программы (1) представлены на рис. 2 и 3.

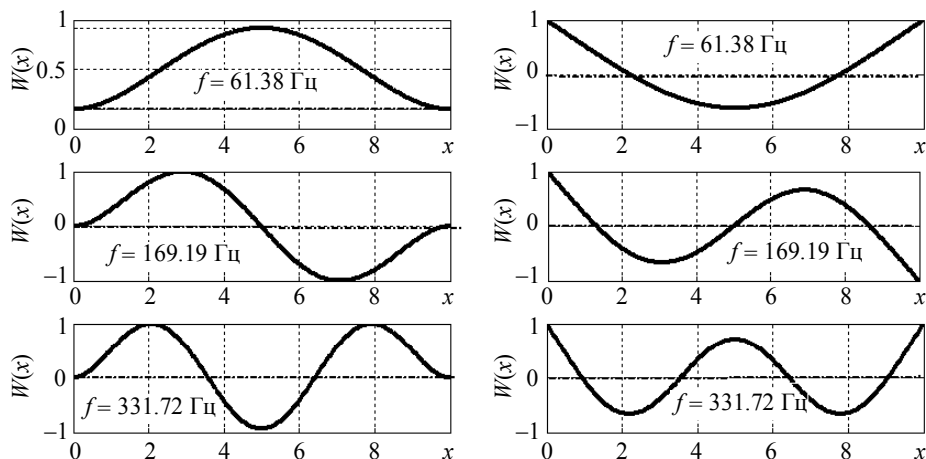


Рис. 2. Формы и частоты колебаний трубы с двумя зажатыми концами (слева) и с двумя свободными концами (справа)

Fig. 2. Shapes and frequencies of vibrations for a pipe with two fixed (at the left) and unfixed (at the right) ends

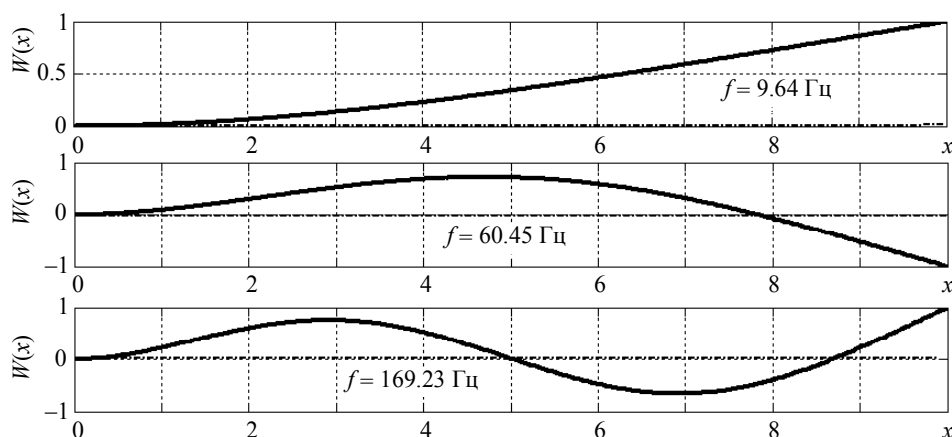


Рис. 3. Формы и частоты колебаний трубы, зажатой на одном краю и свободной на другом
Fig. 3. Shapes and frequencies of vibrations for a pipe with one fixed and another unfixed ends

Наиболее низкий тон $f = 9.64$ Гц соответствует корню $\lambda = 1.875$ (см. рис. 3)

Заключение

В рамках предположения о малости изгибных деформаций трубы, при которых форма сечений, находящихся в плоскостях, перпендикулярных осевой линии деформированного фрагмента трубопровода, остается постоянной, получено уравнение для изгибных деформаций. Такое уравнение и ранее получалось различными способами. В данной работе оно выведено с применением средств вариационного исчисления. Гиперболическое уравнение для смещения точек осевой линии трубы интегрируется аналитически с применением метода разделения переменных и функций Крылова, являющихся фундаментальными решениями соответствующего стационарного уравнения для осевой линии. Естественно, что получающиеся частоты и формы колебаний зависят от конкретных случаев закрепления концов трубы.

Исследованы все возможные варианты закрепления концов, следовательно, и распространения упругих волн по отдельному прямоугольному фрагменту трубопровода. Счетные множества корней характеристических уравнений для стоячих волн, отвечающих конкретным способам закрепления концов, определяют спектры частот колебаний. По найденной в работе связи частоты с корнями характеристического уравнения легко определяются основной тон упругих колебаний и все другие моды колебаний фрагмента трубопровода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Musaakhunova L.F., Igolkin A.A., Shabanov K.Y. The vibroacoustic characteristics research of the gas pipeline // *Procedia Engineering*. 2015. V. 106. P. 316–324. DOI: 10.1016/j.proeng.2015.06.041.
2. Tian J., Yuan C., Wu C., Liu G., Yang J. The vibration analysis model of pipeline under the action of gas pressure pulsation coupling // *Engineering Failure Analysis*. 2016. V. 66. P. 328–340. DOI: 10.1016/j.engfailanal.2016.05.017.
3. Mironova T.B., Prokofiev A.B., Sverbilov V.Y. The finite element technique for modeling of pipe system vibroacoustical characteristics // *Procedia Engineering*. 2017. V. 176. P. 681–688. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.02.313.

4. Guo B., Song S., Ghalambor A., Lin T.R. Pipeline vibration and condition based maintenance // Design, Installation and Maintenance. 2014. P. 299–337. DOI: 10.1016/B978-0-12-397949-0.00018-2.
5. Oh. S.W., Yoon D-B., Kim G.J., Bae J-H., Kim H.S. Acoustic Data condensation to enhance pipeline leak detection // Nuclear Engineering and Design. 2018. V. 327. P. 198–211. DOI: 10.1016/j.nucengdes.2017.12.006.
6. Ляв А. Математическая теория упругости. М.; Л.: Изд-во НКТП СССР, 1935. 675 с.
7. Стретт Дж.В. (лорд Рэлей). Теория звука. М.: ГИТТЛ, 1955. Т. 1. 503 с.
8. Тимошенко С.П., Янг Д.К., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 446 с.
9. Бабаков И.М. Теория колебаний. М.: ГИТТЛ, 1958. 628 с.

Статья поступила 11.03.2019 г.

Lun-Fu A.V., Bubenchikov M.A., Jambaa S., Tsydygov S.G.-Ts. (2020) DETERMINING OF TRANSVERSE VIBRATION FREQUENCIES FOR CROSSOVERS AND DEAD ENDS OF GAS PIPELINES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 68. pp. 95–105

DOI 10.17223/19988621/68/9

Keywords: pipeline segment, elastic wave, standing wave of an axial line, frequency spectrum, basic vibration mode.

The paper presents a stationary equation for bending deformations of a hollow rod derived by means of variational calculus. Further, the authors introduce into consideration an inertial term as consistent with a standard procedure and obtain the wave equation for pipe bending vibrations. Applying the method of separation of variables, the resulting hyperbolic equation of vibrations is reduced to an ordinary fourth-order differential equation for a standing wave on the axial line of the pipe. Fundamental solutions to the latter equation are referred to as the Krylov functions, while the standing wave is represented as a linear combination of two independent Krylov functions. The solution to the obtained homogeneous equation is only found at certain values of characteristic parameters which are amounted to a countable set for each case of fixed ends of the pipeline segment. Thus, the whole frequency spectrum of the pipe bending vibrations is determined, and the main vibration mode is revealed for each case of fixed pipeline ends.

Aleksandr V. LUN-FU (Gazprom Transgaz Tomsk Ltd., Tomsk, Russian Federation). E-mail: a.lunfu@gtt.gazprom.ru

Mikhail A. BUBENCHIKOV (Candidate of Physics and Mathematics, Gazprom Transgaz Tomsk Ltd., Tomsk, Russian Federation). E-mail: michael121@mail.ru

Soninbayar JAMBAA (Candidate of Physics and Mathematics, Director Centre for Fundamental Research of Mongolian University of Science and Technology, National University of Mongolia, Ulaanbaatar, Mongolia). E-mail: jsoninbayar@yahoo.com

Sevan G. TSYDYPOV (Buryat State University, Ulan-Ude, Russian Federation). E-mail: sivan77@mail.ru

REFERENCES

1. Musaakhunova L.F., Igolkin A.A., Shabanov K.Y. (2015) The vibroacoustic characteristics research of the gas pipeline. *Procedia Engineering*. 106. pp. 316–324. DOI: 10.1016/j.proeng.2015.06.041.
2. Tian J., Yuan C., Wu C., Liu G., Yang J. (2016) The vibration analysis model of pipeline under the action of gas pressure pulsation coupling. *Engineering Failure Analysis*. 66. pp. 328–340. DOI: 10.1016/j.engfailanal.2016.05.017.
3. Mironova T.B., Prokofiev A.B., Sverbilov V.Y. (2017) The finite element technique for modeling of pipe system vibroacoustical characteristics. *Procedia Engineering*. 176. pp. 681–688. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.02.313.

4. Guo B., Song S., Ghalambor A., Lin T.R. (2014) Pipeline vibration and condition based maintenance. *Design, Installation and Maintenance*. pp. 299–337. DOI: 10.1016/B978-0-12-397949-0.00018-2.
5. Oh S.W., Yoon D-B., Kim G.J., Bae J-H., Kim H.S. (2018) Acoustic data condensation to enhance pipeline leak detection. *Nuclear Engineering and Design*. 327. pp. 198–211. DOI: 10.1016/j.nucengdes.2017.12.006.
6. Love A.A (1892) *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Vol. 1*. Cambridge: CambridgeUniversity Press.
7. Strutt Rayleigh J.W. (1955) *Theory of Sound. Vol. 1*. Ann Arbor: The University of Michigan Library.
8. Weaver Jr.W., Timoshenko S.P., Young. D.H. (1990) *Vibration Problems in Engineering, 5th Edition*. Hoboken: John Wiley & Sons.
9. Babakov I.M. (1964) *Theory of Vibrations*. Tonopah: Foreign Technology Division.

Received: March 11, 2019

УДК: 622.276.26, 532.54.
DOI 10.17223/19988621/68/10

А.А. Орлов, А.С. Русских

ВОССТАНОВЛЕНИЕ АБСОЛЮТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ЗАЛЕЖИ УГЛЕВОДОРОДОВ С ВТОРИЧНЫМИ ФИЛЬТРАЦИОННО-ЕМКОСТНЫМИ СВОЙСТВАМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Представлены результаты по восстановлению абсолютной проницаемости залежи углеводородов с вторичными фильтрационно-емкостными свойствами (ВФЕС) с использованием метода вейвлет-преобразований. Приведены результаты настройки секторной гидродинамической модели залежи углеводородов на исторические данные работы скважин. Использование метода вейвлет-преобразований для восстановления куба абсолютной проницаемости для гидродинамического моделирования имеет перспективы применения на месторождениях, сложенных коллекторами с ВФЕС.

Ключевые слова: *вторичные фильтрационно-емкостные свойства, абсолютная проницаемость, вейвлет-преобразование, гидродинамическое моделирование.*

Вследствие истощения запасов углеводородов «традиционных» поровых коллекторов возникла необходимость изучения и оценки перспектив разработки «нетрадиционных» коллекторов, обладающих вторичными фильтрационно-емкостными свойствами (ВФЕС). Примером таких коллекторов могут служить залежи углеводородов Бажено-Абалкского комплекса одного из месторождений Краснотеннинского свода. Их уникальность связана со сложным геологическим строением, представленным трещиновато-кавернозным коллектором, физические параметры которого, как и процессы, происходящие в нем, до сих пор не изучены в достаточной степени.

Анализ информации по геологическому строению коллекторов Бажено-Абалкского комплекса позволил выявить его основные особенности:

- Поликомпонентный состав скелета породы;
- Сложная структура пустотного пространства при низко пористой слабопроницаемой матрице;
- Малая эффективная толщина единичных прослоев и свит в целом;
- Невыдержанное и слабо прогнозируемое по латерали распространение;
- Залежи структурным планом практически не контролируются, контуры их довольно условны;
- Водонефтяные контакты в залежах не установлены (либо отсутствуют);
- Низкая плотность геологических и извлекаемых запасов углеводородов.

Из-за указанных особенностей геологического строения коллекторов геофизические и геологические методы их исследования не дают результатов, поэтому стандартные подходы к бурению, разработке и эксплуатации залежей, сложенных коллекторами такого типа, будут не эффективны. При этом высокая продуктивность и значительные объемы запасов делают их привлекательными для разработки.

Создание гидродинамической модели залежи углеводородов в гидродинамическом симуляторе является одним из важнейших этапов проектирования разработки месторождений. Для формирования концепции разработки необходимо на основании анализа имеющихся данных построить гидродинамическую модель, которая адекватно воспроизводила бы процессы, происходящие в пласте в ходе разработки.

Для коллекторов с ВФЕС при описании пластовой системы и фильтрации флюидов в симуляторе [1] используется гидродинамическая модель двойной среды.

В отличие от модели, описывающей фильтрацию с одномерной средой в пористом пласте-коллекторе, она имеет следующие особенности:

1) трещиновато-пористые коллекторы представляют собой множество пористых блоков (матрицы), разделенных или частично разделенных системой трещин;

2) система трещин и блоки матрицы пор рассматриваются как две сплошные среды, вложенные одна в другую;

3) движение жидкости по матрицам и трещинам описывается классическими уравнениями фильтрации;

4) для описания перетока между матрицами и трещинами вводится дополнительный сток/источник;

5) для описания физико-химических свойств флюида используется модель нелетучей нефти («черной нефти») [2].

Модель «черной нефти» [3] содержит три фазы: нефть (o), воду (w) и газ (g). Вода и нефть не смешиваются между собой и не обмениваются массами. Предполагается, что газ растворим в воде и нефти.

Система уравнений этой модели включает в себя уравнения сохранения массы и уравнения движения Дарси для каждой из фаз. Движение среды описывается с помощью преобразований Эйлера.

Система дифференциальных уравнений сохранения массы, описывающая трехфазное трехмерное течение жидкости для описания фильтрации в матрице пор и системе трещин (для матрицы пор – m и системы трещин – f), имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \phi_c \frac{S_{c,w}}{B_{c,w}} \right\} = \nabla \{ K_{ce} \lambda_{c,w} (\nabla p_{c,w} - p_{c,w} \nabla D) \} + q_{c,w,sc} \pm \tau_{mf,w}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \phi_c \frac{S_{c,o}}{B_{c,o}} \right\} = \nabla \{ K_{ce} \lambda_{c,o} (\nabla p_{c,o} - p_{c,o} \nabla D) \} + q_{c,o,sc} \pm \tau_{mf,o}; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \phi_c \frac{S_{c,g}}{B_{c,g}} + \phi_c R_{c,o} \frac{S_{c,o}}{B_{c,o}} \right\} = \\ & = \nabla \{ K_{ce} \lambda_{c,g} (\nabla p_{c,g} - p_{c,g} \nabla D) + R_{c,o} K_{ce} \lambda_{c,o} (\nabla p_{c,o} - p_{c,o} \nabla D) \} \pm \\ & \pm q_{c,g,sc} \pm \tau_{mf,g} R_{c,o} \tau_{mf,o}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $p = (w, o, g)$ – фаза; ϕ_c – пористость (д. ед.); $S_{c,w}, S_{c,o}, S_{c,g}$ – насыщенность воды, нефти и газа соответственно (д. ед.); $B_{c,p}$ – коэффициент объемного расширения (д. ед.); K_{ce} – абсолютная проницаемость пласта (мкм²); $\lambda_{c,p} = \frac{k_{c,rp}}{B_{c,p} \mu_{c,p}}$ –

мобильность (д. ед.); $k_{c,fp}$ – относительная фазовая проницаемость (д. ед.); $\mu_{c,p}$ – вязкость (сПз); $R_{c,o}$ – коэффициент растворимости газа в нефти ($\text{м}^3/\text{м}^3$); $q_{c,g,sc}$ – источник; $\tau_{mf,p}$ – дополнительный член, учитывающий переток между матрицей и трещиной.

Переток между матрицей и трещиной осуществляется за счет трех основных механизмов:

- расширения нефти;
- капиллярной пропитки;
- гравитационного дренирования.

Для замыкания системы уравнений (1) – (3) необходимы следующие соотношения:

- по капиллярным давлениям для каждой фазы:

$$p_{c,w} = p_{c,o} + p_{c,cwo}; \quad (4)$$

$$p_{c,g} = p_{c,o} + p_{c,cwg},$$

- по насыщенности фаз:

$$S_{w,c} + S_{c,o} + S_{c,g} = 1. \quad (5)$$

Под краевыми условиями имеются в виду граничные условия (режимы работы) на границе моделируемой области и на каждом из источников, представляющих скважины:

$$p_{c,o} |_{\Gamma} = p_{c,o}^0(\Gamma, t); \quad (6)$$

$$S_{c,w} |_{\Gamma} = S_{c,w}^0(\Gamma, t); \quad (7)$$

$$S_{c,g} |_{\Gamma} = S_{c,g}^0(\Gamma, t). \quad (8)$$

Кроме того, учитывается условие непротекания жидкости через границу:

$$K_{ce} \lambda_{c,p} (\nabla p_{c,p} - \rho_{c,p} g \nabla D), n |_{\Gamma} = 0, \quad (9)$$

где $p = \{w, o, g\}$.

Начальными условиями является распределение значений пластового давления и насыщенности фаз ($S_{c,w}, S_{c,o}, S_{c,g}$) в момент времени $t = 0$ для матрицы пор (m) и системы трещин (f). Задание пластового давления $p_{c,o}$ (мПа), насыщенности фаз и газосодержания $R_{c,o}$ ($\text{м}^3/\text{м}^3$) является условием статистического равновесия фаз, определяется распределением давления в залежи для каждой фазы по гидростатическому закону и зависит только от распределения фаз по глубине пласта:

$$\frac{\partial p_{c,o}}{\partial z} = p_{c,o} g; \quad (10)$$

$$\frac{\partial p_{c,w}}{\partial z} = p_{c,w} g; \quad (11)$$

$$\frac{\partial p_{c,g}}{\partial z} = p_{c,g} g. \quad (12)$$

Одним из важнейших входных параметров гидродинамической модели является абсолютная проницаемость K_{ce} пласта, влияющая на динамику пластового

давления в залежи и, как следствие, на потенциал объекта (объем добываемой жидкости).

Восстановить проницаемость пласта в гидродинамической модели для коллекторов с ВФЕС стандартными способами не представляется возможным. В связи с этим, решено было использовать альтернативный метод восстановления кубов проницаемости. С учетом специфики поставленной задачи нами выбран метод вейвлет-преобразований, который является информативным, эффективным инструментом анализа структурных поверхностей пластов [4]. В отличие от метода Мурея [5] он учитывает структурную составляющую залежей и не зависит от инклинометрических поскважинных замеров, которые могут иметь значительную погрешность. Данный метод хорошо зарекомендовал себя при решении задач, связанных с выделением локальных составляющих структурной поверхности пласта, таких, как анализ локализации остаточных запасов нефти, обладающих высокой плотностью.

Целью данной работы являлось восстановление куба абсолютной проницаемости залежи углеводородов с ВФЕС методом вейвлет-преобразований для дальнейшего использования в гидродинамической модели объекта, верификация полученной модели путем воспроизведения динамики работы скважин, настройки на замеры забойных давлений, а также обоснование возможности ее применения для кратко- и среднесрочного прогнозирования распространения продуктивных зон по площади, позволяющего более эффективно разрабатывать объект.

Объект исследования

Поскольку выбранный нами объект разработки одного из месторождений Краснотенинской группы обладает значительными размерами, в качестве тестового элемента был выбран сектор, соответствующий следующим критериям:

- наличием скважин с длительной историей эксплуатации и наиболее полно охарактеризованных исходной информацией (замерами забойных давлений, актами технического состояния скважин и т.д.);
- геологическое строение залежи должно быть типичным для всего пласта;

Перечисленным критериям соответствует участок залежи в районе скважины № 3 (рис. 1).

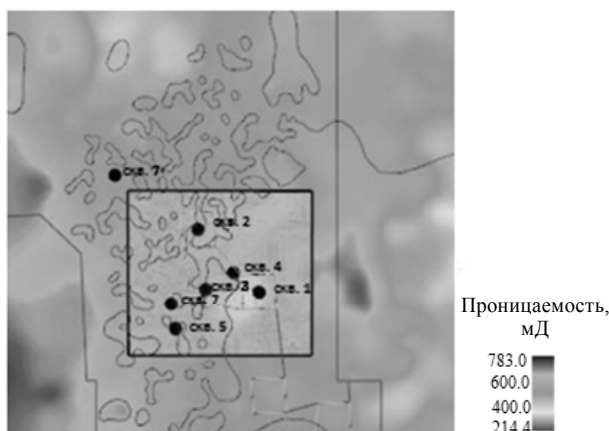


Рис. 1. Выбор сектора моделирования
Fig. 1. Selecting of a sector for modeling

Алгоритм вейвлет-преобразований структурной поверхности пласта

Под вейвлет-преобразованием [6, 7] понимают разложение сигнала по системе вейвлетов-функций, каждая из которых является сдвинутой и масштабированной (сжатой или растянутой) копией одной функции – порождающего вейвлета. На уровне вейвлет-коэффициентов вейвлет-разложение можно представить в виде

$$f(x) = cA_0 \rightarrow \{cA_1, cD_1\} \rightarrow \{cA_2, cD_2, cD_1\} \rightarrow \dots \rightarrow \{cA_N, cD_{N-1}, \dots, cD_1\}, \quad (13)$$

где cA_i – коэффициенты аппроксимации глубины разложения i ; cD_i – детализирующие коэффициенты глубины разложения i .

Вейвлет-преобразованием функции является нахождение коэффициентов $\{cA_N, cD_{N-1}, cD_1\}$.

Вейвлет-анализ включает следующие этапы:

1. Выбор начального приближения функции. Если функция $f(x)$ задается массивом значений, то эти значения берутся за начальное приближение.

