ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2020 Управление, вычислительная техника и информатика № 53

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 519.67
DOI: 10.17223/19988605/53/1

В.А. Коднянко

РАЦИОНАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Излагается метод рациональной интерполяции передаточной функции линейных динамических систем с распределенными параметрами, значения которой могут быть найдены численными методами либо расчетом трансцендентных функций переменной интегрального преобразования Лапласа. Метод позволяет определить в явном виде передаточную функцию и, в частности, характеристическое уравнение такой степени, которая достаточна для удовлетворения требований точности при расчете корневых критериев качества динамики систем автоматического управления. Согласно предложенному методу рациональная интерполяция сводится к решению системы линейных уравнений, порядок которой значительно ниже (более чем вдвое) порядка аналогичных систем, применяемых для рациональной интерполяции функций известными методами. Свойства данной системы таковы, что ее решение может быть получено специальными быстрыми методами квадратичного порядка сложности. Рассмотрен пример практического использования итерационного алгоритма рациональной интерполяции и вычисления с заданной точностью корневых критериев качества динамики опоры с газовой смазкой.

Ключевые слова: рациональная интерполяция; линейная динамическая система; передаточная функция; система с распределенными параметрами; дискретное преобразование Фурье.

При проектировании систем автоматического управления и регулирования находят применение методы исследования качества динамики, основанные на определении ее запаса устойчивости и быстродействия по корням характеристического уравнения [1, 2]. Последнее определяется полиномом знаменателя передаточной функции (ПФ)

$$\Phi(s)=\frac{\overline{\Delta Y_o}}{\overline{\Delta Y_i}}=\frac{b_0+b_1s+b_2s^2+...+b_ms^m}{1+a_1s+a_2s^2+...++a_ns^n}, \tag{1}$$

где $\overline{\Delta Y_i}$, $\overline{\Delta Y_o}$ – лапласовы трансформанты отклонения динамических функций входного воздействия и целевой выходной функции от стационарного равновесного положения систем, $n > 0$, $m > 0$, $n > m$, s – переменная преобразования Лапласа [2, 3].

Определение коэффициентов (1) для систем с сосредоточенными параметрами обычно не вызывает затруднений. Однако существуют устройства, динамика которых описывается системами с распределенными параметрами. Примерами данных систем являются разнообразные радиоэлектронные устройства, трубчатые теплообменники, газостатические и газодинамические опоры скольжения и ряд других [4–7].

Для таких систем ПФ формулируются на основе использования одной или нескольких краевых задач для дифференциальных уравнений, аналитическое решение которых дается трансцендентными функциями, либо таковые могут быть получены лишь численными методами [8]. Для получения ПФ данных систем необходимо применение методов, которые бы обеспечивали их представление в форме (1) на основе расчета критериев запаса устойчивости и быстродействия устройств с наперед заданной точностью.

Представление ПФ в форме (1) подпадает под классическую задачу рациональной интерполяции [9], решение которой, однако, не дает исчерпывающего ответа на вопрос о точности критериев устойчивости системы, полученных корневыми методами с использованием характеристического уравнения, ибо значение степени n характеристического полинома (ХП) наперед неизвестно. Следовательно, рациональная интерполяция ПФ является лишь локальной процедурой в общем алгоритме определения критериев качества динамики систем.

Нередко при расчете упомянутых критериев требуется определить лишь вектор a коэффициентов ХП и его длину n с тем, чтобы иметь возможность определить корневые критерии с требуемой точностью. В этом случае задача несколько упрощается, поскольку необходимо найти лишь полином знаменателя (1), т.е. ХП.

Основной задачей при расчете критериев качества динамики систем с распределенными параметрами при фиксированных значениях n и m является рациональная интерполяция. Существующие методы опираются на решение линейной системы уравнений относительно коэффициентов (1), которая содержит $n + m$ уравнений [5]. Такие системы могут быть решены общими методами, например методом Гаусса–Жордана, который имеет кубический порядок сложности $(n + m)^3$ (здесь и далее под порядком сложности вычислительного метода подразумевается временная сложность реализующего его алгоритма [1, 7]). При больших n и m это может повлечь значительные затраты машинного времени в процессе многопараметрической оптимизации динамических систем.

