УДК 512.54 MSC 2020: 15B33, 20H25, 20K15
DOI 10.17223/19988621/68/2

В.К. Вильданов, В.А. Гайдак, Е.А. Тимошенко

ОБ ОПРЕДЕЛЯЕМОСТИ ВПОЛНЕ РАЗЛОЖИМОЙ ГРУППЫ РАНГА 2 ЕЁ ГРУППОЙ АВТОМОРФИЗМОВ[1]

Найдены необходимые и достаточные условия, при которых две вполне разложимые абелевы группы без кручения ранга 2 имеют изоморфные группы автоморфизмов. Получен ответ на вопрос о том, при каких условиях вполне разложимая абелева группа ранга 2 однозначно определяется своей группой автоморфизмов.

Ключевые слова: *матрица*, *инволюция*, *вполне разложимая группа*, *группа автоморфизмов.*

Пусть $B \in \mathbf{X}$, где $\mathbf{X}$ – некоторый класс абелевых групп. Мы будем говорить, что *B определяется своей группой автоморфизмов в классе* $\mathbf{X}$, если из изоморфизма групп автоморфизмов $\operatorname{Aut} B$ и $\operatorname{Aut} B'$, где $B' \in \mathbf{X}$, всегда следует $B \cong B'$.

Всюду ниже под $\mathbf{X}$ понимается класс всех вполне разложимых групп (без кручения) ранга 2. Данная статья служит продолжением работы [1] и развивает некоторые идеи работы [2], посвящённой определяемости групп класса $\mathbf{X}$ их группами автоморфизмов. Напомним, что *вполне разложимой группой ранга n* называется всякая группа B, представимая в виде прямой суммы n групп ранга 1; хорошо известно (см. [3]), что любые два таких разложения группы B будут изоморфны. Так как всякая группа ранга 1 изоморфна некоторой *рациональной группе* (т.е. ненулевой подгруппе аддитивной группы поля рациональных чисел $\mathbf{Q}$), то для удобства можно сразу рассматривать группы из класса $\mathbf{X}$ как прямые суммы двух рациональных групп.

В статье [2] были получены необходимые и достаточные условия существования изоморфизма $\operatorname{Aut} B \cong \operatorname{Aut} B'$ для 2-делимых групп $B, B' \in \mathbf{X}$. В настоящей работе аналогичная задача решена уже для произвольных групп класса $\mathbf{X}$.

Пусть $\mathbf{P}$ – множество всех простых чисел. Для всякого множества $L \subset \mathbf{P}$ будем обозначать символом $\mathbf{Q}^{(L)}$ то подкольцо поля $\mathbf{Q}$, которое порождается элементом 1 и числами p^{-1}, где $p \in L$. Хорошо известно, что все подкольца поля $\mathbf{Q}$ исчерпываются кольцами вида $\mathbf{Q}^{(L)}$.

Через $\mathbf{t}(Y)$ обозначается тип группы Y ранга 1; подробнее о типах см. [3]. Для рациональных групп Y и Z положим $\Gamma_{YZ} = \{\alpha \in \mathbf{Q} \mid \alpha Y \subset Z\}$. Несложно проверить, что справедливы следующие свойства:

1) $(\Gamma_{YZ}, +)$ – абелева группа, изоморфная группе гомоморфизмов $\operatorname{Hom}(Y, Z)$.

2) $\Gamma_{YY} = \mathbf{Q}^{(L)}$, где L – множество всех простых чисел p, таких, что $pY = Y$. При этом кольцо Γ_{YY} изоморфно кольцу эндоморфизмов $\mathrm{E}(Y)$ группы Y, а группа обратимых элементов $U(\Gamma_{YY})$ кольца Γ_{YY} изоморфна группе $\operatorname{Aut} Y$.

3) $\Gamma_{KY}\Gamma_{YZ} \subset \Gamma_{KZ}$.

4) Если неравенство $\mathbf{t}(Y) \le \mathbf{t}(Z)$ не выполнено, то $\Gamma_{YZ} = 0$.

---

[1] Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для молодых учёных – докторов наук МД-108.2020.1.

5) Если $\mathbf{t}(Y) \le \mathbf{t}(Z)$, то $\Gamma_{YZ} \ne 0$ и $\mathbf{t}(\Gamma_{YZ}) = \mathbf{t}(Z) : \mathbf{t}(Y)$.

Нетрудно видеть, что кольцо эндоморфизмов $\mathrm{E}(B)$ вполне разложимой группы $B = Y \oplus Z$ ранга 2 изоморфно кольцу матриц

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{YY} & \Gamma_{ZY} \\ \Gamma_{YZ} & \Gamma_{ZZ} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

(с обычными операциями сложения и умножения). Поэтому в дальнейшем будем отождествлять кольцо $\mathrm{E}(B)$ с подкольцом (1) кольца матриц $M(2, \mathbf{Q})$ порядка 2 над полем $\mathbf{Q}$ и считать, что группа $\mathrm{Aut}\, B$ совпадает с матричной группой $U(\mathrm{E}(B))$.

Группы матриц порядка 2 над подкольцами поля Q

Для коммутативного кольца с единицей R через $GL_2(R)$ обозначается группа обратимых (2×2)-матриц с элементами из R; эта группа состоит из тех матриц

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ где } a, b, c, d \in R, \qquad (2)$$

для которых определитель $|A| = ad - bc$ есть обратимый элемент кольца R.

Введём обозначения

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ X(h) = \begin{pmatrix} 1+h & h \\ -h & 1-h \end{pmatrix},\ W(h) = \begin{pmatrix} 1-h & h \\ -h & 1+h \end{pmatrix},$$

$$T(h) = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ P(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следующая лемма носит технический характер.

Лемма 1. а) Для любых $g, h \in \mathbf{Q}$ выполнены равенства $T(g)T(h) = T(g+h)$, $P(g)P(h) = P(g+h)$, $X(g)X(h) = X(g+h)$ и $W(g)W(h) = W(g+h)$.

б) Если $h \ne 0$, то $T(h)$ не является инволюцией.

