ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2021 Математика и механика № 69

УДК 519.218.2 + 517.518.26 MSC: 60J80, 26A12
DOI 10.17223/19988621/69/3

А.А. Имомов, А.Х. Мейлиев

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ НЕКРИТИЧЕСКИХ МАРКОВСКИХ ВЕТВЯЩИХСЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Работа посвящена исследованию переходных вероятностей Марковских ветвящихся случайных процессов непрерывного времени при минимальных моментных условиях. Рассмотрим некритический случай, т.е. случай, когда средняя плотность интенсивности превращения частиц не равна нулю. Найдем асимптотическое представление для переходных вероятностей без дополнительных моментных условий. Для нахождения конечного предельного инвариантного распределения мы ограничиваемся условием конечности момента типа $\mathbb{E}[x\ln x]$ для плотности превращения частиц. Утверждение об асимптотическом представлении вероятностной производящей функции (Основная Лемма) исследуемого процесса и ее дифференциальный аналог будут лежать в основе наших выводов. При этом существенно применяется теория правильно меняющихся функций в смысле Карамата.

Ключевые слова: *марковский ветвящийся процесс*, *правильно меняющиеся функции*, *Основная лемма*, *переходные вероятности*, *инвариантные распределения.*

1. Введение

Модели ветвящихся случайных процессов являются наиболее подходящими среди всех остальных для многих природных и технических явлений, связанных с развитием численности популяции частиц. Процесс Гальтона – Ватсона (Г-В) с дискретным временем представляет собой простейший ветвящийся процесс, в котором последовательность числа поколений определяет однородную цепь Маркова, а закон превращения частиц не зависит от времени и наличия других частиц. К настоящему времени существует множество моделей ветвящихся процессов, которые являются модификациями или обобщениями процесса Г-В (см. [1]). Прямое обобщение модели процесса Г-В приводит к так называемому процессу Беллмана – Харриса, в котором время жизни всех частиц имеет некоторый произвольный закон распределения $G(t)$. Этот процесс впервые рассмотрен в работе [2] в 1948 году. Позднее, в 1964 году, Б.А. Севастьянов [3] построил модель несколько более общую, чем в [2], распространяя процесс Беллмана – Харриса на случай с несколькими типами частиц и определяя вероятность их превращения, зависящую от их возраста (см. также [4, гл. 8]). Еще одна модификация модели Г-В – это модель ветвящихся процессов в случайной среде. Эта модель была введена в работе В. Смита и В. Вилкинсона [5] для случая среды, порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин. В настоящее время благодаря исследованиям В.А. Ватутина и его коллег и учеников, теория ветвящихся процессов в случайной среде продолжает интенсивно развиваться (см. [6–11]).

Развитие общей теории ветвящихся случайных процессов связано с одной стороны востребованностью углубленного исследования классических моделей и, с другой стороны, характеризуется открытием новых моделей, глубоко и наглядно описывающих суть изучаемых реальных явлений. В этой связи, исследование по улучшению имевшихся результатов в рамках классических моделей и установление новых, наиболее соответствующих объективным условиям, представляет определенное значение.

В настоящей работе мы рассмотрим классическую модель ветвящегося процесса, называемого Марковским однородным ветвящимся случайным процессом непрерывного времени, в котором распределение продолжительности жизни частицы $G(t)$ представляет собой экспоненциальный закон (см. [4, с. 28]).

Пусть в некоторой системе имеется популяция частиц одного типа, способных гибнуть и превращаться в случайное число частиц того же типа. Определим процесс эволюции численности этих частиц, развивающийся по следующей схеме. Случайная функция $Z(t)$ обозначает число частиц в момент времени $t \in \mathcal{T} = [0, +\infty)$. Каждая существующая в момент t частица, независимо от своей предыстории и от наличия других частиц, за малый промежуток времени $(t, t+\varepsilon)$ (при $\varepsilon \downarrow 0$) превращается в $j \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1\}$ частиц с вероятностью $a_j \varepsilon + o(\varepsilon)$, где $\mathbb{N}_0 = \{0\} \bigcup \mathbb{N}$ и $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$; с вероятностью $1 + a_1 \varepsilon + o(\varepsilon)$ частица продолжает жить или производит ровно одного потомка. Здесь числа $\left\{a_j,\ j \in \mathbb{N}_0\right\}$ – локальные плотности, которые указывают на интенсивности превращения частиц, причем они удовлетворяют соотношению

$$0 < a_0 < -a_1 = \sum_{j \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1\}} a_j < \infty .$$

Появившиеся новые частицы претерпевают превращения по такому же случайному закону. Вышеопределенный процесс называется Марковским ветвящимся случайным процессом (МВП) и семейство случайных величин $\left\{Z(t),\ t \in \mathcal{T}\right\}$ образует однородную цепь Маркова с пространством состояний $\mathcal{S}_0 = \{0\} \bigcup \mathcal{S}$, где $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}$ (см. [4]). В последних обозначениях мы отметили, что состояние рассматриваемой цепи $\left\{Z(t)\right\}$ можно разделить на два класса: $\{0\}$ – единственное поглощающее состояние и $\mathcal{S}$ – класс всех сообщающихся состояний.

Частицы, участвующие в процессе, в зависимости от контекста, могут быть представлены животными в биологических задачах, элементарными частицами в ядерной физике, людьми в задачах демографии и т.д. А.Н. Колмогоров, одним из первых, обратил внимание на возможность применения теории МВП в биологических задачах в работе [12], опубликованной еще в 1938 году в Известиях НИИ математики и механики Томского университета.

Определим условную вероятность $\mathbb{P}_i\{*\} := \mathbb{P}\left\{* \middle| Z(0) = i\right\}$ при условии, что в начальный момент в системе имеются ровно $i \in \mathcal{S}$ частиц. Известно, что переходные вероятности $\mathsf{p}_{ij}(t) = \mathbb{P}_i\left\{Z(t) = j\right\}$ удовлетворяют для любых $i, j \in \mathcal{S}$ условию ветвления (см. [4, с. 13])

$$\mathsf{p}_{kj}(t) = \sum_{j_1 + j_2 + \cdots + j_k = j} \mathsf{p}_{1 j_1}(t) \cdot \mathsf{p}_{1 j_2}(t) \cdot \ldots \cdot \mathsf{p}_{1 j_k}(t) .$$

Из этого следует, что для изучения эволюции процесса $\{Z(t),\, t \in \mathcal{T}\}$ достаточно определить вероятности $\mathsf{p}_j(t) := \mathsf{p}_{1j}(t)$. Эти вероятности, в свою очередь, задаются с помощью локальных плотностей $\{a_j\}$ соотношением

$$\mathsf{p}_j(\varepsilon) = \delta_{1j} + a_j\varepsilon + o(\varepsilon) \text{ при } \varepsilon \downarrow 0, \tag{1.1}$$

где δ_{ij} – знак Кронекера; $a_j = \mathsf{p}'_j(0+)$. Из соотношения (1.1) следует, что для вероятностной производящей функции (ПФ) $F(t;s) := \sum_{j\in\mathcal{S}_0} \mathsf{p}_j(t)s^j$ имеет место следующее представление:

$$F(\tau;s) = s + f(s)\cdot\tau + o(\tau) \text{ при } \tau \downarrow 0$$

для всех $s \in [0,\,1)$, где $f(s) := \sum_{j\in\mathcal{S}_0} a_j s^j$ – ПФ интенсивностей превращения частиц (см. [4, с. 26]).

