МАТЕМАТИКА

УДК 517.2; 519.64 MSC 2020: 45E05; 31B10
DOI 10.17223/19988621/68/1

М.Н. Бахшалыева

КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ПРОИЗВОДНОЙ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Дан новый метод построения квадратурной формулы для криволинейного сингулярного интеграла, и на основе этого метода построены квадратурные формулы для производной логарифмического потенциала простого слоя и нормальной производной логарифмического потенциала двойного слоя.

Ключевые слова: *квадратурная формула*, *криволинейный сингулярный интеграл*, *производная логарифмического потенциала простого слоя*, *нормальная производная логарифмического потенциала двойного слоя.*

1. Введение и постановка задачи

Известно, что [1] краевые задачи для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ можно привести к криволинейному сингулярному интегральному уравнению, зависящему от производной логарифмического потенциала простого слоя

$$V(x) = \int_L \overrightarrow{\operatorname{grad}_x} \Phi(x, y)\, \rho(y) dL_y, \quad x = (x_1, x_2) \in L, \tag{1}$$

и от нормальной производной логарифмического потенциала двойного слоя

$$\frac{\partial W(x)}{\partial \vec{n}(x)} = \frac{\partial}{\partial \vec{n}(x)} \left(\int_L \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \vec{n}(y)} \rho(y) dL_y \right), \quad x \in L, \tag{2}$$

где $L \subset R^2$ – простая замкнутая кривая Ляпунова с показателем $0 < \alpha \le 1$, $\vec{n}(y)$ – внешняя единичная нормаль в точке $y \in L$, $\rho \in C(L)$, $C(L)$ – пространство всех непрерывных функций на L с нормой $\|\varphi\|_\infty = \max\limits_{x \in L} |\varphi(x)|$, а $\Phi(x, y)$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа, т.е.

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|}, \; x, y \in R^2, \; x \ne y.$$

Так как во многих случаях невозможно найти точное решение сингулярных интегральных уравнений, то интересно исследовать приближенное решение этих уравнений. Поэтому, первостепенное значение приобретает вопрос построения квадратурной формулы для производной логарифмических потенциалов, чему и посвящена настоящая работа. Следует указать, что в работе [2] дана практичная формула вычисления нормальной производной акустического потенциала двойного слоя, а на основе этой формулы в [3] построена кубатурная формула для

нормальной производной акустического потенциала двойного слоя, используя которую авторами [4, 5] исследовано приближенное решение некоторых классов поверхностных интегральных уравнений первого и второго рода.

2. Квадратурная формула для прямого значения производной логарифмического потенциала простого слоя

Построим квадратурную формулу производной логарифмического потенциала простого слоя (1). Предположим, что кривая L задана параметрическим уравнением $x(t)=(x_1(t),x_2(t)),\quad t\in[a,b]$. Разобьем промежуток $[a,b]$ на $n>2M_1(b-a)/d$ равных частей:

$$t_k=a+\frac{(b-a)k}{n},\ k=\overline{0,n},$$

где $M_1=\max\limits_{t\in[a,b]}\sqrt{(x_1'(t))^2+(x_2'(t))^2}<+\infty$ (см. [6]) и d – радиус стандартной окружности (см. [7]). В качестве опорных точек возьмем $x(\tau_k),\ k=\overline{1,n}$, где $\tau_k=a+\frac{(b-a)(2k-1)}{2n}$. Тогда кривая L разбивается на элементарные части $L=\bigcup\limits_{l=1}^{n}L_l$, где $L_k=\{x(t):\ t_{k-1}\le t\le t_k\}$. Известно, что [8]

(1) $\forall k\in\{1,2,...,n\}:\ r_k(n)\sim R_k(n)$ [1], где

$$r_k(n)=\min\{|x(\tau_k)-x(t_{k-1})|,|x(t_k)-x(\tau_k)|\}$$

и

$$R_k(n)=\max\{|x(\tau_k)-x(t_{k-1})|,|x(t_k)-x(\tau_k)|\};$$

(2) $\forall k\in\{1,2,...,n\}:\ R_k(n)\le d/2$;

(3) $\forall k,j\in\{1,2,...,n\}:\ r_j(n)\sim r_k(n)$;

(4) $r(n)\sim R(n)\sim\frac{1}{n}$, где $R(n)=\max\limits_{k=\overline{1,n}}R_k(n)$, $r(n)=\min\limits_{k=\overline{1,n}}r_k(n)$.

В дальнейшем такое разбиение будем называть разбиением кривой L на «регулярные» элементарные части: $L=\bigcup\limits_{l=1}^{n}L_l$.

Лемма 1 [9]. *Существуют такие постоянные* $C_0'>0$ *и* $C_1'>0$, *независящие от* n, *для которых при* $\forall k,j\in\{1,2,...,n\}$, $j\ne k$ *и* $\forall y\in L_j$ *справедливо следующее неравенство:*

$$C_0'|y-x(\tau_k)|\le|x(\tau_j)-x(\tau_k)|\le C_1'|y-x(\tau_k)|. \tag{3}$$

Очевидно, что существует натуральное число n_0 такое, что

$$(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}}\le\min\{1,d/2\},\ \forall n>n_0.$$

[1] $a(n)\sim b(n)\Leftrightarrow C_1\le a(n)/b(n)\le C_2$, где C_1 и C_2 – положительные постоянные, не зависящие от n.

Через $H_\beta(L)$ обозначим линейное пространство всех непрерывных на L функций φ, удовлетворяющих условию

$$|\varphi(u_1)-\varphi(u_2)| \le C_\varphi |u_1-u_2|^\beta, \ \forall u_1,u_2 \in L,$$

где $0<\beta\le 1$, а C_φ – положительная постоянная, зависящая от φ, а не от u_1 и u_2. Кроме того, пусть

$$Q_l = \left\{ j \,|\, 1\le j\le n, \left|x(\tau_l)-x(\tau_j)\right| > (R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}} \right\}.$$

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть $L\subset R^2$ – простая замкнутая кривая Ляпунова с показателем $0<\alpha\le 1$ и $\rho\in H_\beta(L)$, $0<\beta\le 1$. Тогда выражение*

$$V_m^n(x(\tau_l)) = \frac{b-a}{2\pi n}\sum_{j\in Q_l}\frac{x_m(\tau_j)-x_m(\tau_l)}{\left|x(\tau_l)-x(\tau_j)\right|^2}\sqrt{\left(x_1'(\tau_j)\right)^2+\left(x_2'(\tau_j)\right)^2}\,\rho\left(x(\tau_j)\right) \qquad (4)$$

в опорных точках $x(\tau_l)$, $l=\overline{1,n}$, является квадратурной формулой для

$$V_m(x) = \int_L \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x_m}\rho(y)\,dL_y, \quad x=(x_1,x_2)\in L \quad (m=1,2),$$

причем

$$\max_{l=\overline{1,n}}\left|V_m(x(\tau_l))-V_m^n(x(\tau_l))\right| \le M^2\left(\|\rho\|_\infty n^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} + C_\rho\, n^{-\frac{\beta}{1+\alpha}}\right),$$

где

$$C_\rho = \sup_{\substack{x,y\in L,\\ x\ne y}}\frac{|\rho(x)-\rho(y)|}{|x-y|^\beta}.$$

Доказательство. Очевидно, что достаточно доказать теорему при $m=1$. Нетрудно вычислить, что

$$V_1(x) = \frac{1}{2\pi}\int_L \frac{y_1-x_1}{|x-y|^2}\rho(y)\,dL_y,$$

где $y=(y_1,y_2)$ и интеграл существует в смысле главного значения Коши (см. [10]). Оценим погрешность квадратурной формулы (4). Известно, что

$$V_1(x(\tau_l))-V_1^n(x(\tau_l)) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{j\in Q_l}\frac{x_1(\tau_j)-x_1(\tau_l)}{\left|x(\tau_l)-x(\tau_j)\right|^2}\left(mesL_j - \frac{b-a}{n}\sqrt{\left(x_1'(\tau_j)\right)^2+\left(x_2'(\tau_j)\right)^2}\right)\rho\left(x(\tau_j)\right)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{j\in Q_l}\int_{L_j}\left(\frac{y_1-x_1(\tau_l)}{|x(\tau_l)-y|^2}-\frac{x_1(\tau_j)-x_1(\tau_l)}{\left|x(\tau_l)-x(\tau_j)\right|^2}\right)\rho(y)\,dL_y+$$

[2] Здесь и далее через M будем обозначать положительные постоянные, разные в различных неравенствах.