в) Если для некоторого $h \in \mathbf{Q}$ матрица A вида (2) равна какой-то из матриц $T(h)$, $-T(h)$, $P(h)$, $-P(h)$, то число h с данным свойством определено однозначно.

г) Если для некоторого $h \in \mathbf{Q}$ матрица A вида (2) равна какой-то из матриц $X(h)$, $-X(h)$, $W(h)$, $-W(h)$, то число h с данным свойством определено однозначно.

д) Если $g, h \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$, то $T(h)P(g) \ne P(g)T(h)$ и $X(h)W(g) \ne W(g)X(h)$.

Доказательство. Утверждения а) и б) проверяются непосредственно.

в) Легко заметить, что во всех четырёх случаях выполнено $h = a(b+c)$.

г) Во всех четырёх случаях имеем $h = b(a+d)/2$.

д) Первая часть утверждения следует из того, что элементы, стоящие в левом верхнем углу матриц $T(h)P(g)$ и $P(g)T(h)$, равны $1+gh$ и 1 соответственно. Вторая часть утверждения следует из того, что элементы, стоящие в правом верхнем углу матриц $X(h)W(g)$ и $W(g)X(h)$, равны соответственно $g+h+2gh$ и $g+h-2gh$. ■

Множество $ML_2(R) \subset GL_2(R)$, элементами которого служат матрицы с определителем ± 1, очевидно, является подгруппой в $GL_2(R)$. В [1] было показано, что если R – подкольцо поля $\mathbf{Q}$, то множество всех нецентральных инволюций группы $ML_2(R)$ совпадает с множеством матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \text{ где } a^2 + bc = 1. \qquad (3)$$

Следующий результат подчёркивает важность инволюций J и I:

Теорема 2 [1]. Если R – подкольцо в $\mathbf{Q}$, то всякая нецентральная инволюция группы $ML_2(R)$ сопряжена в этой группе хотя бы с одной из инволюций J и I. ■

Через $C_G(A)$ будем обозначать централизатор элемента A группы G.

Предложение 3. Пусть R – подкольцо поля $\mathbf{Q}$ и $G = ML_2(R)$. Тогда:

а) $C_G(J) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| \, a, d \in R \text{ и } ad = \pm 1 \right\}$.

б) $C_G(I) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in R \text{ и } (a+b)(a-b) = \pm 1 \right\}$.

в) Если R совпадает с кольцом целых чисел $\mathbf{Z}$, то множества $C_G(J)$ и $C_G(I)$ состоят из 4 элементов; если $R \neq \mathbf{Z}$, то множества $C_G(J)$ и $C_G(I)$ бесконечны.

Доказательство. а) Матрица A вида (2) принадлежит $C_G(J)$ тогда и только тогда, когда $AJ = JA$ (т.е. $b = c = 0$) и $|A| = \pm 1$. Отсюда следует нужное утверждение.

б) Для матрицы A вида (2) из равенства $AI = IA$ следует $d = a$ и $c = b$. Условие $A \in G$ для матрицы A с такими свойствами эквивалентно равенству $a^2 - b^2 = \pm 1$.

в) Если $R = \mathbf{Z}$, то произведение двух элементов из R равно ± 1 тогда и только тогда, когда каждый из этих элементов равен ± 1. С учётом а) и б) отсюда следует, что $C_G(J) = \{E, -E, J, -J\}$ и $C_G(I) = \{E, -E, I, -I\}$.

Предположим теперь, что $R \neq \mathbf{Z}$. Тогда найдётся простое число p, такое, что $pR = R$. Множества $C_G(J)$ и $C_G(I)$ в этом случае бесконечны, так как

$$\begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & p^{-n} \end{pmatrix} \in C_G(J), \quad \begin{pmatrix} (p^n + p^{-n})/2 & (p^n - p^{-n})/2 \\ (p^n - p^{-n})/2 & (p^n + p^{-n})/2 \end{pmatrix} \in C_G(I)$$

для любого натурального n (заметим, что элементы второй из этих матриц действительно принадлежат R как при нечётном p, так и в случае $p = 2$). ■

Теорема 4. Если R и S – подкольца поля $\mathbf{Q}$ и $ML_2(R) \cong ML_2(S)$, то $R = S$.

Доказательство. Пусть $G = ML_2(R)$, $H = ML_2(S)$ и $\varphi\colon G \to H$ – какой-то изоморфизм. Тогда φ переводит нецентральную инволюцию $J \in G$ в некоторую нецентральную инволюцию $A \in H$. В силу теоремы 2 инволюция A сопряжена в H хотя бы с одной из инволюций J и I, т.е. найдётся внутренний автоморфизм группы H, переводящий A в J или в I. Значит, существует изоморфизм $G \to H$, переводящий J в J или в I. В связи с этим будем сразу считать, что $\varphi(J) \in \{J, I\}$.

Ясно, что φ переводит $C_G(J)$ в множество $C_H(\varphi(J))$. Если $S = \mathbf{Z}$, то $C_H(\varphi(J))$ содержит ровно 4 элемента (см. предложение 3). Тогда $C_G(J)$ также содержит ровно 4 элемента. Снова применяя предложение 3, получаем, что $R = \mathbf{Z}$.

Далее считаем, что $S \neq \mathbf{Z}$. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in C_G(J)$ имеем

$$AT(h)A^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ahd^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T(ahd^{-1}).$$

Так как $T(h)$ и $T(ahd^{-1})$ коммутируют, то для любых $A \in C_G(J)$ и $h \in R$ выполнено $T(h)AT(h)A^{-1} = AT(h)A^{-1}T(h)$. Поскольку φ переводит множество $C_G(J)$ в $C_H(\varphi(J))$, то для матрицы $U = \varphi(T(h)) \in H$ и для произвольной матрицы $F \in C_H(\varphi(J))$ имеем

$$UFUF^{-1} = FUF^{-1}U. \tag{4}$$

Поскольку $T(h)J$ – нецентральная инволюция, то $U\varphi(J)$ тоже является нецентральной инволюцией. Будем считать, что матрица $U\varphi(J)$ задана формулой (3), где $a, b, c \in S$. Рассмотрим два возможных случая.