В настоящей статье предложен быстрый метод нахождения коэффициентов (1). Он основан на решении систем линейных уравнений специального вида существенно меньшего порядка, что позволяет найти их решение быстрыми методами с квадратичным порядком сложности $m(n + m)$; это способствует существенному ускорению процедуры оптимизации динамических систем. Если требуется найти лишь коэффициенты ХП, то порядок сложности метода равен n^2.

1. Определение разности $n – m$ степеней полиномов передаточной функции

При проведении рациональной интерполяции методом, который изложен ниже, степени n и m полиномов (1) должны быть известны. Однако приемлемые их значения могут быть получены лишь на основе удовлетворительной точности определения критериев качества динамики системы.

Если определить значения этих параметров без расчета упомянутых критериев нельзя, то нахождение их разности не представляет затруднений.

Действительно, если $a_n \neq 0$ и $b_m \neq 0$, то бесконечный предел

$$s^p \Phi(s) \to \frac{b_m}{a_n} \neq 0, \tag{2}$$

где $p = n – m$.

Обычно разность p исчисляется несколькими единицами, чаще она равна одному или двум, поэтому найти данный предел и p можно довольно быстро.

2. Методика рациональной интерполяции

Зададим значение m, определим $n = m + p$ и найдем коэффициент

$$b_0 = \Phi(0).$$

Перепишем (1) в форме

$$a_1 + a_2 s + ... + a_n s^{n-1} + \Gamma(s)\left(b_1 + b_2 s + ... + b_m s^{m-1}\right) = \frac{\Lambda(s)}{s}, \tag{3}$$

где $\Gamma(s) = -\Phi^{-1}(s), \quad \Lambda(s) = -b_0 - \Gamma(s).$

Уравнение (3) содержит $k = n + m$ неизвестных коэффициентов.

Вычислим $e = \exp\left(-\frac{2\pi i}{k}\right)$, где i – мнимая единица.

Положим $s_1 = 1$, найдем $s_j = e s_{j-1}$, $j = 2,3,...,k$, $\Psi_j = \Phi\left(s_j\right)$, $\Gamma_j = \Gamma\left(s_j\right)$, $\Lambda_j = \Lambda\left(s_j\right)$, $j = 1,2,...,k$.

Обратим внимание, что $s_j = s^*_{k+1-j}$, $j = 1,2,...,k,$ следовательно, $\Phi\left(s_{k-j+1}\right) = \Phi^*\left(s_j\right)$, что позволяет сократить вычисления и найти Γ_j, Λ_j за $[(k + 1)/2]$ обращение к ПФ.

Последовательно подставив $s = s_j$, ($j = 1, 2, \ldots, k$) в (3), получим систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов (1)

$$Mx = y, \tag{4}$$

где

$$M = \begin{bmatrix} s_1 & s_1 & s_1 & \ldots & \Gamma_1 s_1 & \ldots \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & \Gamma_2 s_1 & \ldots \\ s_1 & s_3 & s_5 & \ldots & \Gamma_3 s_1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_1 & s_k & s_1 & \ldots & \Gamma_k s_1 & \ldots \end{bmatrix}, \; x = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ b_{m-1} \\ b_m \end{bmatrix}, \; y = \begin{bmatrix} \Lambda_1 / s_1 \\ \Lambda_2 / s_2 \\ \ldots \\ \Lambda_{k-1} / s_{k-1} \\ \Lambda_k / s_k \end{bmatrix}.$$

Представим матрицу системы (4) в виде

$$M = FK, \tag{5}$$

где K – матрица, F – матрица дискретного преобразования Фурье [10, 11]

$$F_{i,j} = S(i, j),$$

$$S(i, j) = s_{1+q((i-1)(j-1))}, \; i = 1,2,...,k-1; \; j = 1,2,...,k-1, \; q(x) = x \bmod k.$$

Ее обратная матрица определяется формулой

$$F^{-1}_{i,j} = \frac{1}{k}\bar{S}(i, j).$$

Умножив F^{-1} на (4), приведем систему к виду

$$Kx = z, \tag{6}$$

где $K = F^{-1}M$, $z = F^{-1}y$.