2. Выбор точности разложения и определение коэффициентов разложения $\{cA_N, cD_{N-1}, cD_1\}$.

Выделяют два вида вейвлет-преобразований: непрерывные и дискретные. Для работы с дискретными сигналами применяется метод преобразования, известный как алгоритм Малла [5].

Он заключается в следующем: исходный сигнал раскладывается на две составляющие – карту локальной составляющей и сглаженную уменьшенную версию оригинала. Этот процесс может повторяться многократно, причем каждый раз в качестве входящего сигнала используется сглаженная версия с предыдущего шага, то есть функция $f_0(x)$, согласно концепции кратномасштабного анализа, декомпозируется на две функции $f_1(x)$ – тренд и $e_1(x)$ – локальную составляющую [8, 9]:

$$f_0(x) = f_1(x) + e_1(x) = \sum_k c_{1,k} \varphi_{1,k}(x) + \sum_k d_{1,k} \psi_{1,k}(x), \quad (14)$$

где $\varphi_{1,k}(x)$ – масштабирующая функция, $\psi_{1,k}(x)$ – вейвлет-функция.

С учетом того, что масштабирующая функция образует базис соответствующего пространства, из

$$\begin{aligned} (\varphi_{m+1,k}(x)) &= \sqrt{\sum_p h_p \varphi_{m,p-2k}(x), \varphi_{m,n-2k}(x)} = \\ &= \sqrt{\sum_p h_p (\varphi_{m,p-2k}(x), \varphi_{m,n-2k}(x))} = \sqrt{2} h_n \end{aligned} \quad (15)$$

можно получить

$$\begin{aligned} c_{1,k} &= (\varphi_{1,k}(x), f_1(x)) = (\varphi_{1,k}(x), f_0(x) - e_1(x)) = \left(\varphi_{1,k}(x), \sum_n c_{0,n}(x) \right) = \\ &= \sum_{n \in Z} c_{0,n} (\varphi_{1,k}(x), \varphi_{0,n}(x)) = \sqrt{2} \sum_{n \in Z} c_{0,n} h_{n+2k}. \end{aligned} \quad (16)$$

При этом возможно итеративное вычисление коэффициентов $c_{j,k}$ и $d_{j,k}$ без непосредственного использования функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. По аналогии с выражением (3) для произвольного j можно записать

$$c_{j,k} = \sqrt{2} \sum_n c_{j-1,n} h_{n+2k}; \quad (17)$$

$$d_{j,k} = \sqrt{2} \sum_n d_{j-1,n} g_{n+2k}. \quad (18)$$

Таким образом, были получены две новые последовательности полностью дискретного процесса декомпозиции.

Последовательности h_n и g_n называются фильтрами и зависят от выбора вейвлета. Поскольку процесс декомпозиции дискретный, то для решения рассматриваемой задачи необходимо анализировать сигнал, представляющий собой функцию двух переменных [8, 9].

В нашем случае алгоритм вейвлет-разложения матрицы можно представить в виде схемы (рис. 2).

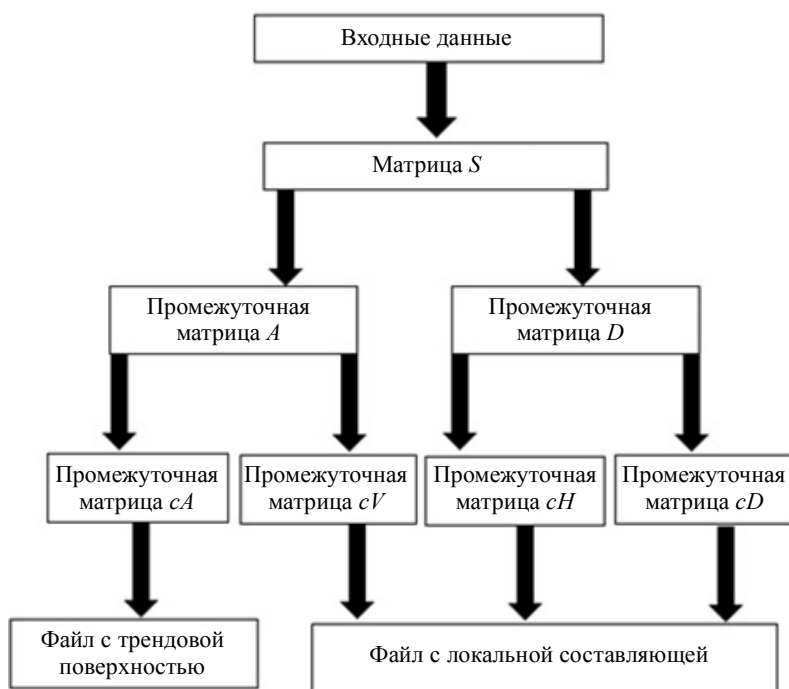


Рис. 2. Схема проведения преобразований

Fig. 2. Block diagram for transformations

Пусть $S = \{S_{i,j}\}$ – матрица, значения элементов которой соответствуют значениям в узлах сеточной области гидродинамической модели, представляющей карту структурной поверхности пласта. Пусть по оси OX число узлов – N , по оси OY – M . Вейвлет-разложение (декомпозиция) для сеточной области S проводится по формулам

$$A_{ij} = \sum_{k=0}^l h_k s_{2i+k,j}; \quad (19)$$

$$D_{ij} = \sum_{k=0}^l g_k s_{2i+k,j}; \quad (20)$$

$$cA_{ij} = \sum_{k=0}^l h_k A_{2i+k,j}; \quad (21)$$

$$cV_{ij} = \sum_{k=0}^l g_k A_{2i+k,j}; \quad (22)$$

$$cH_{ij} = \sum_{k=0}^l h_k D_{2i+k,j}; \quad (23)$$

$$cD_{ij} = \sum_{k=0}^l h_k D_{2i+k,j}. \quad (24)$$

В результате получаем матрицы: cA – усредненные значения исходной карты структурной поверхности, уточняющие коэффициенты: cV – «по вертикали»; cH – «по горизонтали»; cD – «по диагонали».

Уровень разложения выбирают в зависимости от того, какую информацию необходимо получить. Если требуется узнать о мелких куполах структурной поверхности пласта, то ограничиваются первым уровнем разложения. Если интересуют только крупные купола, то необходимо продолжать декомпозицию.

Вейвлет-преобразование дает возможность представлять поверхность в различных масштабах, таким образом, выявлять как мелкие, так и крупные локальные структурные изменения кровли пласта. Моделирование проницаемости осуществлялось на основе нормировки карты вейвлетов третьего уровня по линейной зависимости от амплитуды:

$$k = 0.16Z + 0.011, \quad (25)$$

где k – абсолютная проницаемость (мкм^2), Z – амплитуда карты вейвлет-разложений (м).

Все вейвлет-преобразования карты структурной поверхности Бажено-Абалакских отложений были выполнены в программном продукте компании ROXAR, предназначенном для геологического моделирования, и были представлены в трехмерном виде (в виде кубов). Значения для куба абсолютной проницаемости при расчете с использованием уравнения (14) были взяты по модулю, так как они не могут принимать отрицательных значений.

Анализ полученных результатов

Полученные с помощью вейвлет-преобразований значения коэффициентов подбирались в ходе настройки гидродинамической модели на исторические данные на симуляторе.

С их использованием получено детальное представление амплитуды структурной поверхности Бажено-Абалакских отложений, которое соответствует геологическому представлению (рис. 3).

Из рис. 3 видно, что для коллекторов с ВФЕС Бажено-Абалакского комплекса отложений наиболее продуктивными являются зоны структурных нарушений – зоны прогибов и куполов, обладающих повышенной трещиноватостью. Полученные карты, помимо восстановления куба абсолютной проницаемости для гидродинамического моделирования, можно использовать также для прогнозирования вариантов разработки и расстановки проектного фонда скважин в продуктивных зонах.

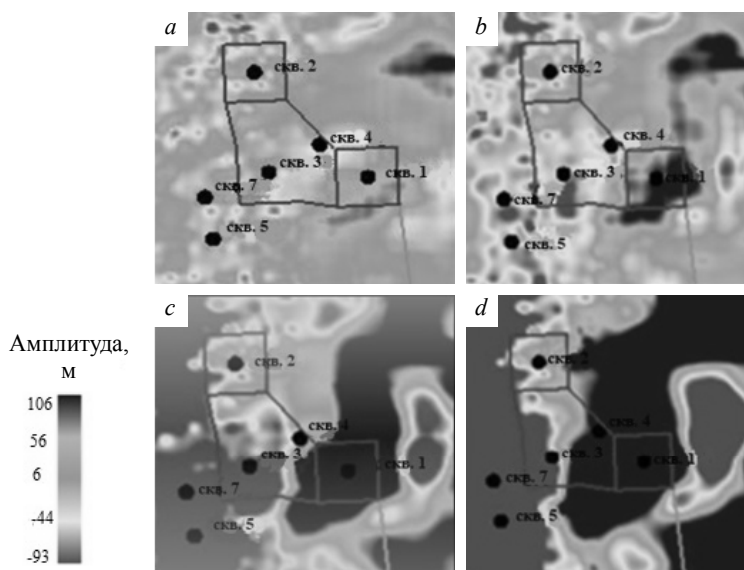


Рис. 3. Нормировки карты вейвлетов по линейной зависимости от амплитуды: *a* – первого уровня; *b* – второго уровня; *c* – третьего уровня; *d* – четвертого уровня
Fig. 3. Normalization of a map of wavelets according to a linear dependence on the amplitude: the (a) first, (b) second, (c) third, and (d) fourth level

Основной задачей адаптации гидродинамической модели для коллекторов с ВФЕС являлся подбор коэффициентов линейной зависимости проницаемости от локальной составляющей структурной поверхности и настройка их на исторические данные работы скважин. С помощью вейвлет-преобразований нами получены карты вейвлет-разложений разной детальности. В ходе гидродинамических расчетов выяснилось, что лучшие результаты настройки модели получаются с использованием карты вейвлетов третьего уровня и линейной зависимости от данной карты, по которой отстраивается куб абсолютной проницаемости. Коэффициенты, влияющие на точность этой функции, подобраны эмпирически (путем сравнения полученных результатов расчета с историческими данными).

На рис. 4 и 5 приведены результаты настройки коэффициентов на исторические показатели добычи нефти секторной модели и секторной поскважинной настройки на исторические замеры забойных давлений на последнюю дату.

Как видно из рис. 4, результаты расчетов и исторические данные практически совпадают, а поскважинная настройка сектора на исторические замеры забойных давлений (рис. 5) показала, что расчетные данные лежат в пределах 20 %-й зоны [10], следовательно, использование метода вейвлет-преобразований позволило

адекватно воспроизвести динамику работы скважин в соответствии с требованиями регламента, что позволяет сделать заключение о пригодности данной гидродинамической модели для расчета прогнозных вариантов, так как при адаптации удалось воспроизвести энергетическое состояние объекта и динамику добычи нефти.

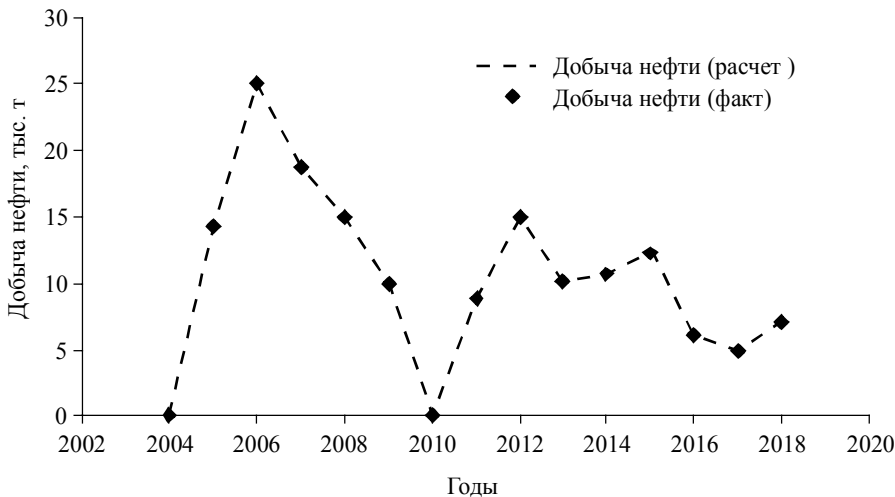


Рис. 4. Результаты настройки на исторические показатели добычи нефти секторной модели
Fig. 4. Results of the history matching in oil production

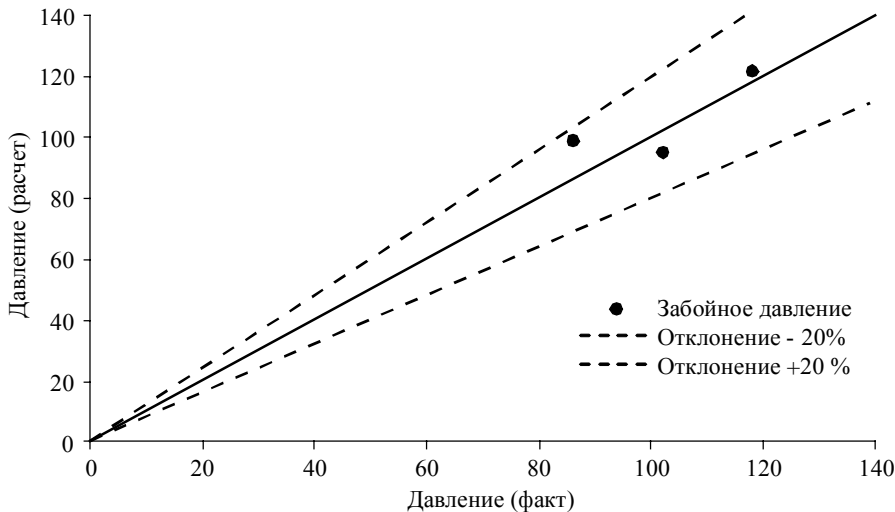


Рис. 5. Результаты секторной поскважинной настройки на исторические замеры забойных давлений на последнюю дату
Fig. 5. Results of the downhole historical matching for bottom-hole pressure measurements on the last date

Заключение

Использование метода вейвлет-преобразований для восстановления куба абсолютной проницаемости сектора гидродинамической модели Бажено-Абалакских отложений одного из месторождений Краснотеннинского свода показало возможность корректной настройки гидродинамической модели, а также возможность расчета прогнозных показателей для коллекторов с ВФЕС.

Полученные карты амплитудных отклонений позволяют сделать обоснованный прогноз продуктивных зон по площади Бажено-Абалакских отложений, что позволит эффективнее разместить проектный фонд скважин по площади объекта.

Показано, что использование метода вейвлет-преобразований для восстановления куба абсолютной проницаемости для гидродинамического моделирования имеет перспективы применения на месторождениях, сложенных коллекторами с ВФЕС.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколов В.С. Моделирование разработки нефтяных и газовых месторождений: учебное пособие для студентов образовательных организаций высшего образования, обучающихся по направлению подготовки магистратуры «Нефтегазовое дело». Тюмень: ТюмГНГУ, 2014. 142 с.
2. Douglas J.Jr., Peaceman D.W., Rachford H.H.Jr. A method for calculating multi-dimensional immiscible displacement // Trans. SPE AIME 1959. V. 216. P. 297–306.
3. Zgangxin Chen, Gyanrem Huan, Yuanle Ma. Computational methods for multiphase flows in porous media. Dallas, Texas: Southern Methodist University, 2006.
4. Антипин М.А., Плиткина Ю.А., Девятков А.П., Веришнина А.В. Развитие аппарата структурного анализа в рамках методики локализации остаточных запасов нефти на примере Покровского месторождения Самарской области // Оптимизация технологий разработки нефтяных месторождений: сб. 2008. № 2. С. 5–11.
5. Бриллиант Л.С., Клочков А.А., Антипин М.А. Методология исследований структуры остаточных запасов нефти на примере объекта БВ₈² Варьеганского месторождения // Нефтяное хозяйство. 2005. № 1. С. 98–100.
6. Бюшгенс С.С. Дифференциальная геометрия. М.: Изд-во ЛКИ, 2008. 304 с.
7. Новиков С.П., Фоменко А.Т. Элементы дифференциальной геометрии и топологии. М.: Наука, 1987. 431 с.
8. Шумилов Б.М. Алгоритм с расщеплением вейвлет-преобразования эрмитовых кубических сплайнов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2010. № 4(12). С. 45–55
9. Воробьев В.П., Грибунин В.Г. Теория и практика вейвлет-преобразований. СПб.: Изд-во ВУС, 1999. 204 с.
10. Петухов А.П. Введение в теорию базисов всплесков. СПб.: СПбГУ, 1999. 132 с.
11. Временный регламент оценки качества и приемки трехмерных цифровых геолого-гидродинамических моделей, представляемых пользователями недр в составе технических проектов разработки месторождений углеводородного сырья на рассмотрение ЦКР Роснедр по УВС: протокол ЦКР Роснедр по УВС от 19 апреля 2012 г. № 5370.

Статья поступила 15.05.2020

Orlov A.A., Russkikh A.S. (2020) RECOVERY OF ABSOLUTE PERMEABILITY OF HYDROCARBON DEPOSITS WITH SECONDARY POROSITY–PERMEABILITY PROPERTIES USING WAVELET TRANSFORMS *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 68. pp. 106–117

DOI 10.17223/19988621/68/10

Keywords: secondary porosity–permeability properties, absolute permeability, wavelet transform, hydrodynamic modeling.

Due to depletion of hydrocarbon reserves in “traditional” porous reservoirs, it becomes necessary to study and evaluate the prospects for the development of reservoirs with secondary porosity–permeability properties (SPP).

Permeability in reservoirs with SPP is described in a hydrodynamic simulator using a dual-environment model represented as a set of porous blocks (matrix) separated by a system.

One of the most important hydrodynamic model (HDM) parameters is the absolute reservoir permeability coefficient. However, recovery of the latter for reservoirs with SPP by standard methods is impossible. The purpose of this research is to restore a cube of the absolute permeability of a hydrocarbon reservoir with SPP using the wavelet transform method which accounts for the structure, to reproduce well dynamics in the HDM, and to analyze the applicability of the obtained maps when predicting distribution of productive zones.

Wavelet-decomposition maps give a detailed description of the structural surface amplitude corresponding to the geological representation: the most productive zones are those with structural failures such as bending or dome.

The downhole historical matching for bottom-hole pressure measurements and the dynamics of the work implemented using the wavelet transform method are performed in accordance with regulation requirements, which allow one to use a hydrodynamic model in the calculation of predictive options.

Aleksey A. ORLOV (Doctor of Technical Sciences, Professor, Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: orlovaa@tpu.ru

Anastasiya S. RUSSKIKH (Lead Engineer, Tyumen Branch of SurgutNIPIneft of Surgutneftegas, Tyumen, Russian Federation). E-mail: anastasiya_russkikh@bk.ru

REFERENCES

1. Sokolov V.S. (2014) *Modelirovanie razrabotki neftyanykh i gazovykh mestorozhdeniy: uchebnoe posobie dlya studentov obrazovatel'nykh organizatsiy vysshego obrazovaniya, obuchayushchikhsya po napravleniyu podgotovki magistratury "Neftegazovoe delo"* [Modeling of the oil and gas reservoir engineering: a textbook for students of institutions of higher education studying in the direction of master's in Oil and Gas Engineering]. Tyumen: TSOGU.
2. Douglas J.Jr., Peaceman D.W., Rachford H.H.Jr. (1959) A method for calculating multi-dimensional immiscible displacement. *Petroleum Transactions, AIME*. 216. pp. 297–306. DOI: 10.2118/1327-G.
3. Chen Z., Huan G., Ma Y. (2006) *Computational Methods For Multiphase Flows In Porous Media*. Dallas, Texas: Southern Methodist University
4. Antipin M.A., Plitkina Yu.A., Devyatkov A.P., Vershinin A.V. (2008) Razvitie apparata strukturnogo analiza v ramkakh metodiki lokalizatsii ostatochnykh zapasov nefti na primere Pokrovskogo mestorozhdeniya Samarskoy oblasti [Development of the apparatus of structural analysis in the framework of a methodology for localizing residual oil reserves using the example of the Pokrovsky field in the Samara region]. *Optimizatsiya tekhnologiy razrabotki neftyanykh mestorozhdeniy*. 2. pp. 5–11.

5. Brilliant L.S., Klochkov A.A., Antipin M.A. (2005) Metodologiya issledovaniy struktury ostatochnykh zapasov nefi na primere ob'ekta BV82 Var'eganskogo mestorozhdeniya [A methodology for studying the structure of residual oil reserves using the example of the BV₈₂ object of the Varyogansk field]. *Neftyanoe hozyaystvo – Oil industry*. 1. pp. 98–100.
6. Byushgens S.S. (2008). *Differentsial'naya geometriya* [Differential geometry]. Moscow: LKI Publishing House.
7. Novikov S.P., Fomenko A.T. (1987) *Elementy differentsial'noy geometrii i topologii* [Elements of differential geometry and topology]. Moscow: Nauka.
8. Shumilov B.M. (2010) Algoritm s rasshchepleniem veyvlet-preobrazovaniya ermitovykh kubicheskikh splaynov [An algorithm with splitting of the wavelet transform of Hermitian cubic splines]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(12). pp. 45–55.
9. Vorob'ev V.P., Gribunin V.G. (1999) *Teoriya i praktika veyvlet-preobrazovaniy* [Theory and practice of wavelet transforms]. Saint Petersburg: VUS Publishing House.
10. Petukhov A.P. (1999) *Vvedenie v teoriyu bazisov vspleskov* [Introduction to the theory of burst bases]. Saint Petersburg: Saint Petersburg State University.
11. *Vremennyy reglament otsenki kachestva i priemki trekhmernykh tsifrovyykh geologo-gidrodinamicheskikh modeley, predstavlyaemykh pol'zovatelyami neдр v sostave tekhnicheskikh proektov razrabotki mestorozhdeniy uglevodorodnogo syr'ya na rassmotrenie CKR Rosnedr po UVS: protokol CKR Rosnedr po UVS ot 19 aprelya 2012 g. № 5370* [Temporary regulations for assessing the quality and acceptance of three-dimensional digital geological and hydrodynamic models submitted by subsoil users as a part of technical projects for the development of hydrocarbon deposits for consideration by RCRC Rosnedr for HCS: protocol of CCR Rosnedr for HCS dated April 19, 2012 No. 5370].