I. Пусть $\varphi(J) = J$. Тогда $U = UJ \cdot J = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & a \end{pmatrix}$.

Для произвольной матрицы $F = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \in C_H(J)$ имеем

$$FUF^{-1} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ c & a \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{|F|} \cdot \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \frac{1}{|F|} \cdot \begin{pmatrix} axy & -bx^2 \\ cy^2 & axy \end{pmatrix}.$$

Отсюда мы получаем, что элементы, которые стоят в левом верхнем углу матриц $|F| \cdot UFUF^{-1}$ и $|F| \cdot FUF^{-1}U$, равны $a^2xy - bcy^2$ и $a^2xy - bcx^2$ соответственно. В силу равенства (4) из этого следует, что $bcx^2 = bcy^2$ при всех допустимых x и y.

Поскольку $S \neq \mathbf{Z}$, то x и y можно выбрать так, чтобы $x^2 \neq y^2$ (см. доказательство пункта в) предложения 3). Это означает, что $bc = 0$. Так как $a^2 + bc = 1$, получаем, что матрица U равна какой-то из матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix},$$

т.е. имеет вид $T(f)$, $-T(f)$, $P(f)$ или $-P(f)$, где $f \in S$.

Мы доказали, что для любого $h \in R$ матрица $\varphi(T(h))$ имеет вид $T(f_h)$, $-T(f_h)$, $P(f_h)$ или $-P(f_h)$; из леммы 1 следует, что элемент $f_h \in S$ определён однозначно.

Заметим, что $T(0) = E = P(0)$. Если $h \neq 0$, то $T(h)$ не является инволюцией и, следовательно, $\varphi(T(h))$ тоже не является инволюцией. Значит, $\varphi(T(h))$ не может совпадать с $\pm T(0)$ или с $\pm P(0)$. Таким образом, при всех $h \in R \setminus \{0\}$ имеем $f_h \neq 0$.

Докажем, что либо при всех $h \in R \setminus \{0\}$ выполнено $\varphi(T(h)) = \varepsilon_h T(f_h)$, либо при всех $h \in R \setminus \{0\}$ выполнено $\varphi(T(h)) = \varepsilon_h P(f_h)$ (где $\varepsilon_h \in \{-1, 1\}$ для всех $h \in R \setminus \{0\}$). Допустим противное: пусть существуют $g, h \in R \setminus \{0\}$, такие, что $\varphi(T(g)) = \varepsilon_g P(f_g)$ и $\varphi(T(h)) = \varepsilon_h T(f_h)$ (тогда $f_g, f_h \neq 0$). Так как $T(g)$ и $T(h)$ коммутируют, то матрицы $\varphi(T(g))$ и $\varphi(T(h))$ также коммутируют. Но это значит, что $T(f_h)P(f_g) = P(f_g)T(f_h)$ – получаем противоречие с пунктом д) леммы 1.

При $h = 0$ имеем $\varphi(T(h)) = \varphi(E) = E = T(0) = P(0)$. Поэтому доказанное утверждение можно усилить: либо для всех $h \in R$ выполнено $\varphi(T(h)) = \varepsilon_h T(f_h)$, либо для всех $h \in R$ выполнено $\varphi(T(h)) = \varepsilon_h P(f_h)$, где $\varepsilon_h \in \{-1, 1\}$ при всех $h \in R$.

В первом из этих случаев для любых $g, h \in R$ имеем

$$\varepsilon_{g+h} T(f_{g+h}) = \varphi(T(g+h)) = \varphi(T(g) \cdot T(h)) = \varphi(T(g))\varphi(T(h)) =$$
$$= \varepsilon_g T(f_g) \cdot \varepsilon_h T(f_h) = \varepsilon_g\varepsilon_h T(f_g)T(f_h) = \varepsilon_g\varepsilon_h T(f_g + f_h).$$

Поскольку $\varepsilon_g\varepsilon_h \in \{-1, 1\}$, то ввиду пункта в) леммы 1 отсюда следует равенство $f_{g+h} = f_g + f_h$; точно так же показывается, что это равенство справедливо во втором из упомянутых случаев.

Мы доказали, что сопоставление $h \to f_h$ задаёт гомоморфизм из $(R, +)$ в $(S, +)$. Он инъективен, так как ранее было установлено, что $f_h \neq 0$ при всех $h \neq 0$.

II. Пусть теперь $\varphi(J) = I$. Тогда $U = UI \cdot I = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ -a & c \end{pmatrix}$.

Для произвольной матрицы $F = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \in C_H(I)$ имеем

$$FUF^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & a \\ -a & c \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{|F|} \cdot \begin{pmatrix} x & -y \\ -y & x \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|F|} \cdot \begin{pmatrix} bx^2 - 2axy - cy^2 & ax^2 + (c-b)xy + ay^2 \\ -ax^2 - (c-b)xy - ay^2 & cx^2 + 2axy - by^2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда можно вывести, что элементы, находящиеся в правом верхнем углу матриц $|F|\cdot UFUF^{-1}$ и $|F|\cdot FUF^{-1}U$, равны выражениям $a(b+c)x^2+(2a^2+bc-b^2)xy$ и $a(b+c)x^2+(c^2-bc-2a^2)xy$ соответственно. С учётом равенства (4) получаем, что при всех допустимых значениях x и y выполнено $(2a^2+bc-b^2)xy=(c^2-bc-2a^2)xy$ и, следовательно, $(4a^2-(b-c)^2)xy=0$.

