УДК 539.375
DOI 10.17223/19988621/69/7

А.Ю. Бурцев, В.В. Глаголев, А.А. Маркин

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ЛОКАЛЬНОЙ РАЗГРУЗКИ ЭЛЕМЕНТА В КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОМ КОНТИНУУМЕ[1]

На основе гипотезы простой разгрузки предлагается описание процесса потери несущей способности конечного элемента. На основе конечно-элементного комплекса Ansys Workbench приведены результаты расчетов в случае упругого и упругопластического поведения материала. Показана возможность учета остаточных деформаций в зоне удаления конечного элемента для материала с упругопластическими свойствами в рассмотренной модели.

Ключевые слова: *метод конечных элементов*, *удаление конечного элемента*, *Ansys Workbench.*

Прогнозирование несущей способности различных конструкций в настоящее время строится на конечно-элементном анализе [1–4], в том числе и реализованном в рамках коммерческих пакетов [5, 6]. Как правило, в большинстве случаев расчеты ограничиваются нахождением предельной внешней нагрузки, при которой, используя определенный локальный критерий разрушения, состояние конечного элемента трактуется как критическое. При этом собственно процессу «разрушения» элемента не уделяется должного внимания.

При расслоении композиционных материалов в рассмотрение вводятся когезионные элементы с различными законами ниспадающего участка деформирования: трапециидальный (трилинейный), параболический и экспонециидальный [7]. Однако решение реальных задач строится, как правило, на билинейном законе распределения когезионных сил [8–11] в одном измерении (направлении отрыва). Образование новых материальных поверхностей в данном подходе ассоциируется с достижением нулевого значения когезионных сил в рассматриваемых элементах. Отметим, что различные законы когезионного взаимодействия и материальные характеристики когезионных элементов существенно влияют на распределение напряжено-деформированного состояния в зоне предразрушения [12] и требуют экспериментального подтверждения.

При рассмотрении стадии разупрочнения в материальном объеме [13–15] сложность задачи связана с построением определяющих соотношений неустойчивого по Друкеру деформирования [16, 17] и их подтверждением в соответствующих экспериментах.

Так, например, в программном комплексе Ansys Workbench [6] функцией *ekill* (kill element) элемент исключается из рассмотрения, что фактически соответствует умножению локальной матрицы жёсткости элемента на число близкое к нулю. Эта процедура является корректной при упругом поведении конструкций и не учитывает перераспределения напряжений при возможном упругопластическом характере деформирования за счет разгрузки и догрузки локальных областей в зо-

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и правительства Тульской области в рамках научного проекта № 19-41-710001 р_а.

не образования новых материальных поверхностей. Наличие этапа локальной разгрузки, сопровождаемой процессом упругопластического догружения вне разрушаемого материального объема, является принципиальным отличием от процедуры kill element.

В работах [18, 19] при исследовании разрушения адгезионного слоя в композиционном материале было предложено рассматривать разрушение как процесс простой разгрузки образуемых материальных поверхностей от напряжений, действующих по границе разрушаемого элемента слоя. В данной работе предлагается обобщить данный подход на случай разрушения произвольного элемента в конечно-элементном континууме на примере комплекса Ansys Workbench.

Цель работы – определение изменения напряженно-деформированного состояния упругопластического тела в процессе потери несущей способности отдельными конечными элементами при фиксированных внешних воздействиях. Предлагаемый подход позволяет «растянуть» процесс убывания жесткости элемента во времени и установить возможность разрушения конструкции до полной потери несущей способности данного элемента.

Постановка задачи

Рассмотрим конечно-элементный континуум, находящийся в равновесии под воздействием внешней нагрузки. На рис. 1, *a* представлена его область с выделенным горизонтальной штриховкой элементом, находящимся в рамках того или иного критерия в состоянии предразрушения.

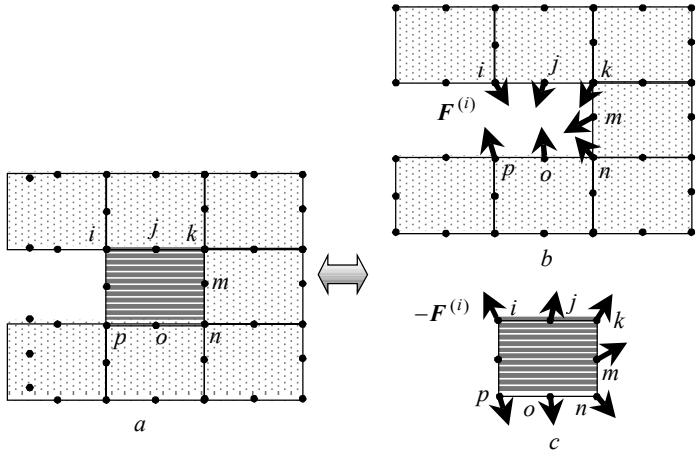

Рис. 1. Взаимодействие конечного элемента с ансамблем конечных элементов
Fig. 1. Finite element interaction with a finite element ensemble