$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{j\in Q_l}\int\limits_{L_j}\frac{x_1(\tau_j)-x_1(\tau_l)}{\left|x(\tau_l)-x(\tau_j)\right|^2}\left(\rho(y)-\rho\left(x(\tau_j)\right)\right)dL_y+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\bigcup\limits_{j\in P_l}L_j}\frac{y_1-x_1(\tau_l)}{|x(\tau_l)-y|^2}\left(\rho(y)-\rho(x(\tau_l))\right)dL_y+\frac{\rho(x(\tau_l))}{2\pi}\int\limits_{\bigcup\limits_{j\in P_l}L_j}\frac{y_1-x_1(\tau_l)}{|x(\tau_l)-y|^2}dL_y. \quad (5)$$

Учитывая неравенство

$$\left|\sqrt{(x_1'(t))^2+(x_2'(t))^2}-\sqrt{\left(x_1'(\tau_j)\right)^2+\left(x_2'(\tau_j)\right)^2}\right|\le M\left(R(n)\right)^{\alpha},\ \forall t\in\left[t_{j-1},t_j\right],$$

получаем, что

$$\left|1-\frac{\frac{b-a}{n}\sqrt{\left(x_1'(\tau_j)\right)^2+\left(x_2'(\tau_j)\right)^2}}{mesL_j}\right|=$$

$$=\frac{\left|\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\sqrt{(x_1'(t))^2+(x_2'(t))^2}-\sqrt{\left(x_1'(\tau_j)\right)^2+\left(x_2'(\tau_j)\right)^2}\right)dt\right|}{mesL_j}\le\frac{M}{m_1}\left(R(n)\right)^{\alpha}, \quad (6)$$

где $m_1=\min\limits_{t\in[a,b]}\sqrt{(x_1'(t))^2+(x_2'(t))^2}>0$ (см. [6]). Тогда, принимая во внимание (3), получим

$$\left|\sum_{j\in Q_l}\frac{x_1(\tau_j)-x_1(\tau_l)}{\left|x(\tau_l)-x(\tau_j)\right|^2}\left(mesL_j-\frac{b-a}{n}\sqrt{\left(x_1'(\tau_j)\right)^2+\left(x_2'(\tau_j)\right)^2}\right)\rho\left(x(\tau_j)\right)\right|=$$

$$=\left|\sum_{j\in Q_l}\left(1-\frac{\frac{b-a}{n}\sqrt{\left(x_1'(\tau_j)\right)^2+\left(x_2'(\tau_j)\right)^2}}{mesL_j}\right)\rho\left(x(\tau_j)\right)\int\limits_{L_j}\frac{x_1(\tau_j)-x_1(\tau_l)}{\left|x(\tau_l)-x(\tau_j)\right|^2}dL_y\right|\le$$

$$\le M\left(R(n)\right)^{\alpha}\|\rho\|_{\infty}\sum_{j\in Q_l}\int\limits_{L_j}\frac{dL_y}{|x(\tau_l)-y|}\le M\left(R(n)\right)^{\alpha}\|\rho\|_{\infty}\int\limits_{(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}}}^{diam\,L}\frac{dt}{t}\le$$

$$\le M\|\rho\|_{\infty}\left(R(n)\right)^{\alpha}|\ln R(n)|.$$

Пусть $y\in L_j$, $j\in Q_l$. Тогда

$$\left|\frac{y_1-x_1(\tau_l)}{|x(\tau_l)-y|^2}-\frac{x_1(\tau_j)-x_1(\tau_l)}{\left|x(\tau_l)-x(\tau_j)\right|^2}\right|\le M\frac{R(n)}{|x(\tau_l)-y|^2},$$

а, значит,

$$\left|\sum_{j\in Q_l}\int\limits_{L_j}\left(\frac{y_1-x_1(\tau_l)}{|x(\tau_l)-y|^2}-\frac{x_1(\tau_j)-x_1(\tau_l)}{\left|x(\tau_l)-x(\tau_j)\right|^2}\right)\rho(y)\,dL_y\right|\le$$

$$\le M\,\|\rho\|_\infty\,R(n)\int\limits_{(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}}}^{diam\,L}\frac{dt}{t^2}\le M\,\|\rho\|_\infty\,(R(n))^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Кроме того,

$$\left|\sum_{j\in Q_l}\int\limits_{L_j}\frac{x_1(\tau_j)-x_1(\tau_l)}{\left|x(\tau_l)-x(\tau_j)\right|^2}\left(\rho(y)-\rho\left(x(\tau_j)\right)\right)dL_y\right|\le$$

$$\le M\,C_\rho\,(R(n))^\beta\int\limits_{(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}}}^{diam\,L}\frac{dt}{t}\le M\,C_\rho\,(R(n))^\beta\,|\ln R(n)|.$$

Пусть $y\in\partial\left(\underset{j\in P_l}{\cup}L_j\right)$. Очевидно, что существуют натуральные числа

$$s\in P_l=\left\{j\,|\,1\le j\le n\,,\left|x(\tau_l)-x\left(\tau_j\right)\right|\le(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}}\right\}$$

и $m\in Q_l$ такие, что $y\in\partial L_s$ и $y\in\partial L_m$. Отсюда имеем

$$|x(\tau_l)-y|\le|x(\tau_l)-x(\tau_s)|+|x(\tau_s)-y|\le(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}}+R(n)$$

и $$|x(\tau_l)-y|\ge|x(\tau_l)-x(\tau_m)|-|x(\tau_m)-y|>(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}}-R(n),$$

следовательно,

$$(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}}-R(n)<|x(\tau_l)-y|\le(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}}+R(n),\ \forall\,y\in\partial\left(\underset{j\in P_l}{\cup}L_j\right).\qquad(7)$$

Тогда

$$\left|\int\limits_{\underset{j\in P_l}{\cup}L_j}\frac{y_1-x_1(\tau_l)}{|x(\tau_l)-y|^2}(\rho(y)-\rho(x(\tau_l)))\,dL_y\right|\le M\,C_\rho\int\limits_0^{(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}}+R(n)}\frac{dt}{t^{1-\beta}}\le M\,C_\rho\,(R(n))^{\frac{\beta}{1+\alpha}}.$$

Известно [7], что для любой точки $x\in L$ окрестность $L_d(x)=\{y\in L\,||y-x|<d\}$ пересекается с прямой, параллельной нормали $\vec{n}(x)$, в единственной точке либо вообще не пересекается, т.е. множество $L_d(x)$ однозначно проектируется на промежуток $\Omega_d(x)$, лежащий на касательной прямой $\Gamma(x)$ к L в точке x. На куске $L_d\left(x(\tau_l)\right)$ выберем локальную прямоугольную систему координат (u,v) с началом в точке $x(\tau_l)$, где направим ось v вдоль нормали $\vec{n}(x(\tau_l))$, а ось u вдоль положительного направления касательной прямой $\Gamma(x(\tau_l))$. Известно, что при этом координаты точек $x(\tau_l)$ будут $(0,0)$. Кроме того, в этих координатах окрестность $L_d\left(x(\tau_l)\right)$ можно задать уравнением $v=f(u)$, $u\in\Omega_d\left(x(\tau_l)\right)$, причем

$$f\in H_{1,\alpha}\left(\Omega_d\left(x(\tau_l)\right)\right)\text{ и }f(0)=0\,,\ f'(0)=0\,,$$

где $H_{1,\alpha}(\Omega_d(x(\tau_l)))$ – линейное пространство всех непрерывно дифференцируемых на $\Omega_d(x(\tau_l))$ функций f, удовлетворяющих условию

$$|f'(u_1) - f'(u_2)| \le M_f |u_1 - u_2|^{\alpha}, \ \forall u_1, u_2 \in \Omega_d(x(\tau_l)),$$

где M_f – положительная постоянная, зависящая от f, а не от u_1 и u_2.