Поскольку $S\neq\mathbf{Z}$, то x и y можно выбрать так, чтобы $xy\neq 0$ (см. доказательство пункта в) предложения 3). Это означает, что $(b-c)^2=4a^2$, т.е. $b-c=\pm 2a$. Далее, имеем $4=4a^2+4bc=(b-c)^2+4bc=(b+c)^2$, отсюда $b+c=\pm 2$. Мы получаем четыре различных системы уравнений относительно неизвестных b и c. Решая эти системы, можно заключить, что матрица U равна какой-то из матриц

$$\begin{pmatrix}1+a & a\\ -a & 1-a\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}a-1 & a\\ -a & -a-1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1-a & a\\ -a & 1+a\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-a-1 & a\\ -a & a-1\end{pmatrix}$$

(т.е. имеет вид $X(f)$, $-X(f)$, $W(f)$ или $-W(f)$, где $f\in S$).

Мы доказали, что для любого $h\in R$ матрица $\varphi(T(h))$ имеет вид $X(f_h)$, $-X(f_h)$, $W(f_h)$ или $-W(f_h)$; из леммы 1 следует, что элемент $f_h\in S$ определён однозначно.

Заметим, что $X(0)=E=W(0)$. Если $h\neq 0$, то $\varphi(T(h))$ не является инволюцией и, следовательно, не может совпадать с $\pm X(0)$ или с $\pm W(0)$. Таким образом, при всех $h\in R\setminus\{0\}$ выполнено $f_h\neq 0$.

Как и в случае I, с помощью пункта д) леммы 1 можно доказать, что либо при всех $h\in R$ выполнено равенство $\varphi(T(h))=\varepsilon_h X(f_h)$, либо при всех $h\in R$ выполнено $\varphi(T(h))=\varepsilon_h W(f_h)$ (где $\varepsilon_h\in\{-1,1\}$ при всех $h\in R$).

Применяя теперь пункт а) той же леммы, можно убедиться, что для любых $g,h\in R$ справедливо равенство $f_{g+h}=f_g+f_h$ (рассуждения проводятся аналогично случаю I). Таким образом, сопоставление $h\to f_h$ задаёт гомоморфизм из $(R,+)$ в $(S,+)$; он инъективен, так как $f_h\neq 0$ при всех $h\neq 0$.

Итак, во всех рассмотренных случаях существует групповой мономорфизм $R\to S$; в силу симметрии существует также мономорфизм $S\to R$. Так как R и S – подкольца (с единицей) поля $\mathbf{Q}$, то отсюда следует $R=S$. ■

Из теоремы 4 получается

Теорема 5. Для подколец R и S поля $\mathbf{Q}$ эквивалентны условия:

1) $GL_2(R)\cong GL_2(S)$;

2) $ML_2(R)\cong ML_2(S)$;

3) $R=S$.

Доказательство. Импликация 3) $\Rightarrow$ 1) очевидна; импликация 2) $\Rightarrow$ 3) доказана в теореме 4.

Из того факта, что кольцо R евклидово, можно вывести, что специальная линейная группа $SL_2(R)$ порождается матрицами вида $T(h)$ и $P(h)$, где $h\in R$. Так как матрицы $T(h)$ и $P(h)$ представимы в виде произведения инволюций из $GL_2(R)$:

$$T(h)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & h\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad P(h)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ h & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

то аналогичное утверждение верно и для произвольной матрицы из $SL_2(R)$. Далее, всякая матрица из $ML_2(R)$ либо сама принадлежит $SL_2(R)$, либо может быть записана в виде UJ, где $U\in SL_2(R)$. Следовательно, каждая матрица из $ML_2(R)$ также может быть представлена как произведение инволюций группы $GL_2(R)$. Так как все инволюции этой группы лежат в $ML_2(R)$, то $ML_2(R)$ есть подгруппа группы $GL_2(R)$, порождённая всеми принадлежащими $GL_2(R)$ инволюциями.

Таким образом, строение группы $ML_2(R)$ однозначно определяется группой $GL_2(R)$, откуда следует справедливость импликации 1) $\Rightarrow$ 2). ■

Определяемость группой автоморфизмов

Теперь мы готовы приступить непосредственно к решению вопроса об определяемости вполне разложимой группы ранга 2 её группой автоморфизмов.

Будем называть вполне разложимую группу $B = Y \oplus Z \in \mathbf{X}$:

– *диагональной*, если типы $\mathbf{t}(Y)$ и $\mathbf{t}(Z)$ несравнимы;

– *треугольной*, если один из типов $\mathbf{t}(Y)$ и $\mathbf{t}(Z)$ строго меньше другого;

– *однородной*, если $\mathbf{t}(Y) = \mathbf{t}(Z)$.

Прилагательные «диагональная» и «треугольная» выбраны, конечно, в связи с нашей договорённостью о том, что мы отождествляем кольцо $\mathrm{E}(B)$ с матричным кольцом (1).

Если $\mathbf{t}(Y) = \mathbf{t}(Z)$, то $Y \cong Z$; можно считать, что $Y = Z$. В этом случае кольцо $\mathrm{E}(B)$ совпадает с кольцом матриц $M(2, \Gamma_{YY})$, а группа $\mathrm{Aut}\, B$ – с группой $GL_2(\Gamma_{YY})$. Если неравенство $\mathbf{t}(Y) \le \mathbf{t}(Z)$ не выполнено, то $\Gamma_{YZ} = 0$ и легко убедиться, что

$$\mathrm{Aut}\, B = \begin{pmatrix} U(\Gamma_{YY}) & \Gamma_{ZY} \\ 0 & U(\Gamma_{ZZ}) \end{pmatrix} \tag{5}$$

(как в случае $\Gamma_{ZY} \ne 0$, так и в случае $\Gamma_{ZY} = 0$).

Докажем некоторые свойства коммутанта $(\mathrm{Aut}\, B)'$ группы $\mathrm{Aut}\, B$.

Предложение 6. Пусть $B = Y \oplus Z \in \mathbf{X}$. Тогда:

а) Если B – однородная группа, то $(\mathrm{Aut}\, B)'' \ne \{E\}$.

б) Если неравенство $\mathbf{t}(Y) \le \mathbf{t}(Z)$ не выполнено, то группа $(\mathrm{Aut}\, B)'$ изоморфна аддитивной группе $(\Gamma_{ZY}, +)$.