Предполагая конечности ряда $\sum_{j\in\mathcal{S}} ja_j$, введем обозначение

$$m := \sum_{j\in\mathcal{S}} ja_j = f'(1-).$$

Параметр m – средняя плотность интенсивности превращения частиц, по сути, регулирует асимптотическое поведение траекторий процесса $\{Z(t)\}$. Рассмотрим случайную величину $\mathcal{H} := \inf\{t \in \mathcal{T} : Z(t) = 0\}$, обозначающую момент вырождения процесса. Из теоремы о вырождении [13, с. 108] следует, что $\mathbb{P}_i\{\mathcal{H} < \infty\} = q^i$, где q – вероятность вырождения процесса, которая является наименьшим корнем уравнения $f(q) = 0$. Этот корень, как известно, равен 1, если $m \le 0$, и меньше 1 при $m > 0$ (см. [4, гл. 1, § 1]). В связи с этим МВП классифицируется в зависимости от знака параметра m и называется *докритическим*, *критическим* и *надкритическим*, если $m < 0$, $m = 0$ и $m > 0$ соответственно.

Наши дальнейшие рассуждения будут связаны с теорией правильно меняющихся функций в смысле Карамата. Положительная функция называется медленно меняющейся (ММ) функцией на бесконечности, если она измерима на некоторой положительной полуоси $[A,\,\infty)$ и принадлежит классу

$$\mathcal{S}_\infty := \left\{\ell(x):\ \lim_{x\to\infty}\frac{\ell(\lambda x)}{\ell(x)} = 1 \quad \textit{для} \quad \textit{произвольного}\ \lambda \in (0,\,\infty)\right\}.$$

Положительная функция $\mathsf{V}(x)$ называется правильно меняющейся (ПМ) на бесконечности с показателем $\rho \in (0,\,\infty)$, если она представима в виде $\mathsf{V}(x) = x^\rho L(x)$, где $L(x) \in \mathcal{S}_\infty$. Через $\mathfrak{R}_\infty^\rho$ обозначим класс ПМ-функций на бесконечности. Функция $L(x)$ называется ММ-функцией в нуле, если $L(1/x) \in \mathcal{S}_\infty$. Классы ММ- и ПМ-функций в нуле обозначим $\mathcal{S}_0$ и $\mathfrak{R}_0^\rho$ соответственно. Таким образом, если $L(1/x) \in \mathcal{S}_\infty$, то $L(x) \in \mathcal{S}_0$ (см. [14]).

Возможность применения ПМ-функций в теории МВП впервые была обсуждена в работе Золотарева [15]. Подробные материалы, связанные с применением

ПМ-функций в теории ветвящихся процессов, можно найти в монографиях [16, 17].

Далее мы рассмотрим некритический случай, т.е. $m \neq 0$. Введем в рассмотрение условные вероятности

$$\mathsf{p}_{ij}^{\mathcal{H}}(t) := \mathbb{P}_i\left\{Z(t) = j \middle| t < \mathcal{H} < \infty\right\}$$

и в дальнейшем, где это будет необходимо, будем писать $\mathbb{P}\{*\}$ вместо $\mathbb{P}_1\{*\}$.

В монографии [16, с. 121–122] доказано, что для докритического случая ($m < 0$) и при любых $i, j \in \mathcal{S}$, существует предельная ПФ

$$\mathcal{V}(s) := \lim_{t\to\infty} \sum_{j\in\mathcal{S}} \mathsf{p}_{ij}^{\mathcal{H}}(t) s^j$$

и она удовлетворяет функциональному уравнению Шредера

$$1 - \mathcal{V}\big(F(t;s)\big) = e^{mt}\left[1 - \mathcal{V}(s)\right], \tag{1.2}$$

причем $1 - \mathcal{V}(1-s) \in \mathcal{R}_0^1$. Представляя $\mathcal{V}(s)$ в виде степенного ряда $\mathcal{V}(s) = \sum_{j\in\mathcal{S}} \upsilon_j s^j$, из уравнения (1.2) можно получить $\mathcal{V}(1-) = \sum_{j\in\mathcal{S}} \upsilon_j = 1$. А также, это уравнение эквивалентно следующему соотношению:

$$e^{mt} \cdot \upsilon_j = \sum_{k\in\mathcal{S}} \upsilon_k \mathsf{p}_{kj}^{\mathcal{H}}(\tau) \text{ для любого } \tau \in \mathcal{T} . \tag{1.3}$$

Доказательство последнего факта мы отложим до четвертого раздела. Уравнение (1.3) выражает свойство инвариантности предельного распределения $\left\{\upsilon_j,\ j \in \mathcal{S}\right\}$ относительно переходных вероятностей $\mathsf{p}_{ij}^{\mathcal{H}}(t)$.

В монографии [16, с. 121, 122] также было доказано, что существует функция $L(s) \in \mathcal{S}_0$, такая, что

$$\mathbb{P}\left\{\mathcal{H} > t\right\} = L\left(e^{mt}\right) \cdot e^{mt} , \tag{1.4}$$

причем, если выполнено условие

$$\sum_{j\in\mathcal{S}} a_j j \ln j < \infty , \tag{$\mathcal{A}$}$$

то существует конечное математическое ожидание $\mu := \sum_{k\in\mathcal{S}} k\upsilon_k = \mathcal{V}'(1-)$ и $\mu = 1/L(0+)$. Так что

$$e^{|m|t}\mathbb{P}\left\{\mathcal{H} > t\right\} \longrightarrow \frac{1}{\mu} \text{ при } t \to \infty . \tag{1.5}$$

В работе [18] утверждения (1.4) и (1.5) были обобщены для некритического случая в процессах Гальтона – Ватсона с дискретным временем.