Через Ω_l обозначим проекцию множества $\bigcup\limits_{j\in P_l} L_j$ на касательную прямую $\Gamma(x(\tau_l))$. Пусть $d_l = \min\limits_{\tilde{y}\in\partial\Omega_l} |x(\tau_l) - \tilde{y}|$. Тогда по формуле вычисления криволинейного интеграла получаем, что

$$\int\limits_{\bigcup\limits_{j\in P_l} L_j} \frac{y_1 - x_1(\tau_l)}{|x(\tau_l) - y|^2} dL_y = \int\limits_{\Omega_l} \frac{u\sqrt{1+(f'(u))^2}}{u^2 + (f(u))^2} du = \int\limits_{-d_l}^{d_l} \frac{du}{u} + \int\limits_{-d_l}^{d_l} \frac{u\left(\sqrt{1+(f'(u))^2} - 1\right)}{u^2 + (f(u))^2} du +$$

$$+ \int\limits_{-d_l}^{d_l} u\left(\frac{1}{u^2 + (f(u))^2} - \frac{1}{u^2}\right) du + \int\limits_{\Omega_l \setminus (-d_l,\, d_l)} \frac{u\sqrt{1+(f'(u))^2}}{u^2 + (f(u))^2} du. \qquad (8)$$

Первый интеграл в правой части равенства (8) существует в смысле главного значения Коши и равен нулю. Кроме того, учитывая неравенства

$$|f'(u)| \le M|u|^{\alpha} \qquad (9)$$

и

$$|f(u)| = |f(u) - f(0)| \le M|u|^{1+\alpha}, \qquad (10)$$

имеем

$$\left| \int\limits_{-d_l}^{d_l} \frac{u\left(\sqrt{1+(f'(u))^2} - 1\right)}{u^2 + (f(u))^2} du \right| \le M (R(n))^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}},$$

$$\left| \int\limits_{-d_l}^{d_l} u\left(\frac{1}{u^2 + (f(u))^2} - \frac{1}{u^2}\right) du \right| \le M (R(n))^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}.$$

Теперь оценим последний интеграл в равенстве (8). Прежде всего, существует точка $\tilde{y}_* \in \Omega_l$, такая, что $d_l = |x(\tau_l) - \tilde{y}_*|$. Обозначим через $y_* \in \partial\left(\bigcup\limits_{j\in P_l} L_j\right)$ прообраз точки $\tilde{y}_*$, а через $\alpha(\vec{a}, \vec{b})$ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Применяя неравенство (7), получаем, что

$$d_l = |x(\tau_l) - y_*| \cos\alpha(y_* - x(\tau_l), \tilde{y}_* - x(\tau_l)) =$$

$$= |x(\tau_l) - y_*| \sqrt{1 - \cos^2\alpha(y_* - x(\tau_l), \vec{n}(x(\tau_l)))} \ge |x(\tau_l) - y_*| \sqrt{1 - M^2 |x(\tau_l) - y_*|^{2\alpha}} \ge$$

$$\ge \left((R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}} - R(n) \right) \sqrt{1 - M^2 \left((R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}} + R(n) \right)^{2\alpha}} \ge$$

$$\geq \left(\left(R(n)\right)^{\frac{1}{1+\alpha}} - R(n) \right) \sqrt{1 - M^2 \left(2\left(R(n)\right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \right)^{2\alpha}} \geq$$

$$\geq \left(\left(R(n)\right)^{\frac{1}{1+\alpha}} - R(n) \right) \left(1 - 2^{\alpha} M \left(R(n)\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \right) \geq$$

$$\geq \left(R(n)\right)^{\frac{1}{1+\alpha}} - (1 + 2^{\alpha} M) R(n) . \qquad (11)$$

Тогда

$$\left| \int\limits_{\Omega_l \setminus (-d_l,\, d_l)} \frac{u\sqrt{1+\left(f'(u)\right)^2}}{u^2 + \left(f(u)\right)^2} du \right| \leq M \int\limits_{\left(R(n)\right)^{\frac{1}{1+\alpha}} - (1+2^{\alpha}M)R(n)}^{\left(R(n)\right)^{\frac{1}{1+\alpha}} + R(n)} \frac{dt}{t} \leq$$

$$\leq M \frac{\left(2 + 2^{\alpha} M\right) R(n)}{\left(R(n)\right)^{\frac{1}{1+\alpha}} - R(n)(1 + 2^{\alpha} M)} \leq M \left(R(n)\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Суммируя полученные оценки для каждого слагаемого равенства (5), имеем

$$\left| V_1\left(x(\tau_l)\right) - V_1^n\left(x(\tau_l)\right) \right| \leq M \left(\|\rho\|_{\infty} \left(R(n)\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} + C_{\rho} \left(R(n)\right)^{\frac{\beta}{1+\alpha}} \right).$$

В результате, принимая во внимание соотношение $R(n) \sim \frac{1}{n}$, получаем доказательство теоремы.

Замечание 1. Отметим, что методом построения квадратурной формулы для прямого значения производной логарифмического потенциала простого слоя можно построить квадратурную формулу и для других сингулярных интегралов по кривой Ляпунова.

3. Квадратурная формула для нормальной производной логарифмического потенциала двойного слоя

Теперь построим квадратурную формулу для нормальной производной логарифмического потенциала двойного слоя (2). Предположим, что кривая L задана параметрическим уравнением $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $t \in [a, b]$. Разобьем кривую L на «регулярные» элементарные части, т.е. $L = \bigcup\limits_{k=1}^{n} L_k$, и для функции $\varphi(x) \in C(L)$ введем модуль непрерывности вида

$$\omega(\varphi, \delta) = \delta \sup_{\tau \geq \delta} \frac{\overline{\omega}(\varphi, \tau)}{\tau}, \quad \delta > 0 ,$$

где $\overline{\omega}(\varphi, \tau) = \max\limits_{\substack{|x-y| \leq \tau \\ x,\, y \in L}} |\varphi(x) - \varphi(y)|$.