Received: May 15, 2020

УДК 359.3

DOI 10.17223/19988621/68/11

В.М. Пестренин, И.В. Пестренина, С.В. Русаков, Г.В. Бузмакова**ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ СКОРОСТИ ПНЕВМАТИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КРУПНОГАБАРИТНОЙ ОБОЛОЧКИ НА ЕЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ¹**

Рассматривается разворачивание внутренним давлением из упакованного состояния упругой цилиндрической оболочки за конечное время. Показано, что пневматическое нагружение упругой конструкции сопровождается ее колебаниями с возрастающей частотой и убывающей во времени амплитудой. Выявлено, что период колебаний оболочки зависит от текущего давления нагружения и не зависит от скорости подачи давления, практически совпадая с периодом колебаний статически нагруженной таким же давлением оболочки.

Ключевые слова: *крупногабаритные оболочки, колебания, геометрически нелинейная модель упругого тела, метод конечных элементов, разворачивание пневматическое.*

Пневматические крупногабаритные конструкции широко применяются в современной строительной практике. Они изготавливаются из мягких материалов (тканей, пленок) и рассчитываются по безмоментной теории оболочек. К примеру, это здания, ангары для хранилищ, спортивные и выставочные павильоны, опалубки, емкости для хранения жидкости и т.п. [1–4]. Избыточное давление в таких конструкциях 0.001–0.1 ат. Крупногабаритные оболочечные конструкции планируется применять также в условиях космоса. Они могут доставляться на орбиту в упакованном состоянии и разворачиваться там внутренним давлением. Прогнозируется их использование в качестве рефлекторов космических телескопов и антенн [2, 5–7], зеркальных и линзовых концентраторов солнечного излучения [8, 9], модулей жизнеобеспечения космических экипажей [10, 11]. В космических условиях давление внутри оболочечной конструкции диктуется физиологическими возможностями человека и составляет 0.3–1 ат. При таком избыточном давлении изготовление крупногабаритной конструкции из мягкой ткани представляется нецелесообразным, поэтому в работах [12, 13] разрабатываются методы упаковки и пневматического статического разворачивания крупногабаритных оболочечных конструкций, изготовленных из жестких (сопротивляющихся изгибу) композитов (в частности, из углепластиков). В этих публикациях изучаются крупногабаритные конструкции, составленные из соединенных шарнирами элементов, срединная поверхность которых имеет развертку, устанавливаются особенности термомеханического состояния газа, заполняющего оболочку при ее нагружении.

Целью настоящей работы является изучение влияния скорости пневматического разворачивания оболочечной крупногабаритной цилиндрической конструкции из упакованного состояния в рабочее на ее текущие динамические параметры

¹ Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 17-41-590649 и гранта министерства образования и науки Пермского края С26-793.

(частоты собственных колебаний и их амплитуды, сопровождающие процесс развертывания); сравнение этих параметров с их значениями в квазистатическом случае нагружения.

Постановка задачи

Принимается, что в упакованном состоянии оболочка представляет собой две одинаковые прямоугольные пластины, скрепляемые шарнирами по двум краям, параллельным образующим (рис. 1, *a*). Шарниры не сопротивляются изгибу, поэтому окружной момент в них задается равным нулю. Геометрические параметры оболочки: $R = 10$ м, $L = \pi R$, толщина 0.01 м (рис. 1).

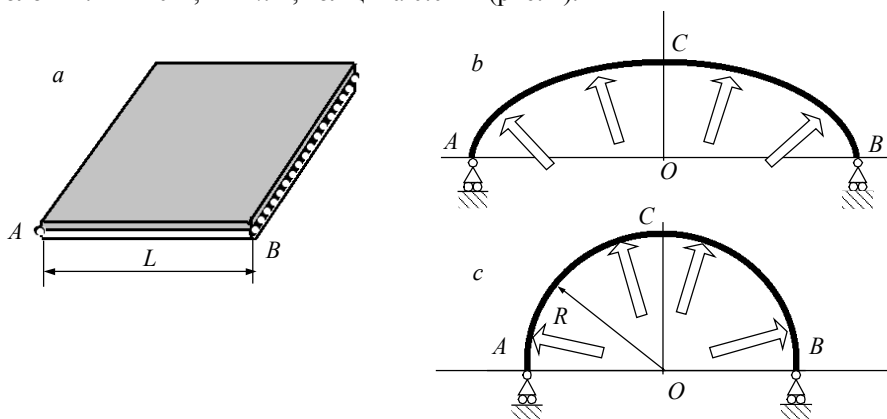


Рис. 1. Расчетная схема: *a* – упакованная оболочка; *b* – состояние в процессе развертывания; *c* – развернутая оболочка

Fig. 1. Computational scheme: (*a*) a packaged shell, (*b*) state of the shell during deployment, and (*c*) an unfolded shell

Протяженность конструкции в направлении оси оболочки считается достаточно большой (до 100 м). поэтому при симметричных движениях конструкции относительно плоскости симметрии оболочки, не содержащей шарниры, осевые деформации полагаются постоянными. Приведенные материальные характеристики: модуль Юнга $50 \cdot 10^6$ Па, коэффициент Пуассона 0.26, плотность $0.83 \cdot 10^3$ кг/м³.

Задача состоит в изучении динамического поведения рассматриваемой оболочечной конструкции в процессе пневматического развертывания из упакованного состояния в эксплуатационное за конечное время. Формоизменение оболочечной конструкции в процессе ее развертывания реализуется с конечными перемещениями ее точек и поворотами. При этом малыми остаются относительные удлинения и сдвиги. Поэтому напряженно-деформированное состояние (НДС) оболочки на этапе развертывания рассчитывается с использованием геометрически нелинейной модели, реализованной в инженерном пакете ANSYS (элемент shell_181).

Квазистатическое развертывание оболочки внутренним давлением

Предварительно рассматривается пневматическое развертывание оболочки в предположении, что силы инерции пренебрежимо малы. Нагнетаемое внутреннее давление изменяется от нуля до величины, при которой отрезки OA, OB, OC достигают значения 10 м (рис. 1, *c*). Окончательное давление развертывания оказыва-

ется равным 1500 Па. Рост внутреннего давления изменяет динамические характеристики конструкции, в частности возрастают ее собственные частоты. На рис. 2 приводится зависимость от давления первой собственной частоты.

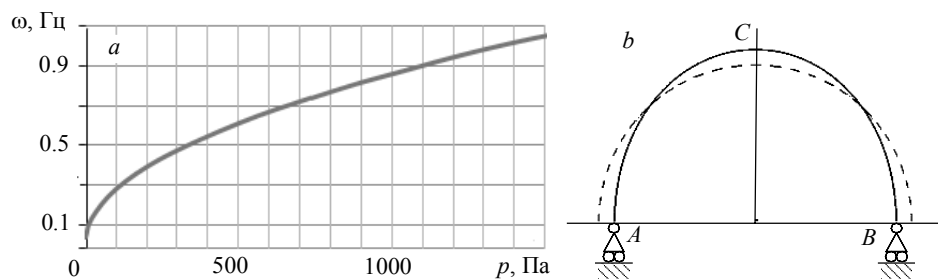


Рис. 2. Зависимость первой собственной частоты оболочки от внутреннего давления (а); первая форма колебаний (b)

Fig. 2. (a) The first natural frequency of the shell as a function of the internal pressure and (b) the first vibration mode

Динамическое развертывание оболочки внутренним давлением

Под динамическим понимается развертывание конструкции посредством нагружения внутренним давлением за конечное время. В процессе динамического развертывания дополнительно к поверхностным силам на оболочку действуют силы инерции. Исследование динамического состояния оболочки проводится для трех скоростей нагнетания давлением: $v_1 = 0.033$ Па/с, $v_2 = 0.067$ Па/с, $v_3 = 0.1$ Па/с. Считается, что в начальный момент оболочка находится в состоянии покоя. Предельное значение давления развертывания принимается равным статическому давлению 1500 Па. Результаты вычислений представлены на следующих рисунках.

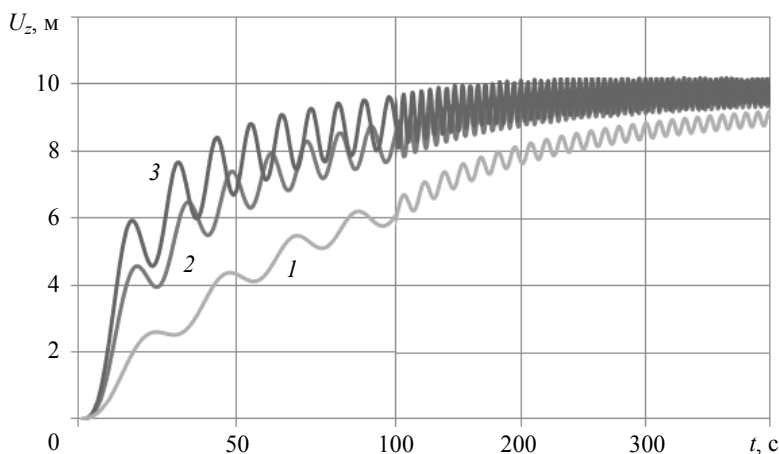


Рис. 3. Перемещение точки C при развертывании оболочки в зависимости от времени при различных скоростях нагнетания давления: 1– v_1 ; 2– v_2 ; 3– v_3

Fig. 3. Displacement of point C during shell's deploying as a function of time at various pressure injection rates: 1, v_1 ; 2, v_2 ; and 3, v_3

Из рис. 3 видно, что перемещения точек оболочки имеют колебательный характер. Это утверждение справедливо для всех параметров ее состояния (усилий, напряжений, деформаций). При разворачивании оболочки с постоянной скоростью период колебаний параметров состояния оболочки и амплитуда с увеличением давления убывают (рис. 4).

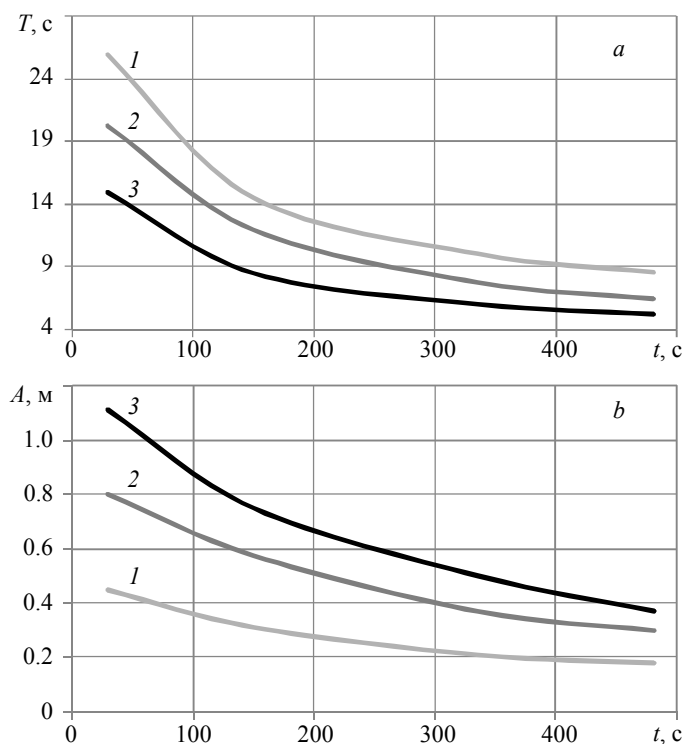


Рис. 4. Зависимость периода колебаний (а) и амплитуды точки *C* (б) от времени при различных скоростях нагнетания давления: 1– v_1 ; 2– v_2 ; 3– v_3

Fig. 4. Dependence of the (a) oscillation period and (b) amplitude of point *C* on time at various pressure injection rates: 1, v_1 ; 2, v_2 ; and 3, v_3

С приближением давления к 1500 Па (статическому давлению разворачивания) точки конструкции независимо от скорости нагружения совершают колебательные движения с частотой, равной первой собственной частоте колебаний при данном давлении в статическом состоянии.

Отмеченная особенность характерна для любого промежуточного давления нагружения. Периоды колебаний движения точек практически не зависят от скорости пневматического нагружения, а определяются лишь текущим давлением. Период колебаний с погрешностью, не превышающей погрешность используемого вычислительного метода, оказывается равным периоду собственных колебаний по первой форме оболочки. Для примера на рис. 5 приводится траектория движения точки *C* на коротком временном промежутке вблизи текущего давления $p = 18$ Па при различных скоростях нагнетания давления.

Из рисунка видно, что в окрестности рассматриваемого давления периоды колебаний точки *C* для различных скоростей нагнетания давления совпадают.

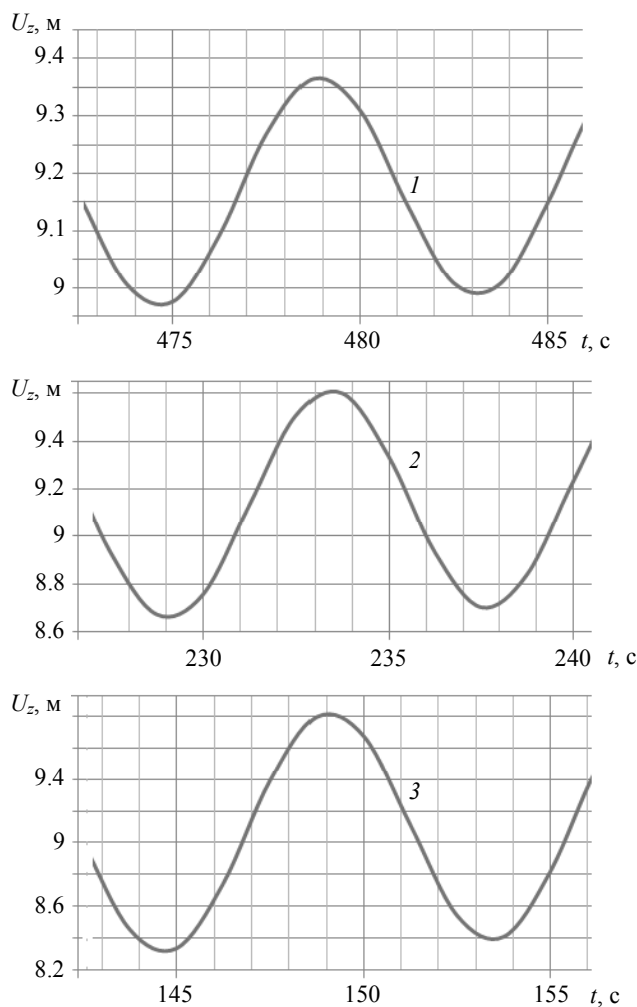


Рис. 5. Движение точки C на отрезке времени со средним значением давления $p = 18$ Па при различных скоростях нагнетания давления: 1 – v_1 ; 2 – v_2 ; 3 – v_3

Fig. 5. Displacement of point C in a time interval with the average pressure $p = 18$ Pa at various pressure injection rates: 1, v_1 ; 2, v_2 ; and 3, v_3

Заключение

Проведено исследование о динамическом пневматическом разворачивании крупногабаритной цилиндрической упругой оболочки из упакованного состояния за конечное время. Обнаружено, что такое разворачивание сопровождается свободными колебаниями конструкции. Частота таких колебаний возрастает, а амплитуда убывает с ростом внутреннего давления. Показано, что период колебаний не зависит от скорости нагружения давлением и зависит лишь от его текущего значения. При этом период колебаний параметров состояния оболочки оказывается равным периоду колебаний статически нагруженной текущим давлением кон-

струкции. Выявленное в результате исследования изменение в широком диапазоне частот собственных колебаний конструкции в процессе ее пневматического разворачивания представляется важным обстоятельством, так как делает возможным предсказание сопутствующих процессу резонансных режимов.

Приведенные результаты могут найти применение в задачах механики о разворачивании крупногабаритных оболочечных конструкций (например, рефлекторов антенн) в условиях космоса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белов Д.В., Югов А.М. Возведение купольных конструкций с использованием пневматических опалубок // Вестник Донбасской академии строительства и архитектуры. 2009. № 6(80). С. 3–8.
2. Кривошапко С.Н. Пневматические конструкции и сооружения // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. № 3. С. 45–53.
3. Соколовская И.Ю. Напряженно-деформированное состояние армированных пневмоопорных оболочек и наземных емкостей: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.23.17 – Строительная механика; 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела.. Новосибирск: Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет, 2006. 22 с.
4. Ермолов В.В., Бэрд У.У., Бубнер Э. и др. Прошлое, настоящее и будущее пневматических строительных конструкций // Пневматические строительные конструкции / под ред. В.В. Ермолова. М.: Стройиздат, 1983. С. 5–46.
5. Quinn G., Gengnagel C. A review of elastic grid shells, their erection methods and the potential use of pneumatic formwork // *Mob Rapidly Assem Struct IV*. 2014. V. 136. P. 129–143. DOI:10.2495/MAR140111.
6. Бельков А.В. Моделирование крупногабаритных пневматических конструкций // Перспективы развития фундаментальных наук: Сборник научных трудов XIII Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. Национальный исследовательский Томский политехнический университет. 2016. Т. 3. С. 21–23.
7. Морозков И.С., Ромащенко С.В., Шевцов Е.А., Шatrov А.К. Рефлекторы антенн космических аппаратов на базе гибкой формообразующей структуры // Актуальные проблемы авиации и космонавтики. 2010. Т. 1. № 6. С. 100–101.
8. Леонов В.В., Жарёнов И.С. Анализ особенностей конструкции крупногабаритных надувных концентраторов солнечного излучения // Наука и образование: научное издание МГТУ им. НЭ Баумана. 2013. № 10. С. 177–192. DOI:10.7463/1013.0618788.
9. Леонов В.В., Жарёнов И.С. Особенности проектирования крупногабаритных космических зеркальных концентраторов солнечного излучения // Сб. трудов шестой Российской национальной конференции по теплообмену. 2014. С. 1233–1236.
10. Kondyurin A., Lauke B., Kondyurina I., Orba E. Creation of biological module for self-regulating ecological system by the way of polymerization of composite materials in free space // *Advances in Space Research*. No. 34. 2004. P. 1585–1591.
11. Kondyurina I., Kondyurin A., Lauke B., Figiel L., Vogel R., Reuter U. Polymerisation of composite materials in space environment for development of a Moon base // *Advances in Space Research*. V. 37. 2006. P. 109–115.
12. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Rusakov S.V., Kondyurin A.V. Deployment of large-size shell constructions by internal pressure // *Mechanics of Composite Materials*. 2015. V. 51. No. 5. P. 629–636.
13. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Русаков С.В., Кондюрин А.В., Корепанова А.В. Упаковка и разворачивание внутренним давлением крупногабаритных оболочечных конструкций // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2016. № 4. С. 273–286. DOI 10.15593/perm.mech/2016.4.18.

Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Rusakov S.V., Buzmakova G.V. (2020) A STUDY OF THE IMPACT OF THE PNEUMATIC LOADING RATE ON DYNAMIC PARAMETERS FOR A LARGE-SIZED CYLINDRICAL SHELL *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 68. pp. 118–125

DOI 10.17223/19988621/68/11

Keywords: large-sized shells, vibrations, geometrically nonlinear model of elastic body, finite element method, pneumatic deployment.

The solid mechanics problem on the packaging and subsequent pneumatic deployment of large-sized shells is relevant due to the need to operate such structures in hard-to-reach places. In particular, such a place is outer space. The paper considers the elastic cylindrical shell deployment from a packed state by internal pressure in a finite time interval. The packaged shell consists of two rectangular plates joined by ideal (with no bending resistance) joint-hinges arranged at the edges. Both static and dynamic problems are considered. Solutions are obtained on the basis of a geometrically nonlinear model of an elastic body using the ANSYS engineering package. It is shown that the pneumatic loading of an elastic structure is accompanied by its oscillations with increasing frequency and the amplitude decreasing in time. The period of shell oscillations is found to be dependent on the operating loading pressure and independent of the pressure supply rate, and it almost equals the period of oscillations of the statically loaded shell under the same pressure. The wide range variation in the natural oscillation frequencies of the structure during pneumatic deployment, which is revealed in the study, is of great importance since it makes possible to predict resonant modes accompanying the process. The results of the study will be used in problems of mechanics related to the pneumatic deployment of shell structures (for example, telescope reflectors, antennas, etc.) in space.

Financial support. The research was supported by the RFFR grant N 17-41-590649 and the grant of the Ministry of Education and Science of the Perm Krai C26-793.

Valeriy M. PESTRENIN (Candidate of Physics and Mathematics, Perm State National Research University, Perm, Russian Federation). E-mail: PestreninVM@mail.ru

Irena V. PESTRENINA (Candidate of Technical Sciences, Perm State National Research University, Perm, Russian Federation). E-mail: IPestrenina@gmail.com

Sergey V. RUSAKOV (Doctor of Physics and Mathematics, Perm State National Research University, Perm, Russian Federation). E-mail: Rusakov@psu.ru

Galina V. BUZMAKOVA (Perm State National Research University, Perm, Russian Federation). E-mail: galina210896@mail.ru

REFERENCES

1. Belov D.V., Yugov A.M. (2009) Vozvedenie kupol'nykh konstruksiy s ispol'zovaniem pnevmaticheskikh opalubok [Erection of dome structures using pneumatic formwork]. *Vestnik Donbasskoy natsional'noy akademii stroitel'stva i arkhitektury – Proceeding of the Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture*. 6(80). pp. 3–8.
2. Krivoschapko S.N. (2015) Pnevmaticheskie konstruksii i sooruzheniya [Pneumatic structures and constructions]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy – Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 3. pp. 45–53.
3. Sokolovskaya I.Yu. (2006) *Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie armirovannykh pnevmoopornnykh obolochek i nazemnykh emkostey* [Stress-strain state of reinforced air-supported shells and surface-mounted tanks]. Dissertation. Novosibirskiy gosudarstvennyy arkhitekturno-stroitel'nyy universitet.

