УДК 512.543 MSC 20D99
DOI 10.17223/19988621/68/3

А.И. Забарина, Е.А. Фомина

О МНОЖЕСТВЕ K_p В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

Рассмотрены свойства множества K_p, состоящего из элементов неабелевой группы, коммутирующих ровно с p элементами группы. В частности, свойства множества K_p в группах подстановок и некоторых разрешимых группах. Приведено ещё одно доказательство, что все инволюции конечной простой неабелевой группы G с непустым множеством K_3 образуют один класс сопряжённых элементов.

***Ключевые слова**: группа, централизатор элемента, инволюция, силовские и холловы подгруппы.*

В [1, 2] изучались некоторые свойства конечных групп, в которых существуют элементы порядка 2 и 3, порядок централизатора которых равен порядку элемента, то есть неединичные элементы, перестановочные ровно с двумя (тремя) элементами группы. Множества таких элементов мы обозначали $K_2(G)$, $K_3(G)$. В настоящей работе рассмотрено множество $K_p(G)$, где p – произвольное простое число.

1. Обозначения и некоторые свойства множества $K_p(G)$

Пусть $\langle G, \cdot\rangle$ – произвольная конечная неабелева группа, $|G| = n$, p – простой делитель n. Введём следующие обозначения:

$$X_p(G) = \{g \in G \mid o(g) = p\},$$

$$K_p(G) = \{g \in G \mid g \neq e \wedge |C(g)| = p\}.$$

В том случае, когда понятно, о какой группе G идёт речь, вместо $X_p(G)$, $K_p(G)$ будем писать: X_p, K_p соответственно.

Так как p – простое число, то из того, что $x \in K_p$ следует

$$\{x, x^2, \ldots, x^{p-1}\} \subset X_p \text{ и } \{x, x^2, \ldots, x^{p-1}\} \subset K_p.$$

Приведём ряд свойств множества K_p.

Предложение 1. Пусть $|G| = n$. Тогда, если K_p не пусто, то n делится на p и не делится на p^2.

Предложение 2. Множество K_p является инвариантным подмножеством G, то есть вместе с каждым $x \in K_p$ и каждым $g \in G$ элемент x^g принадлежит K_p .

Предложение 3. Пусть $|G| = n$. Тогда $\left|K_p\right| \in \left\{0, \frac{n}{p}, \frac{2n}{p}, \ldots, \frac{(p-1)n}{p}\right\}$.

Доказательства указанных утверждений аналогичны доказательствам свойств множества $K_3(G)$, приведённым в [2].

2. Множества K_p в группах S_n и A_n

Рассмотрим указанные множества при различных значениях p.

1) Пусть $p = 2$.

1.1. Так как при $n > 3$ $|S_n| \vdots 4$, то, согласно предложению 1, в указанных группах $K_2(S_n) = \varnothing$.

Обратимся к S_3. Заметим, что для каждого $a \in S_3$ элемент $a \in X_2(S_3)$ тогда и только тогда, когда $a = (\alpha_1\alpha_2)$.

Так как $\left|(\alpha_1\alpha_2)^{S_3}\right| = 3$, то $\left|C_{S_3}(\alpha_1\alpha_2)\right| = 2$. Следовательно, $|K_2(S_3)| = \dfrac{|S_3|}{2}$.

1.2. В каждой неабелевой знакопеременной группе A_n множество $K_2(A_n)$ пусто, так как для каждого натурального $n \geq 4$ порядок группы A_n делится нацело на 4.

2) Пусть теперь $p \geq 3$.

Обратимся сначала к группам S_n.

Согласно предложению 1, если $K_p(S_n) \neq \varnothing$, то $p \leq n < 2p$. Таким образом, для фиксированного p достаточно рассмотреть множество групп $\{S_p, S_{p+1}, \ldots, S_{2p-1}\}$.