Теорема 2. *Пусть* $L \subset R^2$ *– простая замкнутая кривая Ляпунова с показателем* $0 < \alpha \le 1$, $\rho(x)$ *– непрерывно дифференцируемая функция на* L *и*

$$\int_0^{diam\,L} \frac{\omega(\mathrm{grad}\rho, t)}{t} dt < +\infty .$$

Тогда выражение

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \vec{n}}\right)^n (x(\tau_l)) = -\frac{b-a}{\pi n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq l}}^{n} \frac{\left(x(\tau_l)-x(\tau_j), \vec{n}(x(\tau_j))\right)\left(x(\tau_l)-x(\tau_j), \vec{n}(x(\tau_l))\right)}{\left|x(\tau_l)-x(\tau_j)\right|^4} \times$$

$$\times \sqrt{\left(x_1'(\tau_j)\right)^2 + \left(x_2'(\tau_j)\right)^2}\left(\rho(x(\tau_j)) - \rho(x(\tau_l))\right) +$$

$$+ \frac{b-a}{2\pi n} \sum_{j \in Q_l} \frac{\left(\vec{n}(x(\tau_j)), \vec{n}(x(\tau_l))\right)}{\left|x(\tau_j)-x(\tau_l)\right|^2} \sqrt{\left(x_1'(\tau_j)\right)^2 + \left(x_2'(\tau_j)\right)^2}\left(\rho(x(\tau_j)) - \rho(x(\tau_l))\right)$$

в опорных точках $x(\tau_l), l = \overline{1,n}$, *является квадратурной формулой для* $\dfrac{\partial W(x)}{\partial \vec{n}(x)}$, *причем справедливы следующие оценки:*

$$\max_{l=\overline{1,n}} \left| \frac{\partial W(x(\tau_l))}{\partial \vec{n}(x(\tau_l))} - \left(\frac{\partial W}{\partial \vec{n}}\right)^n (x(\tau_l)) \right| \le M \left[\|\rho\|_\infty n^{-\alpha} + \|\mathrm{grad}\rho\|_\infty n^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} + \int_0^{n^{-\frac{1}{1+\alpha}}} \frac{\omega(\mathrm{grad}\rho, t)}{t} dt \right],$$

если $0 < \alpha < 1$,

$$\max_{l=\overline{1,n}} \left| \frac{\partial W(x(\tau_l))}{\partial \vec{n}(x(\tau_l))} - \left(\frac{\partial W}{\partial \vec{n}}\right)^n (x(\tau_l)) \right| \le M \left[\frac{\|\rho\|_\infty \ln n}{n} + \frac{\|\mathrm{grad}\,\rho\|_\infty}{\sqrt{n}} + \int_0^{1/\sqrt{n}} \frac{\omega(\mathrm{grad}\,\rho, t)}{t} dt \right],$$

если $\alpha = 1$.

Доказательство. В работе [11] доказано, что $\dfrac{\partial W(x)}{\partial \vec{n}(x)} = T_1(x) + T_2(x)$, где

$$T_1(x) = -\frac{1}{\pi} \int_L \frac{(x-y, \vec{n}(y))(x-y, \vec{n}(x))}{|x-y|^4} (\rho(y) - \rho(x))\, dL_y ,$$

$$T_2(x) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{(\vec{n}(y), \vec{n}(x))}{|x-y|^2} (\rho(y) - \rho(x))\, dL_y , \quad x \in L ,$$

причем интеграл $T_2(x)$ существует в смысле главного значения Коши.

Построим квадратурную формулу для интеграла $T_1(x)$. Выражение

$$T_1^n (x(\tau_l)) = -\frac{b-a}{\pi n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq l}}^{n} \frac{\left(x(\tau_l)-x(\tau_j), \vec{n}(x(\tau_j))\right)\left(x(\tau_l)-x(\tau_j), \vec{n}(x(\tau_l))\right)}{\left|x(\tau_l)-x(\tau_j)\right|^4} \times$$

$$\times \sqrt{\left(x_1'(\tau_j)\right)^2 + \left(x_2'(\tau_j)\right)^2}\left(\rho(x(\tau_j)) - \rho(x(\tau_l))\right) \qquad (12)$$

в опорных точках $x(\tau_l), l = \overline{1,n}$, является квадратурной формулой для интеграла $T_1(x)$. Оценим погрешность квадратурной формулы (12). Очевидно, что

$$T_1(x(\tau_l)) - T_1^n(x(\tau_l)) =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{L_l} \frac{(x(\tau_l)-y,\vec{n}(y))\,(x(\tau_l)-y,\vec{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_l)-y|^4}(\rho(y)-\rho(x(\tau_l)))\,dL_y -$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n} \frac{(x(\tau_l)-x(\tau_j),\vec{n}(x(\tau_j)))(x(\tau_l)-x(\tau_j),\vec{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_l)-x(\tau_j)|^4}\times$$

$$\times\left(mesL_j - \frac{b-a}{n}\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}\right)(\rho(x(\tau_j))-\rho(x(\tau_l)))-$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n}\int_{L_j}\left[\frac{(x(\tau_l)-y,\vec{n}(y))(x(\tau_l)-y,\vec{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_l)-y|^4} -\right.$$

$$\left.-\frac{(x(\tau_j)-x(\tau_l),\vec{n}(x(\tau_j)))(x(\tau_j)-x(\tau_l),\vec{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_l)-y|^4}\right](\rho(y)-\rho(x(\tau_l)))\,dL_y -$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n}\int_{L_j}\left(\frac{1}{|x(\tau_l)-y|^4}-\frac{1}{|x(\tau_l)-x(\tau_j)|^4}\right)\times$$

$$\times(x(\tau_l)-x(\tau_j),\vec{n}(x(\tau_j)))(x(\tau_l)-x(\tau_j),\vec{n}(x(\tau_l)))(\rho(y)-\rho(x(\tau_l)))\,dL_y -$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n}\int_{L_j}\frac{(x(\tau_l)-x(\tau_j),\vec{n}(x(\tau_j)))(x(\tau_l)-x(\tau_j),\vec{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_l)-x(\tau_j)|^4}(\rho(y)-\rho(x(\tau_j)))\,dL_y\ .$$

Слагаемые в выражении правой части последнего равенства обозначим через $r_1(T_1,x(\tau_l))$, $r_2(T_1,x(\tau_l))$, $r_3(T_1,x(\tau_l))$, $r_4(T_1,x(\tau_l))$ и $r_5(T_1,x(\tau_l))$ соответственно.

Так как функция $\rho(x)$ непрерывно дифференцируема, то существует такая точка $y^* = x+\theta(y-x)$ (здесь $\theta=(\theta_1,\theta_2)$ и $\theta_1,\theta_2\in(0,1)$), что

$$\rho(y)-\rho(x) = (\operatorname{grad}\rho(y^*), y-x),\quad x,y\in L\ . \tag{13}$$

Тогда, применяя формулу вычисления криволинейного интеграла, имеем

$$|r_1(T_1,x(\tau_l))| \le M\,\|\operatorname{grad}\rho\|_\infty \int_{L_l}\frac{1}{|x(\tau_l)-y|^{1-2\alpha}}dL_y \le M\,\|\operatorname{grad}\rho\|_\infty\,(R(n))^{2\alpha}\ .$$

Принимая во внимание (3), (6) и (13), получим

$$|r_2(T_1,x(\tau_l))| = \frac{1}{\pi}\left|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n}\left(1-\frac{\frac{b-a}{n}\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}}{mesL_j}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\int_{L_j}\frac{(x(\tau_l)-x(\tau_j),\vec{n}(x(\tau_j)))(x(\tau_l)-x(\tau_j),\vec{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_l)-x(\tau_j)|^4}(\rho(x(\tau_j))-\rho(x(\tau_l)))\,dL_y\right| \le$$

$$\le M\,\|\mathrm{grad}\rho\|_\infty\,(R(n))^\alpha \int\limits_{R(n)}^{diam\,L} \frac{dt}{t^{1-2\alpha}} \le M\,\|\mathrm{grad}\rho\|_\infty\,(R(n))^\alpha .$$