Асимптотические представления переходных вероятностей $\mathsf{p}_{ij}(t)$ впервые были исследованы в работе [19]. В этой же работе, помимо случая $m = 0$, автор рассмотрел случай $m > 0$ и нашел довольно громоздкий вид асимптотического представления $\mathsf{p}_{1j}(t)$ используя, при этом, условие конечности второго момента $f''(1-)$. Асимптотические выражения для вероятностей $\mathsf{p}_{ij}(t)$ в более явном виде были найдены в работах автора [20, 21].

Настоящую работу мы посвящаем улучшению вышеуказанных результатов. В Теореме 1 мы распространим утверждения (1.4) и (1.5) на случай $m > 0$. Далее обсудим асимптотические свойства при $t \to \infty$ переходных вероятностей $\mathsf{p}_{ij}(t)$. Найдем для них асимптотическое представление (теоремы 2, 3) без дополнительных моментных условий, улучшая вышеупомянутые результаты из [19–21]. В конце мы переходим к задаче существования инвариантного распределения для МВП. Докажем аналог теоремы о сходимости отношений [20] к инвариантному распределению (теорема 4). Эта теорема, в отличие от соответствующей теоремы из [20], указывает на регулярную изменчивость ПФ инвариантного распределения.

2. Основная лемма и ее дифференциальный аналог

В теории ветвящихся процессов асимптотическое представление ПФ рассматриваемого процесса служит основой для ряда важных результатов. Мы начнем с доказательства нижеследующей *Основной леммы* для некритических процессов (в литературе такое название обычно используется для критического случая).

Предполагая $q \neq 0$ в случае $m > 0$, введем в рассмотрение функцию $F_q(t;s) = F(t;qs)/q$. Нетрудно проверить, что она определяет докритический МВП $\left\{Z_q(t),\, t \in \mathcal{T}\right\}$ с пространством состояний $\mathcal{S}_0$ и с плотностью закона превращения частиц $\varphi_k = a_k q^{k-1}$. Определяя инфинитезимальную ПФ $f_q(s) := \sum_{k\in\mathcal{S}} \varphi_k s^k$, можно вычислить среднюю плотность $f_q'(1-) = \sum_{k\in\mathcal{S}} k\varphi_k$. Дифференцируя $f_q(s)$ в точке $s \uparrow 1$, имеем

$$f_q'(1-) = \sum_{k\in\mathcal{S}} k a_k q^{k-1} = f'(q).$$

Поскольку $a := \sum_{k\in\mathcal{S}} k a_k = f'(1-) < \infty$ и $q \le 1$, то

$$f'(q) = \sum\nolimits_{k\in\mathcal{S}} k a_k q^{k-1} \le \sum\nolimits_{k\in\mathcal{S}} k a_k < \infty .$$

Тогда, в соответствие с вышеупомянутым результатом из [6, с. 121, 122], убедимся в том, что существует предельная ПФ

$$\mathcal{V}(s) := \lim_{t\to\infty} \sum_{j\in\mathcal{S}} \mathbb{P}_i\left\{Z_q(t) = j \,\middle|\, t < \mathcal{H} < \infty\right\} s^j$$

при любых $i, j \in \mathcal{S}$ и для всех $s \in [0, 1)$, а также она удовлетворяет функциональному уравнению Шредера

$$1 - \mathcal{V}\Big(F_q(t;s)\Big) = \beta^t \cdot \left[1 - \mathcal{V}(s)\right], \tag{2.1}$$

где $1 - \mathcal{V}(1-s) \in \mathfrak{R}_0^1$ и $\beta := \exp\left\{f'(q)\right\}$. Притом, если выполнено условие $[\mathcal{A}]$, то $\mu := \mathcal{V}'(1-) < \infty$. Легко заметить, что $\beta < 1$. Действительно, в силу определения МВП, имеем $f(0) = a_0 > 0$, $f(q) = 0$, $0 < q \le 1$, $f(1) = 0$ и

$$f''(s) = \sum_{k\ge 2} k(k-1) a_k s^{k-2} \ge 0 .$$

Последнее указывает на выпуклость вниз ПФ $f(s)$ для $0 \le s \le 1$. Также для $q \le s \le 1$ она удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Тогда существует точка $s_0 \in (q,1)$, такая, что $f(s_0) < 0$ и $f'(s_0) = 0$. Поэтому $f(s)$ непрерывно убывает от $f(0) = a_0 > 0$ до $f(s_0) < 0$, проходя точку $f(q) = 0$. Сказанное равносильно $f'(s) < 0$ для $0 \le s \le s_0$, в частности $f'(q) < 0$ и, следовательно, $\beta < 1$.

Итак, рассмотрим функцию

$$R_q(t;s) := 1 - F_q(t;s).$$

Лемма 1. *Пусть* $q > 0$. *Тогда найдется функция* $\ell_\beta(t;x)$, *такая, что* $\ell_\beta(t_0;x) =: \ell_\beta(x) \in \mathcal{S}_0$ *для любого фиксированного* $t_0 \in \mathcal{T}$, *и справедливо следующее представление для* $s \in [0, 1)$:

$$R_q(t;s) = (1-s)\cdot \ell_\beta(t;1-s)\cdot \beta^t. \tag{2.2}$$

Если выполнено условие $[\mathcal{A}]$, *то* $\ell_\beta(t;1) \to 1/\mu$ *при* $t \to \infty$, *где* μ *– число, полученное в (1.5) и,* $\ell_\beta(t;0+) = 1$ *для всех фиксированных* $t \in \mathcal{T}$.

Доказательство. Используем по существу тот же метод, что применялся в работе [8], для доказательства дискретного аналога формулы (2.2). Обозначив $\phi(t;s) := 1 - F_q(t;1-s)$, уравнение (2.1) запишем в виде

$$\vartheta\big(\phi(t;s)\big) = \beta^t \cdot \vartheta(s), \tag{2.3}$$

где $\vartheta(s) := 1 - \mathcal{V}(1-s)$. Используем верхний символ «$^{\leftarrow}$» для обозначения обратной функции к заданной. Введем функцию $a(x) := \vartheta^{\leftarrow}(x)$. Тогда из определения функций $R_q(t;s)$, $\phi(t;s)$ и равенства (2.3), следует

$$R_q(t;s) = a\Big(\vartheta(1-s)\cdot\beta^t\Big). \tag{2.4}$$

Обозначая $y := \vartheta\big(\phi(t;s)\big)$, из равенства (2.3) имеем $s = a\Big(y/\beta^t\Big)$. Из того же обозначения выпишем равенство $\phi(t;s) = a(y)$. Отсюда, введя еще одну обратную функцию $b(t;x) := \phi^{\leftarrow}(t;x)$ по аргументу x, для любого фиксированного $t \in \mathcal{T}$, находим $b\big(t;a(y)\big) = s$. Таким образом, мы получили соотношение

$$a\left(\frac{y}{\beta^t}\right) = b\big(t;a(y)\big). \tag{2.5}$$

С другой стороны, из определения функции $\phi(t;s)$ и из свойства ПФ $F_q(t;s)$ следует, что $\phi(t;s) \downarrow 0$ при $s \downarrow 0$. Тогда, в силу того, что $\mathcal{V}(1-) = 1$, находим

$$\lim_{s\downarrow 0} y = \lim_{s\downarrow 0} \vartheta\big(\phi(t;s)\big) = \lim_{x\downarrow 0} \vartheta(x) = 0.$$