На рис. 1, *b* представлена та же область, но без разрушаемого элемента, за взаимодействие с которым отвечают узловые силы равные по модулю и противоположные по направлению узловым силам, обеспечивающим равновесие исключенного конечного элемента, показанного на рис. 1 с).

Разрушение элемента будем трактовать как процесс образования новых, свободных от узловых сил, материальных поверхностей. В этом случае, следуя работам [18, 19], необходимо при неизменной внешней нагрузке разгрузить узлы от

сил, связывающих разрушаемый конечный элемент с основным телом. Данная схема показана на рис. 2.

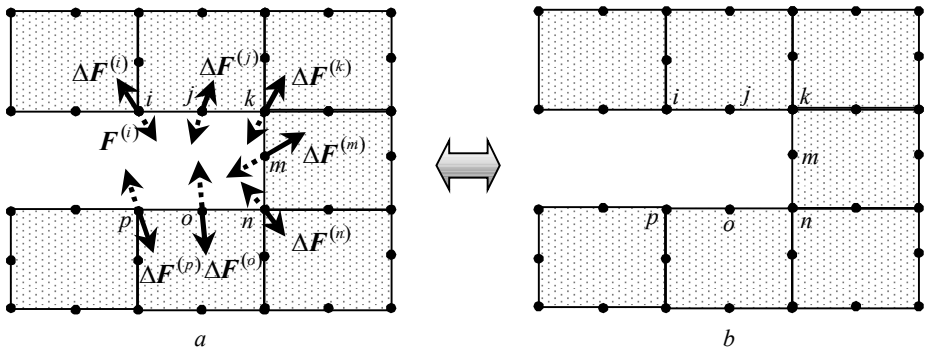

Рис. 2. Разгрузка образуемых поверхностей
Fig. 2. Unloading of the formed surfaces

На рис. 2, *a* значения $\Delta\mathbf{F}^{(e)}, e = i, j, k, m, n, o, p$ определяют приращения новой внешней узловой нагрузки. Соответствующие приращения определяются условием $\Delta\mathbf{F}^{(e)} + \mathbf{F}^{(e)} = 0$. Приращение внешней нагрузки, действующей при задании $\Delta\mathbf{F}^{(e)}$, полагается нулевым. Завершение этапа разгрузки показано на рис. 2, *b*. При этом узлы i, j, k, m, n, o, p станут свободными от узловых сил, действовавших на них со стороны разрушенного элемента.

Таким образом, процесс удаления элемента в рамках предлагаемого подхода будет разбит на несколько этапов или шагов.

На первом шаге решается задача деформирования до достижения внешней нагрузкой критического значения. В результате ее решения выделяется элемент, переходящий в стадию разрушения. На данном этапе определяются узловые силы взаимодействия разрушаемого элемента со смежными ему элементами.

На втором шаге путем разгрузки узлов разрушаемого элемента, отвечающих за его взаимодействие со смежными элементами, формируются новые материальные поверхности. Образование новых материальных поверхностей и определение изменения НДС в окружающем разрушенный элемент теле происходит при нулевом приращении внешней нагрузки. Основной проблемой первого этапа является нахождение узловых сил взаимодействия разрушаемого элемента и, следовательно, формирование граничных условий второго этапа. В этом случае конечно-элементное решение приводит к нулевому значение узловой силы для каждого внутреннего узла. Для решение данной задачи в работе [18] был предложен метод повторного нагружения. Дискретное решение первого этапа содержит вектор перемещений $\mathbf{u}^{(e)}$. Для определения узловых сил $\mathbf{F}^{(e)}$ заменим действие разрушаемого элемента заданием процесса узловых перемещений элемента, при повторении закона внешнего воздействия на тело согласно рис. 3.

На рис. 3, *a* показан элемент в состоянии предразрушения с найденным полем узловых перемещений $\mathbf{u}^{(e)}$. На рис. 3, *b* показано повторное нагружение тела без разрушаемого элемента с заданным полем узловых перемещений.