4. Ermolov V.V. (1983) *Proshloe, nastoyashchee i budushchee pnevmaticheskikh stroitel'nykh konstruktсий. Pnevmaticheskie stroitel'ny'e konstrukcii* [Past, present, and future of pneumatic building structures. Pneumatic building structures]. Moscow: Stroyizdat. pp. 5–46.
5. Quinn G., Gengnagel C. (2014) A review of elastic grid shells, their erection methods and the potential use of pneumatic formwork. *Mobile and Rapidly Assembled Structures IV*. 136. pp. 129–143. DOI: 10.2495/MAR140111.
6. Bel'kov A.V. (2016) Modelirovanie krupnogabaritnykh pnevmaticheskikh konstruktсий [Modeling of large-sized pneumatic structures]. *Collection of scientific works of the XIII International conference of students, graduate students and young scientists. National Research Tomsk Polytechnic University*. 3. pp. 21–23.
7. Morozkov I.S., Romashchenko S.V., Shevtsov E.A., Shatrov A.K. (2010) Reflektory antenn kosmicheskikh apparatov na baze gibkoy formoobrazuyushchey struktury [Reflectors of spacecraft antennas based on a flexible shaping structure]. *Aktual'nye problemy aviatsii i kosmonavтики*. 1(6). pp. 100–101.
8. Leonov V.V., Zharenov I.S. (2013) Analiz osobennostey konstruktсии krupnogabaritnykh naduvnykh kontsentratorov solnechnogo izlucheniya [Analysis of design features of large-sized inflatable solar concentrators]. *Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie MGTU im. N.E. Baumana – Science and Education: Scientific Edition of Bauman MSTU*. 10. pp. 177–192. DOI: 10.7463/1013.0618788.
9. Leonov V.V., Zharenov I.S. (2014) Osobennosti proektirovaniya krupnogabaritnykh kosmicheskikh zerkal'nykh kontsentratorov solnechnogo izlucheniya [Features of the design of large-sized space mirror concentrators of solar radiation]. *Proceedings of the VIth National Conference on Heat Transfer*. pp. 1233–1236.
10. Kondyurin A., Lauke B., Kondyurina I., Orba E. (2004) Creation of biological module for self-regulating ecological system by the way of polymerization of composite materials in free space. *Advances in Space Research*. 34. pp. 1585–1591. DOI: 10.1016/j.asr.2004.01.019.
11. Kondyurina I., Kondyurin A., Lauke B., Figiel L., Vogel R., Reuter U. (2006) Polymerisation of composite materials in space environment for development of a Moon base. *Advances in Space Research*. 37. pp. 109–115. DOI: 10.1016/j.asr.2005.05.031.
12. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Rusakov S.V., Kondyurin A.V. (2015) Deployment of large-size shell constructions by internal pressure. *Mechanics of Composite Materials*. 51(5). pp. 629–636. DOI: 10.1007/s11029-015-9532-5.
13. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Rusakov S.V., Kondyurin A.V., Korepanova A.V. (2016) Upakovka i razvertyvanie vnutrennim davleniem krupnogabaritnykh obolocheknykh konstruktсий [Packaging and deployment of large shell structures by internal pressure loading]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – PNRPU. Mechanics Bulletin*. 4. pp. 273–286. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.4.18.

Received: April 3, 2019

УДК: 536.46, 536.24

DOI 10.17223/19988621/68/12

В.А. Порязов, А.Ю. Крайнов**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ЗАЖИГАНИЯ МЕТАЛЛИЗИРОВАННОГО ТВЕРДОГО ТОПЛИВА
КОНВЕКТИВНЫМ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫМ ПОТОКОМ¹**

Представлены математическая модель зажигания конвективным высокотемпературным потоком и выхода на стационарный режим горения металлизированного твердого топлива. В постановке рассматривается зажигание полубесконечной пластины металлизированного твердого топлива неограниченным обдувающим высокотемпературным потоком. Модель учитывает влияние эффекта обдува высокотемпературным потоком через турбулентный тепломассоперенос. Проведен расчетно-теоретический анализ влияния скорости и температуры обдувающего потока на время задержки зажигания и время выхода на стационарный режим эрозионного горения.

Ключевые слова: *зажигание, металлизированное твердое топливо, математическая модель, скорость, обдув, высокотемпературный поток, конвективный поток.*

Обеспечение условий энергоэффективного и технически реализуемого режима зажигания конденсированных высокоэнергетических материалов (ВЭМ) является актуальной научно-практической задачей. Высокая практическая значимость объясняет большое количество теоретических и экспериментальных работ, посвященных изучению физико-химических процессов, протекающих при зажигании и горении высокоэнергетических материалов. Широко распространены конвективные [1–3], радиационные [4–6] и кондуктивные [7, 8] методы зажигания ВЭМ. Большой вклад в развитие теории зажигания конденсированных веществ внес В.Н. Вилунов [9]. Каждый из методов имеет свои преимущества и недостатки, обусловленные требованием баланса энергоэффективности и сложности технической реализации.

Для ракетных двигателей на твердом топливе (РДТТ) технически предпочтительным является зажигание твердого ракетного топлива продуктами отработки воспламенительного состава, имеющего ограничения по температуре продуктов сгорания и времени работы. Сложность и стоимость проведения натурных экспериментов обуславливает необходимость использования средств математического моделирования для решения задачи зажигания твердых топлив высокотемпературным конвективным потоком. При этом даже в стационарных режимах горения при обдуве поверхности твердого топлива изменяется скорость горения [10–12]. В работах Я.Б. Зельдовича предложена физическая модель, объясняющая увеличение скорости горения увеличением теплового потока, подводимого к поверхности горения, за счет роста турбулентного слагаемого коэффициента теплопроводности [10]. Большое развитие теория эрозионного горения получила в работах

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РФФИ мол_а 18-38-00533

В.Н. Вилунова [11]. Общую теорию эрозионного горения твердых ракетных топлив разработали академик А.М. Липанов и профессор В.К. Булгаков [12].

Таким образом, получение численной методики расчета параметров зажигания ВЭМ высокотемпературным конвективным потоком является актуальной научной задачей.

В работе представлена физико-математическая модель зажигания металлизированного твердого топлива высокотемпературным конвективным потоком. Проведено параметрическое исследование влияния скорости и температуры конвективного потока на характеристики зажигания металлизированного твердого топлива.

Постановка задачи

Рассмотрим зажигание высокотемпературным конвективным потоком и выход на стационарный режим горения плоской поверхности металлизированного твердого топлива. Схема процесса представлена на рис. 1.

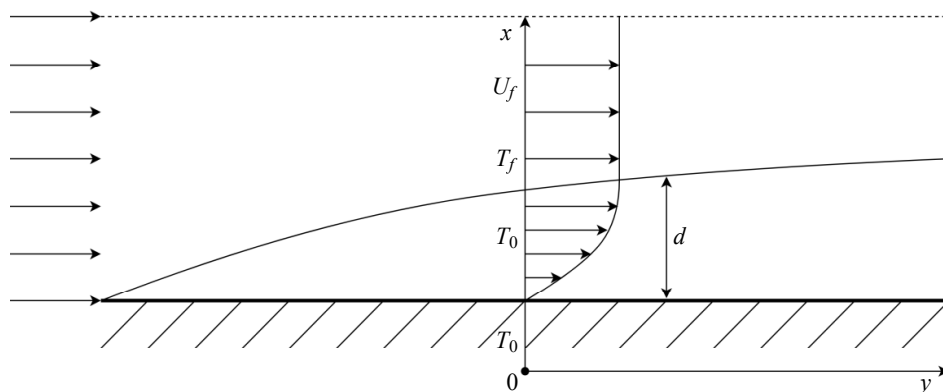


Рис. 1. Схема процесса зажигания плоской пластины металлизированного твердого топлива высокотемпературным конвективным потоком

Fig. 1. Schematic diagram of the ignition of a metallized solid propellant slab by a high-temperature convective flow

Модель зажигания и горения строится в пограничном приближении, в рамках которого факт обдува учитывается через турбулентный теплоперенос. На основе нестационарной модели горения металлизированного твердого топлива в сопряженной постановке [13] и модели горения металлизированного твердого топлива в условиях обдува [14] строится модель и методика расчета зажигания и выхода на стационарный режим горения при воздействии высокотемпературного конвективного потока. На поверхности топлива учитывается газификация компонентов твердого топлива и записывается условие сохранения потоков массы и энергии компонентов. Для описания процессов в конденсированной фазе под поверхностью газификации записывается уравнение переноса тепла и разложения топлива. Для описания процессов в газовой фазе над поверхностью топлива записываются уравнения течения двухфазной реагирующей среды, учитывающие межфазный обмен массой, импульсом и энергией, конвективный и кондуктивный теплоперенос, зависимость коэффициентов переноса от температуры и интенсив-

ности турбулентности. Для описания характеристик динамической турбулентности в пограничном слое использовалась модель турбулентности Ван Драйста [15], являющаяся обобщением результатов экспериментов и широко распространенной в инженерных расчетах, так как справедлива во всей внутренней части пограничного слоя [12, 16].

Полагается, что в начальный момент времени над поверхностью металлизированного твердого топлива движения газа не происходит, при этом температура газа и твердого топлива одинакова и равна $T_0 = 293 \text{ К}$. На левой границе области за счет срабатывания воспламенительного устройства формируется высокотемпературный конвективный поток, направленный вдоль поверхности топлива. Предполагается, что в процессе движения высокотемпературного конвективного потока формирование динамического пограничного слоя (d) происходит значительно раньше теплового. Вне динамического пограничного слоя скорость равна скорости конвективного потока U_f , а температура $-T_f$. Внутри погранслоя профиль скорости определяется уравнением движения, проинтегрированным вдоль оси, которая перпендикулярна поверхности топлива. Температура топлива и газа внутри пограничного слоя в начальный момент времени равны T_0 . Привяжем начало системы координат к произвольно выбранной точке на поверхности металлизированного твердого топлива и перейдем к одномерной постановке задачи вдоль оси, перпендикулярной поверхности топлива. Тогда математическая постановка задачи зажигания и выхода на стационарный режим горения запишется в следующем виде:

Для твердого топлива, при $-\infty < x < x_s$:

- уравнение сохранения энергии твердого топлива

$$c_1 \rho_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) = \lambda_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + Q_1 k_1 \rho_1 (1 - \eta) \exp \left(-\frac{E_1}{RT_1} \right); \quad (1)$$

- уравнение глубины превращения конденсированной фазы

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} = k_1 (1 - \eta) \exp \left(-\frac{E_1}{RT_1} \right). \quad (2)$$

Для газовой фазы, при $x_s < x < \infty$:

- уравнение сохранения энергии газа

$$c_2 \rho_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial t} + u_{2,x} \frac{\partial T_2}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left((\lambda_2 + \lambda_t) \frac{\partial T_2}{\partial x} \right) + Q_2 Y \rho_2 k_2 \exp \left(\frac{-E_2}{R_g T_2} \right) + 4\pi \alpha r_3^2 n (T_3 - T_2); \quad (3)$$

- уравнение выгорания окислителя в газовой фазе

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial t} + u_{2,x} \frac{\partial Y}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left((D_2 + D_t) \frac{\partial Y}{\partial x} \right) - Y k_2 \exp \left(\frac{-E_2}{R_g T_2} \right); \quad (4)$$

- уравнение сохранения энергии частиц

$$c_3 \rho_3 \left(\frac{\partial T_3}{\partial t} + w_3 \frac{\partial T_3}{\partial x} \right) = -4\pi \alpha r_3^2 n (T_3 - T_2) + G Q_{Al} \frac{2\mu_{Al}}{3\mu_O}; \quad (5)$$

- уравнение сохранения массы газовой фазы

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2 u_{2,x})}{\partial x} = -\frac{3\mu_O}{2\mu_{Al}} G; \quad (6)$$

- уравнение сохранения массы частиц

$$\frac{\partial \rho_3}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_3 w_3)}{\partial x} = \frac{3\mu_O}{2\mu_{Al}} G; \quad (7)$$

- уравнение движения частиц

$$\frac{\partial w_3}{\partial t} + w_3 \frac{\partial w_3}{\partial x} = -\tau_{fr}; \quad (8)$$

- уравнение числа частиц в единице объема

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nw_3)}{\partial x} = 0; \quad (9)$$

- уравнение состояния идеального газа

$$P = \rho_2 R T_2 = \text{const}; \quad (10)$$

- уравнение движения тангенциальной составляющей обдувающего потока

$$\frac{du_{2,y}}{dx} = \frac{1}{Pr_m \frac{\lambda_m}{c_2} + \mu_t} \left(\tau_s + \rho_1 u_1 u_{2,y} + \frac{\partial p}{\partial y} x \right). \quad (11)$$

Выражение для турбулентного коэффициента теплопроводности, полученного из модели турбулентности Ван Драйста[15]:

$$\lambda_t = \frac{c_2 \mu_t}{Pr_t} \frac{\varphi}{1 - \delta}; \quad (12)$$

$$\varphi = 1 - \exp\left(\frac{-B \cdot 0.09 k \rho_2^2}{\mu_t \cdot W}\right), \quad \delta = 2 \frac{\mu_t \varphi}{\rho_2^2 k} \frac{Q_2}{c_2} \frac{dW}{dT_2}, \quad W = k_2 Y \rho_2 \exp\left(\frac{-E_2}{R_g T_2}\right),$$

$$c_k = 0.3, \quad x_* = 26, \quad B = 5,$$

$$l = Kx \left[1 - \exp\left(-\frac{x}{x_*} \sqrt{\tau_s \rho_k} \frac{1}{\mu_m}\right) \right], \quad v_t = l^2 \frac{du_{2,y}}{dx}, \quad \mu_t = \rho_2 v_t, \quad k = \frac{1}{c_k} \left(\frac{v_t}{l} \right)^2.$$

$$\rho_1 = 1/(\alpha_{Al}/\rho_{Al} + \alpha_{\Pi}/\rho_{\Pi}), \quad c_1 \rho_1 = \alpha_{\Pi} (c_{\Pi} \rho_{\Pi}) + \alpha_{Al} (c_{Al} \rho_{Al}), \quad \lambda_1 = \alpha_{Al}/\lambda_{Al} + \alpha_{\Pi}/\lambda_{\Pi}.$$

Координата x_s соответствует поверхности горения. На границе x_s граничные условия выражают законы сохранения массы и энергии:

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(x_s, t)}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(x_s, t)}{\partial x}, \quad T_1(x_s, t) = T_2(x_s, t),$$

$$\alpha_{Al} \rho_1 u_1 = \rho_3 w_3(x_s, t), \quad (1 - \alpha_{Al}) \rho_1 u_1 = \rho_2(x_s, t) u_{2,x}(x_s, t), \quad (13)$$

$$T_3(x_s, t) = T_1(x_s, t), \quad n(x_s, t) = \frac{\rho_3(x_s, t)}{4/3 \pi r_{Al,0}^3 \rho_{Al}}, \quad \rho_2(x_s, t) = P \mu / R T_2(x_s, t),$$

$$(1 - \alpha_{Al}) \rho_1 u_1 = (\rho_2 u_{2,x} Y) \Big|_{(x_s, t)} - D \rho_2 (x_s, t) \frac{\partial Y(x_s, t)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial T_1(-\infty, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T_2(\infty, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y(\infty, t)}{\partial x} = 0.$$

Начальные условия:

для $-\infty < x < x_s$:

$$T_1(x, 0) = T_0, \quad \eta(x, 0) = 0; \quad (14)$$

для $x_s < x < \delta$:

$$T_2(x, 0) = T_0, \quad T_3(x, 0) = T_0, \quad Y(x, 0) = 0,$$

$$u_{2,x}(x, 0) = 0, \quad w_3(x, 0) = 0, \quad n(x, 0) = 0,$$

$$\rho_2(x, 0) = P\mu/RT_0, \quad \rho_3(x, 0) = 0; \quad (15)$$

для $\delta < x < \infty$:

$$T_2(x, 0) = T_f, \quad T_3(x, 0) = T_0, \quad Y(x, 0) = 0,$$

$$u_{2,x}(x, 0) = 0, \quad w_3(x, 0) = 0, \quad n(x, 0) = 0,$$

$$\rho_2(x, 0) = P\mu/RT_f, \quad \rho_3(x, 0) = 0.$$

В уравнении (8) сила взаимодействия частиц алюминия с газом вычисляется по формуле

$$\tau_{fr} = \frac{F_{fr}}{4/3 \pi r_3^3 \rho_{Al}}, \quad F_{fr} = C_R S_m \frac{\rho_2 (w_3 - u_{2,x}) |u_{2,x} - w_3|}{2},$$

$$C_R = \frac{24}{Re} (1 + 0.15 Re^{0.682}), \quad Re = \frac{2\rho_2 r_3 |u_{2,x} - w_3|}{\mu_m}, \quad S_m = \pi r_3^2, \quad (16)$$

где Re – число Рейнольдса; S_m – площадь миделева сечения; C_R – коэффициент трения; ρ_{Al} – плотность алюминия; η – коэффициент динамической вязкости.

Коэффициент теплоотдачи α определяется по формуле

$$\alpha = \frac{Nu(\lambda_2 + \lambda_t)}{2r_3}, \quad Nu = 2 + \sqrt{Nu_l^2 + Nu_t^2}, \quad (17)$$

$$Nu_l = 0.664 Re^{0.5}, \quad Nu_t = 0.037 Re^{0.8},$$

где Nu – число Нуссельта.

Скорость изменения массы частиц алюминия при их горении, а также уравнения, определяющие текущие значения размеров частиц и алюминия в частице имеют вид

$$G = n \rho_{Al} 4\pi a^{0.9} r_{Al}^{3/2} k_{Al}, \quad (18)$$

где k_{Al} – константа скорости горения частицы алюминия в среде окислителя; a – коэффициент избытка окислителя.

$$r_{Al} = \left[\left(\frac{\mu_{Al} + 3/2 \mu_O}{\mu_{Al}} r_{Al,0}^3 - \frac{\rho_3}{(4/3)\pi n \rho_{Al}} \right) \frac{2\mu_{Al}}{3\mu_O} \right]^{1/3},$$

$$r_3 = \left[r_{Al}^3 + \frac{\mu_{Al} + 3/2 \mu_O}{\mu_{Al}} (r_{Al,0}^3 - r_{Al}^3) \right]^{1/3}, \quad (19)$$

В расчетах принималось, что плотность оксида алюминия (Al_2O_3) равна плотности алюминия (Al).

Расчет процессов в газовой фазе проводился от поверхности горения. При этом для расчета профиля скорости обдувающего потока по формуле (11) с заданным значением скорости обдувающего потока использовались следующие оценки величины напряжения трения на поверхности горения из [16], при $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$.

Число Рейнольдса для течения:

$$Re_f = \frac{LU_f \rho_f}{\mu_m}. \quad (20)$$

Коэффициент сопротивления на поверхности горения:

$$c_{f_0} = 0.3164 \cdot Re_f^{-1/4}. \quad (21)$$

Параметр вдува [17]:

$$N = \frac{2u_1}{U_f c_{f_0}}, \quad \Phi_N = \begin{cases} 0, & N/N_* \geq 1, \\ \left(1 - N/N_*\right)^2, & N/N_* < 1, \end{cases} \quad N_* = 4. \quad (22)$$

Напряжение трения на поверхности топлива:

$$\tau_s = 0.0225 c_{f_0} \Phi_N \rho_f U_f^{7/4} \left(\frac{\mu_m}{L} \right)^{1/4}. \quad (23)$$

В модели (1) – (23) приняты обозначения: c_1 , c_2 , c_3 , c_{II} – удельные теплоемкости металлизированного твердого топлива, газа при постоянном давлении, алюминия и пороха H; D – коэффициент диффузии; E_2 – энергия активации химической реакции в газе; G – скорость изменения массы частиц при их горении; k_2 – предэкспоненциальный множитель в законе Аррениуса скорости химической реакции в газе; n – число частиц в единице объема; P – давление; Q_2 – тепловой эффект реакции в газовой фазе; Q_{Al} – эффективная теплота сгорания алюминия; R – газовая постоянная; R_y – универсальная газовая постоянная; r_{Al} – радиус алюминия; r_3 – радиус частицы; t – время; T – температура; $u_{2,x}$, $u_{2,y}$ – нормальная и тангенциальная компоненты скорости газа; u_1 – скорость горения; w_3 – скорость частиц; x – координата; Y – полнота сгорания окислителя в газовой фазе равная Z/Z_0 ; Z – относительная массовая концентрация окислителя; Z_0 – относительная массовая концентрация окислителя на поверхности топлива; α – коэффициент теплоотдачи; α_{Al} – массовая доля алюминия в составе СТТ; λ – ко-

эффицент теплопроводности; ρ_1 – плотность металлизированного твердого топлива; ρ_{Π} – плотность пороха Н; ρ_2 – плотность газа; ρ_3 – приведенная плотность частиц (масса частиц в единице объема); ρ_{Al} – плотность алюминия; τ_{fr} – сила трения; μ_{Al} , μ_O – молярные массы молекул алюминия и кислорода; μ_m , μ_t – коэффициенты динамической вязкости молекулярный и турбулентный; τ_s – напряжение трения на поверхности пороха; N – параметр вдува; L – масштаб ширины набегающего тангенциального потока; ν_t – коэффициент кинематической турбулентной вязкости; c_k , x_* , B , K – константы модели турбулентности; φ , δ , k , l – функции в модели турбулентности; Re – число Рейнольдса; Nu – число Нуссельта, Pt – число Прандтля.

Индексы: 1 – конденсированная фаза, 2 – газовая фаза, 3 – конденсированная фаза продуктов горения, t – турбулентный, Al – алюминий, Π – относится к твердому топливу (пороху Н).