Отсюда $a(0+) = 0$. Следовательно, в силу равенства (2.5) имеем

$$\lim_{x\downarrow 0} b\big(t;x\big) = 0. \tag{2.6}$$

В свою очередь, нетрудно проверить, что согласно определению МВП $\partial\phi/\partial s \to \beta^t$ при $s \downarrow 0$, и поэтому, по правилу дифференцирования обратных функций, получим

$$\left.\frac{\partial b(t;x)}{\partial x}\right|_{x=0} = \left(\left.\frac{\partial\phi(t;x)}{\partial x}\right|_{x=0}\right)^{-1} = \frac{1}{\beta^t}. \tag{2.7}$$

Теперь, с помощью соотношений (2.6) и (2.7), можно записать формулу Тейлора для функции $b(t;s)$ в окрестности точки $s=0$ (фиксируя t) с точностью до первой ненулевой производной в следующем виде:

$$b(t;s) = \frac{s}{\beta^t}\big(1+o(1)\big) \text{ при } s \downarrow 0 .$$

Это представление, вместе с формулой (2.5), с учетом $a(0+)=0$, дает следующее соотношение:

$$\frac{a\left(s/\beta^t\right)}{a(s)} = \frac{b\left(t;a(s)\right)}{a(s)} \longrightarrow \frac{1}{\beta^t} \text{ при } s \downarrow 0 \tag{2.8}$$

для любого фиксированного $t \in \mathcal{T}$.

Из теории обратных функций известно, что $a(s)/s$ является монотонно неубывающей функцией при $s \downarrow 0$. На самом деле это следует из того, что $\left(1-\mathcal{V}(s)\right)/(1-s)$ есть монотонно неубывающая функция. Так что в силу утверждения (2.8) получаем, что для каждого $\lambda \in \left[1, 1/\beta^t\right]$ справедливо соотношение

$$1 \le \frac{a(\lambda s)/(\lambda s)}{a(s)/s} \le \frac{a\left(s/\beta^t\right)/\left(s/\beta^t\right)}{a(s)/s} \longrightarrow 1$$

при $s \downarrow 0$. Выбирая $t \in \mathcal{T}$ достаточно большим, убедимся, что последнее соотношение выполняется и для всех $\lambda \ge 1$. Таким образом, мы установили, что $a(s)/s$ является ММ-функцией в нуле. Обозначим ее

$$\boldsymbol{\ell}_a(s) := \frac{a(s)}{s} \in \mathcal{S}_{\mathbf{0}} .$$

Формулу (2.4) теперь можно записать в виде

$$R_q(t;s) = \vartheta(1-s)\cdot \boldsymbol{\ell}_a\left(\vartheta(1-s)\beta^t\right)\cdot\beta^t . \tag{2.9}$$

Позже станет ясно (см. теорему 1), что $\boldsymbol{\ell}_a(s)$ по сути та же ММ-функция, что и в формуле (1.4).

Как было отмечено выше, функция $\vartheta(s) \in \mathfrak{R}_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}}$, поэтому, сохраняя прежние обозначения, функцию $\vartheta(1-s)$ можно представить в следующем виде:

$$\vartheta(1-s) = (1-s)\boldsymbol{\ell}_\vartheta(1-s), \tag{2.10}$$

где $\boldsymbol{\ell}_\vartheta(x) \in \mathcal{S}_{\mathbf{0}}$. Теперь, введя обозначение $\boldsymbol{\ell}_\beta(t;x) := \boldsymbol{\ell}_\vartheta(x)\cdot\boldsymbol{\ell}_a\left(x\boldsymbol{\ell}_\vartheta(x)\beta^t\right)$, для $x \in (0, 1]$, из соотношений (2.9) и (2.10) мы получаем представление (2.2).

Далее проверяем свойства функции $\ell_\beta(t;x)$ при условии выполнения $[\mathcal{A}]$. В этом случае, как было указано выше, существует конечное математическое ожидание $\mu := \sum_{k\in\mathcal{S}} k\upsilon_k = \mathcal{V}'(1-)$. Очевидно $\mathcal{V}(0)=0$ и, следовательно, $\vartheta(1)=1$, поэтому $\ell_\vartheta(1)=1$. Значит, $\ell_\beta(t;1)=\ell_a\left(\beta^t\right)$. С другой стороны, как уже было показано выше, $a(0+)=\vartheta(0+)=0$. Тогда в силу свойства производной обратных функций, с учетом $\mathcal{V}(1-)=1$, находим

$$\ell_a(0+)=\lim_{x\downarrow 0}\frac{a(x)}{x}=a'(0+)=\frac{1}{\vartheta'(0+)}=$$

$$=\lim_{x\downarrow 0}\frac{x}{\vartheta(x)}=\lim_{y\uparrow 1}\frac{1-y}{1-\mathcal{V}(y)}=\frac{1}{\mathcal{V}'(1-)}=\frac{1}{\mu}.$$

Отсюда $\ell_\beta(t;1)\to 1/\mu$ при $t\to\infty$. Аналогичным путем вычислим

$$\ell_\vartheta(0+)=\lim_{x\downarrow 0}\frac{\vartheta(x)}{x}=\mu .$$

Поэтому $\ell_\beta(t;0+)=1$.

Наконец очевидно, что функция $\ell_\beta(x):=\ell_\beta(t_0;x)$ при любом фиксированном $t_0\in\mathcal{T}$, как комбинация двух функций $\ell_\vartheta(\cdot), \ell_a(\cdot)\in\mathcal{S}_0$, принадлежит классу $\mathcal{S}_0$: $\ell_\beta(x)\in\mathcal{S}_0$.

Доказательство леммы завершено. ■

Основная лемма указывает на то, что в асимптотике траекторий некритического процесса $\{Z(t),\, t\in\mathcal{T}\}$ неявно присутствует свойство правильного изменения функций.