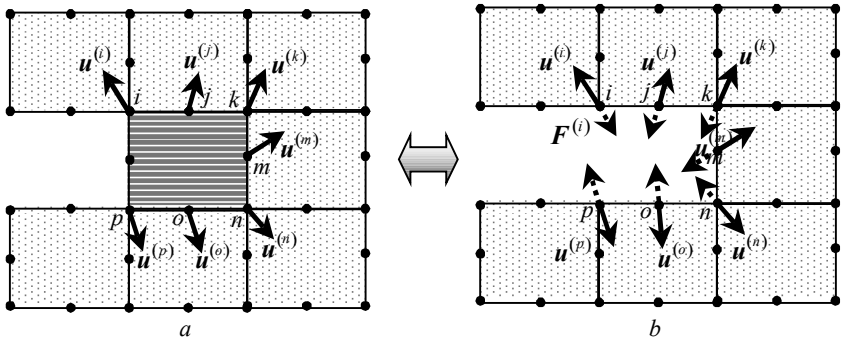

Рис. 3. Схема повторного нагружения
Fig. 3. Reload pattern

В результате решения задачи повторного нагружения в узлах i, j, k, m, n, o, p будут найдены узловые силы $\mathbf{F}^{(e)}$ взаимодействия с элементом, показанным на рис. 1, *c* как реакции в рассматриваемых узлах.

Отметим, что процедуру повторного нагружения можно проводить и с разрушаемым элементом, предварительно умножив его локальную матрицу жёсткости на число близкое к нулю. Данный процесс реализуется в программном комплексе Ansys Workbench функцией *ekill* (kill element) и не требует перестройки сетки конечных элементов для рассматриваемого тела.

На втором шаге при нулевом приращении внешней нагрузки и исключенном из рассмотрения разрушаемом элементе (функцией *ekill* или перестройкой области конечных элементов) в узлах $e = i, j, k, m, n, o, p$ дается приращение узловых сил $\Delta\mathbf{F}^{(e)} = -\mathbf{F}^{(e)}$, что будет соответствовать образованию новых поверхностей и разрушению элемента.

Таким образом, алгоритм решения при данном подходе будет следующим:

1. Решение задачи деформирования с нахождением элемента в состоянии предразрушения, его узловых перемещений и критической нагрузки.

2. Решение задачи повторного нагружения при критической внешней нагрузке с целью определения сил взаимодействия разрушаемого элемента и смежных с ним элементов.

3. Решение задачи разгрузки узлов образуемых новых поверхностей.

Отметим, что в программном комплексе Ansys Workbench можно определить узловые силы взаимодействия при расчете в модуле Static Structural с помощью функции *fsum* встроенного языка APDL. В конкретной задаче функция *fsum* применялась для каждого узла удаляемого элемента. Входными данными для этой функции являются уникальный номер узла и номер шага расчета, на котором необходимо вычислить компоненты узловых сил реакции.

Таким образом, этап 2 по решению задачи повторного нагружения приведенного выше алгоритма для нахождения узловых сил взаимодействия $\mathbf{F}^{(e)}$ разрушаемого элемента и его смежных элементов можно не проводить. Данный шаг будет заменен исключением разрушаемого элемента с помощью функции *ekill*, с приложением узловых нагрузок $\mathbf{F}^{(e)}$. В этом случае напряженно-деформированное состояние тела с удаленным элементом будет эквивалентно состоянию завершения этапа 1.

Решение задачи

В качестве примера реализации предложенного алгоритма рассмотрим задачу о растяжении пластины с боковым физическим разрезом толщиной δ_0, симметричной внешней распределённой нагрузкой с постоянной интенсивностью согласно схеме рис. 4. Левая и правая боковые поверхности жестко закреплены от горизонтальных перемещений и свободны от вертикальных нагрузок.