Пусть $y \in L_j$ и $j \ne l$. Тогда, учитывая (3) и (13), получаем

$$\left|\frac{(x(\tau_l)-y,\vec{n}(y))(x(\tau_l)-y,\vec{n}(x(\tau_l)))-(x(\tau_j)-x(\tau_l),\vec{n}(x(\tau_j)))(x(\tau_j)-x(\tau_l),\vec{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_l)-y|^4}\times\right.$$

$$\left.\times(\rho(y)-\rho(x(\tau_l)))\right| = \left|(\rho(y)-\rho(x(\tau_l)))\times\right.$$

$$\times\left(\frac{((y-x(\tau_j),\vec{n}(y))+(x(\tau_j)-x(\tau_l),\vec{n}(y)-\vec{n}(x(\tau_j))))(y-x(\tau_l),\vec{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_l)-y|^4}+\right.$$

$$\left.+\frac{(x(\tau_j)-x(\tau_l),\vec{n}(x(\tau_j)))((y-x(\tau_j),\vec{n}(x(\tau_l))-\vec{n}(y))+(y-x(\tau_j),\vec{n}(y)))}{|x(\tau_l)-y|^4}\right)\Bigg| \le$$

$$\le M\,\|\mathrm{grad}\,\rho\|_\infty \frac{(R(n))^\alpha}{|x(\tau_l)-y|^{1-\alpha}}.$$

Следовательно,

$$|r_3(T_1,x(\tau_l))| \le M\,(R(n))^\alpha \|\mathrm{grad}\,\rho\|_\infty \int\limits_{L\setminus L_l} \frac{1}{|x(\tau_l)-y|^{1-\alpha}}\,dL_y \le M\,\|\mathrm{grad}\,\rho\|_\infty\,(R(n))^\alpha .$$

Опять-таки принимая во внимание (3) и (13), получаем, что если $y \in L_j$ и $j \ne l$, то

$$\left|\left(\frac{1}{|x(\tau_l)-y|^4}-\frac{1}{|x(\tau_l)-x(\tau_j)|^4}\right)(x(\tau_j)-x(\tau_l),\vec{n}(x(\tau_j)))\times\right.$$

$$\left.\times(x(\tau_j)-x(\tau_l),\vec{n}(x(\tau_l)))(\rho(y)-\rho(x(\tau_l)))\right| \le M\,\|\mathrm{grad}\,\rho\|_\infty \frac{R(n)}{|x(\tau_l)-y|^{2-\alpha}}$$

и

$$\left|\frac{(x(\tau_j)-x(\tau_l),\vec{n}(x(\tau_j)))(x(\tau_j)-x(\tau_l),\vec{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_l)-x(\tau_j)|^4}(\rho(y)-\rho(x(\tau_j)))\right| \le$$

$$\le M\,\|\mathrm{grad}\rho\|_\infty \frac{R(n)}{|x(\tau_l)-y|^{2-\alpha}}.$$

Тогда

$$|r_4(T_1,x(\tau_l))| \le M\,R(n)\|\mathrm{grad}\,\rho\|_\infty \int\limits_{L\setminus L_l} \frac{1}{|x(\tau_l)-y|^{2-\alpha}}\,dL_y \le M\,\|\mathrm{grad}\,\rho\|_\infty\,(R(n))^\alpha ,$$

если $0<\alpha<1$,

$$|r_4(T_1,x(\tau_l))| \le M\,\|\mathrm{grad}\,\rho\|_\infty\,R(n)\,|\ln R(n)|, \text{ если } \alpha = 1,$$

и $$\left|r_5(T_1,x(\tau_l))\right| \le M\left\|\operatorname{grad}\rho\right\|_\infty (R(n))^\alpha$$, если $0<\alpha<1$,

$$\left|r_5(T_1,x(\tau_l))\right| \le M\left\|\operatorname{grad}\rho\right\|_\infty R(n)\left|\ln R(n)\right|$$, если $\alpha=1$.

Суммируя полученные оценки для выражений $r_j(T_1,x(\tau_l))$, $j=\overline{1,5}$, получим

$$\max_{l=\overline{1,n}}\left|T_1(x(\tau_l))-T_1^n(x(\tau_l))\right| \le M\left\|\operatorname{grad}\rho\right\|_\infty (R(n))^\alpha$$, если $0<\alpha<1$,

$$\max_{l=\overline{1,n}}\left|T_1(x(\tau_l))-T_1^n(x(\tau_l))\right| \le M\left\|\operatorname{grad}\rho\right\|_\infty R(n)\left|\ln(R(n))\right|$$, если $\alpha=1$.

Теперь построим квадратурную формулу для интеграла $T_2(x)$. Выражение

$$T_2^n(x(\tau_l)) = \frac{b-a}{2\pi n}\sum_{j\in Q_l}\frac{\left(\vec n(x(\tau_j)),\vec n(x(\tau_l))\right)}{\left|x(\tau_j)-x(\tau_l)\right|^2}\times$$
$$\times\sqrt{\left(x_1'(\tau_j)\right)^2+\left(x_2'(\tau_j)\right)^2}\left(\rho(x(\tau_j))-\rho(x(\tau_l))\right) \qquad (14)$$

в опорных точках $x(\tau_l), l=\overline{1,n}$, является квадратурной формулой для интеграла $T_2(x)$. Оценим погрешность квадратурной формулы (14).

Очевидно, что

$$T_2(x(\tau_l))-T_2^n(x(\tau_l)) = \frac{1}{2\pi}\sum_{j\in Q_l}\frac{\left(\vec n(x(\tau_j)),\vec n(x(\tau_l))\right)}{\left|x(\tau_l)-x(\tau_j)\right|^2}\times$$
$$\times\left(mesL_j-\frac{b-a}{n}\sqrt{\left(x_1'(\tau_j)\right)^2+\left(x_2'(\tau_j)\right)^2}\right)\left(\rho(x(\tau_j))-\rho(x(\tau_l))\right)+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{j\in Q_l}\int_{L_j}\left(\frac{\rho(y)-\rho(x(\tau_l))}{\left|x(\tau_l)-y\right|^2}(\vec n(y),\vec n(x(\tau_l)))-\frac{\rho(x(\tau_j))-\rho(x(\tau_l))}{\left|x(\tau_l)-x(\tau_j)\right|^2}\left(\vec n(x(\tau_j)),\vec n(x(\tau_l))\right)\right)dL_y+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\bigcup\limits_{j\in P_l}L_j}\frac{\rho(y)-\rho(x(\tau_l))}{\left|x(\tau_l)-y\right|^2}(\vec n(y),\vec n(x(\tau_l)))\,dL_y.$$

Слагаемые в выражении правой части последнего равенства обозначим через $r_1(T_2,x(\tau_l))$, $r_2(T_2,x(\tau_l))$ и $r_3(T_2,x(\tau_l))$ соответственно.