2.1. Пусть $0 \leq n - p \leq 1$. Имеем

$$X_p(S_n) = \{a \in S_n \mid a = (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p)\}.$$

Следовательно, для каждого $a \in X_p(S_n)$ $a^{S_n} = \{(\beta_1\beta_2\ldots\beta_p)\}$ – множество всех p-членных циклов. Следовательно,

$$\left|a^{S_n}\right| = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p},$$

где $(n - p) \in \{0, 1\}$. Отсюда

$$\forall a \in X_p(S_n) \ \left|C_{S_n}(a)\right| = p,$$

то есть $a \in K_p$.

Таким образом, если $0 \leq n - p \leq 1$, то $K_p(S_n) = X_p(S_n)$ и $|K_p(S_n)| = \dfrac{|S_n|}{p}$.

2.2. Пусть $n - p > 1$, $n \in \{p + 2, \ldots, 2p - 1\}$.

Каждый элемент порядка p из S_n является p-членным циклом: $\forall a \in X_p(S_n)$ $a = (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p)$.

Так как существует двучленный цикл $b = (\beta_1\beta_2)$, такой что $ab = ba$, то $\left|C_{S_n}(a)\right| > p$. То есть $K_p(S_n) = \varnothing$ при указанных значениях n.

Пример. $K_3(S_5) = K_5(S_7) = \varnothing$.

3) Обратимся теперь к множеству $K_p(A_n)$.

В силу предложения 1, при $p \geq 3$ если $K_p(A_n) \neq \varnothing$, то $p \leq n < 2p$. Рассмотрим следующие три случая.

3.1. Пусть $0 \leq n - p \leq 1$. То есть рассмотрим множество K_p в группах A_p, A_{p+1}.

Пусть $a \in K_p(S_p)$. Согласно 2.1, $a = (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p)$ и $C_{S_p}(a) = \langle a \rangle$.

Заметим, что $C_{S_p}(a) \subset A_p$. Следовательно, $K_p(A_p) = K_p(S_p)$ и $|K_p(A_p)| = \dfrac{2|A_p|}{p}$.

Очевидно, те же рассуждения имеют место для $n = p + 1$:

$$|K_p(A_{p+1})| = \frac{2|A_{p+1}|}{p}.$$

В частности, $|K_3(A_4)| = \frac{2|A_4|}{3}$, $|K_5(A_5)| = \frac{2|A_5|}{5}$.

3.2. Пусть $2 < n - p < p$.

Заметим, что для каждого $a \in X_p(A_n)$ существует $b = (\beta_1\beta_2\beta_3)$, такое, что $ab = ba$. То есть: $\left|C_{A_n}(a)\right| > p$. Таким образом, $K_p(A_n) = \varnothing$.

Пример. $K_5(A_8) = K_5(A_9) = \varnothing$.

3.3. Пусть $n - p = 2$.

Рассмотрим произвольное $a \in A_n$, $o(a) = p$.

Имеем: $a = (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p)$, $a^{S_n} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_p)\}$ – множество всех p-членных циклов и $\left|a^{S_n}\right| = \frac{n(n-1)\cdots 3}{p}$.

Следовательно, $\left|C_{S_n}(a)\right| = \frac{n!\,p}{n(n-1)\cdots 3} = 2p$.

Заметим, что существует такой элемент $b \in S_n$, что $b = (\beta_1\beta_2)$ и $ab = ba$.

Следовательно, $C_{S_n}(a) = \{e, a, \ldots, a^{p-1}, b, ab, a^2b, \ldots, a^{p-1}b\}$, где b, ab, $a^2b, \ldots, a^{p-1}b \notin A_n$. Имеем:

$$C_{A_n}(a) = \{e, a, \ldots, a^{p-1}\}.$$

Тогда $$|K_p(A_n)| = \frac{n!}{2p} = \frac{|A_n|}{p}.$$

В частности, $$|K_3(A_5)| = \frac{|A_5|}{3},\ |K_{11}(A_{13})| = \frac{|A_{13}|}{11}.$$

3. Множества K_p в некоторых разрешимых группах

Прежде всего, заметим, что если G – конечная нильпотентная группа, $|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_i^{\alpha_i} \cdots p_k^{\alpha_k}$, $k > 1$, то согласно теореме Бернсайда – Виланда [3, с. 155]

$$G = H_1 \times \ldots \times H_i \times \ldots \times H_k,$$

где H_i – соответствующие силовские подгруппы. Пусть p_i – произвольный простой делитель $|G|$.

a) Если $\alpha_i > 1$, то согласно предложению 1, $K_{p_i} = \varnothing$.

b) Пусть $\alpha_i = 1$. Согласно свойству нильпотентных групп [3, с. 148], для каждого $j \in \overline{1,k}$ $Z(G) \cap H_j \neq \{e\}$. Следовательно, $H_i \subset Z(G)$ и $H_i \neq Z(G)$.