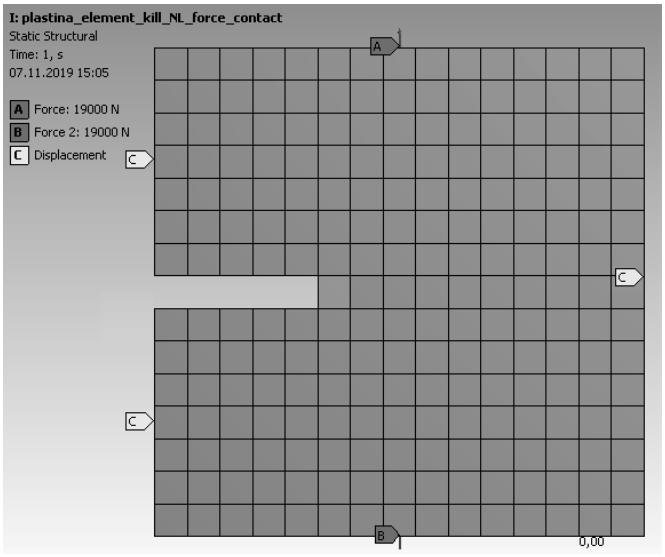

Рис. 4. Схема нагружения
Fig. 4. Loading pattern

Материал пластины брался близким к стали со следующими материальными характеристиками: коэффициент Пуассона $\nu = 0.31$, модуль упругости $E = 1.93 \cdot 10^5$ МПа, предел текучести $T_p = 210$ МПа, упрочнение принималось линейным. Толщину разреза выбираем равной $\delta_0 = 0.01$ м. Рассматриваем плоское деформированное состояние. Материал на продолжении физического разреза был разбит на квадратные в плане элементы.

Экспериментально показано, что при нагружении трещиноподобного дефекта нормальным отрывом процесс разрушения (подрастание трещины) инициируется в направлении трещины. Поэтому будем моделировать процесс разрушения для первого конечного элемента, расположенного на продолжении физического разреза. При этом критерий разрушения не рассматривается. Процесс разрушения рассмотрим для упругой постановки и в случае упругопластических свойств материала, когда в области окончания физического разреза реализуется область развитых пластических деформаций. Результаты расчета задач, с предлагаемой моделью процесса разрушения элемента, будем сравнивать с расчетом задачи для идентичной внешней нагрузки без соответствующего элемента.

На рис. 5 показаны результаты расчета интенсивности напряжений (по Мизесу) без учета пластических свойств материала для внешней нагрузки $F = 19000$ Н, распределенной по поверхности. На рис. 5, *a* показано распределение интенсивности напряжений при завершении процесса разрушения элемента, а на рис. 5, *b* – поле

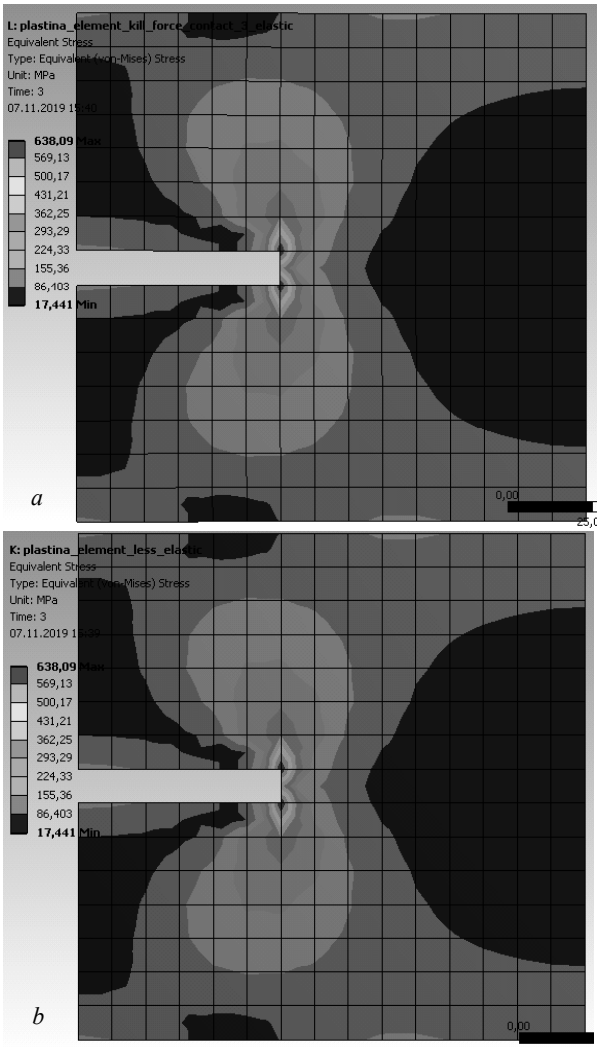

Рис. 5. Сравнение упругих решений
Fig. 5. Comparison of elastic solutions

интенсивности напряжений пластины без разрушаемого элемента. Как видно из расчетов, смоделированный процесс разрушения элемента дает идентичный результат нагружению пластины без элемента. При линейно упругом решении (nlgeom off) имеют место незначительные расхождения расчетов (менее 0.1%).