При $m > 0$ матрица K имеет клеточную структуру вида

$$K = \begin{bmatrix} E & C \\ 0 & D \end{bmatrix}.$$

где E и 0 – единичная и нулевая матрицы размера $n \times n$ и $m \times n$, C и D – тёплицевы матрицы размера $n \times m$ и $m \times m$ соответственно.

Действительно, блоки матриц F^{-1} и M клеток $1 \times 1 \ldots n \times n$ являются взаимно обратными матрицами дискретного преобразования Фурье, следовательно, их произведение даст единичную матрицу E. Элементы блока клеток $m + 1$, $k \ldots 1 \times n$ получены перемножением строк матрицы F^{-1} и столбцов матрицы M, которые также являются элементами прямой и обратной матриц преобразования Фурье. Суммы их произведений, дающие недиагональные элементы единичной матрицы, будут нулями по аналогии с тем, как это имеет место для нулевых элементов расположенного над ними блока E.

Характер матриц C и D объясняется тем, что элементы столбцов матрицы M для $j > n$ образованы суммами произведений смещенных элементов матриц F и элементов вектора Γ, которые отличны от единицы. В таких случаях их скалярные произведения дают тёплицевы матрицы [12].

Аналогично можно показать, что матрица

$$L = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}_{n\times m} \tag{7}$$

является прямоугольным циркулянтом вида

$$L = \begin{bmatrix} l_1 & l_k & \dots & l_{n+3} & l_{n+2} \\ l_2 & l_1 & \dots & l_{n+4} & l_{n+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{k-1} & l_{k-2} & \dots & l_{n+1} & l_n \\ l_k & l_{k-1} & \dots & l_{n+2} & l_{n+1} \end{bmatrix}, \tag{8}$$

а C и D персимметричными тёплицевыми матрицами

$$C_{n\times m} = \begin{bmatrix} l_1 & l_k & \dots & l_{n+3} & l_{n+2} \\ l_2 & l_1 & \dots & l_{n+4} & l_{n+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n-1} & l_{n-2} & \dots & l_2 & l_1 \\ l_n & l_{n-1} & \dots & l_3 & l_2 \end{bmatrix}, \quad D_{m\times m} = \begin{bmatrix} l_{n+1} & l_n & \dots & l_{m+1} & l_m \\ l_{n+2} & l_{n+1} & \dots & l_{m+2} & l_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{k-2} & l_{k-3} & \dots & l_{n+1} & l_n \\ l_{k-1} & l_{k-2} & \dots & l_{n+2} & l_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Вектор l совпадает с $(n + 1)$-м столбцом матрицы K:

$$l_i = \sum_{j=1}^{k} F_{i,j}^{-1} M_{j,n+1} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \Gamma_j \overline{S}(i, j), \; i = 1, 2, ..., k.$$

Аналогично можно показать, что первые $k - 1$ элементов вектора z

$$z_j = -b_0 l_{j+1}, \; j = 1, 2, ..., k-1,$$

а последний элемент

$$z_k = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \Gamma_j. \tag{9}$$

Таким образом, векторы l и z, матрицы C и D можно получить с помощью векторов s и Ψ без использования матриц K, F^{-1} и M.

В случае $m = 0$, система (4) принимает вид:

$$Fa = y,$$

следовательно, $a = z$ и задача рациональной интерполяции ПФ решена.

Из (5)–(8) следует, что при $m > 0$ вектор b коэффициентов ПФ (1) удовлетворяет системе уравнений

$$Db = d, \tag{10}$$

где d – вектор, составленный из последних m элементов вектора z:

$$d_i = z_{n+i}, \quad i = 1, 2, ..., m.$$

В сравнении с исходным уравнением (3), имеющим порядок $k = n + m$, уравнение (10) имеет существенно меньший порядок: $m < k/2$. Следовательно, его решение может быть получено значительно быстрее.

Уравнение (10) является стандартной задачей с несимметричной тёплицевой матрицей специального вида [13–15], и оно может быть решено как общими методами, сложность которых пропорциональна m^3, например методом Гаусса–Жордана [16], так и специальными быстрыми методами, учитывающими особенности уравнения (10) и имеющими сложность, пропорциональную m^2. К числу последних относятся методы Тренча, Берлекэмпа–Месси, Евклида [11, 13–18].