Таким образом, для каждого элемента $x \in X_{p_i}$ выполнено $|C_G(x)| > p_i$. Следовательно, $K_{p_i} = \varnothing$.

Рассмотрим следующее семейство разрешимых групп: $G = \mathbf{Z}^*_p \rightthreetimes \mathbf{Z}_p$, где p – простое число, $p > 2$ [4, с. 111].

Каждый элемент $g \in G$ единственным образом можно представить в виде $g = (x, y)$, где $x \in \mathbf{Z}^*_p$, $y \in \mathbf{Z}_p$.

Операция умножения элементов в G определена по правилу

$$(a, b)(c, d) = (ac, bc + d).$$

Нейтральным элементом является $e = (1, 0)$, обратный элемент: $(x, y)^{-1} = (x^{-1}, -yx^{-1})$.

Очевидно, что отображение $f: G \to \mathbf{Z}^*_p$ такое, что $f(x, y) = x$ является сюръективным гомоморфизмом G на $\mathbf{Z}^*_p$, ядро которого

$$\mathrm{Ker} f = \{(1, b) \mid b \in \mathbf{Z}_p\}.$$

Так как $\mathbf{Z}_p$ и $\mathbf{Z}^*_p$ – разрешимые группы, то, согласно свойству разрешимых групп, G – разрешимая неабелева группа для каждого $p > 2$.

Заметим, что $|G| = (p - 1)\cdot p$ и множество всех элементов $\{(1, y) \mid y \in \mathbf{Z}_p\}$ образует нормальный делитель G, изоморфный $\mathbf{Z}_p$. Очевидно, $X_p = \{(1, y) \mid y \neq 0\}$.

Пусть $b \neq 0$ и $(1, b)(c, d) = (c, d)(1, b)$. Отсюда: $bc + d = d + b$, $bc = b$, $c = 1$. Таким образом, при $b \neq 0$ $|C_G(1, b)| = p$, отсюда $K_p = X_p$, $|K_p| = p - 1$.

Обратимся теперь к $p - 1$. Если $p = 3$, то $|G| = 6$, $G \cong S_3$. Согласно 1.1 и 2.1 раздела 2 данной статьи для группы S_3 $|K_2| = 3$, $|K_3| = 2$.

Пусть число $p - 1$ не является простым и $p-1 = p_1 p_2 \cdots p_k q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_s^{\beta_s}$, где каждое $\beta_i > 1$. Согласно предложению 1, $K_{q_i} = \varnothing$ для каждого q_i.

Рассмотрим произвольный элемент $(a, 0) \in G$, где $a \neq 1$ и найдём множество $(a, 0)^G$ – всех элементов G, сопряжённых к $(a, 0)$:

$$\forall (x, y) \in G \ (x, y)^{-1}(a, 0)(x, y) = (x^{-1}, -yx^{-1})(ax, y) = (a, y(1 - a))$$

Таким образом, $(a, 0)^G = \{(a, b) \mid b \in \mathbf{Z}_p\}$. Следовательно, $|(a, 0)^G| = p$ для каждого $a \neq 1$. Отсюда $|C_G(a, b)| = p - 1$. Итак, если $p - 1 \neq 2$, то (так как $p_i < p - 1$) $K_{p_i} = \varnothing$.

Обратимся теперь к двум семействам неабелевых разрешимых групп, все силовские подгруппы которых являются циклическими.