На рис. 6 показан аналогичный расчет с учетом упругопластических свойств материала. Выделены области, где имеют место необратимые деформации и показана соответствующая интенсивность пластических деформаций. На рис. 6, *a* приведен расчет с учетом процесса разрушения элемента, а на рис. 6, *b* рассматривалось активное нагружение пластины без удаляемого элемента. В этом случае видны существенные различия в размерах области пластических деформаций (в том числе и остаточных деформаций после локальной разгрузки образуемых поверхностей) и несущественные в численных значениях их интенсивности.

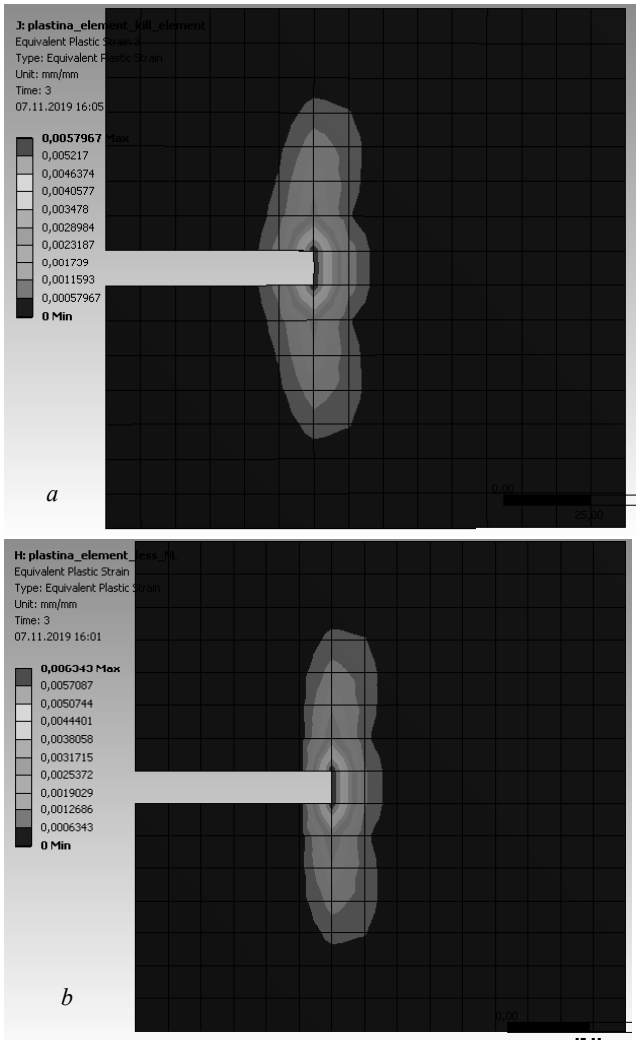

Рис. 6. Сравнение упругопластических решений
Fig. 6. Comparison of elastoplastic solutions

На рис. 7 и 8 показана эволюция интенсивности напряжений в процессе локальной разгрузки конечного элемента. На рис. 7 отображена интенсивность напряжений в окрестности удаляемого элемента на момент его замены силами реакций в состоянии предразрушения.

Из сравнения рис. 7 и 8 видим, что в локальных областях зоны предразрушения интенсивность падает, что приводит к их разгрузке. В случае упругопластического деформирования данный процесс разрушения элемента приводит к появлению необратимых деформаций в разгруженных областях, которые могут быть найдены в ходе решения задачи. В частности, из сравнения рис. 6, *a* и *b*.

На рис. 8 интенсивность напряжений построена при простой разгрузке соответствующих реакций.

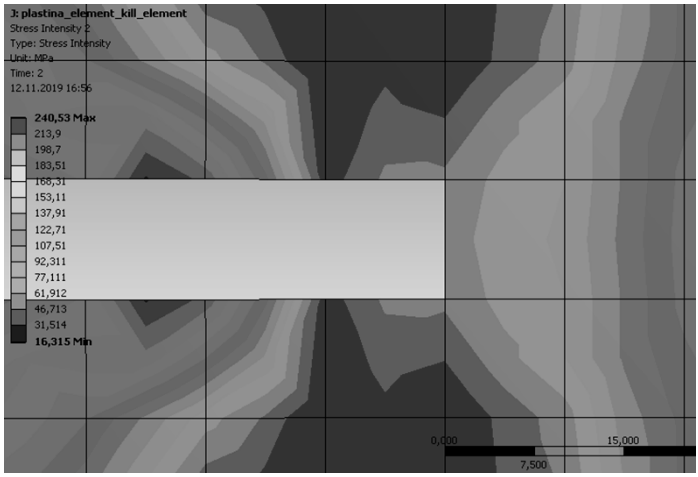

Рис. 7. Интенсивность напряжений в момент предразрушения элемента
Fig. 7. Stress intensity at a time instant of pre-fracture of the element