в) Если B – треугольная группа, то $(\mathrm{Aut}\, B)' \ne \{E\} = (\mathrm{Aut}\, B)''$.

г) Если B – диагональная группа, то $(\mathrm{Aut}\, B)' = \{E\}$.

Доказательство. а) Как было отмечено выше, можно считать, что $Y = Z$ и $\mathrm{Aut}\, B = GL_2(\Gamma_{YY})$. Найдём коммутатор $[I, T(h)] = I^{-1}(T(h))^{-1} I T(h)$ принадлежащих группе $\mathrm{Aut}\, B$ матриц I и $T(h)$, где $h \in \Gamma_{YY}$:

$$[I, T(h)] = IT(-h)IT(h) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & h \\ -h & 1-h^2 \end{pmatrix}.$$

В частности, из этих равенств видно, что

$$[I, T(1)] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in (\mathrm{Aut}\, B)', \ [I, T(-1)] = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in (\mathrm{Aut}\, B)'.$$

Так как матрицы $[I, T(1)]$ и $[I, T(-1)]$ не коммутируют, то $(\mathrm{Aut}\, B)'' \ne \{E\}$.

б) Легко заметить, что коммутатор любых двух матриц из группы $\mathrm{Aut}\, B$, задаваемой равенством (5), имеет вид $T(h)$, где $h \in \Gamma_{ZY}$. Ввиду пункта а) леммы 1 получаем, что $(\mathrm{Aut}\, B)'$ содержится в группе $\{T(h) \mid h \in \Gamma_{ZY}\}$ (изоморфной аддитивной группе Γ_{ZY}). Найдём теперь для $h \in \Gamma_{ZY}$ коммутатор матриц $J, T(h) \in \mathrm{Aut}\, B$:

$$[J, T(h)] = JT(-h)JT(h) = \begin{pmatrix} 1 & -h \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = T(2h).$$

Из этих равенств видно, что $(\mathrm{Aut}\, B)'$ содержит множество $\{T(2h) \mid h \in \Gamma_{ZY}\}$. Таким образом, $(\mathrm{Aut}\, B)' \cong (D, +)$, где D – подгруппа группы Γ_{ZY}, такая, что $2\Gamma_{ZY} \subset D$.

Так как факторгруппа $\Gamma_{ZY}/2\Gamma_{ZY}$ содержит не более 2 элементов, то в ней нет нетривиальных подгрупп. Следовательно, справедливо хотя бы одно из равенств $D = \Gamma_{ZY}$ и $D = 2\Gamma_{ZY}$. В обоих случаях $D \cong \Gamma_{ZY}$, что и требовалось.

Утверждения в) и г) непосредственно следуют из б). ■

Следствие 7. Если для групп $B, B' \in \mathbf{X}$ выполнено $\mathrm{Aut}\, B \cong \mathrm{Aut}\, B'$ и B – диагональная (треугольная, однородная) группа, то B' – тоже диагональная (соответственно треугольная, однородная) группа. ■

Для рациональной группы Y будем обозначать через $\mathbf{P}_\infty(Y)$ множество всех простых p, таких, что $pY = Y$. Легко видеть, что группа $U(\Gamma_{YY})$ представляет собой ограниченное прямое произведение (аналог понятия прямой суммы, который используется в случае мультипликативной записи) циклической группы порядка 2 и $|\mathbf{P}_\infty(Y)|$ бесконечных циклических групп.

Для диагональной группы $B = Y \oplus Z \in \mathbf{X}$ в силу равенства (5) будет выполнено $\mathrm{Aut}\, B \cong U(\Gamma_{YY}) \times U(\Gamma_{ZZ})$. С учётом единственности (с точностью до изоморфизма) разложения группы в ограниченное прямое произведение неразложимых циклических групп получаем следующее

Предложение 8. Для диагональных групп $B = Y \oplus Z$ и $B' = Y' \oplus Z'$ из класса $\mathbf{X}$ эквивалентны условия:

1) $\mathrm{Aut}\, B \cong \mathrm{Aut}\, B'$.

2) $|\mathbf{P}_\infty(Y)| + |\mathbf{P}_\infty(Z)| = |\mathbf{P}_\infty(Y')| + |\mathbf{P}_\infty(Z')|$. ■

Для треугольных групп справедлив следующий критерий.

Предложение 9. Пусть группы $B = Y \oplus Z$ и $B' = Y' \oplus Z'$ из класса $\mathbf{X}$ – треугольные, причём $\mathbf{t}(Y) > \mathbf{t}(Z)$ и $\mathbf{t}(Y') > \mathbf{t}(Z')$. Следующие условия эквивалентны:

1) $\mathrm{Aut}\, B \cong \mathrm{Aut}\, B'$.

2) $\mathrm{Hom}(Z, Y) \cong \mathrm{Hom}(Z', Y')$ и $\mathrm{Aut}\, Z \cong \mathrm{Aut}\, Z'$.

Доказательство. Как и раньше, будем считать, что Y, Z, Y' и Z' – рациональные группы; напомним, что группа $\mathrm{Aut}\, B$ задаётся равенством (5). Для краткости положим $G = \mathrm{Aut}\, B$ и $H = \mathrm{Aut}\, B'$. Заметим, что для всякого простого p из $pZ = Z$ следует $pY = Y$. Это означает, что $\Gamma_{ZZ} \subset \Gamma_{YY}$.

1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $G \cong H$. Тогда ввиду пункта б) предложения 6 имеем

$$\mathrm{Hom}(Z, Y) \cong \Gamma_{ZY} \cong (G', \cdot) \cong (H', \cdot) \cong \Gamma_{Z'Y'} \cong \mathrm{Hom}(Z', Y').$$

Найдём центр $Z(G)$ группы G. Так как $U(\Gamma_{ZZ}) \subset U(\Gamma_{YY})$, то все матрицы вида dE, где $d \in U(\Gamma_{ZZ})$, лежат в $Z(G)$.