I. Пусть G – неабелева группа, $|G| = pq$, где p, q – различные простые числа, $p < q$.

Согласно [5, с. 61, 167], $G = \langle a, b\rangle$, где $o(a) = p$, $o(b) = q$, коммутант $G' = \langle b\rangle$. Кроме того $q \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$ и существует $r \in \mathbf{N}$, такое что $r \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ q)$ и $r^p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ q)$.

Операция в G задаётся следующим образом:

$$a^{u_1} b^{v_1} a^{u_2} b^{v_2} = a^{u_1+u_2} b^{(v_1 r^{u_2} + v_2)}; \qquad (*)$$

$$(a^u b^v)^{-1} = a^{p-u} b^{-(r^{p-u} v)}.$$

В дальнейшем будем считать, что u, u_i, v,v_i принадлежат множествам $\overline{0, p-1}$, $\overline{0, q-1}$ соответственно.

Заметим, что согласно (*) если $o(a^u b^v) = q$, то $a^{uq} = e$, то есть $u = 0$. Следовательно, $X_q(G) = \langle b\rangle \backslash \{e\}$. Пусть $v \neq 0$ и

$$a^{u_1} b^{v_1} a^0 b^v = a^0 b^v a^{u_1} b^{v_1} .$$

Отсюда $b^{v_1+v} = b^{v r^{u_1} + v_1}$, то есть $v(r^{u_1} - 1) \vdots q$. Так как $r^p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ q)$, $r \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ q)$ и $u_1 < p$, то $u_1 = 0$. Следовательно, $|C_G(b^v)| = q$ для каждого $v \neq 0$, то есть $|K_q(G)| = q - 1$.

Покажем, что для каждого $s \in \overline{1, p-1}$ $a^s \in K_p(G)$.

Имеем

$$a^u b^v \cdot a^s b^0 = a^s b^0 \cdot a^u b^v \Leftrightarrow b^{v r^s} = b^v \Leftrightarrow v(r^s - 1) \vdots q \Leftrightarrow v = 0.$$

Следовательно, $|(a^s)^G| = q$.

Так как для каждого $g \in G$

$$a^u b^v\ (a^u b^v)^{-1}(a^s b^0)(a^u b^v) = a^s b^t,$$

то для каждого $s \in \overline{1, p-1}$

$$(a^s)^G = \{a^s b^0, a^s b, a^s b^2, \ldots, a^s b^{q-1}\}.$$

Согласно предложению 2, для каждого $s \in \overline{1, p-1}$ $\forall i \in \overline{0, q-1}$ $a^s b^i \in K_p(G)$. То есть $|K_p(G)| = q(p-1)$.

В частности, в группе $D_{2p} = D(C_p)$ при $p > 2$ $|K_2(D_{2p})| = p$, $|K_p(D_{2p})| = p - 1$.

II. Пусть $|G| = p_1p_2p_3$, где p_1, p_2, p_3 – различные простые числа, $p_1 < p_2 < p_3$, G – неабелева группа.

Согласно доказательству теоремы 9.4.3 [5, с. 167] и теоремы 9.4.1 [5, с. 165], имеем

1) G – разрешимая группа;

2) $G = \langle a, b\rangle$, $|G| = mn$, $G' = \langle a\rangle$, $G/G' = \langle bG'\rangle$, $o(a) = m$, $o(b) = n$, $(m, n) = 1$;

$$b^{-1}ab = a^r,\ \text{где}\ (r-1, m) = 1,\ r^n \equiv 1(\mathrm{mod}\ m),$$

$$b^j a^i \cdot b^k a^t = b^{j+k} a^{ir^k + t}; \qquad (**)$$

3) Холловы подгруппы $H_{p_2p_3}$, H_{p_3} являются нормальными делителями G ($|H_{p_2p_3}| = p_2p_3$, $|H_{p_3}| = p_3$).

Задача: исследовать K_{p_i} в группе G.

Так как $|G/H_{p_2p_3}| = p_1$, то $G' \subset H_{p_2p_3}$. Возможны три случая: $G' = H_{p_2p_3}$, $G' = H_{p_2}$, $G' = H_{p_3}$. Рассмотрим каждый из них.