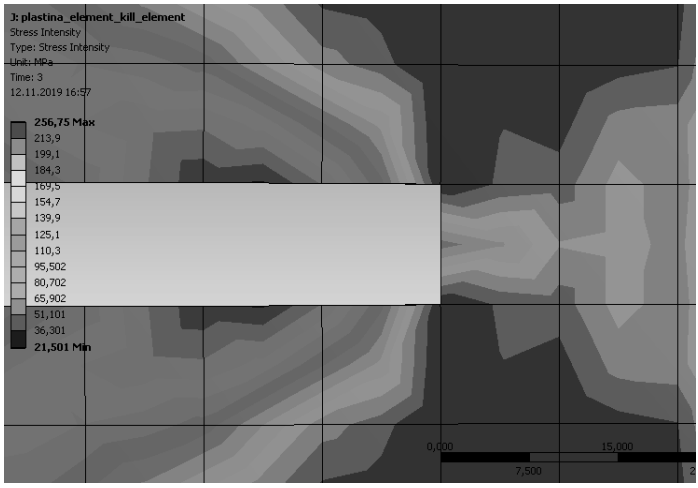

Рис. 8. Интенсивность напряжений в момент снятия локальной нагрузки от разрушаемого элемента
Fig. 8. Stress intensity at a time instant of local unloading of the destructible element

Заключение

Предложено описание процесса локальной разгрузки конечного элемента. В рамках программного комплекса Ansys Workbench данная методика была реализована. Проведенные вычисления показали, что при упругопластическом деформировании материала результаты расчетов, полученные с помощью процедуры kill element и предложенного подхода, имеют различия. Для упругого деформирования применение процедуры kill element и обсуждаемого метода простой разгрузки приводит к одному результату. Это объясняется тем, что в линейно упругих телах различным законам изменения внешних воздействий при переходах

из начального состояния в одно и то же конечное состояние соответствуют одинаковые распределения напряжений. В случае упругопластических тел напряженно-деформированные состояния могут различаться, так как зависят от законов изменения внешних воздействий. В нашем случае переход из начального состояния с удаленным элементом не эквивалентен действительному нагружению сплошного тела и последующей локальной разгрузке поверхности контакта с удаляемым элементом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зенкевич О.*, *Морган К.* Конечные элементы и аппроксимации. М.: Мир, 1986. 318 с.
2. *Кузьмичев С.В.*, *Кукушкин С.А.*, *Осипов А.В.* Упругое взаимодействие точечных дефектов в кристаллах с кубической симметрией // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 4. С. 88–97.
3. *Степанова Л.В.* Компьютерное моделирование процессов накопления повреждений в твердых телах с трещинами с помощью пользовательской процедуры UMAT вычислительного комплекса Simulia Abaqus // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2018. № 3. С. 71–86. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.3.08.
4. *Афанасьев А.А.*, *Горностаев К.К.*, *Ковалёв А.В.*, *Чеботарев А.С.* О механическом поведении упрочняющегося упругопластического диска под действием источника тепла // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 50. С. 57–66 DOI: 10.17223/19988621/50/5.
5. ANSYS. User's Guide, Release 11.0. Pennsylvania, USA: ANSYS Inc., 2006.
6. *Dassault* Systemes Simulia Corp., Abaqus 6.11, User's Manual; 2011.
7. *Park M.*, *Frey K.*, *Simon L.* Modeling and analysis of composite bonded joints // American Journal of Mechanical and Industrial Engineering. 2017. V. 2. No. 1. P. 1–7. DOI: 10.11648/j.ajmie.20170201.11.
8. *Jain S.*, *Na S.R.*, *Liechti K.M.*, *Bonnecaze R.T.* A cohesive zone model and scaling analysis for mixed-mode interfacial fracture // International Journal of Solids and Structures. 2017. V. 129. P. 167–176. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2017.09.002.
9. *de Morais A.B.* Cohesive zone beam modelling of mixed-mode I–II delamination // Composites Part A: Applied Science and Manufacturing. 2014. V. 64. P. 124–131. DOI: 10.1016/j.compositesa.2014.05.004.
10. *Lee M.J.*, *Cho T.M.*, *Kim W.S.*, *Lee B.C.*, *Lee J.J.* Determination of cohesive parameters for a mixed-mode cohesive zone model // International Journal of Adhesion and Adhesives. 2010. V. 30. No. 5. P. 322–328. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2009.10.005.
11. *de Morais A.B.* Simplified cohesive zone analysis of mixed-mode I–II delamination in composite beams // Polymer Composites. 2013. V. 34. No. 11. P. 1901–1911. DOI: 10.1002/pc.22597.
12. *Panettieri E.*, *Fanteria D.*, *Danzi F.* Delaminations growth in compression after impact test simulations: Influence of cohesive elements parameters on numerical results // Composite Structures. 2016. V. 137. P. 140–147. DOI: 10.1016/j.compstruct.2015.11.018.
13. *Рыжак Е.И.* К вопросу об осуществимости однородного закритического деформирования при испытаниях в жесткой трехосной машине // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1991. № 1. С. 111–127.
14. *Стружанов В.В.* Об одном подходе к изучению механизма зарождения трещин // Прикладная механика и техническая физика. 1986. № 6. С. 118–123.
15. *Васин Р.А.*, *Еникеев Ф.У.*, *Мазурский М.И.* О материалах с падающей диаграммой // Известия Академии наук. Механика твердого тела. 1995. № 2. С. 181–182.
16. *Стружанов В.В.* Определение диаграммы деформирования материала с падающей ветвью по диаграмме кручения цилиндрического образца // Сибирский журнал индустриальной математики. 2012. Т. 15. № 1. С. 138–144.
17. *Глаголев В.В.*, *Маркин А.А.* Об одном способе определения связей между критическими значениями характеристик процесса установившегося разделения материала // Проблемы прочности. 2006. № 2. С. 47–58.