Далее мы интересуемся асимптотикой функции $\partial R_q(t;s)/\partial s$. Из комбинаций прямого и обратного уравнений Колмогорова следует, что

$$\frac{\partial F_q(t;s)}{\partial s}=\frac{f_q\left(F_q(t;s)\right)}{f_q(s)}, \tag{2.11}$$

где $f_q(s)=f(qs)/q$. Очевидно, что $f_q(1)=0$. Поэтому

$$f_q(s)\sim f_q'(1-)(s-1)=f'(q)(s-1), \text{ при } s\downarrow 0 .$$

Применяя это соотношение в правой части (2.11), получаем

$$\frac{\partial R_q(t;s)}{\partial s}=-\frac{|\ln\beta|}{f_q(s)}R_q(t;s)\left(1+o(1)\right), \text{ при } t\to\infty . \tag{2.12}$$

Из соотношений (2.2) и (2.12) мы получаем теперь следующий дифференциальный аналог Основной леммы.

Лемма 2. *В условиях леммы 1 справедливо следующее представление:*

$$\frac{\partial R_q(t;s)}{\partial s}=-\frac{|\ln\beta|}{f_q(s)}(1-s)\cdot\ell_\beta(t;1-s)\cdot\beta^t\left(1+o(1)\right) \text{ при } t\to\infty , \tag{2.13}$$

где функция $\ell_\beta(t;x)$ найдена в лемме 1.

3. Асимптотические свойства переходных вероятностей и инвариантные распределения

В этом параграфе мы исследуем некоторые асимптотические свойства МВП, используя лемму 1. Начнем с предельного выражения «конечного хвоста» распределения величины $\mathcal{H}$.

Теорема 1. *Пусть* $q > 0$. *Тогда найдется функция* $\ell_a(x) \in \mathcal{S}_0$, *такая, что имеет место представление*

$$\mathbb{P}\left\{t < \mathcal{H} < \infty\right\} = q \cdot \ell_a\left(\beta^t\right) \cdot \beta^t . \tag{3.1}$$

Если выполнено условие $[\mathcal{A}]$, *то*

$$\beta^{-t} \cdot \mathbb{P}\left\{t < \mathcal{H} < \infty\right\} \longrightarrow \frac{q}{\mu} \textit{ при } t \to \infty . \tag{3.2}$$

Доказательство. Так как вероятность исчезновения k частиц равна q^k, то $\mathbb{P}\left\{t < \mathcal{H} < \infty \middle| Z(t) = k\right\} = q^k$. Поэтому из формулы полной вероятности следует

$$\mathbb{P}\left\{t < \mathcal{H} < \infty\right\} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left\{t < \mathcal{H} < \infty \middle| Z(t) = k\right\} p_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t) q^k .$$

Учитывая уравнение $F(t;q) = q$ [1, с. 52], из последнего соотношения получаем

$$\mathbb{P}\left\{t < \mathcal{H} < \infty\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) q^k - p_0(t) = F(t;q) - F(t;0) = q - F(t;0) .$$

Следовательно $\mathbb{P}\left\{t < \mathcal{H} < \infty\right\} = q \cdot R_q(t;0)$. Здесь используем формулу (2.2) при $s = 0$. В ходе ее доказательства показано, что $\ell_\beta(t;1) = \ell_a\left(\beta^t\right)$, где $\ell_a(x) \in \mathcal{S}_0$. Таким образом, мы получаем формулу (3.1). Соотношение (3.2) следует из (3.1), с учетом того, что $\ell_a(0+) = 1/\mu$ при выполнении условия $[\mathcal{A}]$.

Теорема доказана. ■

Далее используем обозначение

$$q_\beta := \frac{a_0}{|\ln \beta|} .$$

Поскольку $\partial R_q / \partial s\big|_{s=0} = -p_{11}(t)$, то следующая локальная предельная теорема сразу получается из асимптотической формулы (2.13), полагая в ней $s = 0$, с учетом свойства функции $\ell_\beta(t;x)$ из леммы 1.

Теорема 2. *Пусть* $q > 0$. *Тогда следующее асимптотическое представление имеет место:*

$$p_{11}(t) = \frac{q}{q_\beta} \cdot \ell_a\left(\beta^t\right) \cdot \beta^t \left(1 + o(1)\right) \textit{ при } t \to \infty , \tag{3.3}$$

где функция $\ell_a(x) \in \mathcal{S}_0$ *найдена в теореме 1. Если выполнено условие* $[\mathcal{A}]$, *то*

$$\beta^{-t} \cdot p_{11}(t) \longrightarrow \frac{q}{q_\beta} \frac{1}{\mu} \textit{ при } t \to \infty .$$

Далее нас будет интересовать предельные поведения переходных вероятностей $\mathsf{p}_{ij}(t)$ для всех $i, j \in \mathcal{S}$ и вопрос существования инвариантной меры относительно этих вероятностей. Для этого мы используем следующую лемму о монотонной сходимости отношений переходных вероятностей из работы [22, с. 402]; см., также [20].

Лемма 3. *Для всех* $i, j \in \mathcal{S}$

$$\frac{\mathsf{p}_{ij}(t)}{\mathsf{p}_{11}(t)} \longrightarrow iq^{i-1} \cdot \pi_j \le \infty \ \ \textit{при} \ \ t \to \infty , \tag{3.4}$$

где числа $\pi_j = \lim_{t\to\infty} \mathsf{p}_{1j}(t) \big/ \mathsf{p}_{11}(t)$, *для которых справедливо уравнение*

$$\beta^t \cdot \pi_j = \sum_{k\in\mathcal{S}} \pi_k \mathsf{p}_{kj}(\tau) \tag{3.5}$$

для любого $\tau \in \mathcal{T}$.