Принимая во внимание (3), (6) и (13), получим

$$\left|r_1(T_2,x(\tau_l))\right| =$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left|\sum_{j\in Q_l}\left(1-\frac{\frac{b-a}{n}\sqrt{\left(x_1'(\tau_j)\right)^2+\left(x_2'(\tau_j)\right)^2}}{mesL_j}\right)\int_{L_j}\frac{\left(\vec n(x(\tau_j)),\vec n(x(\tau_l))\right)}{\left|x(\tau_l)-x(\tau_j)\right|^2}\left(\rho(x(\tau_j))-\rho(x(\tau_l))\right)dL_y\right| \le$$
$$\le M\left\|\operatorname{grad}\rho\right\|_\infty (R(n))^\alpha\int_{(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}}}^{diam\,L}\frac{dt}{t} \le M\left\|\operatorname{grad}\rho\right\|_\infty (R(n))^\alpha\left|\ln R(n)\right|.$$

Пусть $y \in S_j, j \in Q_l$. Тогда

$$\left| \frac{\rho(y)-\rho(x(\tau_l))}{|x(\tau_l)-y|^2}(\vec{n}(y),\vec{n}(x(\tau_l))) - \frac{\rho(x(\tau_j))-\rho(x(\tau_l))}{|x(\tau_l)-x(\tau_j)|^2}(\vec{n}(x(\tau_j)),\vec{n}(x(\tau_l))) \right| \le$$

$$\le \left| \frac{(\rho(y)-\rho(x(\tau_l)))(\vec{n}(y),\vec{n}(x(\tau_l)))\left(|x(\tau_l)-x(\tau_j)|^2 - |x(\tau_l)-y|^2\right)}{|x(\tau_l)-y|^2\,|x(\tau_l)-x(\tau_j)|^2} \right| +$$

$$+ \frac{\left|\left(\rho(y)-\rho(x(\tau_j))\right)(\vec{n}(y),\vec{n}(x(\tau_l)))\right|}{|x(\tau_l)-x(\tau_j)|^2} +$$

$$+ \frac{\left|\left(\rho(x(\tau_j))-\rho(x(\tau_l))\right)(\vec{n}(y)-\vec{n}(x(\tau_j)),\vec{n}(x(\tau_l)))\right|}{|x(\tau_l)-x(\tau_j)|^2} \le$$

$$\le M\,\|\mathrm{grad}\,\rho\|_\infty \left(\frac{R(n)}{|x(\tau_l)-y|^2} + \frac{(R(n))^\alpha}{|x(\tau_l)-y|} \right).$$

Отсюда имеем

$$|r_2(T_2,x(\tau_l))| \le \frac{M}{2\pi}\|\mathrm{grad}\,\rho\|_\infty \left(R(n) \int\limits_{(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}}}^{diam\,L} \frac{dt}{t^2} + (R(n))^\alpha \int\limits_{(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}}}^{diam\,L} \frac{dt}{t} \right) \le$$

$$\le M\,\|\mathrm{grad}\,\rho\|_\infty (R(n))^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Так как существует такая точка $\tilde{y}(l) = x(\tau_l) + \theta(y - x(\tau_l))$ (здесь $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ и $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$), что

$$\rho(y) - \rho(x(\tau_l)) = (\mathrm{grad}\rho(\tilde{y}(l)), y - x(\tau_l)), \quad y \in \bigcup_{j \in P_l} L_j, \tag{15}$$

то выражение $r_3(T_2, x(\tau_l))$ можно представить в виде

$$r_3(T_2,x(\tau_l)) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\bigcup\limits_{j\in P_l} L_j} \frac{(\mathrm{grad}\,\rho(\tilde{y}(l)), y - x(\tau_l))}{|x(\tau_l)-y|^2}(\vec{n}(y)-\vec{n}(x(\tau_l)),\vec{n}(x(\tau_l)))\,dL_y +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\bigcup\limits_{j\in P_l} L_j} \frac{(\mathrm{grad}\,\rho(\tilde{y}(l)) - \mathrm{grad}\,\rho(x(\tau_l)), y - x(\tau_l))}{|x(\tau_l)-y|^2}\,dL_y +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\bigcup\limits_{j\in P_l} L_j} \frac{(\mathrm{grad}\,\rho(x(\tau_l)), y - x(\tau_l))}{|x(\tau_l)-y|^2}\,dL_y.$$

Пусть $y \in \partial\left(\bigcup\limits_{j\in P_l} L_j\right)$. Тогда принимая во внимание неравенство (15), получим

$$\left|\int\limits_{\bigcup\limits_{j\in P_l} L_j} \frac{(\operatorname{grad}\rho(\tilde{y}(l)), y-x(\tau_l))}{|x(\tau_l)-y|^2}(\vec{n}(y)-\vec{n}(x(\tau_l)),\vec{n}(x(\tau_l)))dL_y\right| \le$$

$$\le M\|\operatorname{grad}\rho\|_\infty \int\limits_0^{(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}}+R(n)} \frac{dt}{t^{1-\alpha}} \le M\|\operatorname{grad}\rho\|_\infty (R(n))^{\frac{\alpha}{1+\alpha}},$$

$$\left|\int\limits_{\bigcup\limits_{j\in P_l} L_j} \frac{(\operatorname{grad}\rho(\tilde{y}(l))-\operatorname{grad}\rho(x(\tau_l)), y-x(\tau_l))}{|x(\tau_l)-y|^2}dL_y\right| \le M \int\limits_0^{(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}}+R(n)} \frac{\omega(\operatorname{grad}\rho,t)}{t}dt\,.$$

На куске $L_d(x(\tau_l))$ выберем локальную прямоугольную систему координат (u,v) с началом в точке $x(\tau_l)$, где направим ось v вдоль нормали $\vec{n}(x(\tau_l))$, а ось u вдоль положительного направления касательной прямой $\Gamma(x(\tau_l))$. Так как

$$\int\limits_{\bigcup\limits_{j\in P_l} L_j} \frac{(\operatorname{grad}\rho(x(\tau_l)), y-x(\tau_l))}{|x(\tau_l)-y|^2}dL_y =$$

$$= \int\limits_{\bigcup\limits_{j\in P_l} L_j} \frac{(y_1-x_1(\tau_l))\dfrac{\partial\rho(x(\tau_l))}{\partial x_1}+(y_2-x_2(\tau_l))\dfrac{\partial\rho(x(\tau_l))}{\partial x_2}}{(y_1-x_1(\tau_l))^2+(y_2-x_2(\tau_l))^2}dL_y,$$

то по формуле вычисления криволинейного интеграла, получаем, что

$$\int\limits_{\bigcup\limits_{j\in P_l} L_j} \frac{(\operatorname{grad}\rho(x(\tau_l)), y-x(\tau_l))}{|x(\tau_l)-y|^2}dL_y =$$

$$= \frac{\partial\rho(x(\tau_l))}{\partial x_1}\int\limits_{-d_l}^{d_l}\frac{du}{u}+\frac{\partial\rho(x(\tau_l))}{\partial x_2}\int\limits_{-d_l}^{d_l}\frac{f(u)}{u^2+(f(u))^2}\sqrt{1+(f'(u))^2}\,du+$$

$$+\frac{\partial\rho(x(\tau_l))}{\partial x_1}\int\limits_{-d_l}^{d_l}\frac{u\left(\sqrt{1+(f'(u))^2}-1\right)}{u^2+(f(u))^2}du+\frac{\partial\rho(x(\tau_l))}{\partial x_1}\int\limits_{-d_l}^{d_l}u\left(\frac{1}{u^2+(f(u))^2}-\frac{1}{u^2}\right)du+$$

$$+\int\limits_{\Omega_l\setminus(-d_l,d_l)}\frac{\dfrac{\partial\rho(x(\tau_l))}{\partial x_1}u+\dfrac{\partial\rho(x(\tau_l))}{\partial x_2}f(u)}{u^2+(f(u))^2}\sqrt{1+(f'(u))^2}\,du\,. \qquad (16)$$