Обратно, допустим, что матрица A вида (2) есть элемент группы $Z(G)$ (тогда сразу $c = 0$). Из равенства $AJ = JA$ следует, что $b = 0$. Далее, так как $AT(h) = T(h)A$, где $h \in \Gamma_{ZY} \setminus \{0\}$, то $a = d \in U(\Gamma_{ZZ})$ и $A = dE$. Итак,

$$Z(G) = \{dE \mid d \in U(\Gamma_{ZZ})\} \cong U(\Gamma_{ZZ}) \cong \mathrm{Aut}\, Z.$$

Так как аналогичные соотношения имеют место для $Z(H)$, то из $G \cong H$ получаем $\mathrm{Aut}\, Z \cong Z(G) \cong Z(H) \cong \mathrm{Aut}\, Z'$, что и требовалось.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть $\mathrm{Hom}(Z, Y) \cong \mathrm{Hom}(Z', Y')$ (т.е. $\Gamma_{ZY} \cong \Gamma_{Z'Y'}$) и $\mathrm{Aut}\, Z \cong \mathrm{Aut}\, Z'$ (тогда $U(\Gamma_{ZZ}) \cong U(\Gamma_{Z'Z'})$). В этом случае найдутся ненулевое число $\alpha \in \mathbf{Q}$, для которого $\Gamma_{Z'Y'} = \alpha\Gamma_{ZY}$, и изоморфизм $\psi\colon U(\Gamma_{ZZ}) \to U(\Gamma_{Z'Z'})$. Далее, для всякого $p \in \mathbf{P}$ справедливы эквивалентности

$$pY = Y \Leftrightarrow p\Gamma_{ZY} = \Gamma_{ZY} \Leftrightarrow p\Gamma_{Z'Y'} = \Gamma_{Z'Y'} \Leftrightarrow pY' = Y',$$

отсюда $\Gamma_{YY} = \Gamma_{Y'Y'}$. Так как $U(\Gamma_{ZZ}) \cap U(\Gamma_{Z'Z'}) \subset U(\Gamma_{YY}) \cap U(\Gamma_{Y'Y'}) = U(\Gamma_{YY})$, то для всякого $d \in U(\Gamma_{ZZ})$ выполняется включение $d^{-1}\psi(d) \in U(\Gamma_{YY})$. Если, кроме того, $b \in \Gamma_{ZY}$, то имеем $\alpha b d^{-1}\psi(d) \in \alpha\Gamma_{ZY}\Gamma_{YY} \subset \alpha\Gamma_{ZY} = \Gamma_{Z'Y'}$. Таким образом, мы можем задать отображение $\varphi\colon G \to H$, полагая

$$\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad^{-1}\psi(d) & \alpha b d^{-1}\psi(d) \\ 0 & \psi(d) \end{pmatrix}$$

для всех $a \in U(\Gamma_{YY})$, $b \in \Gamma_{ZY}$ и $d \in U(\Gamma_{ZZ})$. Имеем

$$\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix} u & v \\ 0 & w \end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} uw^{-1}\psi(w) & \alpha v w^{-1}\psi(w) \\ 0 & \psi(w) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} aud^{-1}w^{-1}\psi(d)\psi(w) & \alpha(av+bw)d^{-1}w^{-1}\psi(d)\psi(w) \\ 0 & \psi(d)\psi(w) \end{pmatrix} =$$

$$= \varphi\begin{pmatrix} au & av+bw \\ 0 & dw \end{pmatrix} = \varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & v \\ 0 & w \end{pmatrix}\right),$$

т.е. φ – гомоморфизм. В силу симметрии задаваемое равенством

$$\varepsilon\begin{pmatrix} u & v \\ 0 & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uw^{-1}\psi^{-1}(w) & \alpha^{-1}vw^{-1}\psi^{-1}(w) \\ 0 & \psi^{-1}(w) \end{pmatrix}$$

отображение $\varepsilon\colon H \to G$ также будет гомоморфизмом. При этом

$$\varepsilon\left(\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) = \varepsilon\begin{pmatrix} ad^{-1}\psi(d) & \alpha bd^{-1}\psi(d) \\ 0 & \psi(d) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ad^{-1}\psi(d)(\psi(d))^{-1}d & \alpha^{-1}\alpha bd^{-1}\psi(d)(\psi(d))^{-1}d \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

а значит, $\varepsilon \circ \varphi$ – тождественный автоморфизм группы G. Аналогично проверяется, что $\varphi \circ \varepsilon$ есть тождественный автоморфизм группы H. Таким образом, φ и ε – изоморфизмы и $G \cong H$. ■

Наконец, для однородных групп имеет место

Теорема 10. Для однородных групп $B = Y \oplus Y$ и $B' = Z \oplus Z$ из класса $\mathbf{X}$ эквивалентны условия:

1) $\mathrm{Aut}\,B \cong \mathrm{Aut}\,B'$.

2) $\mathrm{E}(Y) \cong \mathrm{E}(Z)$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Так как $GL_2(\Gamma_{YY}) = \mathrm{Aut}\,B \cong \mathrm{Aut}\,B' = GL_2(\Gamma_{ZZ})$, то ввиду теоремы 5 имеем $\mathrm{E}(Y) \cong \Gamma_{YY} = \Gamma_{ZZ} \cong \mathrm{E}(Z)$.