Элементы матрицы C могут быть выражены через вектор l:

$$C_{i,j} = l_{q(k+i-j)}, \quad i = 1, 2, ..., n; \quad j = 1, 2, ..., m.$$

С учетом этого можно обойтись без матрицы C и, используя решение системы (10), быстро найти коэффициенты ХП по формуле сложности nm:

$$a_i = l_i - \sum_{j=1}^{m} l_{q(k+i-j)} b_j, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{11}$$

С учетом этого суммарный порядок сложности данного метода нахождения коэффициентов (1) составляет $m(n + m)$.

В тех случаях, когда $s = s_j$ является нулем ПФ или необходимо найти лишь коэффициенты ХП, можно применить другой подход.

Перепишем уравнение (3) форме

$$b_1 + b_2 s + ... + b_m s^{m-1} - \Phi(s)\left(a_1 + a_2 s + ... + a_n s^{n-1}\right) = \frac{\Phi(s) - b_0}{s}.$$

Следуя изложенному методу, процедуру нахождения коэффициентов ХП можно свести к решению системы уравнений более низкого порядка $n < k$

$$Da = d, \tag{12}$$

где

$$D_{n\times n} = -\begin{bmatrix} l_{m-1} & l_{m-2} & ... & l_{2m+1} & l_{2m} \\ l_m & l_{m-1} & ... & l_{2m+2} & l_{2m+1} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ l_{k-3} & l_{k-4} & ... & l_{m-1} & l_{m-2} \\ l_{k-2} & l_{k-3} & ... & l_m & l_{m-1} \end{bmatrix}, \quad l_{i-1} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \Phi\left(s_j\right) S(i, j), \quad i = 1, 2, ..., k,$$

$$l_k = l_{k-1} - b_0,\ d_i = l_{m+i-1}, \quad i = 1, 2, ..., n-1,\ d_n = l_k.$$

В сравнении с (10) система (12), как правило, имеет несколько больший порядок $n > m$, однако ее решение позволяет сразу найти коэффициенты ХП, минуя процедуру нахождения полинома числителя ПФ. Система (12) также может быть решена упомянутыми быстрыми методами с порядком сложности n^2.

3. Методика расчета корневых критериев качества динамической системы с распределенными параметрами

Для оценки качества динамики линейных систем автоматического управления часто используются корневые критерии [2, 19]:

– степень устойчивости η = Max Re$\{s_i\}$, где s_i – нули характеристического полинома динамической системы, которым является полином – знаменатель ПФ (1);

– затухание колебаний за период $\xi = 100[1 - Exp(-|2\pi\beta/\eta|]\%$, где β – мнимая часть корня характеристического уравнения с наибольшей действительной частью.

Степень устойчивости η характеризует быстродействие системы, т.е. быстроту затухания ее свободных колебаний.

Критерий ξ затухания колебаний за период может быть применен к оценке запаса устойчивости системы. Чем меньше ξ, тем бóльшую колебательность будет иметь переходная характеристика, а система – меньший запас устойчивости. Считается, что динамическая система хорошо демпфирована, если $\xi \geq 90\%$ [2].

Вначале, используя алгоритмом расчета значений передаточной функции, необходимо определить разность степеней полиномом ПФ $p = n - m$ на основании (2).

Дальнейшие вычисления ведутся при помощи следующего итерационного процесса.

Шаг 1. Положить $i = 1$ и $m = 1$, $\eta_0 = inf$, $\xi_0 = inf$, где inf – большое число (например, $inf = 10^{10}$), задать точность определения степени устойчивости ε_η и затухания колебаний за период ε_ξ.

Шаг 2. Вычислить $n = p + m$ и, выполнив рациональную интерполяцию по формуле (11), найти вектор a коэффициентов ХП.

Шаг 3. Определить корни характеристического уравнения, найти среди них корень с наибольшей действительной частью и вычислить критерии η_i и ξ_i.