Первый интеграл в равенстве (16) существует в смысле главного значения Коши и равен нулю. Кроме того, учитывая неравенства (9) и (10), имеем

$$\left|\frac{\partial\rho(x(\tau_l))}{\partial x_2}\int\limits_{-d_l}^{d_l}\frac{f(u)}{u^2+(f(u))^2}\sqrt{1+(f'(u))^2}\,du\right| \le M\|\operatorname{grad}\rho\|_\infty (R(n))^{\frac{\alpha}{1+\alpha}},$$

$$\left|\frac{\partial\rho(x(\tau_l))}{\partial x_1}\int\limits_{-d_l}^{d_l}\frac{u\left(\sqrt{1+(f'(u))^2}-1\right)}{u^2+(f(u))^2}du\right|\le M\|\operatorname{grad}\rho\|_\infty(R((n))^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}},$$

$$\left|\frac{\partial\rho(x(\tau_l))}{\partial x_1}\int\limits_{-d_l}^{d_l}u\left(\frac{1}{u^2+(f(u))^2}-\frac{1}{u^2}\right)du\right|\le M\|\operatorname{grad}\rho\|_\infty(R((n))^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}.$$

Принимая во внимание неравенство (11) для последнего интеграла в равенстве (16), получаем, что

$$\left|\int\limits_{\Omega_l\setminus(-d_l,d_l)}\frac{\frac{\partial\rho(x(\tau_l))}{\partial x_1}u+\frac{\partial\rho(x(\tau_l))}{\partial x_2}f(u)}{u^2+(f(u))^2}\sqrt{1+(f'(u))^2}\,du\right|\le$$

$$\le M\|\operatorname{grad}\rho\|_\infty\int\limits_{(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}}-R(n)\left(1+2^\alpha M\right)}^{(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}}+R(n)}\frac{dt}{t}=M\|\operatorname{grad}\rho\|_\infty\ln\frac{(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}}+R(n)}{(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}}-R(n)\left(1+2^\alpha M\right)}=$$

$$=M\|\operatorname{grad}\rho\|_\infty\ln\left(1+\frac{R(n)\left(2+2^\alpha M\right)}{(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}}-R(n)\left(1+2^\alpha M\right)}\right)\le$$

$$\le M\|\operatorname{grad}\rho\|_\infty\frac{R(n)\left(2+2^\alpha M\right)}{(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}}-R(n)\left(1+2^\alpha M\right)}\le M\|\operatorname{grad}\rho\|_\infty(R(n))^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

В результате, имеем

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\bigcup\limits_{j\in P_l}L_j}\frac{(\operatorname{grad}\rho(x(\tau_l)),y-x(\tau_l))}{|x(\tau_l)-y|^2}dL_y\right|\le M\|\operatorname{grad}\rho\|_\infty(R(n))^{\frac{\alpha}{1+\alpha}},$$

следовательно,

$$\left|r_3(T_2,x(\tau_l))\right|\le M\left[\|\operatorname{grad}\rho\|_\infty(R(n))^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}+\int\limits_0^{(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}}+R(n)}\frac{\omega(\operatorname{grad}\rho,t)}{t}dt\right].$$

Суммируя полученные оценки для выражений $r_1(T_2,x(\tau_l))$, $r_2(T_2,x(\tau_l))$ и $r_3(T_2,x(\tau_l))$, получаем

$$\max_{l=\overline{1,n}}\left|T_2(x(\tau_l))-T_2^n(x(\tau_l))\right|\le M\left[\|\operatorname{grad}\rho\|_\infty(R(n))^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}+\int\limits_0^{(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}}+R(n)}\frac{\omega(\operatorname{grad}\rho,t)}{t}dt\right].$$

В итоге, принимая во внимание соотношение $R(n) \sim \frac{1}{n}$, построенные квадратурные формулы для интегралов $T_1(x)$, $T_2(x)$ и оценки их погрешностей, получаем доказательство теоремы.

Замечание 2. Как видно, если $\rho \equiv C = \text{const}$, то $\left(\frac{\partial W}{\partial \vec{n}}\right)^n (x(\tau_l)) = 0,\ \forall l = \overline{1,n}$, и кроме того, по теореме Гаусса (см. [7])

$$\int_L \frac{(x-y, \vec{n}(y))}{|x-y|^2} dL_y = -\pi,\ \ x \in L,$$

а, значит, $\frac{\partial W(x)}{\partial \vec{n}(x)} = 0,\ \ x \in L.$ А это означает, что в классе постоянных функций ρ выполняется равенство

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \vec{n}}\right)^n (x(\tau_l)) = \frac{\partial W(x(\tau_l))}{\partial \vec{n}(x(\tau_l))} = 0,\ \forall l = \overline{1,n},$$

т.е. построенная квадратурная формула для нормальной производной логарифмическго потенциала двойного слоя является эффективной.

Автор выражает искренюю благодарность своему научному руководителю к.ф.-м.н., доц. Э.Г. Халилову за постановку задач и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Колтон Д.*, *Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 311 с.
2. *Халилов Э.Г.* Некоторые свойства оператора, порожденного производной акустического потенциала двойного слоя // Сибирский математический журнал. Т. 55. № 3. 2014. С. 690–700.
3. *Khalilov E. H.* Cubic formula for the normal derivative of a double layer acoustic potential // Transactions of NAS of Azerbaijan, series of physical-technical and mathematical sciences. 2014. V. 34. No. 1. P. 73–82.
4. *Халилов Э.Г.* О приближенном решении одного класса граничных интегральных уравнений первого рода // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 9. С. 1277–1283.
5. *Халилов Э.Г.* Обоснование метода коллокации для одного класса поверхностных интегральных уравнений // Математические заметки. 2020. Т. 107. № 4. С. 604–622.
6. *Мусхелешвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 599 с.
7. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 527 с.
8. *Khalilov E.H.*, *Bakhshaliyeva M.N.* Quadrature formulas for simple and double layer logarithmic potentials // Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan. 2019. V. 45. No. 1. P. 155–162.
9. *Кустов Ю.А.*, *Мусаев Б.И.* Кубатурная формула для двумерного сингулярного интеграла и ее приложения // Деп. в ВИНИТИ. № 4281–81. 60 с.
10. *Bakhshaliyeva M.N.* On the properties of operator generated by the direct value of the derivative of simple layer logarithmic potential // Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics. 2019. V. 7. No. 1. P. 11–24.
11. *Халилов Э.Г.*, *Бахшалыева М.Н.* О производной логарифмического потенциала двойного слоя // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 62. С. 38–54.

Статья поступила 22.04.2020

Bakhshaliyeva M.N. (2020) A QUADRATURE FORMULA FOR THE DERIVATIVE OF LOGARITHMIC POTENTIALS *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 68. pp. 5–22

DOI 10.17223/19988621/68/1

Keywords: quadrature formula, curvilinear singular integral, derivative of the logarithmic potential of a simple layer, normal derivative of the logarithmic potential of a double layer.

In this work, we give a new method for constructing a quadrature formula for a curvilinear singular integral and, based on this method, we construct quadrature formulas for the derivative of the logarithmic potential of a simple layer

$$V(x)=\int_L \overrightarrow{\operatorname{grad}_x}\Phi(x,y)\rho(y)dL_y,\quad x=(x_1,x_2)\in L,$$

and for the normal derivative of the logarithmic potential of a double layer

$$\frac{\partial W(x)}{\partial \vec{n}(x)}=\frac{\partial}{\partial \vec{n}(x)}\left(\int_L \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \vec{n}(y)}\rho(y)dL_y\right),\quad x\in L,$$

where $L\subset R^2$ is a simple closed Lyapunov curve with the exponent $0<\alpha\le 1$; $\vec{n}(y)$ is the external unit normal at the point $y\in L$; ρ is a continuous function on L; and $\Phi(x,y)$ is the fundamental solution of the Laplace equation, i.e.,

$$\Phi(x,y)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-y|},\ x,y\in R^2,\ x\ne y.$$

Assume that the curve L is defined by the parametric equation $x(t)=(x_1(t),x_2(t))$, $t\in[a,b]$. Let us partition the segment $[a,b]$ into $n>2M_1(b-a)/d$ equal parts: $t_k=a+\dfrac{(b-a)k}{n}$, $k=\overline{0,n}$, where $M_1=\max\limits_{t\in[a,b]}\sqrt{(x_1'(t))^2+(x_2'(t))^2}<+\infty$ and d is the radius of the standard circle. As reference points, we take $x(\tau_k)$, $k=\overline{1,n}$, where $\tau_k=a+\dfrac{(b-a)(2k-1)}{2n}$.