• $G' = H_{p_2p_3} = \langle a\rangle$, $o(a) = p_2p_3$, $o(b) = p_1$.

Пусть $b^j a^i \in C_G(b)$, то есть $b \cdot b^j a^i = b^j a^i \cdot b$, $i < p_2p_3$. Согласно (**), $a^{i(r-1)} = e$. Так как $(r-1, p_2p_3) = 1$, то $i = 0$.

Следовательно, $|C(b)| = p_1$, то есть $\langle b\rangle \setminus \{e\} \subset K_{p_1}$, $b^G \subset K_{p_1}$, таким образом $K_{p_1} \neq \varnothing$.

Пусть $o(g) \in \{p_2, p_3\}$. Тогда $\langle g\rangle \subset H_{p_2p_3}$; следовательно $K_{p_2} = K_{p_3} = \varnothing$.

• Пусть $G' = H_{p_2}$. Так как $H_{p_3} \lhd G$ и $H_{p_3} \cap H_{p_2} = \{e\}$, то $H_{p_3} \subset Z(G)$. Поэтому $K_{p_1} = K_{p_2} = K_{p_3} = \varnothing$.

• $G' = H_{p_3}$. Согласно условию, $p_1 < p_2 < p_3$. Заметим, что $|G : H_{p_2}| = p_1p_3$, $p_1 \not\equiv 1(\mathrm{mod}\ p_2)$. Группа H_{p_2} не является максимальной подгруппой в G. Тогда, если $p_3 \not\equiv 1(\mathrm{mod}\ p_2)$, то, воспользовавшись [8, с. 60, 5.52], получаем $H_{p_2} \lhd G$. Так как $H_{p_2} \cap G' = \{e\}$, то $H_{p_2} \subset Z(G)$ и $K_{p_1} = K_{p_2} = K_{p_3} = \varnothing$.

При $p_3 \equiv 1(\mathrm{mod}\ p_2)$ ответ не получен.

4. О конечных простых группах с непустым множеством $K_3(G)$

В заключение обратимся к конечным простым группам и приведём ещё одно доказательство [2] следующего утверждения.

Теорема. Если в конечной простой группе G множество $K_3(G) \neq \varnothing$, то все её инволюции образуют один класс сопряжённых элементов.

Количество классов сопряжённых инволюций является одной из важных характеристик конечных простых групп [6, с. 96, 97, 100–103].

Эта задача сформулирована в [7, с. 81]. Доказательство использует указанные ниже теорему Бернсайда [5], лемму 33, следствия [7, с. 79, 80] и предложение, непосредственно следующее из леммы.

Теорема Бернсайда [5, с. 227]. Если силовская подгруппа P конечной группы G содержится в центре своего нормализатора, то G обладает таким нормальным делителем H, что в качестве представителей смежных классов по H можно выбрать элементы P.

Предложение. Пусть G – конечная простая группа, D – её исключительное подмножество, $H = N_G(D)$, φ_1 – главный характер H. Если существуют два неглавных неприводимых характера φ_i и φ_j группы H, такие, что функция $\theta = \varphi_1 + \varphi_i - \varphi_j$ исчезает на $H \setminus D$, то каждая инволюция группы G сопряжена с некоторой инволюцией из H.

Итак, пусть G – конечная простая группа, $k \in K_3(G)$. Тогда:

I. $D = \{k, k^2\}$ – исключительное множество группы G [7, с. 78], то есть удовлетворяет следующим двум условиям:

1) для любых $i_1, i_2 \in G$ $o(i_1) = o(i_2) = 2$ и если $i_1 i_2 \in D$, то $i_2 i_1 \in D$.

Действительно, если $i_1 i_2 = k$, то $i_2 i_1 = k^2$; если $i_1 i_2 = k^2$, то $i_2 i_1 = k$.

2) для каждого $g \in G \setminus N_G(D)$ $(D \cap D^g = \varnothing)$.

Пусть $k \in D^g$, то есть $k^g = k$ или $(k^2)^g = k$. Очевидно, что $g \in N_G(D)$. Аналогично для $k^2 \in D^g$.