Система уравнений (1) – (23) описывает процесс зажигания высокотемпературным конвективным потоком и выхода на стационарный режим горения твердого топлива с добавлением частиц алюминия.

Методика решения

Система уравнений (1) – (23) решается методами, описанными в [13], [14].

Задается значение скорости и температура конвективного потока над поверхностью металлизированного твердого топлива. Вычисляется число Рейнольдса (20), коэффициент сопротивления на поверхности твердого топлива, параметр вдува (22) и напряжение трения на поверхности топлива (23).

Расчет профиля скорости обдувающего потока по формуле (11) проводится от поверхности твердого топлива, при $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$, до достижения значения скорости, равной заданному значению скорости обдува конвективным потоком. Расстояние от поверхности твердого топлива до точки, в которой достигается значение скорости, равной скорости обдувающего потока, считается динамическим слоем, внутри которого температура газа равна T_0 , а за пределами пограничного слоя температура газа равна температуре конвективного потока T_f . Далее решается система уравнений (1) – (10), с начальными и граничными условиями (13) – (15), выражениями для правых частей (16) – (19), дополненные уравнением движения для тангенциальной составляющей обдувающего потока (11) и моделью турбулентности Ван Драйста(12). Ядро обдувающего потока полагается турбулентным, при выходе за пределы пограничного слоя все параметры турбулентности (кинематическая и динамическая вязкость, теплопроводность и кинетическая энергия) принимались равными максимальному значению внутри пограничного слоя. Расчет профиля скорости обдувающего потока (11) проводится каждый шаг по времени, так как значение величины трения на поверхности горения зависит от параметра вдува, который, в свою очередь определяется скоростью горения твердого топлива.

Результаты расчетов

С использованием изложенной методики расчета проведены численные исследования влияния скорости и температуры конвективного потока на величину скорости горения. Расчеты проводились для значений теплофизических и формально-кинетических параметров, характерных для пороха Н:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0.25 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}, \lambda_2 = 0.066 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}, Q_1 = 556800 \text{ Дж/кг}, \\ Q_2 &= 2435300 \text{ Дж/кг}, Q_{\text{Al}} = 36.51 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}, E_1 = 80000 \text{ Дж/моль}, \\ E_2 &= 186107 \text{ Дж/моль}, k_1 = 2 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}, k_2 = 3.92 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}, \\ k_{\text{Al}} &= 2.22 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{1.5}/\text{с}, a = 0.5, c_1 = 1465 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}, \\ c_2 &= 1466 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}, c_3 = 760 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}, \rho_1 = 1600 \text{ кг/м}^3, \\ \rho_k &= 2600 \text{ кг/м}^3, \rho_{\text{Al}} = 2600 \text{ кг/м}^3, R = 8.31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}, \\ T_0 &= 293 \text{ К}, T_{\text{ig}} = 1300 \text{ К}.\end{aligned}$$

Коэффициент диффузии вычисляется через число Льюиса Le : $D_2 = Le \lambda_2 / (c_2 \rho_2)$, число Льюиса принято $Le = 1$. Температура воспламенения частиц алюминия принята равной 1300 К. Величина начального радиуса частицы в расчетах $r_{\text{Al},0} = 5 \text{ мкм}$, массовая доля порошка алюминия принята равной 9 % массы топлива. Формально-кинетические параметры взяты из [12]. В расчетах принималось, что $r_{\text{Al},0} = 5 \text{ мкм}$, $\alpha_{\text{Al}} = 0.09$. В расчетах варьировалась скорость (U_f) и температура (T_f) обдувающего потока в широком диапазоне давлений.

На рис. 2 представлена зависимость скорости горения и температуры поверхности твердого топлива от времени. Скорость обдувающего потока принималась равной 70 м/с, температура обдувающего потока принималась равной 1700 К.

На рис. 3 представлено распределение температуры во всей расчетной области в различные моменты времени рис. 2. Координата $x_s = 0.00015 \text{ м}$ соответствует поверхности твердого топлива. Координата $x_d = 0.000685 \text{ м}$ – границе пограничного слоя, в начальный момент времени. На рисунке представлены: начальное распределение температуры 1, стадии прогрева газа и твердого топлива конвективным высокотемпературным потоком 2 – 6, начало газификации твердого топлива и развитие экзотермических химических реакций горения компонентов газификации и частиц алюминия в газовой фазе 8 – 10 и выход на стационарный режим горения 11.

Проведено исследование влияния скорости обдувающего потока заданной температуры на время зажигания и выхода на стационарный режим горения металлизированного твердого топлива. Результаты расчетов представлены на рис. 4. Различие в значениях стационарной скорости горения при различных скоростях обдувающего потока обусловлены влиянием эффекта обдува и описаны в [14]. Зависимость температуры поверхности твердого топлива от времени при различных скоростях обдувающего потока представлены на рис. 5. Пики на графиках зависимости температуры поверхности от времени соответствуют моменту времени начала горения твердого топлива.

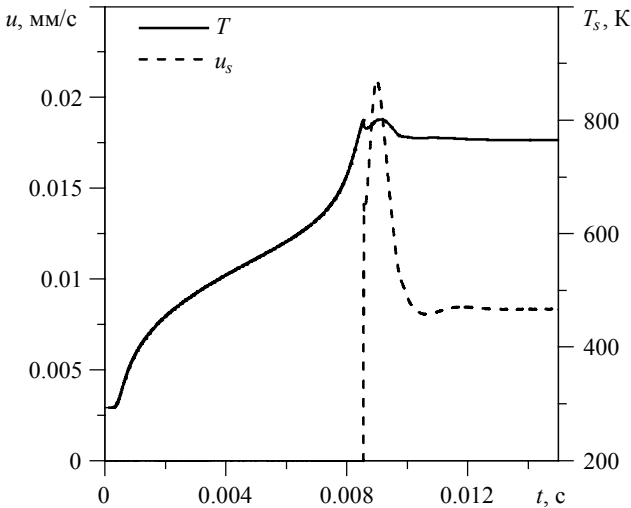


Рис. 2. Изменение скорости горения и температуры поверхности пороха Н с добавлением порошка алюминия во времени.

$U_f = 70$ м/с, $T_f = 1700$ К, $r_{Al,0} = 5$ мкм, $\alpha_{Al} = 0.09$

Fig. 2. Combustion rate and surface temperature of the powder N with aluminum additives as a function of time.

$U_f = 70$ m/s, $T_f = 1700$ K, $r_{Al,0} = 5$ μ m, $\alpha_{Al} = 0.09$

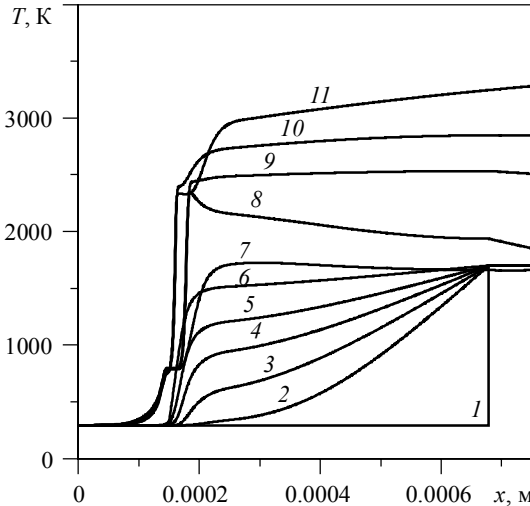


Рис. 3. Распределение температуры газа и пороха Н

с добавлением порошка алюминия в различные моменты времени;

$U_f = 70$ м/с, $T_f = 1700$ К, $r_{Al,0} = 5$ мкм, $\alpha_{Al} = 0.09$: 1 – $t = 0.0$ с; 2 – $t = 0.0001$ с;

3 – $t = 0.0002$ с; 4 – $t = 0.0003$ с; 5 – $t = 0.0004$ с; 6 – $t = 0.0006$ с; 7 – $t = 0.0086$ с;

8 – $t = 0.0087$ с; 9 – $t = 0.0089$ с; 10 – $t = 0.0098$ с; 11 – $t = 0.0112$ с

Fig. 3. Distribution of the temperature of gas and powder N with aluminum additives at various time instants; $U_f = 70$ m/s, $T_f = 1700$ K, $r_{Al,0} = 5$ μ m, $\alpha_{Al} = 0.09$:

$t = (1) 0.0, (2) 0.0001, (3) 0.0002, (4) 0.0003, (5) 0.0004, (6) 0.0006, (7) 0.0086, (8) 0.0087, (9) 0.0089, (10) 0.0098, \text{ and } (11) 0.0112$ s

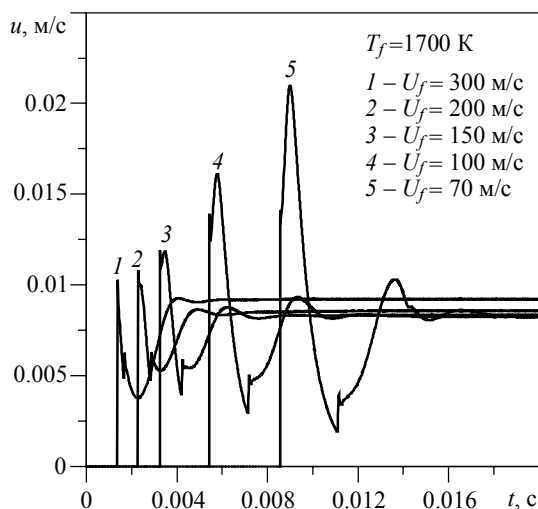


Рис. 4. Изменение скорости горения пороха Н с добавлением порошка алюминия во времени;

$T_f = 1700 \text{ K}$, $r_{\text{Al},0} = 5 \text{ мкм}$, $\alpha_{\text{Al}} = 0.09$

Fig. 4. Combustion rate of the powder N with aluminum additives as a function of time;

$T_f = 1700 \text{ K}$, $r_{\text{Al},0} = 5 \text{ }\mu\text{m}$, $\alpha_{\text{Al}} = 0.09$

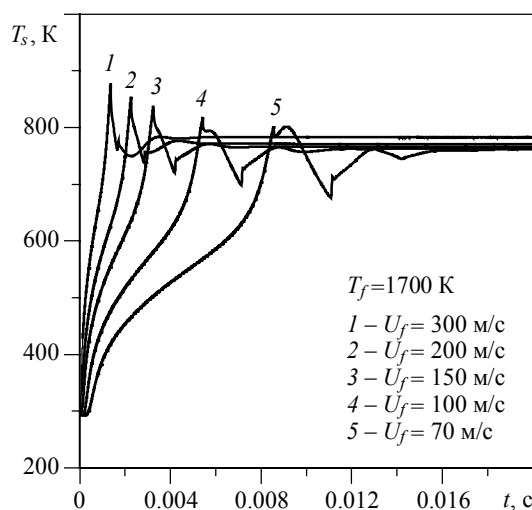


Рис. 5. Изменение температуры поверхности пороха Н с добавлением порошка алюминия во времени;

$T_f = 1700 \text{ K}$, $r_{\text{Al},0} = 5 \text{ мкм}$, $\alpha_{\text{Al}} = 0.09$

Fig. 5. Surface temperature of the powder N with aluminum additives as a function of time;

$T_f = 1700 \text{ K}$, $r_{\text{Al},0} = 5 \text{ }\mu\text{m}$, $\alpha_{\text{Al}} = 0.09$

Проведено исследование влияния температуры обдувающего потока на время зажигания и выхода на стационарный режим горения металлизированного твердого топлива.

Результаты расчетов представлены на рис. 6. Зависимость температуры поверхности твердого топлива от времени при различных температурах обдувающего потока представлены на рис. 7.

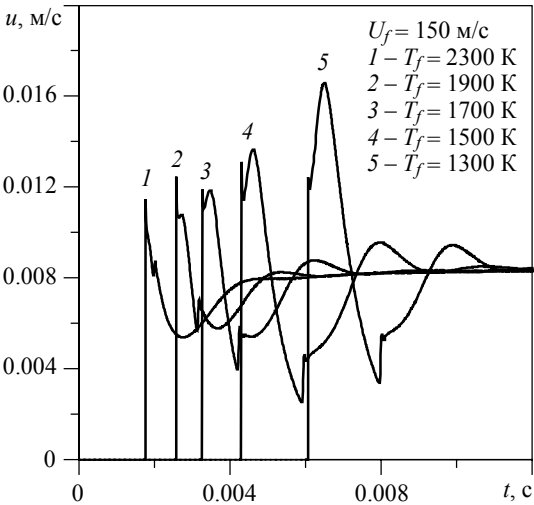


Рис. 6. Изменение скорости горения пороха Н с добавлением порошка алюминия во времени;

$U_f = 150 \text{ м/с}$, $r_{\text{Al},0} = 5 \text{ мкм}$, $\alpha_{\text{Al}} = 0.09$

Fig. 6. Combustion rate of the powder N with aluminum additives as a function of time;

$U_f = 150 \text{ м/с}$, $r_{\text{Al},0} = 5 \text{ мкм}$, $\alpha_{\text{Al}} = 0.09$

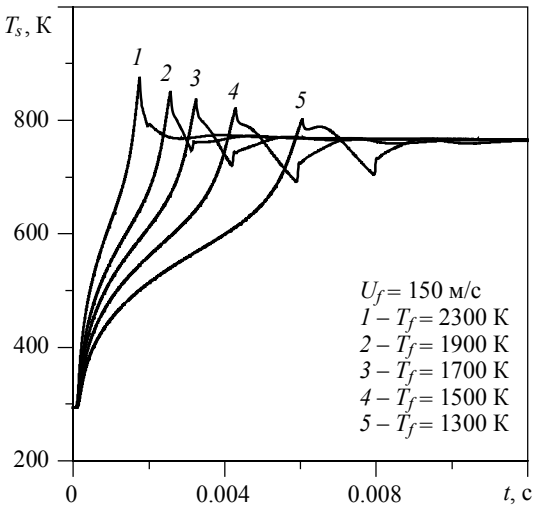


Рис. 7. Изменение температуры поверхности пороха Н с добавлением порошка алюминия во времени;

$U_f = 150 \text{ м/с}$, $r_{\text{Al},0} = 5 \text{ мкм}$, $\alpha_{\text{Al}} = 0.09$

Fig. 7. Surface temperature of the powder N with aluminum additives as a function of time;

$U_f = 150 \text{ м/с}$, $r_{\text{Al},0} = 5 \text{ мкм}$, $\alpha_{\text{Al}} = 0.09$

На рис. 8 и 9 представлены зависимости времени задержки зажигания от скорости и температуры обдувающего потока. За время задержки зажигания принималось время начала газификации твердого топлива.

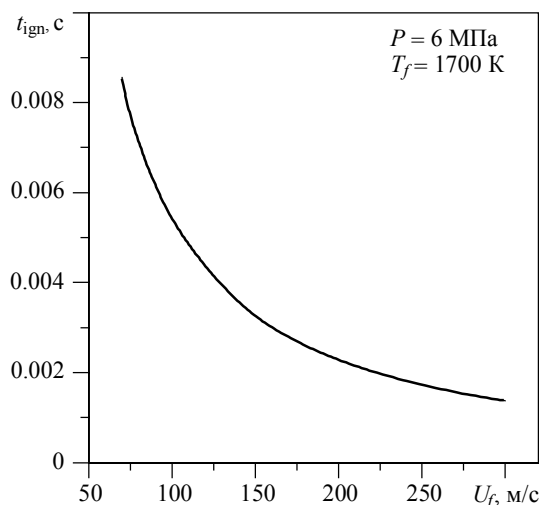


Рис. 8. Зависимость времени задержки зажигания пороха Н с добавлением порошка алюминия от скорости обдувающего высокотемпературного потока;

$T_f = 1700 \text{ K}$, $r_{\text{Al},0} = 5 \text{ мкм}$, $\alpha_{\text{Al}} = 0.09$, $P = 6 \text{ МПа}$

Fig. 8. Ignition time delay for the powder N with aluminum additives as a function of velocity of the blowing high-temperature flow;

$T_f = 1700 \text{ K}$, $r_{\text{Al},0} = 5 \text{ }\mu\text{m}$, $\alpha_{\text{Al}} = 0.09$, $P = 6 \text{ МПа}$

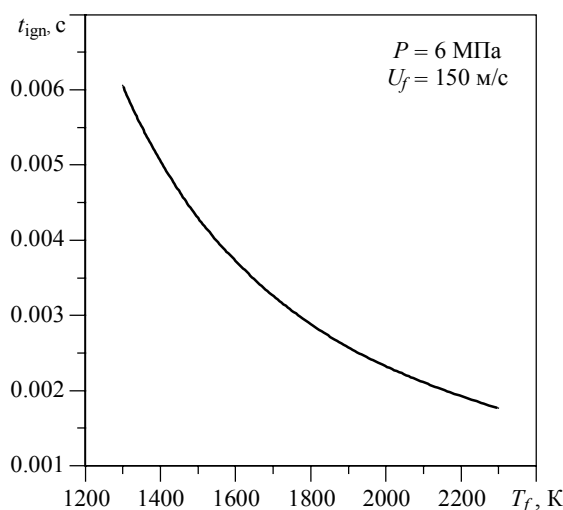


Рис. 9. Зависимость времени задержки зажигания пороха Н с добавлением порошка алюминия от температуры обдувающего высокотемпературного потока;

$U_f = 150 \text{ м/с}$, $r_{\text{Al},0} = 5 \text{ мкм}$, $\alpha_{\text{Al}} = 0.09$, $P = 6 \text{ МПа}$

Fig. 9. Ignition time delay for the powder N with aluminum additives as a function of temperature of the blowing high-temperature flow;

$U_f = 150 \text{ м/с}$, $r_{\text{Al},0} = 5 \text{ }\mu\text{m}$, $\alpha_{\text{Al}} = 0.09$, $P = 6 \text{ МПа}$

Из рис. 8 видно, что чем выше скорость обдувающего потока, тем меньше время задержки зажигания и выхода на стационарный режим горения. Это объясняется увеличением интенсивности турбулентного теплопереноса в пограничном слое, что увеличивает скорость подвода тепла к поверхности твердого топлива.

Из рис. 9 видно, что чем выше температура обдувающего потока, тем меньше время задержки зажигания и выхода на стационарный режим горения. Это объясняется увеличением теплового потока к поверхности твердого топлива.

Заключение

Представлены разработанная математическая модель, методика и результаты расчета зажигания металлизированного твердого топлива высокотемпературным конвективным потоком. Факт обдува поверхности твердого топлива учитывается через турбулентный тепломассоперенос.

Проведен расчетно-теоретический анализ влияния скорости и температуры конвективного потока на время зажигания и выхода на стационарный режим горения металлизированного твердого топлива. Показано, что предложенный подход позволяет рассчитывать время задержки зажигания и выхода на стационарный режим горения металлизированного твердого топлива, а времена задержки зажигания и выхода на стационарный режим горения можно регулировать как скоростью, так и температурой конвективного потока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Розенбанд В.И., Барзыкин В.В., Мержанов А.Г. Зажигание конденсированных веществ конвективными тепловыми потоками средней интенсивности в динамических условиях // Физика горения и взрыва. 1968. Т. 4. № 2. С. 171–175.
2. Зарко В.Е., Михеев В.Ф., Сухинин А.И., Хлевной С.С. Зажигание пороха горячим газом // Физика горения и взрыва. 1971. Т. 7. № 1. С. 64–67.
3. Захаревич А.В., Кузнецов Г.В., Саломатов В.В., Стрижак П.А., Сыродой С.В. Иницирование горения покрытых водяной пленкой частиц угля в потоке высокотемпературного воздуха // Физика горения и взрыва. 2016. Т. 52. № 5. С. 62–74.
4. Гусаченко Л.К., Зарко В.Е., Рычков А.Д. Зажигание и гашение гомогенных энергетических материалов световым импульсом // Физика горения и взрыва. 2012. Т. 48. № 1. С. 80–88.
5. Буркина Р.С., Домуховский А.М. Влияние структурных изменений приповерхностного слоя конденсированного вещества на его зажигание мощным импульсом излучения // Физика горения и взрыва. 2012. Т. 48. № 5. С. 122–129.
6. Порязов В.А., Крайнов А.Ю. Расчет режимов зажигания и выхода на стационарный режим горения металлизированного твердого ракетного топлива под действием лазерного излучения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 59. С. 94–104.
7. Глушков Д.О., Кузнецов Г.В., Стрижак П.А. Об устойчивости зажигания смесового твердого топлива локальным источником ограниченной энергоёмкости // Физика горения и взрыва. 2014. Т. 50. № 6. С. 54–60.
8. Захаревич А.В., Кузнецов В.Т., Кузнецов Г.В., Максимов В.И. Зажигание модельных смесовых топливных композиций одиночной, нагретой до высоких температур частицей // Физика горения и взрыва. 2008. Т. 44. № 5. С. 54–57.
9. Виллюнов В.Н. Теория зажигания конденсированных веществ. Новосибирск: Наука, 1984. 190 с.
10. Зельдович Я.Б. К теории горения пороха в газовом потоке // Физика горения и взрыва. 1971. Т. 7. № 4. С. 463–476.
11. Виллюнов В.Н. К теории эрозионного горения порохов // ДАН СССР. 1961. Т. 136. № 2. С. 381–383.

12. Булгаков В.К., Липанов А.М. Теория эрозионного горения твердых ракетных топлив. М.: Наука, 2001. 138 с.
13. Порязов В.А., Крайнов А.Ю. Математическая модель и расчет нестационарной скорости горения металлизированных твердых ракетных топлив // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 50. С. 99–111.
14. Порязов В.А., Крайнов Д.А. Математическое моделирование эрозионного горения металлизированных твердых топлив // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 58. С. 119–127. DOI: 10.17223/19988621/58/10.
15. van Driest E.R. On turbulent flow near a wall // AIAA Journal Special Supplement: Centennial of Power Flight. 1956. V. 23(11). P. 1007–1011. <https://doi.org/10.2514/8.3713>.
16. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 714 с.
17. Гинзбург И.П. Теория сопротивления и теплопередачи. Л., 1970. 376 с.