2) $\Rightarrow$ 1). Поскольку выполнено $\Gamma_{YY} \cong \mathrm{E}(Y) \cong \mathrm{E}(Z) \cong \Gamma_{ZZ}$, то $GL_2(\Gamma_{YY}) \cong GL_2(\Gamma_{ZZ})$, т.е. $\mathrm{Aut}\,B \cong \mathrm{Aut}\,B'$, что и требовалось. ■

Нам понадобится одна вспомогательная конструкция. Пусть Y – рациональная группа и $1 \in Y$. Обозначим p-высоту элемента 1 в группе Y через $h_p(1)$ и рассмотрим группу Y_0, такую, что $Y \subset Y_0 \subset \mathbf{Q}$ и что p-высота элемента 1 в группе Y_0 равна $h_p(1)+1$ для всех $p \in \mathbf{P}$. Построенная группа Y_0 обладает следующими свойствами:

1) $\mathbf{P}_\infty(Y_0) = \mathbf{P}_\infty(Y)$;

2) $\mathrm{E}(Y_0) \cong \mathrm{E}(Y)$ и, значит, $\mathrm{Aut}\,Y_0 \cong \mathrm{Aut}\,Y$;

3) $\mathbf{t}(Y_0) \geq \mathbf{t}(Y)$;

4) $Y_0 \cong Y$ тогда и только тогда, когда группа Y *почти делима*, т.е. когда $pY = Y$ почти для всех простых p;

5) $\mathbf{t}(Y_0) \geq \mathbf{t}(Z_0)$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{t}(Y) \geq \mathbf{t}(Z)$;

6) Если $\mathbf{t}(Y) \geq \mathbf{t}(Z)$, то $\mathbf{t}(Y_0) : \mathbf{t}(Z_0) = \mathbf{t}(Y) : \mathbf{t}(Z)$.

Теорема 11. Группа $B \in \mathbf{X}$ определяется в $\mathbf{X}$ своей группой автоморфизмов тогда и только тогда, когда $B \cong Y \oplus Y$, где Y – почти делимая группа ранга 1.

Доказательство. Пусть $B \cong Y \oplus Y$ и группа Y почти делима. Предположим, что выполнено $B' \in \mathbf{X}$ и $\mathrm{Aut}\,B' \cong \mathrm{Aut}\,B$. Применяя следствие 7 и теорему 10, получаем, что $B' \cong Z \oplus Z$, где Z – группа ранга 1, такая, что $\mathrm{E}(Z) \cong \mathrm{E}(Y)$. Из почти делимости группы Y следует, что аддитивная группа кольца $\mathrm{E}(Y)$ изоморфна Y. Тогда аддитивная группа кольца $\mathrm{E}(Z)$ также изоморфна Y, что возможно лишь в случае $Z \cong Y$. Итак, $B' \cong B$, т.е. B определяется своей группой автоморфизмов в классе $\mathbf{X}$.

Обратно, пусть группа $B \in \mathbf{X}$ определяется своей группой автоморфизмов в $\mathbf{X}$. Предположим сначала, что B – однородная группа; можно считать, что $B = Y \oplus Y$, где Y – рациональная группа, содержащая 1. Так как $\mathrm{E}(Y_0) \cong \mathrm{E}(Y)$, то ввиду теоремы 10 получаем, что $\mathrm{Aut}\, B \cong \mathrm{Aut}(Y_0 \oplus Y_0)$. В силу нашего предположения отсюда следует, что $B \cong Y_0 \oplus Y_0$ и, значит, $Y \cong Y_0$. Следовательно, группа Y почти делима, что и требовалось.

Допустим теперь, что группа B не является однородной. Можно считать, что $B = Y \oplus Z$, где Y и Z – рациональные группы, такие, что неравенство $\mathbf{t}(Y) \le \mathbf{t}(Z)$ не выполнено и $1 \in Y \cap Z$. Положим $B' = Y_0 \oplus Z_0$ и рассмотрим два возможных случая.

а) Пусть группа B является диагональной. Тогда типы $\mathbf{t}(Y_0)$ и $\mathbf{t}(Z_0)$ несравнимы и выполнено $\mathbf{P}_\infty(Y_0) = \mathbf{P}_\infty(Y)$, $\mathbf{P}_\infty(Z_0) = \mathbf{P}_\infty(Z)$. Применяя предложение 8, получаем $\mathrm{Aut}\, B \cong \mathrm{Aut}\, B'$. В силу нашего предположения из этого следует, что $B \cong B'$. Так как $\mathbf{t}(Y_0) \ge \mathbf{t}(Y)$ и $\mathbf{t}(Z_0) \ge \mathbf{t}(Z)$, то на самом деле $Y_0 \cong Y$ и $Z_0 \cong Z$, т.е. группы Y и Z почти делимы. Тогда в силу предложения 8 для любых различных простых p и q имеем $\mathrm{Aut}\, B \cong \mathrm{Aut}(\mathbf{Q}^{(\mathbf{P}\setminus\{p\})} \oplus \mathbf{Q}^{(\mathbf{P}\setminus\{q\})})$. Получаем противоречие с тем, что B определяется своей группой автоморфизмов в классе $\mathbf{X}$.

б) Осталось рассмотреть случай, когда группа B треугольная. Тогда $\mathbf{t}(Y) > \mathbf{t}(Z)$, откуда $\mathbf{t}(Y_0) > \mathbf{t}(Z_0)$. Далее, тип $\mathbf{t}(Y_0) : \mathbf{t}(Z_0)$ группы $\mathrm{Hom}(Z_0, Y_0)$ равен типу $\mathbf{t}(Y) : \mathbf{t}(Z)$ группы $\mathrm{Hom}(Z, Y)$, а значит, $\mathrm{Hom}(Z_0, Y_0) \cong \mathrm{Hom}(Z, Y)$. Поскольку $\mathrm{Aut}\, Z_0 \cong \mathrm{Aut}\, Z$, то по предложению 9 имеем $\mathrm{Aut}\, B \cong \mathrm{Aut}\, B'$. Как и в случае а), отсюда можно вывести, что Y и Z – почти делимые группы. Тогда $Y \cong \mathbf{Q}^{(L)}$ и $Z \cong \mathbf{Q}^{(M)}$, где $M \subset L \subset \mathbf{P}$, причём M содержит почти все простые числа. Если N есть бесконечное собственное подмножество множества M, то $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}^{(N)}, Y) \cong Y \cong \mathrm{Hom}(Z, Y)$ и $\mathrm{Aut}\, \mathbf{Q}^{(N)} \cong \mathrm{Aut}\, Z$, откуда по предложению 9 получаем $\mathrm{Aut}(Y \oplus \mathbf{Q}^{(N)}) \cong \mathrm{Aut}\, B$. Но группы $Y \oplus \mathbf{Q}^{(N)}$ и B не изоморфны, что противоречит определяемости группы B группой $\mathrm{Aut}\, B$. Тем самым теорема доказана. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гайдак В.А.*, *Тимошенко Е.А.* Инволюции полной линейной группы GL_2 над подкольцом поля $\mathbf{Q}$ // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 62. С. 19–26. DOI: 10.17223/19988621/62/2.
2. *Вильданов В.К.* Определяемость вполне разложимой абелевой группы без кручения ранга 2 своей группой автоморфизмов // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 3(1). С. 174–177.
3. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. Т. 2. М.: Мир, 1977.