II. Рассмотрим $H = N_G(D)$. Имеем: $H = \langle k \rangle \cup \{t \in G \mid k^t = k^{-1}\}$.

Обозначим $T = \{t \in G \mid k^t = k^{-1}\}$. Согласно теореме Бернсайда, $T \neq \varnothing$.

Покажем, что множество T состоит из инволюций G. Из [2] следует, что порядок любого элемента $t \in T$ – число чётное и очевидно, что $(k^2)^t = (k^2)^{-1}$. Заметим, что для каждого $t \in T$

$$k^{t^2} = (k^2)^t = k, \text{ то есть } t^2 \in C_G(k).$$

Таким образом, $t^2 \in \{e, k, k^2\}$ для каждого $t \in T$. Если $t^2 \in D$, то $k \notin K_3(G)$. Следовательно, $t^2 = e$, то есть t – инволюция группы G.

Покажем, что $|T| = 3$. Действительно, пусть $i^* \in T$. Тогда $\{i^*, i^*k, i^*k^2\} \subset T$. Пусть $i \in T$. Так как $iki = i^*ki^*$, то $(i^*i)k = k(i^*i)$, то есть $i^*i \in \{e, k, k^2\}$. Следовательно, $i \in \{i^*, i^*k, i^*k^2\}$. Таким образом, $|H| = 6$ и, следовательно, $H \simeq S_3$.

III. Воспользуемся таблицей неприводимых характеров группы S_3 [8, с. 104].

S_3	(12)	(123)	e
φ_1	1	1	1
φ_2	–1	1	1
φ_3	0	–1	2

Имеем: $k = (123)$, $H \setminus D = \{e, i_1, i_2, i_3\}$, $o(i_1) = o(i_2) = o(i_3) = 2$.

$$(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3)(e) = 1 + 1 - 2 = 0.$$

Для каждой инволюции $i \in H \setminus D$ $(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3)(i) = 1 - 1 - 0 = 0$.

Следовательно, функция $\theta = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3$ исчезает на $H \setminus D$. Итак, каждая инволюция из G сопряжена с некоторой инволюцией из H. Осталось заметить, что все инволюции в S_3 попарно сопряжены. Таким образом, каждые две инволюции группы G попарно сопряжены.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Забарина А. И.*, *Гусельникова У.А.*, *Фомина Е.А.* О коммутирующих элементах группы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 6(38). С. 27–32. DOI: 10.17223/19988621/38/3.
2. *Забарина А.И.*, *Фомина Е.А.* О множестве $K_3(G)$ элементов конечных групп, коммутирующих ровно с тремя элементами группы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 55. С. 5–11. DOI: 10.17223/19988621/55/1.
3. *Каргаполов М.И.*, *Мерзляков Ю.И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1982. 288 с.
4. *Шнеперман Л.Б.* Курс алгебры и теории чисел в задачах и упражнениях: в 2 ч. Ч. 2. Минск: Вышэйшая школа, 1987. 256 с.
5. *Холл М.* Теория групп. М.: ИЛ, 1962. 468 с.
6. *Горенстейн Д.* Конечные простые группы: введение в их классификацию. М.: Мир, 1985. 352 с.
7. *Белоногов В.А.*, *Фомин А.Н.* Матричные представления в теории конечных групп. М.: Наука, 1976. 126 с.
8. *Чехлов А.Р.* Упражнения по основам теории групп. Томск: Том. гос. ун-т, 2004. 275 с.

Статья поступила 14.04.2020

Zabarina A.I., Fomina E.A. (2020) ON THE SET K_p IN FINITE GROUPS *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 68. pp. 33–40

DOI 10.17223/19988621/68/3

Keywords: group, centralizer of an element, involution, Sylow and Hall subgroups.

Let G be an arbitrary finite multiplicative group, $|G| = n$. We define the sets $X_p(G)$ and $K_p(G)$ as follows:

$$X_p(G) = \{g \in G \mid o(g) = p\},$$
$$K_p(G) = \{g \in G \mid g \neq e \wedge |C(g)| = p\}.$$

In the case when it is clear which group G is in question, instead of $X_p(G)$, $K_p(G)$ we write: X_p, K_p, respectively.