Статья поступила 04.03.2020 г.

Poryazov V.A., Krainov A.Yu. (2020) MATHEMATICAL MODELING OF THE METALLIZED SOLID PROPELLANT IGNITION BY A HIGH-TEMPERATURE CONVECTIVE FLOW. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 68. pp. 126–140

DOI 10.17223/19988621/68/12

Keywords: ignition, metallized solid propellant, mathematical model, velocity, blowing flow, high-temperature flow, convective flow.

This paper presents a mathematical model and a methodology to calculate stationary combustion of a metallized solid propellant with aluminum additives ignited by a high-temperature convective flow. The study considers the ignition of a semi-infinite slab of the metallized solid propellant which is blown over by an unlimited high-temperature flow. A boundary-layer approximation is used to develop the ignition model. The high-temperature blowing effect is taken into account in the model by means of turbulent heat and mass transfer. The paper provides a numerical and theoretical analysis on the impact of the velocity and temperature of the convective flow on the ignition time delay and the stationary combustion mode establishment. The analysis shows that the proposed approach allows calculating the time of the ignition delay and stationary combustion mode establishment for the metallized solid propellant. Moreover the ignition delay and the period of the stationary combustion mode establishment are found to be controlled by both the velocity and temperature of the convective flow.

Financial support. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grant No. 18-38-00533).

Vasilij A. PORYAZOV (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: poryazov@ftf.tsu.ru

Aleksey Yu. KRAINOV (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

REFERENCES

1. Rozenband V.I., Barzykin V.V., Merzhanov A.G. (1968) Ignition of condensed substances by convective heat fluxes of medium intensity under dynamic conditions. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 4(2). pp. 96–99. DOI: 10.1007/BF00783556.
2. Zarko V.E., Mikheev V.F., Sukhinin A.I., Khlevnoi S.S. (1973) Hot-gas ignition of powders. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 7(1). pp. 55–57. DOI: 10.1007/BF00748915.
3. Zakharevich A.V., Strizhak P.A., Syrodoi S.V., Salomatov V.V. (2016) Ignition of the drops of coal–water fuel in a flow of air. *Solid Fuel Chemistry*. 50(3). pp. 163–166.

4. Gusachenko L.K., Zarko V.E., Rychkov A.D. (2012) Ignition and extinction of homogeneous energetic materials by a light pulse. *Combustion, Explosion and Shock Waves*. 48(1). pp. 73–80. DOI: 10.1007/BF00748915.
5. Burkina R.S., Domukhovskii A.M. (2012) Effect of structural changes of the surface layer of a condensed material ignited by a powerful radiation pulse. *Combustion, Explosion and Shock Waves*. 48(5). pp. 602–608. DOI: 10.1134/S0010508212050115.
6. Poryazov V.A., Krainov A.Yu. (2019) Raschet rezhimov zazhiganiya i vykhoda na statsionarnyy rezhim goreniya metallizirovannogo tverdogo raketnogo topliva pod deystviem lazernogo izlucheniya [Calculation of the ignition stages and steady-state combustion of a metallized solid propellant under laser radiation]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 59. pp. 94–104. DOI: 10.17223/19988621/59/10.
7. Glushkov D.O., Kuznetsov G.V., Strizhak P.A. (2014) Stability of composite solid propellant ignition by a local source of limited energy capacity. *Combustion, Explosion and Shock Waves*. 50(6). pp. 670–675. DOI: 10.1134/S0010508214060082.
8. Zakharevich A.V., Kuznetsov V.T., Kuznetsov G.V., Maksimov V.I. (2008) Ignition of model composite propellants by a single particle heated to high temperatures. *Combustion, Explosion and Shock Waves*. 44(5). pp. 543–546. DOI: 10.1007/s10573-008-0083-0.
9. Vilyunov V.N. (1984) *Teoriya zazhiganiya kondensirovannykh veshchestv* [Theory of ignition of condensed materials]. Moscow: Nauka
10. Zel'dovich Ya.B. (1974) Theory of propellant combustion in a gas flow. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 7(4). pp. 399–408.
11. Vilyunov V.N. (1961) K teorii erosiionnogo goreniya porokhov [To the theory of erosive combustion of gunpowder]. *Doklady AN SSSR*. 136(2). pp. 381–383.
12. Bulgakov V.K., Lipanov A.M. (2001) *Teoriya erozionnogo goreniya tverdykh raketnykh topliv* [Theory of erosive combustion of solid rocket propellants]. Moscow: Nauka
13. Poryazov V.A., Krainov A.Yu. (2017) Matematicheskaya model' i raschet nestatsionarnoy skorosti goreniya metallizirovannykh tverdykh raketnykh topliv [Mathematical model and calculation of the unsteady combustion rate of the metallized solid rocket propellants]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 50. pp. 99–111. DOI: 10.17223/19988621/50/9.
14. Poryazov V.A., Krainov D.A. (2019) Matematicheskaya model' erosiionnogo goreniya metallizirovannykh tverdykh topliv [Mathematical modeling of the erosive burning of metallized solid propellants]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 58. pp. 119–127. DOI: 10.17223/19988621/58/10.
15. van Driest E.R. (1956) On turbulent flow near a wall. *AIAA Journal Special Supplement: Centennial of Power Flight*. 23(11). pp. 1007–1011. DOI: 10.2514/8.3713.
16. Schlichting H., Gersten K. (2004) *Boundary Layer Theory*. 8th ed. Springer-Verlag.
17. Ginzburg I.P. (1970) *Teoriya soprotivleniya i teploperedachi* [Theory of resistance and heat transfer]. Leningrad.

Received: March 4, 2020

УДК 533, 004

DOI 10.17223/19988621/68/13

Т. Редер, В.А. Тененев, А.А. Чернова

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВЫХ РЕЖИМОВ РАБОТЫ ПРЕДОХРАНИТЕЛЬНОГО КЛАПАНА

Настройка предохранительных клапанов на требуемый режим регулирования требует численного моделирования переходных процессов, составляющих полный цикл работы. Газодинамические процессы в клапане рассчитываются на основе численного решения уравнений движения вязкого теплопроводного газа с применением метода С.К. Годунова в сочетании со схемой MUSCL. Проведено сравнение с экспериментальными данными. Исследовано влияние длины подводящей магистрали на устойчивость работы клапана.

Ключевые слова: *предохранительный клапан, численное моделирование, динамический процесс, метод С.К. Годунова, схема MUSCL.*

Моделирование рабочих процессов в регуляторах давления на основе вычислительной динамики жидкости CFD (Computational Fluid Dynamics) дает основу для проектирования и оптимизации работы предохранительных клапанов. Основными затруднениями при осуществлении численных расчетов являются большое время вычислений и дискретное представление расчетной области при наличии подвижных твердых границ. В закрытом клапане имеются две изолированные области с условными названиями: нижняя – от входа до сечения седла клапана; верхняя – от седла до выхода. При подъеме диска с седла эти области соединяются через образовавшийся зазор. Возникает проблема выбора начальной величины зазора и соответствующей ему скорости движения диска. Уменьшение зазора приводит к соответствующему уменьшению расчетного шага по времени и к возрастанию времени счета, а при большом начальном зазоре теряется информация о предыстории движения диска. В разных работах проводятся разные обоснования начальной величины дискового зазора. Beune (2009) [1] проводил стационарные расчеты с зазором от 0.1 мм в 3D постановке. Динамика движения рассчитывалась в 2D-постановке, начиная с зазора в 0.01 мм. В работе [2] проводили 3D-моделирование предохранительного клапана с применением ANSYS CFX. Начальный зазор составлял 0.1 мм. В этой работе подтверждено, что комбинированная модель способна предсказать динамику работы клапана, а также характеристики потока в разные моменты времени. Для расчета применялся метод динамического наложения слоев, требующий нескольких слоев сетки под диском. При численном моделировании работы клапана большинство авторов применяют пакеты ANSYS FLUENT и ANSYS CFX, а величина начального зазора меняется от 0.1 до 1 мм.

Поведение предохранительного клапана во время переходных режимов его работы (переходного процесса) является объектом исследования многих авто-

ров. В работе [3] анализируется математическая модель подпружиненного предохранительного клапана, соединенного с резервуаром сжимаемого газа через трубу. Клапан моделируется с использованием уравнений Ньютона и уравнений одномерной газодинамики. Одномерные модели с использованием эмпирических зависимостей гидравлической силы от характеристик течения применялись для исследования неустойчивых режимов работы клапана для жидкостных сред [4, 5].

Математическая модель работы клапана

Схема предохранительного клапана и расчетная область показаны на рис. 1.

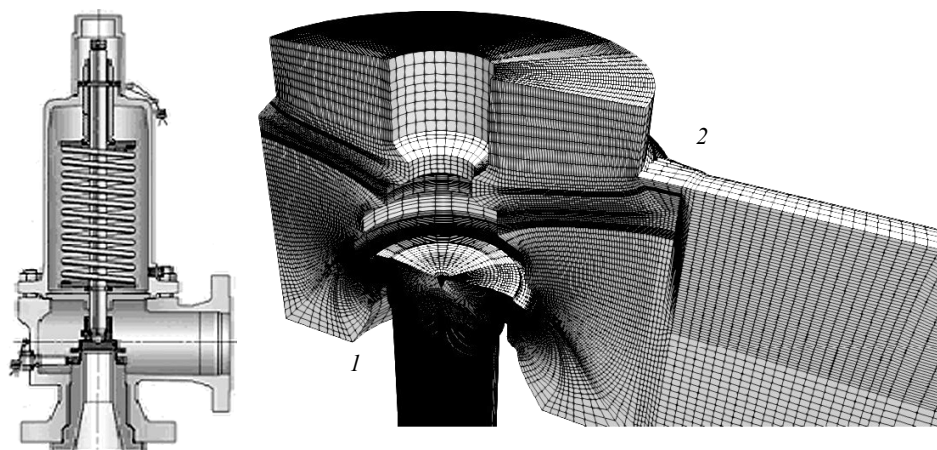


Рис. 1. Расчетная область в клапане

Fig. 1. Valve computational domain

Расчетная область разделена на две части. Первая часть является осесимметричной ($l = 1$) и в ней используется цилиндрическая система координат (x, r, φ) . Во второй части ($l = 0$) применяется прямоугольная система координат (x, y, z) . Безразмерные уравнения, описывающие движение вязкого теплопроводного газа, имеют следующий вид:

$$\frac{\partial(q_2^l \mathbf{m})}{\partial t} + \frac{\partial[q_2^l (\mathbf{A} - \mathbf{A}_v)]}{\partial q_1} + \frac{\partial[q_2^l (\mathbf{B} - \mathbf{B}_v)]}{\partial q_2} + \frac{\partial(\mathbf{C} - \mathbf{C}_v)}{\partial q_3} = \mathbf{S}. \quad (1)$$

В зависимости от принадлежности к части расчетной области, координатами $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)^T$ являются:

$$(q_1, q_2, q_3) = \begin{cases} (x, y, z) & | l = 0, \\ (x, r, \varphi) & | l = 1, \end{cases}$$

где величина $l = 0$ соответствует декартовой системе координат (при этом $y^l = 1$), а $l = 1$ – цилиндрической ($r^l = r$);

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \\ \rho K \\ \rho E \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u u + p \\ \rho v u \\ \rho w u \\ u(e + p) \\ \rho u K \\ \rho u E \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v v + p \\ \rho w v \\ v(e + p) \\ \rho v K \\ \rho v E \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho u w \\ \rho v w \\ \rho w w + p \\ w(e + p) \\ \rho w K \\ \rho w E \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_v = \frac{1}{\text{Re}_0} \begin{pmatrix} 0 \\ \pi_{11} \\ \pi_{21} \\ \pi_{31} \\ \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{V} + \frac{(f_\varepsilon + \chi)}{\sigma_T} \rho \gamma \frac{\partial \varepsilon}{\partial q_1} \\ \left(f_\varepsilon + \frac{\chi}{\sigma_K}\right) \rho \frac{\partial K}{\partial q_1} \\ \left(f_\varepsilon + \frac{\chi}{\sigma_K}\right) \rho \frac{\partial E}{\partial q_1} \end{pmatrix}, \mathbf{B}_v = \frac{1}{\text{Re}_0} \begin{pmatrix} 0 \\ \pi_{12} \\ \pi_{22} \\ \pi_{32} \\ \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{V} + \frac{(f_\varepsilon + \chi)}{\sigma_T} \rho \gamma \frac{\partial \varepsilon}{\partial q_2} \\ \left(f_\varepsilon + \frac{\chi}{\sigma_K}\right) \rho \frac{\partial K}{\partial q_2} \\ \left(f_\varepsilon + \frac{\chi}{\sigma_K}\right) \rho \frac{\partial E}{\partial q_2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_v = \frac{1}{\text{Re}_0} \begin{pmatrix} 0 \\ \pi_{13} \\ \pi_{23} \\ \pi_{33} \\ \mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{V} + \frac{(f_\varepsilon + \chi)}{\sigma_T} \rho \gamma \frac{\partial \varepsilon}{\partial q_3} \\ \left(f_\varepsilon + \frac{\chi}{\sigma_K}\right) \rho \frac{\partial K}{\partial q_3} \\ \left(f_\varepsilon + \frac{\chi}{\sigma_K}\right) \rho \frac{\partial E}{\partial q_3} \end{pmatrix}, \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \left(p + \rho w^2 - \frac{\pi_{33}}{\text{Re}_0} \right) \\ l \left(-\rho v w + \frac{\pi_{23}}{\text{Re}_0} \right) \\ 0 \\ q_2^l \rho (2D_\chi^2 - E) \\ q_2^l \frac{E}{K} \rho (2C_1 D_\chi^2 - c_2 E) \end{pmatrix}$$

Вектор скорости $\mathbf{V} = (u, v, w)^T$ имеет составляющие в соответствующем базисе (q_1, q_2, q_3) . Векторы $\mathbf{m}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{A}_v, \mathbf{B}_v, \mathbf{C}_v, \mathbf{S}, \mathbf{S}_v$ содержат газодинамические комплексы, составленные из переменных: ρ – плотность газа; $e = \rho \varepsilon + \rho \frac{|\mathbf{V}|^2}{2}$ – полная энергия единицы объема газа; внутренняя энергия определяется уравнением состояния совершенного газа $\varepsilon = c_v T = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}$, где $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ – показатель адиабаты; c_p, c_v – изобарные и изохорные теплоемкости; T – температура, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ – конвективные члены; $\mathbf{A}_v, \mathbf{B}_v, \mathbf{C}_v$ – вязкие члены; $\mathbf{S}$ – источниковый член.

Переменные ρ, V отнесены к критическим значениям ρ_*, a_* , давление p и энергия e к $\rho_* a_*^2$, где $a_* = \sqrt{\gamma \frac{p_*}{\rho_*}}$ – скорость звука. Пространственный масштаб

r_0 – радиус седла клапана, масштаб времени $\tau = \frac{r_0}{a_*}$. Критические значения пере-

менных связаны с параметрами торможения в контролируемой емкости известными соотношениями:

$$\rho_* = \rho_0 \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, p_* = p_0 \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

В качестве масштабов энергии турбулентности K и скорости ее диссипации E выбраны $\frac{v_0}{\tau}$ и $\frac{v_0^2}{\tau^2}$ соответственно. Турбулентная вязкость, отнесенная к v_0 :

$\chi = c_\mu \frac{K^2}{E}$. Коэффициент кинематической вязкости ν_0 соответствует температуре торможения T_0 . Зависимость вязкости от температуры учитывается формулой Саттерленда в виде

$$\nu(\varepsilon) = \nu_0 f_\varepsilon, \quad f_\varepsilon = \nu_0 \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{1.5} \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_s}{\varepsilon + \varepsilon_s},$$

где

$$\varepsilon_0 = \frac{c_v T_0}{a_*^2}, \quad \varepsilon_s = \frac{c_v T_s}{a_*^2}, \quad T_s = 122 \text{ К}.$$

Компоненты π_{ij} образуют тензор

$$\Pi = \rho(f_\varepsilon + \chi) \left(2 \text{def}(\mathbf{V}) - \frac{2}{3} \text{div}(\mathbf{V}) \right), \quad D = \text{def}(\mathbf{V}),$$

$$\mathbf{p}_i = (\pi_{ij}), \quad \eta_E = \frac{K \sqrt{2D^2}}{E}, \quad C_1 = c_1 - \frac{\eta_E}{1 + \beta_E \eta_E^3} \left(1 - \frac{\eta_E}{\eta_{E0}} \right).$$

Константы имеют следующие значения:

$$c_\mu = 0.085; \quad c_1 = 1.42; \quad c_2 = 1.68; \quad \beta_E = 0.012;$$

$$\eta_{E0} = 4.38; \quad \sigma_k = 0.72; \quad \sigma_E = 0.72,$$

σ_T – число Прандтля; $\text{Re}_0 = \frac{r_0 a_*}{\nu_0}$ – число Рейнольдса.

Перемещение диска в осевом направлении ξ , совпадающим с осью x определяется действием силы со стороны газа F_f ; силы упругости пружины $F_s = K_s (\xi + \xi_0)$; демпфирующей силы трения $F_d = K_d \eta$ и силы тяжести $m_s g$. Здесь: K_s – коэффициент жесткости пружины; ξ – перемещение диска (высота подъема); ξ_0 – начальное сжатие пружины; K_d – коэффициент демпфирования (трения); η – скорость перемещения диска.

Уравнения движения диска имеют вид

$$m_s \frac{d\eta}{dt} = F_f - F_s - F_d - m_s g, \quad (2)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \eta \quad (3)$$

Адиабатическое изменение давления торможения в емкости, откуда происходит сброс газа, определяется изменением массы газа в емкости $\frac{dm_v}{dt} = G_{in} - G_{valve}$ при расходе газа через клапан G_{valve} и приходе газа от внешних источников G_{in}

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\gamma R T_0}{W} (G_{in} - G_{valve}) \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \quad (4)$$

где W – объем емкости; R – газовая постоянная; T_0, p_0 – температура и давление газа в начальный момент времени.

Начальные условия для решения уравнений газодинамики соответствуют закрытому клапану. Это значит, что в объеме под диском клапана параметры равны параметрам в емкости, а в объеме над диском – параметрам окружающей среды.

Граничные условия для уравнения (1):

- Вход. Задаются направление вектора скорости, условие постоянства энтропии, соотношения на характеристике, входящей в область. Для K и E заданы начальные уровни турбулентности, соответствующие $\chi = 1$.

- Выход. Задано давление p_a , для параметров турбулентности ставятся «мягкие» условия.

- Твердые стенки. Для скорости – условие прилипания, для K и E – нулевые градиенты по направлению нормали.

Начальные условия: до зазора давление, как в резервуаре; после зазора – давление окружающей среды; скорости нулевые.

Для численного решения систем газодинамических уравнений (1), применяется метод контрольного объема. Для каждой грани с индексом h выражение для потоков имеет вид

$$\mathbf{Q}_h = \Delta t^n \sigma_h \begin{bmatrix} R(\psi - N) \\ R(\psi - N)U - n_x P \\ R(\psi - N)V - n_y P \\ R(\psi - N)W - n_z P \\ R(\psi - N)G - NP \\ R(\psi - N)Y \\ R(\psi - N)Z \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где R, U, V, W, G, P, Y, Z – величины, соответствующие плотности, скоростям, энергии, давлению, энергии турбулентности, скорости диссипации; ψ – скорость грани в направлении нормали; N – нормальная составляющая вектора скорости; σ_h – площадь поверхности соответствующей грани.

Для каждой грани решается соответствующая задача о распаде разрыва с двумя наборами газодинамических параметров в контрольных объемах, разделенных этой гранью. Параметры газа на границах контрольных объемов определяются по методу С.К. Годунова с использованием автомодельного решения задачи о распаде произвольного разрыва [6]. К сожалению, способы приближенного решения задачи Римана, сокращающие время расчета [7], хорошо работают только в относительно простых областях и для тестовых задач. В случае осесимметричного течения в клапане появляются осцилляции в давлении. В трехмерной постановке для условий сложного течения в клапане схема становится неустойчивой. Для повышения порядка аппроксимации разностного метода Годунова применяется схема MUSCL. Значения газодинамических параметров для решения задачи о распаде разрыва определяются с применением экстраполяции с ограничителем [8, 9]. Например, для направления по индексу i для правой грани:

- значения переменных $f = (\rho, u, v, w, p)$ «справа» от поверхности разрыва

$$f_R = f_{i+1,jk} + 0.5\Psi(c)(f_{ijk} - f_{i+1,jk}),$$

$$c = \frac{f_{i+1,jk} - f_{i+2,jk}}{f_{ijk} - f_{i+1,jk}}, \quad \Psi(c) = \frac{c^2 + c}{1 + c^2};$$

- значения переменных «слева» от поверхности разрыва

$$f_L = f_{ijk} + 0.5\Psi(c)(f_{i+1,jk} - f_{ijk}), \quad c = \frac{f_{ijk} - f_{i-1,jk}}{f_{i+1,jk} - f_{ijk}}.$$

Величины R, U, V, W, G определяются из решения общей задачи о распаде произвольного разрыва. Величины Y, Z на гранях контрольного объема определяются с применением экстраполяции с ограничителем в соответствии с направлением нормали скорости.