18. *Глаголев В.В.*, *Маркин А.А.*, *Фурсаев А.А.* Моделирование образования новых материальных поверхностей в процессах когезионного разрушения композита с адгезионным слоем // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2017. № 2. С. 45–59. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.2.03.
19. *Glagolev V.V.*, *Markin A.A.* Model of the discrete destruction process of a solid body // Journal of Physics, Conference Series. 2018. V. 973. 012003. DOI: 10.1088/1742-6596/973/1/012003.

Статья поступила 24.01.2020

Burtsev A.Yu., Glagolev V.V., Markin A.A. (2021) INVESTIGATION OF LOCAL UNLOADING OF AN ELEMENT IN A FINITE ELEMENT CONTINUUM. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. pp. 86–96

DOI 10.17223/19988621/69/7

Keywords: finite element method, finite element removal, Ansys Workbench.

The subcritical elastoplastic deformation and the fracturing of an element of a finite element continuum in the Ansys Workbench complex are considered. When solving the elastoplastic problem of the subcritical deformation, a finite element with the failure criterion reached is selected. In a pre-fracture state of the element, the nodal forces provided by the interaction with an adjacent element are determined using the Ansys Workbench internal procedure. The following step is the consideration of the varying stress-strain state of the body during the element destruction. The elastoplastic problem is solved in the conditions of simple unloading of the body surface adjacent to the destructible element while maintaining the external load corresponding to the destruction initiation. When implementing the local unloading, a possibility of the new plastic region formation and the partial unloading are studied. As a result, the stress-strain state of the body at the beginning of local unloading is not the same as that at the end of the process. The proposed approach differs from the "element killing" procedure when the element stiffness after the failure criterion reached is assumed to be close to zero. The paper provides solutions to the problems of deformation of elastic and elastoplastic plates with a side cut taking into account their element destruction.

Financial support. This work is supported by the Russian Foundation for Basic Research and the Government of the Tula region, project No. 19–41–710001 p_a.

Andrey Yu. BURTSEV (Candidate of Physics and Mathematics, SC «VPA «TOCHMASH», Vladimir, Russian Federation). E-mail: aburtsev.tula@gmail.com

Vadim V. GLAGOLEV (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: vadim@tsu.tula.ru

Aleksey A. MARKIN (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: markin-nikram@yandex.ru

REFERENCES

1. Zenkevich O., Morgan K. (1986) *Konechnye elementy i approksimatsii* [Finite elements and approximations]. Moscow: Mir.
2. Kuz'michev S.V., Kukushkin S.A., Osipov A.V. (2013) Elastic interaction of point defects in crystals with cubic symmetry. *Mechanics of Solids.* 48(4). pp. 431–438. DOI: 10.3103/S0025654413040110.
3. Stepanova L.V. (2018) Komp'yuternoe modelirovanie protsessov nakopleniya povrezhdeniy v tverdykh telakh s treshchinami s pomoshch'yu pol'zovatel'skoy protsedury UMAT vychislitel'nogo kompleksa Simulia Abaqus [Computational simulation of the damage accumulation processes in cracked solids by the user procedure UMAT of Simulia Abaqus]. *Vestnik Perm-*

skogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin. 3. pp. 71–86. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.3.08.