It follows from this definition K_p that if $x \in K_p$, then $\{x, x^2, \ldots, x^{p-1}\} \subset X_p$ and $\{x, x^2, \ldots, x^{p-1}\} \subset K_p$.

The following properties of the set K_p have been proved.

Proposition 1. If $K_p(G) \neq \varnothing$, then $|G| \vdots p$ and $|G| \not\vdots\, p^2$.

Proposition 2. If $x \in K_p(G)$, then $x^g \in K_p(G)$ for each $g \in G$.

Proposition 3. Let $|G| = n$. Then $\left|K_p\right| \in \left\{0, \frac{n}{p}, \frac{2n}{p}, \ldots, \frac{(p-1)n}{p}\right\}$.

We consider the sets K_p in the non-abelian groups S_n and A_n.

1) Let $p = 2$.

1.1. If $n > 3$, then $K_2(S_n) = \varnothing$. If $n = 3$, then $|K_2(S_3)| = \frac{|S_3|}{2}$.

1.2. $\forall n \in \mathbf{N}$ $(n \geq 4 \Rightarrow |A_n| \vdots 4) \Rightarrow K_2(A_n) = \varnothing$.

2) Let $p \geq 3$. First, we consider the sets K_p in the groups S_n.

2.1. If $0 \leq n - p \leq 1$, then $|K_p(S_n)| = \frac{|S_n|}{p}$.

2.2. If $n - p > 1$, then $K_p(S_n) = \varnothing$.

3) Let $p \geq 3$. Now, we consider the sets K_p in the groups A_n.

3.1. If $0 \leq n - p \leq 1$, then $|K_p(A_n)| = \frac{2|A_n|}{p}$.

3.2. If $2 < n - p < p$, then $K_p(A_n) = \varnothing$.

3.3. If $n - p = 2$, then $|K_p(A_n)| = \frac{n!}{2p} = \frac{|A_n|}{p}$.

Also, the sets K_p are considered in some solvable groups. One more proof is given for the fact that all involutions of a finite simple non-Abelian group G with a nonempty set K_3 form one class of conjugate elements.

AMS 2020 Mathematical Subject Classification: 20D99

Anna I. ZABARINA (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State Pedagogical University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: aizabarina@gmail.com

Elena A. FOMINA (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State Pedagogical University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ef254@mail.ru

REFERENCES

1. Zabarina A.I., Guselnikova U.A., Fomina E.A. (2015) O kommutiruyushchikh elementakh gruppy [On commuting elements of a group]. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. 38(6). pp. 27–32. DOI: 10.17223/19988621/38/3.
2. Zabarina A.I., Fomina E.A. (2018) O mnozhestve $K_3(G)$ elementov konechnyh grupp, kommutiruyushchih rovno s tremya elementami gruppy [On the set $K_3(G)$ of finite groups' elements commuting exactly with three elements]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 55(3). pp. 5–11. DOI: 10.17223/19988621/55/1.
3. Kargapolov M.I., Merzlyakov Y.I. (1982) *Osnovy teorii grupp* [Foundations of the group theory]. Moscow: Nauka.
4. Shneperman L.B. (1987) *Kurs algebry i teorii chisel v zadachakh i uprazhneniyakh* [A course of algebra and number theory in problems and exercises]. Minsk: Vysheyshaya shkola.
5. Hall M. (1959) *The Theory of Groups*. New York: The Macmillan Company.
6. Gorenstein D. (1982) *Finite Simple Groups: An Introduction to Their Classification*. New York: Springer Science & Business Media.
7. Belonogov V.A., Fomin A.N. (1976) *Matrichnye predstavleniya v teorii konechnykh grupp* [Matrix representations in the theory of finite groups]. Moscow: Nauka. 126 p.
8. Chekhlov A.R. (2004) *Uprazhneniya po osnovam teorii grupp* [Exercises on foundations of the group theory]. Tomsk: TGU.

Received: April 26, 2020