С помощью соотношения (3.4), получаем теперь следующее обобщение теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть* $q > 0$. *Тогда следующее асимптотическое представление имеет место*:

$$\mathsf{p}_{ij}(t) = \frac{iq^i}{q_\beta} \pi_j \cdot \boldsymbol{\ell}_a\left(\beta^t\right) \cdot \beta^t \left(1 + o(1)\right) \ \ \textit{при} \ \ t \to \infty ,$$

где функция $\boldsymbol{\ell}_a(x) \in \mathcal{S}_0$ *найдена в теореме 1. Если выполнено условие* $[\mathcal{A}]$, *то*

$$\beta^{-t} \cdot \mathsf{p}_{ij}(t) \longrightarrow \frac{iq^i}{q_\beta} \cdot \frac{\pi_j}{\mu} \ \ \textit{при} \ \ t \to \infty .$$

Рассмотрим теперь ПФ

$$\mathcal{P}_i(t;s) := \sum_{j\in\mathcal{S}} \frac{\mathsf{p}_{ij}(t)}{\mathsf{p}_{11}(t)} s^j \ \ \text{и} \ \ \mathcal{P}(s) := \sum_{j\in\mathcal{S}} \pi_j s^j .$$

Очевидно, что $\mathcal{P}_i(t;s) = iq^{i-1} \cdot \mathcal{P}(t;s)$, где $\mathcal{P}(t;s) := \mathcal{P}_1(t;s)$, и из сходимости (3.4) следует $\mathcal{P}(t;s) \to \mathcal{P}(s)$ при $t \to \infty$ равномерно для всех $s \in [0, 1)$. А соотношение (3.5) эквивалентно функциональному уравнению

$$\beta^t \cdot \mathcal{P}(s) = \mathcal{P}\left(F(t;s)\right) - \mathcal{P}\left(F(t;0)\right) \tag{3.6}$$

(см. [22, с. 403]). Таким образом, множество положительных чисел $\left\{\pi_j,\ j \in \mathcal{S}\right\}$ представляет собой инвариантную меру для процесса $\left\{Z(t),\ t \in \mathcal{T}\right\}$. Следующая теорема описывает ее основные свойства.

Теорема 4. *Пусть* $q > 0$. *Тогда следующая сходимость имеет место:*

$$\frac{\mathcal{P}(t;qs)}{q_\beta} \longrightarrow 1 - \vartheta(1-s) \ \ \textit{при} \ \ t \to \infty , \tag{3.7}$$

где и $\vartheta(x) \in \Re_0^1$. *Более того* $\mathcal{P}(0) = 0$ *и* $\mathcal{P}(q) = q_\beta$. *Если выполнено условие* $[\mathcal{A}]$, *то*

$$\mathcal{P}'(q) = \frac{q_\beta}{q} \mu .$$

Доказательство. Согласно нашим обозначениям, $F(t;qs)=q\cdot\left(1-R_q(t;s)\right)$. Поэтому можем написать следующую цепочку равенств:

$$\mathcal{P}(t;qs)=\frac{F(t;qs)-F(t;0)}{\mathsf{p}_{11}(t)}=$$

$$=\frac{q}{\mathsf{p}_{11}(t)}\left[R_q(t;0)-R_q(t;s)\right]=q\frac{R_q(t;0)}{\mathsf{p}_{11}(t)}\cdot\left[1-\frac{R_q(t;s)}{R_q(t;0)}\right]. \tag{3.8}$$

Как было показано в доказательстве теоремы 1, $\mathbb{P}\{t<\mathcal{H}<\infty\}=q\cdot R_q(t;0)$. Тогда в силу представления (3.1) получаем равенство $R_q(t;0)=\boldsymbol{\ell}_a\left(\beta^t\right)\cdot\beta^t$, здесь $\boldsymbol{\ell}_a(x)\in\mathcal{S}_0$. Из последнего равенства вместе с асимптотической формулой (3.3) получим

$$q\frac{R_q(t;0)}{\mathsf{p}_{11}(t)}=q_\beta\left(1+o(1)\right)\ \text{при}\ t\to\infty. \tag{3.9}$$

В свою очередь, из представления (2.9) для $R_q(t;s)$ следует, что

$$\frac{R_q(t;s)}{R_q(t;0)}=\vartheta(1-s)\cdot\frac{\boldsymbol{\ell}_a\left(\vartheta(1-s)\beta^t\right)}{\boldsymbol{\ell}_a\left(\beta^t\right)}, \tag{3.10}$$

где $\vartheta(x)=1-\mathcal{V}(1-x)\in\mathfrak{R}_0^1$. Поскольку $0\le\mathcal{V}(s)<1$ для $s\in[0,1)$, то $0<\vartheta(x)\le1$ для $x\in(0,1]$. Тогда согласно результату из [23, с. 140, лемма 1], дробь правой части (3.10) стремится к 1 при $t\to\infty$. Следовательно,

$$\frac{R_q(t;s)}{R_q(t;0)}=\vartheta(1-s)\left(1+o(1)\right)\ \text{при}\ t\to\infty. \tag{3.11}$$

Комбинируя теперь (3.8) – (3.11), мы получаем утверждение (3.7). Оно же нам дает формулу

$$\frac{\mathcal{P}(qs)}{q_\beta}=1-\vartheta(1-s). \tag{3.12}$$

Теперь, пусть выполнено условие $[\mathcal{A}]$. В ходе доказательства леммы 1 было замечено, что $\vartheta(0+)=0$ и $\vartheta(1)=1$. Тогда, из формулы (3.12) получаем

$$\mathcal{P}(0)=0\ \text{и}\ \mathcal{P}(q)=q_\beta.$$

Учитывая последние результаты и представление (2.10), равенство (3.12) преобразуем к виду

$$\frac{\mathcal{P}(q)-\mathcal{P}(qs)}{q-sq}=\frac{q_\beta}{q}\boldsymbol{\ell}_\vartheta(1-s),$$

где $\boldsymbol{\ell}_\vartheta(x)\in\mathcal{S}_0$. В последнем равенстве переходим к пределу при $s\uparrow1$. Тогда очевидно, что левая часть будет равняться $\mathcal{P}'(q)$, а функция $\boldsymbol{\ell}_\vartheta(x)$ в правой части, как известно из доказательства леммы 1, имеет конечный предел $\mu=\lim_{x\downarrow0}\boldsymbol{\ell}_\vartheta(x)$. Следовательно, $\mathcal{P}'(q)=\mu q_\beta/q$.

Теорема доказана. ■

4. Заключительные замечания

Изучение предельной структуры некритического МВП было основной целью данной работы. Полученные результаты основаны исключительно на Основной лемме. Начатое в начале обсуждение свойств инвариантного распределения $\left\{\upsilon_j,\ j\in\mathcal{S}\right\}$ закончилось в теореме 4 подтверждением того, что распределения $\left\{\upsilon_j,\ j\in\mathcal{S}\right\}$ и $\left\{\pi_j,\ j\in\mathcal{S}\right\}$, порожденные ПФ $\mathcal{V}(s)$ и $\mathcal{P}(s)$ являются, как оказалось, лишь разными версиями одного и того же предельного закона. На самом деле, формула (3.12) нам дает следующую связь между $\mathcal{P}(s)$ и $\mathcal{V}(s)$:

$$\frac{\mathcal{P}(qs)}{\mathcal{P}(q)}=\mathcal{V}(s) \tag{4.1}$$

или же $\mathcal{P}(qs)=q_\beta\mathcal{V}(s)$. Полученный вывод указывает на единственность инвариантного распределения с точностью до постоянного множителя. Соотношение (4.1) согласуется с соответствующим результатом из работы [22, с. 397], где выражение $\boldsymbol{\ell}_\beta(t;1-s)$ в правой части соотношения (2.2) было выведено в виде экспоненты от интегральной функции, зависящей от ПФ $f(s)$.