Шаг 4. Проверить выполнение условий сходимости итерационного процесса к решению

$$\left|\eta_i - \eta_{i-1}\right| < \varepsilon_\eta,\ \left|\xi_i - \xi_{i-1}\right| < \varepsilon_\xi. \tag{12}$$

Шаг 5. Если условия (12) выполнены, то критерии качества динамки системы определены с требуемой точностью, иначе процесс следует продолжить. Для этого необходимо увеличить значения счетчика итераций i и степени m на единицу и перейти к шагу 2.

4. Пример расчета корневых критериев качества динамической системы с распределенными параметрами

В качестве тестовой задачи для определения критериев качества динамики системы с распределенными параметрами была рассмотрена модель нестационарного движения осевой опоры с газовой смазкой [20].

После линеаризации и применения к линейной модели интегрального преобразования Лапласа получена необходимая для расчетов передаточная функция, вычисление значения которой включает численное решение нескольких краевых задач для дифференциального уравнения Рейнольдса [21] вида

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dR}\left[R\dfrac{d\left(Pu\right)}{dR}\right]=\dfrac{\sigma s}{H^3}R\left(Hu+\alpha P\right), \\ u(r_b,s)=u_b, \quad u(r_e,s)=u_e, \end{cases} \tag{13}$$

где $u(R,\ s)$ – искомая функция, $P(R)=\sqrt{\left(P_e^2-P_b^2\right)\dfrac{ln\left(R/R_b\right)}{ln\left(R_e/R_b\right)}+P_b^2}$ – функция статического давления газа в смазочном слое, α, H, r_b, r_e, P_b, P_e – постоянные величины, s – переменная преобразования Лапласа.

Задача (13) не имеет точного аналитического решения, поэтому к ней применялся численный конечно-разностный метод прогонки, где переменная s выступала в роли комплексного параметра [22].

Численное решение задач (13) дает результат высокой точности, однако данный подход не позволяет в явном виде получить передаточную функцию, и в частности ХП.

Выход найден в последовательной итерационной рациональной интерполяции, по результатам которой производился расчет критериев качества динамики опоры с заданной точностью.

Алгоритм расчетов таков. Для принятого варианта сочетания значений входных параметров сначала вычисляли $b_0=\Phi(0)=0{,}15934$, затем определяли разность степеней полиномов ПФ p = n – m. Результат представлен в таблице, из которой следует, что наименьшее $p > 0$, при котором $s^p\Phi(s)$ сходится к отличному от нуля пределу, $p = 2$.

Определение разности $p = n - m$

N	s	$s\Phi(s)$	$s^2\Phi(s)$
1	1	0,15934	0,15904
2	10	0,09345	0,93415
3	100	0,00996	0,99926
4	1 000	0,00099	0,99999

Приняв $\varepsilon_\eta=10^{-3}, \varepsilon_\xi=0{,}1$ и порядок полинома числителя ПФ $m = 0$, нашли начальный порядок характеристического полинома $n = p + m = 2$.

Далее выполняли итерационный процесс, на каждом шаге которого увеличивали m на единицу, находили $n = p + m$, решали задачу рациональной интерполяции ПФ и вычисляли критерии качества динамики системы.

Условия (12) сходимости итерационного процесса выполнилось на четвертой итерации. При этом система (10) приняла вид:

$$\begin{pmatrix} -0{,}026 & 0{,}057 & -0{,}161 \\ 0{,}056 & -0{,}026 & 0{,}057 \\ -0{,}405 & 0{,}056 & -0{,}026 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -0{,}008 \\ 0{,}056 \\ -0{,}457 \end{pmatrix}.$$

Ее решение

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}202 \\ 0{,}560 \\ 0{,}055 \end{pmatrix}. \qquad (14)$$

При рациональной интерполяции ПФ самая трудоёмкая часть процедуры поиска восьми неизвестных коэффициентов a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3 ПФ свелась к решению системы (14) третьего порядка.

Таким образом, с помощью рациональной интерполяции рассмотренная передаточная функция может быть представлена с достаточной для практики точностью в виде

$$\Phi(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + b_4 s^4 + b_5 s^5}.$$

Критерий быстродействия системы $\eta = 0{,}233 > 0$, критерий затухания колебаний за период $\xi = 100\%$. Это значит, что система устойчива и характеризуется отсутствием колебательности, что свидетельствует о высоком качестве ее динамики.