Для уравнений (1), записанных в цилиндрической системе координат, строится разностная сетка в блоке 1 в плоскости $\varphi = \text{const}$ комплексным методом граничных элементов. Контрольные объемы представляют собой секторальные вырезки из цилиндров с криволинейной образующей (рис. 1). Для таких контрольных объемов нормаль и касательная к боковым граням рассчитываются просто, так как сетка является ортогональной. Для блока 2 контрольные объемы могут иметь вид произвольного многогранника, причем грани не обязательно плоскости. Для пространственного четырехугольника с вершинами 1, 2, 3, 4, пронумерованными против часовой стрелки, вектор нормали имеет составляющие:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = 0.5 \begin{bmatrix} \Delta y_{21}\Delta z_{32} - \Delta y_{32}\Delta z_{21} + \Delta y_{43}\Delta z_{14} - \Delta y_{14}\Delta z_{43} \\ \Delta z_{21}\Delta x_{32} - \Delta z_{32}\Delta x_{21} + \Delta z_{43}\Delta x_{14} - \Delta z_{14}\Delta x_{43} \\ \Delta x_{21}\Delta y_{32} - \Delta x_{32}\Delta y_{21} + \Delta x_{43}\Delta y_{14} - \Delta x_{14}\Delta y_{43} \end{bmatrix},$$

где, например, $\Delta x_{21} = x_2 - x_1$. Тангенциальный вектор возьмем в виде

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x_{31} \\ \Delta y_{31} \\ \Delta z_{31} \end{bmatrix}.$$

Векторы $\mathbf{n}, \mathbf{T}$ нормируются и третий орт определим как векторное произведение

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} = [\mathbf{N} \times \mathbf{T}].$$

Проекции вектора скорости на орты, необходимые для решения задачи о распаде разрыва, это скалярные произведения $N = (\mathbf{V}, \mathbf{n})$; $T = (\mathbf{V}, \mathbf{T})$; $K = (\mathbf{V}, \mathbf{K})$.

После решения задачи о распаде произвольного разрыва восстанавливаются величины скорости на ребре:

$$U = n_x N + \tau_x T + k_x K, \quad V = n_y N + \tau_y T + k_y K, \quad W = n_z N + \tau_z T + k_z K$$

и вычисляются потоки (5) через соответствующие грани.

Градиенты переменных, входящие в компоненты π_{ij} , тензор Π вычисляются в середине каждой грани через значения переменных в окружающих контрольных объемах, как это описано в работе [10]. Например, для направления по индексу i на правой грани градиент функции f имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial q_\alpha} = c_\alpha^\beta b_\beta,$$

где

$$\begin{aligned} b_1 &= f_{i+1jk} - f_{ijk}, \quad \mathbf{c}_1 = \mathbf{q}_{i+1jk} - \mathbf{q}_{ijk}, \quad b_2 = f_{ij+1k} - f_{ij-1k} + f_{i+1j+1k} - f_{i+j-1k}, \\ \mathbf{c}_2 &= \mathbf{q}_{ij+1k} - \mathbf{q}_{ij-1k} + \mathbf{q}_{i+1j+1k} - \mathbf{q}_{i+1j-1k}, \quad b_3 = f_{ijk+1} - f_{ijk-1} + f_{i+1jk+1} - f_{i+1jk-1}, \\ \mathbf{c}_3 &= \mathbf{q}_{ijk+1} - \mathbf{q}_{ijk-1} + \mathbf{q}_{i+1jk+1} - \mathbf{q}_{i+1jk-1}, \quad C = \mathbf{c}_1 \cdot (\mathbf{c}_2 \times \mathbf{c}_3), \quad \mathbf{c}^\alpha = \frac{\mathbf{c}_\beta \times \mathbf{c}_\gamma}{C}. \end{aligned}$$

Переход к следующему шагу по времени осуществляется по двухшаговой схеме со вторым порядком точности:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} G_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} &= \mathbf{m}_{i,j,k}^n G_{i,j,k}^n - \left(\sum_h \mathbf{Q}_h^n - \mathbf{S}_{i,j,k}^n G_{i,j,k}^n \right) \frac{\Delta t^n}{2}, \\ \mathbf{m}_{i,j,k}^{n+1} G_{i,j,k}^{n+1} &= \mathbf{m}_{i,j,k}^n G_{i,j,k}^n - \left(\sum_h \mathbf{Q}_h^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{S}_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} G_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} \right) \Delta t^n; \end{aligned} \quad (\text{блок 1})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} &= \mathbf{m}_{i,j,k}^n - \frac{1}{G_{i,j,k}^n} \left(\sum_h \mathbf{Q}_h^n - \mathbf{S}_{i,j,k}^n \right) \frac{\Delta t^n}{2}, \\ \mathbf{m}_{i,j,k}^{n+1} &= \mathbf{m}_{i,j,k}^n - \frac{1}{G_{i,j,k}^n} \left(\sum_h \mathbf{Q}_h^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{S}_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} \right) \Delta t^n, \end{aligned} \quad (\text{блок 2})$$

где, i, j, k – номер контрольного объема; $G_{i,j,k}^n$ – величина контрольного объема на временном шаге n ; суммирование потоков проводится по всем граням контрольного объема. В первом блоке контрольные объемы деформируются при движении диска, во втором в течение времени не изменяются.

Задача совместного решения уравнений (1) – (3) является сопряженной. Связь осуществляется через газодинамическую силу, определяемую через интеграл давления и вязкого напряжения трения τ_w по поверхности диска

$$F_f = \int (p + \tau_w) r dr d\varphi$$

и деформацию подвижной границы блока 1. Величина вязкого напряжения трения τ_w определяется через пристеночные функции [11].

Дифференциальные уравнения (2),(3) интегрируются по неявной схеме [2]

$$\xi^{n+1} = \frac{(F_f - K_s \xi_0 - m_s g) \Delta t + K_{de} \xi^n + m_s \left(\frac{\xi^n - \xi^{n-1}}{\Delta t} + \frac{\xi^n}{\Delta t} \right)}{K_s \Delta t + \frac{m_s}{\Delta t} + K_d}.$$

Анализ начального участка движения диска

Цикл работы предохранительного пружинного клапана начинается от момента времени, когда давление в контролируемом резервуаре превышает допустимое. Газодинамическая сила, действующая на запорный диск клапана, по величине превышает силу упругости пружины. Диск начинает перемещаться, площадь проходного сечения увеличивается и рабочая среда из резервуара сбрасывается через выходной патрубок в атмосферу. Циклограммы для клапана 2J3 «давление – перемещение диска» показаны на рис. 2.

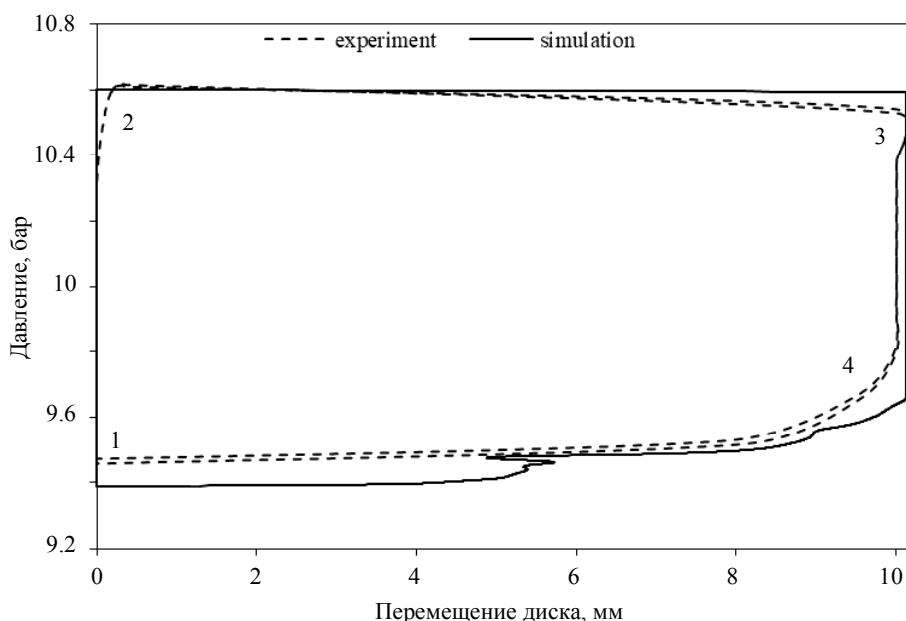


Рис. 2. Циклограмма клапана «давление – перемещение диска»
Fig. 2. «Pressure – disc displacement» cyclogram of the valve

Из точки 1 давление возрастает до предельного значения в точке 2 и клапан начинает открываться. Точка 3 соответствует максимальному ходу диска. На этом рисунке принято избыточное давление. В точке 2 преодолевается сила упругости пружины. С увеличением зазора между диском и седлом клапана газодинамическая сила возрастает, все время превышая силу упругости пружины. В точке 3 диск занимает предельное положение и начинается более интенсивный сброс давления в резервуаре, приводящий к снижению газодинамической силы. При достижении газодинамической силы величины силы упругости пружины в точке 4 диск начинает опускаться. Газодинамическая сила снижается как за счет снижения давления, так и за счет уменьшения дискового зазора. Цикл замыкается с закрытием клапана и приходом в точку 1.

Газодинамические процессы, требующие численного моделирования, соответствуют участку циклограммы 2–3–4. При проведении численного моделирования динамических процессов в пружинных клапанах и анализе результатов все авторы отмечают проблематичность расчета стартового отрезка времени. При величине зазора порядка 0.01 мм при количестве десяти слоев дискретный шаг по времени порядка 10^{-8} с , в зависимости от допустимого числа Куранта, что приводит к большим временным затратам даже на высокопроизводительных компьютерах.

Запишем уравнение (2) в виде:

$$m_s \frac{d\eta}{dt} = F_f(\xi, p) - K_s(\xi + \delta_0) - k_d \eta - m_s g. \quad (6)$$

Начальные условия для уравнений (2), (3): $\xi(0) = 0$; $\eta(0) = 0$.

Предохранительный клапан настраивается на срабатывание при достижении заданного уровня давления p_0 . Сила со стороны газа на диск в момент достижения давления p_0 равна

$$F_f(\xi, p) = \sigma(p_0 - p_a), \quad (7)$$

где p_a – противодействие окружающей среды; σ – площадь проходного сечения седла клапана, определяемая конструкцией клапана. При превышении газодинамической силы упругости пружины и силы веса подвижной части $\sigma(p_0 - p_a) > K_s \delta_0 + m_s g$ начинается движение диска в соответствии с уравнением (6).

Разложим газодинамическую силу в ряд Тейлора в окрестности точки $(t = 0; \xi = 0; p = p_0)$:

$$F_f(\xi, p) = F_f(0, p_0) + \left. \frac{\partial F_f(\xi, p)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0, p=p_0} \xi + \left. \frac{\partial F_f(\xi, p)}{\partial p} \right|_{\xi=0, p=p_0} \frac{dp}{dt} \Big|_{t=0} t + O(\xi^2, t^2).$$

Из выражения (7) следует

$$\left. \frac{\partial F_f(\xi, p)}{\partial p} \right|_{\xi=0, p=p_0} = \sigma,$$

а из (4)

$$\left. \frac{dp}{dt} \right|_{t=0} = G_{\text{in}} \frac{kRT_0}{W},$$

с учетом того, что

$$G_{\text{valve}}(0) = 0.$$

Производную газодинамической силы по аргументу ξ заменим конечно-разностным соотношением:

$$\left. \frac{\partial F_f(\xi, p)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0, p=p_0} \approx \frac{F_f(\Delta\xi, p_0) - F_f(0, p_0)}{\Delta\xi} = \frac{\Delta F}{\Delta\xi},$$

где $\Delta\xi$ – некоторая величина зазора.

Результаты анализа численных расчетов и экспериментов [12] показывают, что за время подъема диска на максимальную величину давление в емкости практически не изменяется. Поэтому при анализе срабатывания клапана важной является величина производной $\left. \frac{dp}{dt} \right|_{t=0}$, обеспечивающая выход динамической системы, описываемой уравнениями (2) – (4), из состояния покоя. Величина силы $F_f(\Delta\xi, p_0)$ при заданной величине зазора $\Delta\xi$ вычисляется при численном решении газодинамической задачи.

С учетом того, что $F_f(0, p_0) = K_s \delta_0 + m_s g$, $\Delta F = F_f(\Delta\xi, p_0) - F_f(0, p_0)$, для перемещения диска получаем уравнение

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \kappa \frac{d\xi}{dt} = \alpha\xi + bt,$$

где введены обозначения:

$$\kappa = \frac{k_d}{m_s}, \quad \alpha = \left(\frac{\Delta F}{\Delta\xi} - K_s \right) \frac{1}{m_s}, \quad b = \frac{kRT_0 G_{in} \sigma}{m_s W}.$$

Решение линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка имеет вид

$$\xi = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{b}{a} t, \quad \text{где } \lambda_{1,2} = \frac{\kappa}{2} \pm \sqrt{\frac{\kappa^2}{4} + a}.$$

Из начальных условий $\xi(0) = 0$, $\left. \frac{d\xi}{dt} \right|_{t=0} = 0$ определяем константы интегрирования C_1, C_2 и получаем аналитические выражения для зависимостей перемещения и скорости диска от времени:

$$\xi = \frac{b}{a} \left[e^{-\frac{\kappa t}{2}} \frac{\text{sh}(t\sqrt{A})}{\sqrt{A}} - t \right], \quad (8)$$

$$\eta = \frac{d\xi}{dt} = -\frac{\kappa}{2} \left(\xi + \frac{b}{a} t \right) + \frac{b}{a} \left[\text{ch}(t\sqrt{A}) - 1 \right] e^{-\frac{\kappa t}{2}}, \quad (9)$$

где $A = \frac{\kappa^2}{4} + a$.

Из уравнения (8) определяется время достижения заданной величины зазора $\Delta\xi$, из уравнения (9) – скорость движения диска в этот момент времени. Для дальнейшего решения эти величины применяются в качестве начальных условий при совместном решении уравнений (1) – (3).

Результаты расчетов полного цикла работы клапана

При движении диска сетка перестраивается. Для деформации сетки в процессе численного расчета предварительно рассчитываются несколько вариантов сетки от начального до конечного значения зазора (для расчета взято 10 положений диска). При моделировании по текущей величине зазора ξ строится текущая сетка по двум промежуточным вариантам с помощью интерполирования. Сетка во втором блоке является неструктурированной и не деформируется. Построенная таким образом сетка отслеживает участки течения с большими градиентами. Кроме того, такая сетка, близкая к ортогональной, легко измельчается или укрупняется при необходимости.

С применением рассмотренного алгоритма проведены расчеты полного цикла работы клапана 2J3 при максимальном абсолютном давлении в резервуаре 11.6 бар. На рис. 2 показаны расчетные и экспериментальные циклограммы «давление – перемещение диска». Условия проведения экспериментов описаны в работе авторов [12]. Сравнение расчетных и экспериментальных циклограмм «давление – перемещение диска» является комплексным показателем возможности моделирования полного цикла работы клапана. В рассчитываемых условиях) клапан работает в режиме полного подъема диска в течение основного времени процесса. Характеристикой конструкции клапана для различных давлений служит зависимость приведенной силы (отношение газодинамической силы к величине давления) от высоты подъема диска. Результаты численного моделирования и экспериментальных измерений представлены на рис. 3.

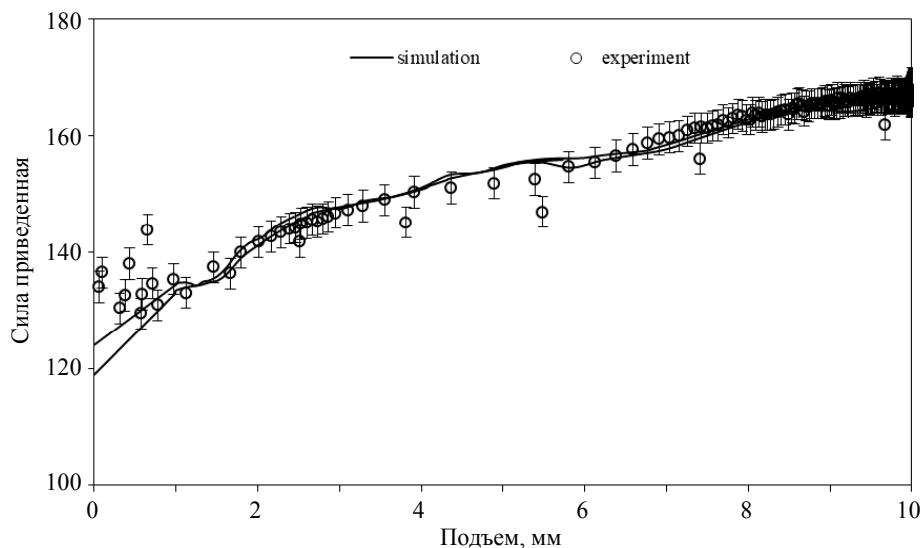


Рис. 3. Зависимость приведенной силы от высоты подъема диска
Fig. 3. Dependence of the reduced force on the height of the disc

Из рис. 3 следует, что расчетные значения приведенной силы на основном участке работы находятся в пределах доверительного интервала при доверительной вероятности 0.99. При малой величине подъема диска наблюдаются большие разбросы экспериментальных значений. Эти разбросы связаны с вибрациями при по-

садке диска на седло. Вибрации также возникают при столкновениях диска с верхним ограничителем при полном открывании. В это время в экспериментах фиксируются аномальные значения силы и подъема диска. В эксперименте величина прихода газа от внешних источников G_{in} контролируется только до момента полного открытия клапана. В расчетах использовалось это значение G_{in} . Затем приход газа снижается оператором до начала следующего цикла. Более высокое значение G_{in} на участке сброса давления является причиной отклонения расчетной и экспериментальной циклограмм на рис. 2 в сторону увеличения времени работы клапана.

Расчеты показывают сложную структуру течения (рис. 4).

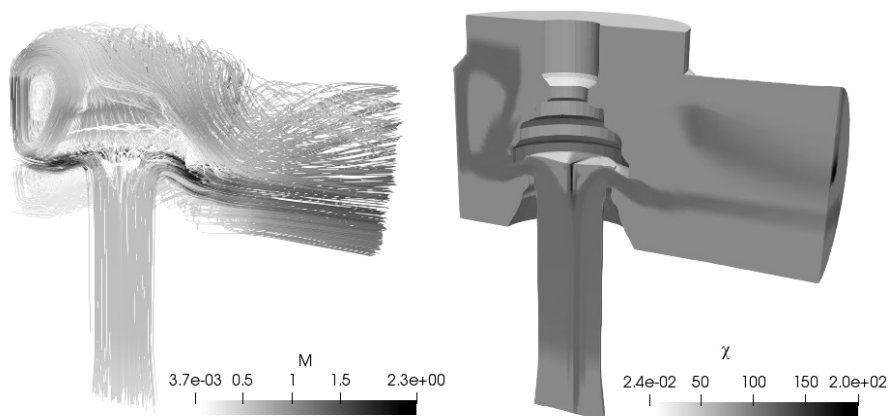


Рис. 4. Структура течения и турбулентная вязкость в клапане
Fig. 4. Flow structure and turbulent viscosity in the valve

В левой части показаны линии тока и величины числа Маха. Течение после зазора становится сверхзвуковым с образованием ударных волн. Большая деформация поля скорости приводит к росту турбулентной вязкости (правая часть рис. 4).

Нестабильные режимы работы клапана

При наличии подводящей трубы от резервуара к клапану в экспериментах наблюдается колебательный режим движения диска и давления в клапане. Одномерный расчет таких режимов проводился рядом авторов [3–5] при различных допущениях о связях изменения газодинамики с движением диска. Трехмерный газодинамический расчет на сетке порядка 10^6 узлов (рис. 1) с шагом 10^{-8} с на полный цикл работы 3 с является очень трудоемким даже при распараллеливании вычислений. Для возможности оперативного проведения расчетов динамического режима работы клапана предлагается перейти от трехмерной вязкой постановки к двумерной невязкой в блоке 1 на грубой сетке. Коррекция полученного грубого решения осуществляется введением корректирующих множителей для газодинамической силы и массового расхода, полученных из сопоставления с трехмерным расчетом. Грубая сетка строится из исходной в блоке 1 отбрасыванием коорди-

натных линий. Так как продольные координатные линии полностью отслеживают контур диска, то возможно рассчитать газодинамическую силу, хотя течение здесь следует считать промежуточным между одномерным и двумерным. Из сопоставления с трехмерным вариантом расчета определяются:

1 – поправочная функция к нижней приведенной силе, зависящая от перемещения диска ξ : $\psi(\xi) = 1 + 0.0156\xi + 0.0009\xi^2$;

2 – поправочная функция к массовому расходу $g(\xi) = 1 + 0.0584\xi - 0.0045\xi^2$;

3 – поправочная функция к верхней силе $f_{\text{вр}} = 1 - 0.0081\xi$.

Полученные в расчете 2D значения параметров умножаются на соответствующие поправочные функции. При данном алгоритме трехмерность течения учитывается поправочными функциями, а нестационарность обеспечивается совместным решением уравнений (2), (3) и нестационарных 2D-уравнений газодинамики на грубой сетке.

Для повышения производительности также применялись параллельные вычисления с разделением расчетной области 1 с осевой симметрией на количество блоков в продольном направлении, равное количеству потоков (логических процессоров). Границы блоков являются динамическими для обеспечения равенства времени расчета во всех блоках.

Влияние длины подводящей трубы на стабильность работы клапана

Рассмотрим влияние длины подводящей трубы на колебательные процессы в клапане. Длина трубы изменялась от 0 до 2 м. Исследуется режим, когда диск не прижимается полностью к верхнему ограничителю. Движение диска показано на рис. 5.