Вернемся теперь к предельной ПФ $\mathcal{V}(s):=\sum_{j\in\mathcal{S}}\upsilon_j s^j$ и покажем, что для множества $\left\{\upsilon_j,\ j\in\mathcal{S}\right\}$ на самом деле выполняется уравнение (1.3). Из равенства (4.1) получаем

$$\mathcal{P}\big(F(t;qs)\big)=\mathcal{P}(q)\mathcal{V}\Big(F_q(t;s)\Big).$$

В свою очередь, в силу (3.6)

$$\beta^t\cdot\mathcal{P}(qs)=\mathcal{P}\big(F(t;qs)\big)-\mathcal{P}\big(F(t;0)\big).$$

Из последних двух соотношений находим

$$\beta^t\cdot\mathcal{V}(s)=\mathcal{V}\Big(F_q(t;s)\Big)-\mathcal{V}\Big(F_q(t;0)\Big).$$

Отсюда по правилу сравнения степенных рядов легко получить уравнение

$$\beta^t\cdot\upsilon_j=\sum_{k\in\mathcal{S}}\upsilon_k\mathsf{p}_{kj}^{\mathcal{H}}(t)\ \text{ для любого }\ t\in\mathcal{T},$$

что является обобщением уравнения (1.3) для случая $m\neq 0$.

Наконец, определим случайный процесс $\left\{Z_{\mathcal{H}}(t),\ t\in\mathcal{T}\right\}$ с переходными вероятностями

$$\mathsf{p}_{ij}^{\mathcal{H}}(t):=\mathbb{P}_i\left\{Z(t)=j\,\middle|\,t<\mathcal{H}<\infty\right\}.$$

Отметим, что этот процесс является ветвящимся процессом и обладает свойством эргодичности (см. [22]). Таким образом, в рассматриваемом случае существует эргодическая цепь $\left\{Z_{\mathcal{H}}(t),\ t\in\mathcal{T}\right\}$, связанная с исходным процессом $\left\{Z(t),\ t\in\mathcal{T}\right\}$, такая, что ее переходные вероятности

$$\mathsf{p}_{ij}^{\mathcal{H}}(t)=\frac{\mathsf{p}_{ij}(t)q^j}{\sum_{k\in\mathcal{S}}\mathsf{p}_{kj}(t)q^k}.$$

При выполнении условия $[\mathcal{A}]$ эти вероятности имеют конечный предел $\{\upsilon_j,\ j \in \mathcal{S}\}$, представляющий собой инвариантное распределение с конечным математическим ожиданием $\mu = \sum_{k \in \mathcal{S}} k\upsilon_k$.

Благодарность. Авторы выражают глубокое уважение и благодарность рецензенту за его ценные замечания и полезные предложения, способствовавшие улучшению содержания статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Harris T.E.* The theory of branching processes. Berlin: Springer-Verlag, 1963.
2. *Bellman R*, *Harris T.E.* On the theory of age-dependent stochastic branching processes // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1948. V. 34. P. 601–604.
3. *Севастьянов Б.А.* Ветвящиеся процессы с превращениями, зависящими от возраста частиц // Теория вероятн. и ее применен. 1964. Т. 9. № 4. С. 577–594.
4. *Севастьянов Б.А.* Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971.
5. *Smith W.L.*, *Wilkinson W.* On branching processes in random environment // Ann. Math. Statist. 1969. V. 40(3). P. 814–827.
6. *Ватутин В.А.*, *Дьяконова Е.Е.* Ветвящиеся процессы в случайной среде и бутылочные горлышки в эволюции популяций // Теория вероятн. и ее применен. 2006. Т. 51. № 1. С. 22–46.
7. *Ватутин В.А.*, *Дьяконова Е.Е.* Вероятность невырождения для одного класса многотипных докритических ветвящихся процессов в случайной среде // Матем. заметки. 2020. Т. 107. № 2. С. 163–177.
8. *Dyakonova E.E.*, *Li D.*, *Vatutin V.A.*, *Zhang M.* Branching processes in random environment with immigration stopped at zero // J. Appl. Probab. 2020. V. 57(1). P. 237–249.
9. *Ватутин В.А.*, *Дьяконова Е.Е.* Докритические ветвящиеся процессы в случайной среде с иммиграцией: выживание одного семейства // Теория вероятн. и ее применен. 2020. Т. 65. № 4. С. 671–692.
10. *Dong C.*, *Smadi C.*, *Vatutin V.A.* Critical branching processes in random environment and Cauchy domain of attraction // ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. 2020. V. 17. P. 877–900.
11. *Ватутин В.А.*, *Дьяконова Е.Е.*, *Топчий В.А.* Критические процессы Гальтона – Ватсона со счетным множеством типов частиц и бесконечными вторыми моментами // Матем. сб. Т. 212. № 1. 2021. С. 3–27.
12. *Колмогоров А.Н.* К решению одной биологической задачи // Изв. НИИ матем. и мех. Томского ун-та. 1938. № 2. С. 7–12.
13. *Athreya K.B. and Ney P.E.* Branching processes. New York: Springer, 1972.
14. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции: пер. с англ. М.: Наука, 1985.
15. *Zolotarev V.M.* More exact statements of several theorems in the theory of branching processes // Theory Prob. and Appl. 1957. V. 2. P. 245–253.
16. *Asmussen S.*, *Hering H.* Branching Processes. Boston, 1983.
17. *Bingham N.H.*, *Goldie C.M.*, *Teugels J.L.* Regular Variation. Cambridge, 1987.
18. *Imomov A.A.* On a limit structure of the Galton–Watson branching processes with regularly varying generating functions // Probab. and Math. Stat. 2019. V. 39(1). P. 61–73.
19. *Чистяков В.П.* Локальные предельные теоремы теории ветвящихся случайных процессов // Теория вероятн. и ее применен. 1957. Т. 2. № 3. Р. 360–374.
20. *Imomov A.A.* Limit Properties of Transition Functions of Continuous-Time Markov Branching Processes // Int. J. Stoch. Anal. 2014. 10 p. http://dx.doi.org/10.1155/2014/409345.
21. *Imomov A.A.* A differential analog of the main lemma of the theory of Markov branching processes and its applications // Ukrainian Math. Journal. 2005. V. 57(2). P. 307–315.
22. *Imomov A.A.* On conditioned limit structure of the Markov branching process without finite second moment // Malaysian J. Math. Sciences. 2017. V. 11(1). P. 393–422.
23. *Slack R.S.* A branching process with mean one and possible infinite variance // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 1968. V. 9. P. 139–145.