Also let $Q_l=\left\{j\,|\,1\le j\le n,\left|x(\tau_l)-x(\tau_j)\right|>(R(n))^{\frac{1}{1+\alpha}}\right\}$, where $R(n)=\max\limits_{k=1,n}R_k(n)$, $R_k(n)=\max\{|x(\tau_k)-x(t_{k-1})|,|x(t_k)-x(\tau_k)|\}$.

The following theorems are proved.

Theorem 1. *Let $L\subset R^2$ be a simple closed Lyapunov curve with the exponent $0<\alpha\le 1$ and $\rho\in H_\beta(L)$, $0<\beta\le 1$. Then the expression*

$$V_m^n(x(\tau_l))=\frac{b-a}{2\pi n}\sum_{j\in Q_l}\frac{x_m(\tau_j)-x_m(\tau_l)}{\left|x(\tau_l)-x(\tau_j)\right|^2}\sqrt{\left(x_1'(\tau_j)\right)^2+\left(x_2'(\tau_j)\right)^2}\,\rho\left(x(\tau_j)\right)$$

at the reference points $x(\tau_l)$, $l=\overline{1,n}$, is a quadrature formula for

$$V_m(x)=\int_L\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x_m}\rho(y)\,dL_y,\quad x=(x_1,x_2)\in L\quad (m=1,2);$$

here,

$$\max_{l=1,n}\left|V_m(x(\tau_l))-V_m^n(x(\tau_l))\right|\le M\left(\|\rho\|_\infty\, n^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}+C_\rho\, n^{-\frac{\beta}{1+\alpha}}\right),$$

where $H_\beta(L)$ *is the Hölder space with the exponent* $0<\beta\le 1$, $\|\rho\|_\infty=\max\limits_{x\in L}|\rho(x)|$, *M is a positive constant, and* $C_\rho=\sup\limits_{\substack{x,y\in L,\\ x\ne y}}\dfrac{|\rho(x)-\rho(y)|}{|x-y|^\beta}$.

Theorem 2. *Let* $L\subset R^2$ *be a simple closed Lyapunov curve with the exponent* $0<\alpha\le 1$, $\rho(x)$ *be a continuously differentiable function on* L, *and*

$$\int\limits_0^{diam\,L}\frac{\omega(\operatorname{grad}\rho,t)}{t}dt<+\infty\,.$$

Then the expression

$$\left(\frac{\partial W}{\partial\vec n}\right)^n(x(\tau_l))=-\frac{b-a}{\pi n}\sum_{\substack{j=1\\ j\ne l}}^{n}\frac{\big(x(\tau_l)-x(\tau_j),\vec n(x(\tau_j))\big)\big(x(\tau_l)-x(\tau_j),\vec n(x(\tau_l))\big)}{|x(\tau_l)-x(\tau_j)|^4}\times$$

$$\times\sqrt{\big(x_1'(\tau_j)\big)^2+\big(x_2'(\tau_j)\big)^2}\,\big(\rho(x(\tau_j))-\rho(x(\tau_l))\big)+$$

$$+\frac{b-a}{2\pi n}\sum_{j\in Q_l}\frac{\big(\vec n(x(\tau_j)),\vec n(x(\tau_l))\big)}{|x(\tau_j)-x(\tau_l)|^2}\sqrt{\big(x_1'(\tau_j)\big)^2+\big(x_2'(\tau_j)\big)^2}\,\big(\rho(x(\tau_j))-\rho(x(\tau_l))\big)$$

at the reference points $x(\tau_l),\ l=\overline{1,n}$, *is a quadrature formula for* $\dfrac{\partial W(x)}{\partial\vec n(x)}$; *moreover, the following estimates are true:*

$$\max_{l=\overline{1,n}}\left|\frac{\partial W(x(\tau_l))}{\partial\vec n(x(\tau_l))}-\left(\frac{\partial W}{\partial\vec n}\right)^n(x(\tau_l))\right|\le M\left[\|\rho\|_\infty n^{-\alpha}+\|\operatorname{grad}\rho\|_\infty n^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}+\int\limits_0^{n^{-\frac{1}{1+\alpha}}}\frac{\omega(\operatorname{grad}\rho,t)}{t}dt\right],$$

if $0<\alpha<1$,

$$\max_{l=\overline{1,n}}\left|\frac{\partial W(x(\tau_l))}{\partial\vec n(x(\tau_l))}-\left(\frac{\partial W}{\partial\vec n}\right)^n(x(\tau_l))\right|\le M\left[\frac{\|\rho\|_\infty|\ln n|}{n}+\frac{\|\operatorname{grad}\rho\|_\infty}{\sqrt n}+\int\limits_0^{1/\sqrt n}\frac{\omega(\operatorname{grad}\rho,t)}{t}dt\right],$$

if $\alpha=1$,

where M is a positive constant.

AMS Mathematical Subject Classification: 45E05; 31B10

Mehpara N. BAKHSHALIYEVA (PhD student of the General and Applied Mathematics Department of Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan). E-mail: mehpara.bakhshalieva@mail.ru

REFERENCES

1. Colton D.L., Kress R. (1983) *Integral Equation Methods in Scattering Theory.* John Wiley & Sons.
2. Khalilov E.H. (2014) Some properties of the operators generated by a derivative of the acoustic double layer potential. *Siberian Mathematical Journal*. 55(3). pp. 564–573. DOI: 10.1134/S0037446614030173.
3. Khalilov E.H. (2014) Cubic formula for the normal derivative of a double layer acoustic potential. *Transactions of NAS of Azerbaijan*, *Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences*. 34(1). pp.73–82. http://imm.az/journals/AMEA_xeberleri/cild34_N1_2014/meqaleler/73-82.pdf.

4. Khalilov E.H. (2016) On an approximate solution of a class of boundary integral equations of the first kind. *Differential Equations*. 52(9). pp. 1234–1240. DOI: 10.1134/S0012266116090147.
5. Khalilov E.H. (2020) Justification of the collocation method for a class of surface integral equations. *Mathematical Notes*. 107(4). pp. 663–678. DOI: 10.1134/S0001434620030335.
6. Muskhelishvili N.I. (1958) *Singular Integral Equations*. Springer Netherlands.
7. Vladimirov V.S. (1971) *Equations of Mathematical Physics*. New York: Marcel Dekker.
8. Khalilov E.H., Bakhshaliyeva M.N. (2019) Quadrature formulas for simple and double layer logarithmic potentials. *Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan*. 45(1). pp. 155–162. http://proc.imm.az/volumes/45-1/45-01-12.pdf.
9. Kustov Yu.A., Musaev B.I. (1981) *Kubaturnaya formula dlya dvumernogo singulyarnogo integrala i eio prilozheniya* [The cubature formula for a two-dimensional singular integral and its applications]. Submitted to VINITI. 4281-81.
10. Bakhshaliyeva M.N. (2019) On the properties of operator generated by the direct value of the derivative of simple layer logarithmic potential. *Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics*. 7(1). pp. 11–24.
11. Khalilov E.H., Bakhshaliyeva M.N. (2019) On the derivative of the double-layer logarithmic potential. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 62. pp. 38–54. DOI: 10.17223/19988621/62/4.

Received: April 22, 2020