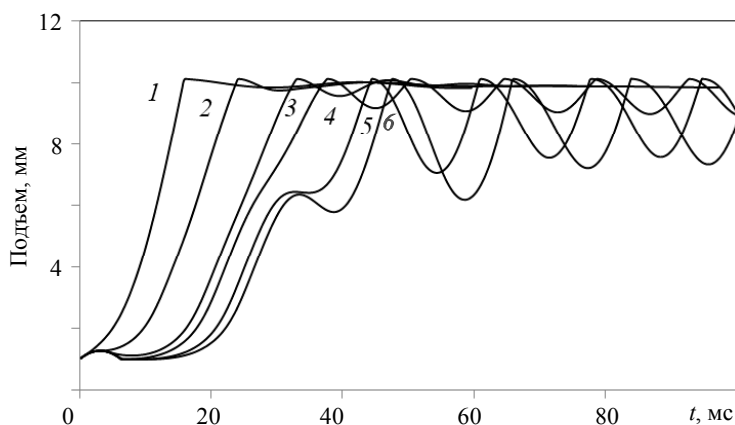


Рис. 5. Зависимость перемещения диска от времени

Fig. 5. Disc displacement as a function of time

Номера кривых соответствует длине трубы: 1 – $L = 0$; 2 – $L = 0.5$ м; 3 – $L = 0.75$ м; 4 – $L = 1$ м; 5 – $L = 1.5$ м; 6 – $L = 1.75$ м. С увеличением длины трубы амплитуда колебаний диска возрастает, а частота колебаний уменьшается (рис. 6).

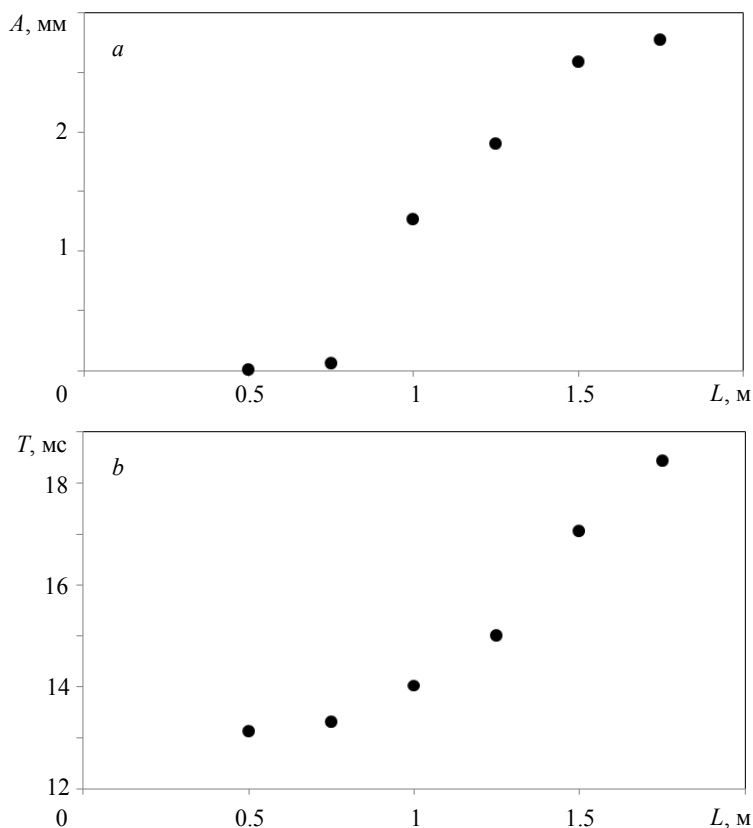


Рис. 6. Амплитуда колебаний диска (a); величина периода колебаний (b)

Fig. 6. (a) Disc oscillation amplitude and (b) the oscillation period

Причиной колебаний является образование волн давления в трубе после открытия клапана (рис. 7). Показано изменение давления на входе в клапан и величины газодинамической силы.

Собственная круговая частота колебаний подвижной части клапана равна 154.7 1/с с длиной периода $T = 40.6$ мс большей в два раза, чем на рис. 6, b. Для определения характера движения газа в трубе проведен расчет при фиксированном зазоре 1 мм. Начальные условия такие же, как при открывании клапана. Изменение давления во времени в различных сечениях трубы показано на рис. 7, b. Волна доходит до входа в трубу, где со временем давление стабилизируется. На входе в клапан давление также стабилизируется. В середине трубы происходит волновой процесс, связанный с отражением волн. Период колебаний примерно 10 мс, что примерно в два раза меньше, чем при движении диска. Частота колебаний при движении диска определяется сложным характером взаимодействия звуковых волн с упругой системой диска. В короткой трубе колебания быстро затухают и процесс стабилизируется. При длине трубы 2 м клапан начинает открываться, а затем на фазе снижения давления в результате волнового процесса полностью закрывается. Далее он может открыться, если давление в резервуаре возрастет.

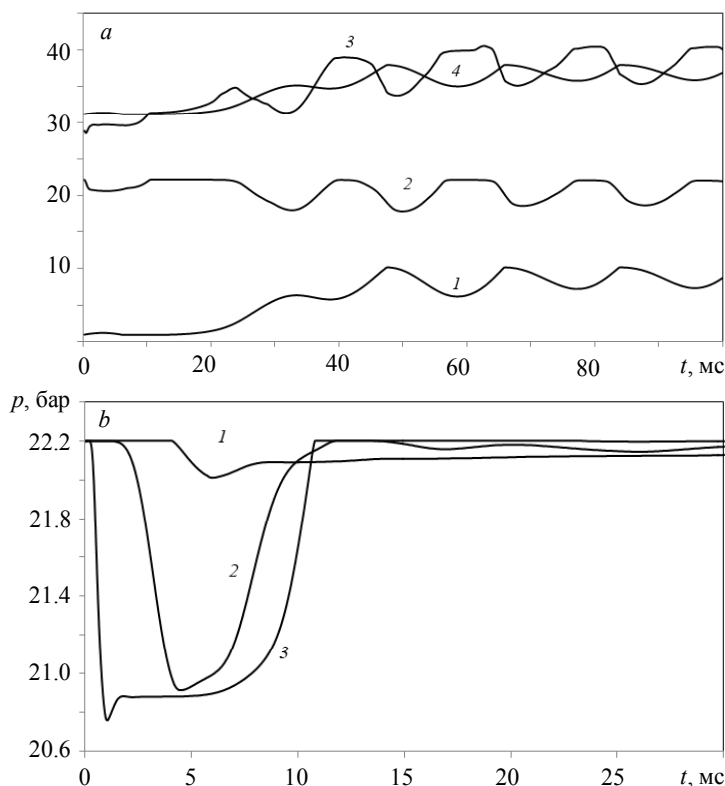


Рис. 7. Волновой процесс в клапане для длины трубы 1.75 м, зависимости от времени: *a* – перемещения диска, мм (кр. 1); давления, бар (кр. 2); газодинамической силы, кН (кр. 3); силы пружины, кН (кр. 4); *b* – давления, бар: на входе в трубу (кр. 1); в середине трубы (кр. 2); в конце трубы (вход в клапан) (кр. 3)

Fig. 7. Wave process in the valve for a pipe of 1.75 m length. (*a*): 1, disc displacement in mm as a function of time; 2, pressure in bar; 3, gas dynamic force in kN; and 4, spring force in kN; (*b*): 1, pipe inlet; 2, middle of the pipe; and 3, pipe outlet (valve inlet)

Закключение

Для численного моделирования работы предохранительных клапанов применен метод С.К. Годунова в трехмерной постановке для вязкого теплопроводного газа. Для повышения точности с сохранением монотонности решения используется схема MUSCL (Monotone Upwind Schemes for Conservation Laws) и двухшаговый по времени метод. Сравнение численных расчетов газодинамической силы с результатами проведенных экспериментов для клапана 2J3 показало их удовлетворительное согласование. Существующая проблема расчета стартового отрезка времени при малой величине дискового зазора решается с применением аналитического решения, используемого для определения начальных условий при моделировании. По результатам численных 3D-экспериментов динамических режимов работы клапана осуществлен переход к нестационарной 2D-модели на грубой осесимметричной сетке, дающий согласование расчетной и экспериментальной

динамики клапана. На основе данного подхода проведено исследование влияния длины подводящей к клапану магистрали на устойчивость работы клапана. С увеличением длины трубы стабильность процесса открывания клапана уменьшается. Частота колебаний находится в интервале от собственной частоты пружинного устройства до частоты звуковых колебаний в трубе, что свидетельствует о необходимости решения сопряженной газодинамической задачи с деформируемой границей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Beune A. Analysis of high-pressure safety valves. Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven, 2009. 134 p. DOI: 10.6100/IR652510.
2. Song X.G., Wang L.T., Park Y.C., Sun W.A. fluid-structure interaction analysis of the spring-loaded pressure safety valve during popping off // 14th International Conference on Pressure Vessel Technology. Procedia Engineering. 2015. V. 130. pp.87–94. DOI: 10.1016/j.proeng.2015.12.178
3. Hos C.J., Champneys A.R., Paulc K., McNeelyc M. Dynamic behavior of direct spring loaded pressure relief valves in gas service: Model development, measurements and instability mechanisms // Journal of Loss Prevention in the Process Industries. 2014. V. 31. P. 70–81.
4. Hos C.J., Champneys A.R., Paul K., McNeely M. Dynamic behaviour of direct spring loaded pressure relief valves: III valves in liquid service // Journal of Loss Prevention in the Process Industries. 2016. V. 43. P. 1–9. DOI: 10.1016/j.jlp.2016.03.030.
5. Dimitrov S., Komitovski M. Static and dynamic characteristics of direct operated pressure relief valves // Machine Design. 2013. V. 5. No. 2. P. 83–86.
6. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
7. Сафронов А.В., Фомин Ю.В. Метод численного решения уравнений газодинамики с помощью соотношения на разрывах // Труды МФТИ. 2010. Т. 2. № 2. С. 137–148.
8. van Albada G.D., van Leer B., Roberts W.W.Jr. A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics // Astronomy and Astrophysics. 1982. V. 108. No. 1. P. 76–84.
9. Wesseling P. Principles of Computational Fluid Dynamics. Berlin: Springer-Verlag, 2001. 644 p.
10. Wesseling P., Segal A., and Kassel C.G.M. Computing flows on general three-dimensional nonsmooth staggered grids // Journal of Computational Physics. 1999. V. 149. P. 333–362.
11. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений. М.: Физматлит, 2008. 368 с.
12. Редер Т., Тененев В.А., Паклина Н.В. Исследование влияния величины начального зазора на динамику открывания предохранительного клапана // Интеллектуальные системы в производстве. 2018. Т.16. № 2. С. 28–40. DOI 10.22213/2410-9304-2018-2-28-40.

Статья поступила 07.10.2019

Raeder T., Tenenev V.A., Chernova A.A. (2020) NUMERICAL SIMULATION OF UNSTABLE MODES FOR A SAFETY VALVE. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 68. pp. 141–157

DOI 10.17223/19988621/68/13

Keywords: safety valve, numerical simulation, dynamic process, Godunov method, MUSCL scheme.

When designing pressure regulators, one needs to have a complete understanding of gas-dynamic processes. The numerical algorithm for three-dimensional gas-dynamic modeling of a full cycle of spring safety valve operation is proposed, which allows one to significantly reduce the computing time. Grid reconfiguration during CFD modeling is provided by interpolation

procedure using previously calculated grids. Calculations show that gas-dynamic numerical simulation should account for a three-dimensional structure of the unsteady flow and the motion of the disc. These factors are taken into account when calculating full cycle of the valve on a coarse grid with the use of correction functions for the force and flow characteristics of the valve. The correction functions are calculated by the false transient method in the three-dimensional formulation. Cyclograms of the valve operation demonstrate satisfactory agreement of the experimental and numerical simulation results. The agreement in the variation of gas-dynamic forces with time is observed, except for the transitional regime before the valve starts to close. In the main work area, the calculated values of the reduced force belong to a confidence interval.

Tomas RAEDER (Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation). E-mail: raeder.t@leser.com

Valentin A. TENENEV (Doctor of Physics and Mathematics, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation). E-mail: v.tenenev@gmail.com

Alena A. CHERNOVA (Candidate of Technical Sciences, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation). E-mail: alicaaa@gmail.com

REFERENCES

1. Beune A. (2009) *Analysis of High-pressure Safety Valves*. Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven.
2. Song X.G., Wang L.T., Park Y.C., Sun W.A (2015) Fluid-structure interaction analysis of the spring-loaded pressure safety valve during popping off. *Procedia Engineering*. 130. pp. 87–94. DOI: 10.1016/j.proeng.2015.12.178.
3. Hos C.J., Champneys A.R., Paulc K., McNeelyc M. (2014) Dynamic behavior of direct spring loaded pressure relief valves in gas service: Model development, measurements and instability mechanisms. *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*. 31. pp. 70–81. DOI: 10.1016/j.jlp.2014.06.005.
4. Hos C.J., Champneys A.R., Paul K., McNeely M. (2016) Dynamic behaviour of direct spring loaded pressure relief valves: III valves in liquid service. *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*. 43. pp. 1–9. DOI: 10.1016/j.jlp.2016.03.030.
5. Dimitrov S., Komitovski M. (2013) Static and dynamic characteristics of direct operated pressure relief valves. *Machine Design*. 5(2). pp. 83–86.
6. Godunov S.K., Zabrodin A.V., Ivanov M.Ya., Krayko A.N., Prokopov G.P. (1976) *Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoy dinamiki* [Numerical solution of multidimensional gas dynamics problems]. Moscow: Nauka.
7. Safronov A.V., Fomin Yu.V. (2010) Metod chislenного resheniya uravneniy gazodinamiki s pomoshch'yu sootnosheniy na razryvakh [Method for the numerical solution of gas dynamics equations using the discontinuity relation]. *Trudy MFTI Proceedings of MIPT*. 2(2). pp. 137–148.
8. van Albada G.D., van Leer B., Roberts W.W.Jr. (1982) A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics. *Astronomy and Astrophysics*. 108(1). pp. 76–84.
9. Wesseling P. (2001) *Principles of Computational Fluid Dynamics*. Berlin: Springer-Verlag.
10. Wesseling P., Segal A., Kassel C.G.M. (1999) Computing flows on general three-dimensional nonsmooth staggered grids. *Journal of Computational Physics*. 149. pp. 333–362. DOI: 10.1007/978-94-017-1564-5_2.
11. Volkov K.N., Emel'yanov V.N. (2008) *Modelirovanie krupnykh vikhrey v raschetakh turbulentnykh techeniy* [Modeling of large vortices in calculations of turbulent flows]. Moscow: FIZMATLIT.
12. Reader T., Tenenev V.A., Paklina N.V. (2018) Trekhmernoe chislennoe modelirovanie gazodinamiki predokhranitel'nogo klapan [Numerical 3D simulation of safety valve gas dynamics]. *Vestnik IzhGTU imeni M.T. Kalashnikova Bulletin of Kalashnikov ISTU*. 21(4). pp. 174–181. DOI: 10.22213/2413-1172-2018-4-174-181.

Received: October 7, 2019

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АЛИГАСАНОВА Кристина Лачиновна – техник лаборатории математической физики Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: aligasanova@niipmm.tsu.ru

АЛИФОВ Алишир Али оглы – доктор технических наук, главный научный сотрудник института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, г. Москва, Россия. E-mail: a.alifov@yandex.ru

БАХШАЛЫЕВА Мехпара Нусрат кызы – докторант кафедры общей и прикладной математики Азербайджанского государственного университета нефти и промышленности. E-mail: mehpara.bakhshalieva@mail.ru

БОГДАНОВА Софья Борисовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладных программных средств и математических методов Московского авиационного института, г. Москва, Россия. E-mail: sonjaf@list.ru

БУБЕНЧИКОВ Михаил Алексеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики механико-математического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: michael121@mail.ru

БУЗМАКОВА Галина Васильевна – студентка кафедры вычислительной и экспериментальной механики механико-математического факультета Пермского государственного университета, г. Пермь, Россия. E-mail: galina210896@mail.ru

ВИЛЬДАНОВ Вадим Кадирович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования экономических процессов Института экономики и предпринимательства Нижегородского государственного университета имени Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия. E-mail: kadirovi4@gmail.com

ГАЙДАК Виолетта Александровна – аспирантка механико-математического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: gaidakvioletta@gmail.com

ГЛАДКОВ Сергей Октябрьнович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладных программных средств и математических методов Московского авиационного института, г. Москва, Россия. E-mail: sglad51@mail.ru

ДЕРДИЯЩЕНКО Владимир Владимирович – начальник отдела АО НПП «Полус», г. Томск, Россия. E-mail: derdiyashenkovv@mail.ru

ДМИТРИЕВ Виктор Степанович – доктор технических наук, профессор отделения электронной инженерии инженерной школы неразрушающего контроля и безопасности Томского политехнического университета, г. Томск, Россия. E-mail: dmitriev@tpu.ru

ЖАМБАА Сонинбаяр – кандидат физико-математических наук, директор Центра фундаментальных исследований Монгольского университета науки и технологий Монгольского национального университета, доцент кафедры прикладной математики школы инженерии и прикладных наук Национального университета Монголии, г. Улан-Батар, Монголия. E-mail: jsoninbayar@yahoo.com

ЗАБАРИНА Анна Ивановна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики, теории и методики обучения математике физико-математического факультета Томского государственного педагогического университета. E-mail: aizabarina@gmail.com

КАГЕНОВ Ануар Магжанович – кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник лаборатории математической физики Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: anuar@ftf.tsu.ru

КОСТЮЧЕНКО Тамара Георгиевна – кандидат технических наук, доцент отделения электронной инженерии инженерной школы неразрушающего контроля и безопасности Томского политехнического университета, г. Томск, Россия. E-mail: ktg@tpu.ru

КОСТЮШИН Кирилл Владимирович – младший научный сотрудник лаборатории математической физики Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: kostushink@niipmm.tsu.ru

КОТОНОВ Василий Александрович – техник лаборатории математической физики Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: kot@niipmm.tsu.ru

КРАЙНОВ Алексей Юрьевич – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

ЛИПАНОВ Алексей Матвеевич – доктор технических наук, профессор, академик Российской академии наук, главный научный сотрудник Института прикладной математики имени М.В. Келдыша Российской академии наук, заведующий кафедрой механики и моделирования Ижевского государственного технического университета имени М.Т. Калашникова, г. Москва, Россия. E-mail: AML35@yandex.ru

ЛУН-ФУ Александр Викторович – главный специалист ООО «Газпром трансгаз Томск», г. Томск, Россия. E-mail: a.lunfu@gtt.gazprom.ru

МИНЬКОВ Леонид Леонидович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: lminkov@ftf.tsu.ru

ОРЛОВ Алексей Алексеевич – доктор технических наук, профессор отделения ядерно-топливного цикла Инженерной школы ядерных технологий Томского политехнического университета, г. Томск, Россия. E-mail: orlova@tpu.ru

ПАНИЛОВ Дмитрий Сергеевич – инженер-проектировщик АО НПЦ «Полюс», г. Томск, Россия. E-mail: panfilovds8@gmail.com

ПЕСТРЕНИН Валерий Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики сплошных сред и вычислительных технологий механико-математического факультета Пермского государственного университета, г. Пермь, Россия. E-mail: PestreninVM@mail.ru

ПЕСТРЕНИНА Ирина Владимировна – кандидат технических наук, доцент кафедры механики сплошных сред и вычислительных технологий механико-математического факультета Пермского государственного университета, г. Пермь, Россия. E-mail: IPestrenina@gmail.com

ПОРЯЗОВ Василий Андреевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: poryazov@mail.ru

РЕДЕР Томас – аспирант кафедры механики и моделирования факультета математики и естественных наук Ижевского государственного технического университета, г. Ижевск, Россия. E-mail: raeder.t@leser.com

РУСАКОВ Сергей Владимирович – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики механико-математического факультета Пермского государственного университета, г. Пермь, Россия. E-mail: rusakov@psu.ru

РУССКИХ Анастасия Сергеевна – ведущий инженер научно-исследовательского отдела разработки месторождений НГДУ «Талаканнефть» Тюменского отделения СургутНИПИ-нефть ПАО «Сургутнефтегаз», г. Тюмень, Россия. E-mail: anastasiya_russkih@bk.ru

РУСЯК Иван Григорьевич – доктор технических наук, профессор, член-корреспондент Российской академии ракетных и артиллерийских наук, заведующий кафедрой математического обеспечения информационных систем Ижевского государственного технического университета имени М.Т. Калашникова, г. Ижевск, Россия. E-mail: primat@istu.ru

СУФИЯНОВ Вадим Гарайханович – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры математического обеспечения информационных систем Ижевского государственного технического университета имени М.Т. Калашникова, г. Ижевск, Россия. E-mail: vsufiy@mail.ru

ТЕНЕНЕВ Валентин Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики факультета математики и естественных наук Ижевского государственного технического университета, г. Ижевск, Россия. E-mail: v.tenenev@gmail.com

ТИМОШЕНКО Егор Александрович – доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета, профессор кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: tea471@mail.tsu.ru

ФАРЗАЛИЕВ Мазохир Гамза оглы – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой технологических машин и отраслевого оборудования факультета технологии и дизайна Азербайджанского государственного экономического университета, г. Баку, Азербайджан. E-mail: mezahir-ferzeliyev@rambler.ru

ФОМИНА Елена Анатольевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, теории и методики обучения математике физико-математического факультета Томского государственного педагогического университета, г. Томск, Россия. E-mail: ef254@mail.ru

ЦЫДЫПОВ Севан Гуро-Цыренович – старший преподаватель кафедры информационных технологий института математики и информатики Бурятского государственного университета, г. Улан-Удэ, Россия. E-mail: sivan77@mail.ru

ЧЕРНОВА Алена Алексеевна – кандидат технических наук, доцент кафедры механики и моделирования факультета математики и естественных наук Ижевского государственного технического университета, г. Ижевск, Россия. E-mail: alicaaa@gmail.com

Оригинал-макет подготовлен
ООО «Издательство научно-технической литературы»
634034, г. Томск, ул. Студенческая, 4

Редактор *Т.С. Портнова*
Верстка *Д.В. Фортеса*

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001.
Подписано к печати 14.12.2020. Выпуск в свет 18.12.2020.
Формат 70 × 100 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Таймс».
Усл. п. л. 12.9. Уч.-изд. л. 14.45. Тираж 250 экз. Заказ № 25. Цена свободная.

Отпечатано на оборудовании
Издательского Дома Томского государственного университета,
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, тел. (3822) 531-528, 529-849. Заказ № 4541.
<http://publish.tsu.ru> E-mail: rio.tsu@mail.ru