Статья поступила 21.07.2020

Imomov A.A., Meyliev A.Kh. (2021) ON THE ASYMPTOTIC STRUCTURE OF NON-CRITICAL MARKOV STOCHASTIC BRANCHING PROCESSES WITH CONTINUOUS TIME. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika I mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 69. pp. 22–36

DOI 10.17223/19988621/69/3

Keywords. Branching process, regularly varying functions, Main Lemma, transition functions, invariant distributions.

We study the evolution of the population of single-type particles called Markov branching process. Let $Z(t)$ be the population size at a time $t \in \mathcal{T} = [0, +\infty)$. The conversion intensity of particles is given by determining the local densities $\{a_j,\ j \in \mathcal{S}\}$. The process $\{Z(t),\ t \in \mathcal{T}\}$ is a homogeneous-time Markov chain with the state space $\mathcal{S}_0 = \{0\} \cup \mathcal{S}$, where $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}$, and its classification depends on the sign of the parameter $a := \sum_{j \in \mathcal{S}} j a_j$, the average density. We consider the case $a \neq 0$, in which the process is called non-critical. We find an asymptotic representation of transition functions $\mathsf{p}_{ij}(t) := \mathbb{P}\{Z(\tau + t) = j \mid Z(\tau) = i\}$, $\tau, t \in \mathcal{T}$ without any additional conditions. Afterwards, we show that conditional transition functions $\mathsf{p}_{ij}^{\mathcal{H}}(t) := \mathbb{P}_i\{Z(t) = j \mid t < \mathcal{H} < \infty\}$ have a finite limit υ_j as $t \to \infty$ and an appropriate generating function $\mathcal{V}(s) = \sum_{j \in \mathcal{S}} \upsilon_j s^j$ satisfies the Schroeder functional equation. We prove that another limit law $\pi_j := \lim_{t \to \infty} \mathsf{p}_{1j}(t) / \mathsf{p}_{11}(t)$ has the same properties as $\{\upsilon_j\}$. So that setting $\mathcal{P}(s) := \sum_{j \in \mathcal{S}} \pi_j s^j$, we assert that

$$\frac{\mathcal{P}(qs)}{\mathcal{P}(q)} = \mathcal{V}(s).$$

All our conclusions are based on the Main Lemma of the theory of non-critical processes; see Lemma 1.

AMS Mathematical Subject Classification: 60J80, 26A12

Azam A. IMOMOV (Doctor of Sciences in Physics and Mathematics,
Karshi State University, Uzbekistan). E-mail: imomov_azam@mail.ru

Abror Kh. MEYLIEV (researcher-teacher, Karshi State University, Uzbekistan).
E-mail: abror_meyliyev@mail.ru

REFERENCES

1. Harris T.E. (1963) *The Theory of Branching Processes*. Berlin: Springer-Verlag.
2. Bellman R., Harris T.E. (1948) On the theory of age-dependent stochastic branching processes. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America.* 34(12). pp. 601–604.
3. Sevast’yanov B.A. (1964) Age-dependent branching processes. *Theory of Probability and its Applications.* 9(4). pp. 521–537.
4. Sevast’yanov B.A. (1971) *Vetvyashchiyesya protsessy* [Branching processes]. Moscow: Nauka. 1971.
5. Smith W.L., Wilkinson W. (1969) On branching processes in random environment. *Annals of Mathematical Statistics*. 40(3). pp. 814–827.
6. Vatutin V.A., Dyakonova E.E. (2006) Branching processes in a random environment and bottlenecks in the evolution of populations. *Theory of Probability and its Applications.* 51(1). 189–210.

7. Vatutin V.A., Dyakonova E.E. (2020) The survival probability for a class of multitype subcritical branching processes in random environment. *Mathematical Notes*. 107(2). pp. 189–200.
8. Dyakonova E.E., Li D., Vatutin V.A., Zhang M. (2020) Branching processes in random environment with immigration stopped at zero. *Journal of Applied Probability*. 57(1). pp. 237–249.
9. Vatutin V.A., Dyakonova E.E. (2020) Dokriticheskiye vetvyashchiyesya protsessy v sluchaynoy srede s immigratsiyey: vyzhivaniye odnogo semeystva [Precritical branching processes in a random medium with immigration: survival of a single family]. *Theory of Probability and its Applications*. 65(4). pp. 671–692.
10. Dong C., Smadi C., Vatutin V.A. (2020) Critical branching processes in random environment and Cauchy domain of attraction. *ALEA Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics*. 17. pp. 877–900.
11. Vatutin V.A., Dyakonova E.E. Topchii V.A. (2021) Critical Galton-Watson branching processes with countably infinitely many types and infinite second moments. *Sbornik: Mathematics*. 212(1). (in press)
12. Kolmogorov A.N. (1992) Solution of a biological problem. *Selected Works of A.N. Kolmogorov*. pp. 216–221. Springer-Science.
13. Athreya K.B. and Ney P.E. (1972) *Branching Processes*. New York: Springer.
14. Seneta E. (1976) *Regularly Varying Functions*. Springer.
15. Zolotarev V.M. (1957) More exact statements of several theorems in the theory of branching processes. *Theory of Probability and its Applications*. 2(2). pp. 245–253.
16. Asmussen S., Hering H. (1983) *Branching Processes*. Boston: Birkhauser.
17. Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L. (1987) *Regular Variation*. Cambridge: Cambridge University Press.
18. Imomov A.A. (2019) On a limit structure of the Galton–Watson branching processes with regularly varying generating functions. *Probability and Mathematical Statistics*. 39(1). pp. 61–73.
19. Chistyakov V.P. (1957) Local limit theorems in the theory of branching random processes *Theory of Probability and its Applications*. 2(3). pp. 345–363.
20. Imomov A.A. (2014) Limit properties of transition functions of continuous-time Markov branching processes. *International Journal of Stochastic Analysis*. 46. pp. 1–10. DOI: 10.1155/2014/409345.
21. Imomov A.A. (2005) A differential analog of the main lemma of the theory of Markov branching processes and its applications. *Ukrainian Mathematical Journal*. 57(2). pp. 307–315.
22. Imomov A.A. (2017) On conditioned limit structure of the Markov branching process without finite second moment. *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*. 11(1). pp. 393–422.
23. Slack R.S. (1968) A branching process with mean one and possible infinite variance. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*. 9. pp. 139–145.

Received: July 21, 2020