Заключение

В работе предложен метод рациональной интерполяции передаточной функции линейных систем с распределенными параметрами, значения которой могут быть найдены численными методами либо иным образом, например расчетом трансцендентных функций переменной интегрального преобразования Лапласа. Метод позволяет определить в явном виде характеристическое уравнение такой степени, которая достаточна для удовлетворения требований точности при расчете корневых критериев качества динамики систем автоматического управления.

Согласно предложенному методу рациональная интерполяция сводится к решению системы линейных уравнений, порядок которой значительно ниже (более чем вдвое) порядка аналогичных систем, применяемых для рациональной интерполяции функций известными методами. Свойства данной системы таковы, что при необходимости ее решение может быть получено специальными быстрыми методами квадратичного порядка сложности.

Рассмотрен демонстрационный алгоритм вычисления корневых критериев качества системы автоматического управления на примере оценки качества динамики опоры с газовой смазкой. Алгоритм позволил вычислить критерии качества с требуемой точностью за четыре итерации, на каждой из которых последовательно выполнялась рациональная интерполяция передаточной функции, полученной решением нескольких задач для дифференциальных уравнений конечно-разностным методом прогонки высокой точности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fraleigh J.B., Beauregard R.A. Linear Algebra. Reading, MA : Addison-Wesley. 1995. 608 p.
2. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. Спб. : Профессия, 2003. 752 с.
3. Riley K.F., Hobson M.P., Bence S.J. Mathematical methods for physics and engineering. Cambridge University Press, 2010. 455 p.
4. Middlebrook R.D. Input filter considerations in design and application of switching regulators // IEEE Industry Applications Society Annual Meeting. 1976. P. 366–382.
5. Carrol J. An input impedance stability criterion allowing moreflexibility for multiple loads which are independently designed // Naval Air Warfare Center, Aircraft Division, Indianapolis. B/812. 1992. Jan. 22.
6. Wildrick C.M., Lee F.C., Cho B.H., Choi B. A method of defining the load impedance specificationfor a stable distributed power system // IEEE Transactions on Power Electronics. 1995. P. 280–285.
7. Коднянко В.А. Устойчивость энергосберегающей адаптивной радиальной гидростатической опоры с ограничением выходного потока смазки // Журнал Сибирского федерального университета. Техника и технологии. 2011. Т. 6, № 4. С. 907–914.
8. Bradie B.A. Friendly Introduction to Numerical Analysis. Upper Saddle River, NJ : Pearson Prentice Hall, 2006. 933 p.
9. Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. Numerical Recipes in C : the Art of Scientific Computing. Cambridge : Cambridge University Press, 2002. 1262 p.

10. Golub G.H., Van Loan C.F. Matrix computations. Baltimore, MD : Johns Hopkins University Press, 1996. 694 p. (John Hopkins Studies in the Mathematical Sciences).
11. Heinig G., Rost K. Efficient inversion formulas for Toeplitz-plus-Hankelmatrices using trigonometric transformations // Structured Matrices in Mathematics, Computer Science, and Engineering / V. Olshevsky (ed.). Providence, RI, 2001. P. 247–264. (AMS-Series Contemporary Mathematics; vol. 281)
12. Smith S.W. The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing. San Diego, CA : California Technical Publishing, 1999. 630 p.
13. Trench W.F. An algorithm for the inversion of finite Hankel matrices // SIAMJ. Appl. Math. 1965. V. 13. P. 1102–1107.
14. Zohar S. Toeplitz matrix inversion: The algorithm of W.F. Trench // J. Assoc.Comput. Mach. 1967. V. 16. P. 592–601.
15. Blahut R.E. Fast algorithms for signal processing. Cambridge University Press. 2010. 469 p. DOI: 10.1017/CBO9780511760921
16. Beale E.M.L. Cycling in the dual simplex algorithm // Naval Research LogisticsQuarterly. 1955. V. 2 (4). P. 269–276. DOI: 10.1002/nav.3800020406
17. Voevodin V.V., Tyrtyshnikov E.E. Toeplitz matrices and their applications // Computing Methods in Applied Sciences and Engineering. Amsterdam : North-Holland, 1984. P. 75–85.
18. Петров О.А. Быстрый алгоритм решения систем уравнения с теплицевой матрицей // Инфокоммуникационные технологии. 2006. Т. 4, №1. С. 57–59.
19. Rahman Q.I., Schmeisser G. Analytic theory of polynomials. Oxford: Oxford University Press, 2002. XIV, 742 p. (London Mathematical Society Monographs. New Series; 26).
20. Коднянко В.А. Численный расчет статических характеристик однорядного щелевого газостатического подвеса // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2002. № 2. С. 17–19.
21. Constantinescu V.N. Gas Lubrication. New York : American Society of Mechanical Engineers, 1969. 621 с.
22. Muir T. A treatise on the theory of determinants. New York : Dover Publications, 1960. 766 p.