Статья поступила 26.07.2020

Vildanov V. K., Gaidak V.A., Timoshenko E.A. (2020) ON DETERMINABILITY OF A COMPLETELY DECOMPOSABLE RANK 2 GROUP BY ITS AUTOMORPHISM GROUP. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 68. pp. 23–32

DOI 10.17223/19988621/68/2

Keywords: matrix, involution, completely decomposable group, automorphism group.

Let $B \in \mathbf{X}$, where $\mathbf{X}$ is a class of Abelian groups. We say that B is *determined by its automorphism group in the class* $\mathbf{X}$ if $\mathrm{Aut}\, B \cong \mathrm{Aut}\, B'$ implies $B \cong B'$ for every $B' \in \mathbf{X}$.

In what follows, $\mathbf{X}$ denotes the class of all rank 2 completely decomposable torsion-free groups. We find necessary and sufficient conditions for the isomorphism of $\mathrm{Aut}\, B$ with $\mathrm{Aut}\, B'$ provided that $B, B' \in \mathbf{X}$.

As usual, $GL_2(R)$ denotes the group of invertible 2×2 matrices over a ring R (with 1); the set $ML_2(R) \subset GL_2(R)$ of all matrices with determinant ± 1 is a subgroup of $GL_2(R)$.

Theorem 5. For subrings R and S of the field $\mathbf{Q}$, the following are equivalent:

1) $GL_2(R) \cong GL_2(S)$.

2) $ML_2(R) \cong ML_2(S)$.
3) $R = S$.

Let Y and Z be rank 1 torsion-free groups. We shall say that the group $B = Y \oplus Z$ is:
– *diagonal* if the types $\mathbf{t}(Y)$ and $\mathbf{t}(Z)$ are incomparable;
– *triangular* if $\mathbf{t}(Y) < \mathbf{t}(Z)$ or $\mathbf{t}(Z) < \mathbf{t}(Y)$;
– *homogeneous* if $\mathbf{t}(Y) = \mathbf{t}(Z)$.

Corollary 7. If two groups $B, B' \in \mathbf{X}$ satisfy $\operatorname{Aut} B \cong \operatorname{Aut} B'$ and B is a diagonal (resp. triangular, homogeneous) group, then B' is a diagonal (resp. triangular, homogeneous) group.

Let $\mathbf{P}_\infty(Y)$ denote the set of all primes p such that $pY = Y$.

Proposition 8. For diagonal groups $B = Y \oplus Z \in \mathbf{X}$ and $B' = Y' \oplus Z' \in \mathbf{X}$, the following are equivalent:
1) $\operatorname{Aut} B \cong \operatorname{Aut} B'$.
2) $|\mathbf{P}_\infty(Y)| + |\mathbf{P}_\infty(Z)| = |\mathbf{P}_\infty(Y')| + |\mathbf{P}_\infty(Z')|$. ■

Proposition 9. Let $B = Y \oplus Z \in \mathbf{X}$ and $B' = Y' \oplus Z' \in \mathbf{X}$ be triangular groups with $\mathbf{t}(Y) > \mathbf{t}(Z)$ and $\mathbf{t}(Y') > \mathbf{t}(Z')$. The following conditions are equivalent:
1) $\operatorname{Aut} B \cong \operatorname{Aut} B'$.
2) $\operatorname{Hom}(Z, Y) \cong \operatorname{Hom}(Z', Y')$ and $\operatorname{Aut} Z \cong \operatorname{Aut} Z'$.

Theorem 10. For homogeneous groups $B = Y \oplus Y \in \mathbf{X}$ and $B' = Z \oplus Z \in \mathbf{X}$, the following are equivalent:
1) $\operatorname{Aut} B \cong \operatorname{Aut} B'$.
2) Y and Z have isomorphic endomorphism rings.

An Abelian group Y is said to be *almost divisible* if $pY = Y$ for almost all primes p. The last theorem gives a criterion for determinability of a rank 2 completely decomposable group by its automorphism group in the class $\mathbf{X}$:

Theorem 11. A group $B \in \mathbf{X}$ is determined by its automorphism group in $\mathbf{X}$ if and only if $B \cong Y \oplus Y$ with Y being a rank 1 almost divisible group.

AMS 2020 Mathematical Subject Classification: 15B33, 20H25, 20K15

Financial support. The research was supported by the President of the Russian Federation Grant for young Russian scientists MD-108.2020.1.

Vadim K. VILDANOV (Candidate of Physics and Mathematics, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod, Russian Federation). E-mail: kadirovi4@gmail.com

Violetta A. GAIDAK (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: gaidakvioletta@gmail.com

Egor A. TIMOSHENKO (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tea471@mail.tsu.ru

REFERENCES

1. Gaidak V.A., Timoshenko E.A. (2019) Involyutsii polnoy lineynoy gruppy GL_2 nad podkol'tsom polya $\mathbf{Q}$ [Involutions of the general linear group GL_2 over a subring of the field $\mathbf{Q}$]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 62. pp. 19–26. DOI: 10.17223/19988621/62/2.
2. Vildanov V.K. (2011) Opredelyaemost' vpolne razlozhimoy abelevoy gruppy bez krucheniya ranga 2 svoey gruppoy avtomorfizmov [Determinability of completely decomposable torsion-free Abelian group of rank 2 by its automorphism group]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo – Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod*. 3(1). pp. 174–177.
3. Fuchs L. (1973) *Infinite Abelian groups*. Vol. 2. New York; London: Academic Press.

Received: July 26, 2020