4. Afanas'ev A.A., Gornostaev K.K., Kovalev A.V., Chebotarev A.S. (2017) O mekhanicheskom povedenii uprochnyayushchegosya uprugoplasticheskogo diska pod deystviem istochnika tepla [On mechanical behavior of the hardening elastoplastic disk affected by a heat source]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 50. pp. 57–66. DOI: 10.17223/19988621/50/5.
5. ANSYS. *User's Guide*, *Release 11.0*. Pennsylvania, USA: ANSYS Inc. 2006.
6. Dassault Systemes Simulia Corp., Abaqus 6.11. *User's Manual*. 2011.
7. Park M., Frey K., Simon L. (2017) Modeling and analysis of composite bonded joints. *American Journal of Mechanical and Industrial Engineering*. 2(1). pp. 1–7. DOI: 10.11648/j.ajmie.20170201.11.
8. Jain S., Na S.R., Liechti K.M., Bonnecaze R.T. (2017) A cohesive zone model and scaling analysis for mixed-mode interfacial fracture. *International Journal of Solids and Structures*. 129. pp. 167–176. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2017.09.002.
9. de Morais A.B. (2014) Cohesive zone beam modelling of mixed-mode I–II delamination. *Composites. Part A: Applied Science and Manufacturing*. 64. pp. 124–131. DOI: 10.1016/j.compositesa.2014.05.004.
10. Lee M.J., Cho T.M., Kim W.S., Lee B.C., Lee J.J. (2010) Determination of cohesive parameters for a mixed-mode cohesive zone model. *International Journal of Adhesion and Adhesives*. 30(5). pp. 322–328. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2009.10.005.
11. de Morais A.B. (2013) Simplified cohesive zone analysis of mixed-mode I–II delamination in composite beams. *Polymer Composites*. 34(11). pp. 1901–1911. DOI: 10.1002/pc.22597.
12. Panettieri E., Fanteria D., Danzi F. (2016) Delaminations growth in compression after impact test simulations: Influence of cohesive elements parameters on numerical results. *Composite Structures*. 137. pp. 140–147. DOI: 10.1016/j.compstruct.2015.11.018.
13. Ryzhak E.I. (1991) K voprosu ob osushchestvimosti odnorodnogo zakriticheskogo deformirovaniya pri ispytaniyakh v zhestkoy trekhosnoy mashine [On the feasibility of homogeneous supercritical deformation during tests in a rigid triaxial machine]. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela – Mechanics of Solids*. 1. pp. 111–127.
14. Struzhanov V.V. (1986) Crack generation and propagation mechanism. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 27(6). pp. 894–899. DOI: 10.1007/BF00918835.
15. Vasin R.A., Enikeev F.U., Mazurskiy M.I. (1995) O materialakh s padayushchey diagrammoy [About decrement-curve materials]. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela – Mechanics of Solids*. 2. pp. 181–182.
16. Struzhanov V.V. (2012) Opredelenie diagrammy deformirovaniya materiala s padayushchey vetv'yu po diagramme krucheniya tsilindricheskogo obraztsa [The determination of the deformation diagram of a material with a falling branch using the torsion diagram of a cylindrical sample]. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki – Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 15(1). pp.138–144.
17. Glagolev V.V., Markin A.A. (2006) On a method for the establishment of relations between the critical values of the characteristics of steady-state material separation process. *Strength of Materials*. 38(2). pp. 141–149. DOI: 10.1007/s11223-006-0026-5.
18. Glagolev V.V., Markin A.A., Fursaev A.A. (2017) Modelirovanie obrazovaniya novykh material'nykh poverkhnostey v protsessakh kogezionnogo razrusheniya kompozita s adgezionnym sloem [Modelling the generation of new material surfaces in a composite with an adhesion layer under cohesive destruction]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*. 2. pp. 45–59. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.2.03.
19. Glagolev V.V., Markin A.A. (2018) Model of the discrete destruction process of a solid body. *Journal of Physics. Conference Series*. 973(012003). pp. 1–10. DOI :10.1088/1742-6596/973/1/012003.

Received: January 24, 2020