Поступила в редакцию 31 января 2020 г.

Kodnyanko V.A. (2020) RATIONAL INTERPOLATION OF TRANSFER FUNCTIONS OF LINEAR DYNAMIC SYSTEMS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitelnaja tehnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science]. 53. pp. 4–12

DOI: 10.17223/19988605/53/1

The paper proposes a method of rational interpolation of the transfer function of linear dynamic systems with distributed parameters, the values of which can be found by numerical methods or by calculating the transcendental functions of the Laplace integral transform variable. The method allows you to determine the transfer function in explicit form

$$\Phi(s) = \frac{\overline{\Delta Y_o}}{\overline{\Delta Y_i}} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + ... + b_m s^m}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + ... + + a_n s^n},$$

where $\overline{\Delta Y_i}, \overline{\Delta Y_o}$ are the Laplace transformants of dynamic functions deviations of the input action and the target output function from the stationary equilibrium position of the system, $n > 0$, $m > 0$, $n > m$, s is the Laplace transform variable.

Application of the discrete Fourier transform to the function $\Phi(s)$ made it possible to reduce the problem of finding the unknown coefficients of the function to a system of linear equations $Db = d$ for an asymmetric Toeplitz matrix

$$D_{n\times n} = -\begin{bmatrix} l_{m-1} & l_{m-2} & ... & l_{2m+1} & l_{2m} \\ l_m & l_{m-1} & ... & l_{2m+2} & l_{2m+1} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ l_{k-3} & l_{k-4} & ... & l_{m-1} & l_{m-2} \\ l_{k-2} & l_{k-3} & ... & l_m & l_{m-1} \end{bmatrix},$$

where

$$l_i = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\Gamma_j \bar{S}(i,j), \Gamma(s) = -\Phi^{-1}(s), k = n+m, \quad S(i,j) = s_{1+q((i-1)(j-1))}, \; q(x) = x \bmod k,$$

$$s_1 = 1, \quad s_j = e s_{j-1}, e = exp\left(-\frac{2\pi i}{k}\right), \quad i = 1,2,...,k-1; \; j = 1,2,...,k-1,$$

$$d_i = z_{n+i}, i = 1,2,...,m, \quad z_j = -\Phi(0) l_{j+1}, \; j = 1,2,...,k-1, \quad z_k = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\Gamma_j.$$

Unlike well-known methods having cubic computational complexity $(n + m)^3$, this linear system can be solved by special fast methods of Trench, Berlekamp–Massey or Euclid, having quadratic computational complexity $m(n + m)$.

An example of the practical use of an iterative algorithm for rational interpolation of a linear dynamic system with distributed parameters and calculation with a given accuracy of the root quality criteria for the dynamics of a bearing with gas lubrication are considered.

Keywords: rational interpolation; linear dynamic system; transfer function; system with distributed parameters; discrete Fourier transform.

KODNYANKO Vladimir Aleksandrovich (Doctor of Technical Sciences, Polytechnic Institute of the Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation).
E-mail: kowlad@rambler.ru

REFERENCES

1. Fraleigh, J.B. & Beauregard, R.A. (1995) *Linear Algebra*. Reading, MA: Addison-Wesley.
2. Besekersky, V.A. & Popov, E.P. (2002) *Teoriya sistem avtomaticheskogo regulirovaniya* [Theory of Automatic Control Systems]. St. Petersburg: Professiya.
3. Riley, K.F., Hobson, M.P. & Bence, S.J. (2010) *Mathematical Methods for Physics and Engineering*. Cambridge University Press.
4. Middlebrook, R.D. (1976) Input filter considerations in design and application of switching regulators. *IEEE Industry Applications Society Annual Meeting*. pp. 366–382.
5. Carrol, J. (1992) An input impedance stability criterion allowing more flexibility for multiple loads which are independently designed. *Naval Air Warfare Center, Aircraft Division*, *Indianapolis*. B / 812.
6. Wildrick, C.M., Lee, F.C., Cho, B.H. & Choi, B. (1995) A method of defining the load impedance specification for a stable distributed power system. *IEEE Transactions on Power Electronics*. pp. 280–285.
7. Kodnyanko, V.A. (2011) Stability of Energy-Saving Adaptive Hydrostatic Bearing with a Restriction of the Output Lubricant Stream. *Zhurnal Sibirskogo federal'nogo universiteta. Tekhnika i tekhnologii – Journal of the Siberian Federal University. Engineering and Techologies*. 6(4). pp. 907–914.
8. Bradie, B.A. (2006) *Friendly Introduction to Numerical Analysis*. Upper Saddle River, New Jersey: Pearson Prentice Hall.
9. Press, W.H., Teukolsky, S.A., William, T. & Vetterling, B.P. (1994) *Numerical Recipes in C: the Art of Scientific Computing.* Cambridge: Cambridge University Press.
10. Golub, G.H. & Van Loan, C.F. (1996) *Matrix computations.* Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press.
11. Heinig, G. & Rost, K. (2001) Efficient inversion formulas for Toeplitz-plus-Hankelmatrices using trigonometric transformations. In: Olshevsky, V. (ed.) *Structured Matrices in Mathematics, Computer Science, and Engineering.* Providence, RI: Amer Mathematical Society. pp. 247–264.
12. Smith, S.W. (1999) *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing*. Vol. 30. San Diego, CA : California Technical Publishing.
13. Trench, W.F. (1965) An algorithm for the inversion of finite Hankel matrices. *Society for Industrial and Applied Mathematics.* 13. pp. 1102–1107. DOI: 10.1137/0113078
14. Zohar, S. (1967) Toeplitz matrix inversion: The algorithm of W.F. Trench. *Journal of Association for Computing Machinery.* 16. pp. 592–601. DOI: 10.1145/321541.321549
15. Blahut, R.E. (2010) *Fast algorithms for signal processing*. Cambridge University Press. DOI: 10.1017/CBO9780511760921
16. Beale, E.M.L. (1955) Cycling in the dual simplex algorithm. *Naval Research Logistics Quarterly.* 2(4). pp. 269–276. DOI: 10.1002 / nav.3800020406
17. Voevodin, V.V. & Tyrtyshnikov, E.E. (1984) Toeplitz matrices and their applications. In: Glowinski, R. & Lions, J. L. (eds) *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering*. Amsterdam: North-Holland. pp. 75–85.
18. Petrov, O.A. (2006) Bystryy algoritm resheniya sistem uravneniya s teplitsevoy matritsey [Fast algorithm for solving linear equations with Toeplitz matrix]. *Infokommunikatsionnye tekhnologii*. 4(1). pp. 57–59.
19. Rahman, Q.I. & Schmeisser, G. (2002) *Analytic theory of polynomials*. Oxford: Oxford University Press.
20. Kodnyanko, V.A. (2002) Chislennyy raschet staticheskikh kharakteristik odnoryadnogo shchelevogo gazostaticheskogo podvesa [Numerical calculation of the static characteristics of a single-row slotted gas-static suspension]. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin.* 2. pp. 17–19.
21. Constantinescu, V.N. (1969) *Gas Lubrication*. New York: American Society of Mechanical Engineers.
22. Muir, T. (1960) *A Treatise on the Theory of Determinants*. New York : Dover Publications. pp. 516–525.